1.2.2 $\int \tan^{m} x \sec^{n} x\,dx$ หรือ $\int \cot^{m} x \csc^{n} x\,dx$ (หน้า 33)

	กรณี	วิธีการแทนค่า	เอกลักษณ์ที่ใช้
I	n เป็นจำนวนเต็มบวกคู่	ให้ $u=\tan x \Rightarrow du=\sec^{2} x\,dx$ หรือ [ดึง $\sec^2 x/\csc^2 x$ $u=\cot x \Rightarrow du=-\csc^{2} x\,dx$	$\sec^{2} x=1+\tan^{2} x$ $\csc^{2} x=1+\cot^{2} x$
II	m เป็นจำนวนเต็มบวกคี่	ให้ $u=\sec x \Rightarrow du=\sec x \tan x\,dx$ หรือ $u=\csc x \Rightarrow du=-\csc x \cot x\,dx$	$\tan^{2} x=\sec^{2} x-1$ $\cot^{2} x=\csc^{2} x-1$
III	m เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกคี่	ใช้วิธีการหาปริพันธ์ทีละส่วน	
IV	$n=0,\ m\in\mathbb{Z}^{+}$	1. ใช้สูตรลดทอน $\int \tan^{m} x\,dx=\dfrac{\tan^{m-1} x}{m-1}-\int \tan^{m-2} x\,dx$ $\int \cot^{m} x\,dx=-\dfrac{\cot^{m-1} x}{m-1}-\int \cot^{m-2} x\,dx$ 2. แทนค่าด้วย $u=\tan x$ $\dfrac{1}{\cos^{2} x}=1+u^{2};\quad \dfrac{dx}{\cos^{2} x}=du$ 3. เปลี่ยนปริพัทธ์เป็น $\sin^{p} x \cos^{p} x$	$\tan^{2} x=\sec^{2} x-1$

ก. $\int \tan^m x \sec^n x\,dx$ **หรือ** $\int \cot^m x \csc^n x\,dx$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกคู่

ก.1) ให้ $u = \tan x \Rightarrow du = \sec^2 x\,dx$

และใช้เอกลักษณ์ $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ ได้

$$\int \tan^m x \sec^n x\,dx = \int \tan^m x \sec^{n-2} x \sec^2 x\,dx$$

$$= \int \tan^m x (1+\tan^2 x)^{\frac{n-2}{2}}\, d(\tan x)$$

$$= \int u^m (1+u^2)^{\frac{n-2}{2}}\, du$$

ก.2) ให้ $u = \cot x \Rightarrow du = -\csc^2 x\,dx$

และใช้เอกลักษณ์ $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$ ได้

$$\int \cot^m x \csc^n x\,dx = \int \cot^m x \csc^{n-2} x \csc^2 x\,dx$$

$$= \int \cot^m x (1+\cot^2 x)^{\frac{n-2}{2}}\, [-d(\cot x)]$$

$$= -\int u^m (1+u^2)^{\frac{n-2}{2}}\, du$$

สรุป ลดทอนกำลังด้วยสูตรต่อไปนี้

$$\begin{cases} \sec^2 x = 1 + \tan^2 x & \text{และ} \quad d(\tan x) = \sec^2 x\,dx \\ \csc^2 x = 1 + \cot^2 x & \text{และ} \quad d(\cot x) = (-\csc^2 x)\,dx \end{cases}$$

ตัวอย่าง จงหา $\int \tan^6 x \sec^4 x \, dx$

วิธีทำ

ขั้นที่ 1: จัดรูป

พิจารณา $\tan^6 x \sec^4 x = \tan^6 x \sec^2 x \sec^2 x$

$= \tan^6 x (1 + \tan^2 x) \sec^2 x$

ขั้นที่ 2: กำหนด u และหา dx

กำหนดให้ $u = \tan x$

จะได้ $\frac{du}{dx} = \sec^2 x \Longrightarrow \boxed{dx = \frac{du}{\sec^2 x}}$

ขั้นที่ 3: อินทิเกรต

พิจารณา $\int \tan^6 x \sec^4 x \, dx = \int \tan^6 x (1 + \tan^2 x) \sec^2 x \, dx$

$= \int u^6 (1 + u^2) \cancel{\sec^2 x} \frac{du}{\cancel{\sec^2 x}}$

$= \int u^6 (1 + u^2) \, du$

$= \int [u^6 + u^8] \, du$

$= \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C$

$= \frac{\tan^7 x}{7} + \frac{\tan^9 x}{9} + C$

ตัวอย่าง จงหา $\int \sec^4 x\,dx$

วิธีทำ

พิจารณา $\sec^4 x = \sec^2 x \sec^2 x$

$$= (1+\tan^2 x)\sec^2 x$$

กำหนดให้ $u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow \boxed{dx = \frac{du}{\sec^2 x}}$

ดังนั้น $\int \sec^4 x\,dx = \int (1+\tan^2 x)\sec^2 x\,dx$

$$= \int (1+u^2)\cancel{\sec^2 x}\,\frac{du}{\cancel{\sec^2 x}}$$

$$= \int (1+u^2)\,du$$

$$= u + \frac{u^3}{3} + C$$

$$= \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C$$

ตัวอย่างที่ ~~1.2.16 (หน้า 25)~~ จงหา $\int \csc^{8}(3x)\cot^{\frac{3}{2}}(3x)\,dx$

วิธีทำ

ขั้นที่ 1: จัดรูป

พิจารณา $\csc^{8}3x\cot^{\frac{3}{2}}3x = \csc^{6}3x\cot^{\frac{3}{2}}3x\csc^{2}3x$

$$= \left(\underline{\csc^{2}3x}\right)^{3}\cot^{\frac{3}{2}}3x\csc^{2}3x$$

$$= \left(1+\cot^{2}3x\right)^{3}\cot^{\frac{3}{2}}3x\csc^{2}3x$$

ขั้นที่ 2: กำหนด u และหา dx

กำหนดให้ $u = \cot 3x \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = -3\csc^{2}3x$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{(-3)\csc^{2}3x}$$

ขั้นที่ 3: อินทิเกรต

พิจารณา $\int \csc^{8}3x\cot^{\frac{3}{2}}3x\,dx = \int (1+\cot^{2}3x)^{3}\cot^{\frac{3}{2}}3x\csc^{2}3x\,dx$

$$= \int (1+u^{2})^{3}u^{\frac{3}{2}}\cancel{\csc^{2}3x}\,\frac{du}{(-3)\cancel{\csc^{2}3x}}$$

$$= -\frac{1}{3}\int (1+u^{2})^{3}u^{\frac{3}{2}}\,du$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\right)\int \left(1+3u^{2}+3u^{4}+u^{6}\right)u^{\frac{3}{2}}\,du$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\right)\int \left[u^{\frac{3}{2}} + 3u^{\frac{7}{2}} + 3u^{\frac{11}{2}} + u^{\frac{15}{2}} \right] du$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\right)\left[\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{3u^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}} + \frac{3u^{\frac{13}{2}}}{\frac{13}{2}} + \frac{u^{\frac{17}{2}}}{\frac{17}{2}} \right] + C$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\right)\left[\frac{2\cot^{\frac{5}{2}} 3x}{5} + \frac{6\cot^{\frac{9}{2}} 3x}{9} + \frac{6\cot^{\frac{13}{2}} 3x}{13} + \frac{2\cot^{\frac{17}{2}} 3x}{17} \right]$$

$$+ C$$

$\blacksquare$

ข. $\int \tan^m x \sec^n x\,dx$ **หรือ** $\int \cot^m x \csc^n x\,dx$

เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวกคี่

สามารถทำได้โดยเปลี่ยนให้อยู่ในรูป $\int \sin^p x \cos^q x\,dx$ แล้วดำเนินการตามหัวข้อ 1.2.1

ข.1) แยกพจน์ $\sec x \tan x$ ออกแล้วแทนค่า

$u = \sec x \Rightarrow du = \sec x \tan x\,dx$ ได้

และใช้เอกลักษณ์ $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$$\begin{aligned}\int \tan^m x \sec^n x\,dx &= \int \tan^{m-1} x \tan x \sec^{n-1} x \sec x\,dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1)^{\frac{m-1}{2}} \sec^{n-1} x\,d(\sec x) \\ &= \int (u^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} u^{n-1} du\end{aligned}$$

ข.2) แยกพจน์ $\cot x \csc x$ ออกแล้วแทนค่า

$u = \csc x \Rightarrow du = -\csc x \cot x\,dx$ ได้

และใช้เอกลักษณ์ $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$

$$\begin{aligned}\int \cot^m x \csc^n x\,dx &= \int \cot^{m-1} x \cot x \csc^{n-1} x \csc x\,dx \\ &= \int (\csc^2 x - 1)^{\frac{m-1}{2}} \csc^{n-1} x[-d(\csc x)] \\ &= -\int (u^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} u^{n-1} du\end{aligned}$$

สรุป ลดทอนกำลังคู่ด้วยสูตรต่อไปนี้

$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ และ $d(\sec x) = \sec x \tan x \, dx$

$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ และ $d(\csc x) = (-\csc x \cot x) dx$

ตัวอย่าง จงหา $\int \tan^3 x \sec^5 x \, dx$

วิธีทำ

วิธีที่ 1: จัดรูป

$\int \tan^2 x \cdot \sec^4 x \cdot \tan x \cdot \sec x \, dx$

$u = \sec x$

$\frac{du}{dx} = \sec x \cdot \tan x$

$= \int (\sec^2 x - 1) \sec^4 x \cdot \cancel{\tan x} \cdot \cancel{\sec x} \cdot \frac{du}{\cancel{\sec x} \cdot \cancel{\tan x}}$

$= \int (u^2 - 1) u^4 \, du = \int (u^6 - u^4) du$

$= \frac{u^7}{7} - \frac{u^5}{5} + C$

$= \frac{1}{7} \sec^7 x - \frac{1}{5} \sec^5 x + C$

#

ตัวอย่างที่ ~~1.2.19~~ ~~(หน้า 28)~~ จงหา $\int \cot^{5}(5x)\csc^{\cancel{-3}\,4}(5x)\,dx$

วิธีทำ

(ฝาก!)

ค. $\int \tan^m x \sec^n x\,dx$ **หรือ** $\int \cot^m x \csc^n x\,dx$

เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกคี่

สามารถหาค่าได้โดยใช้เทคนิคการหาปริพันธ์ทีละส่วน ซึ่งจะศึกษาในหัวข้อต่อไป

ง. $\int \tan^m x \sec^n x\,dx$ **หรือ** $\int \cot^m x \csc^n x\,dx$

เมื่อ $n = 0,\ m \in \mathbb{Z}^+$

พิจารณา $\int \tan^m x\,dx$ **หรือ** $\int \cot^m x\,dx$

<u>วิธีที่ 1</u> <u>โดยการสร้างสูตรลดทอน (Reduction formula)</u>

$$\begin{aligned}
\int \tan^m x\,dx &= \int \tan^{m-2} x \underline{\tan^2} x\,dx \\
&= \int \tan^{m-2} x \underline{(\sec^2 x - 1)}dx \\
&= \underline{\int \tan^{m-2} x \sec^2 x\,dx} - \int \tan^{m-2} x\,dx \\
&= \int \tan^{m-2} x\,d(\tan x) - \int \tan^{m-2} x\,dx \\
&= \frac{\tan^{m-1} x}{m-1} - \int \tan^{m-2} x\,dx
\end{aligned}$$

$$\int \tan^m x\,dx = \frac{\tan^{m-1} x}{m-1} - \int \tan^{m-2} x\,dx$$

และ

$$\begin{aligned}\int \cot^{m} x\,dx &= \int \cot^{m-2} x \cot^{2} x\,dx \\ &= \int \cot^{m-2} x(\csc^{2} x - 1)\,dx \\ &= \int \cot^{m-2} x \csc^{2} x\,dx - \int \cot^{m-2} x\,dx \\ &= \int \cot^{m-2} x[-d(\cot x)] - \int \cot^{m-2} x\,dx \\ &= -\frac{\cot^{m-1} x}{m-1} - \int \cot^{m-2} x\,dx\end{aligned}$$

$$\int \cot^{m} x\,dx = -\frac{\cot^{m-1} x}{m-1} - \int \cot^{m-2} x\,dx$$

วิธีที่ 2 หาค่า $\int \tan^{m} x\,dx$ โดยการคูณด้วย $\frac{\sec^{2} x}{\sec^{2} x}$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\int \tan^{m} x\,dx &= \int \tan^{m} x \cdot \frac{\sec^{2} x}{\sec^{2} x}\,dx \\ &= \int \frac{\tan^{m} x}{1+\tan^{2} x} \cdot \sec^{2} x\,dx \\ &= \int \frac{u^{m}}{1+u^{2}}\,du \quad \text{เมื่อ} \quad u = \tan x\end{aligned}$$

จากนั้นทำการหารยาว $\frac{u^{m}}{1+u^{2}}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่ายต่อการหาค่าต่อไป

และหาค่า $\int \cot^{m} x\,dx$ โดยการคูณด้วย $\frac{\csc^{2} x}{\csc^{2} x}$ ได้ดังนี้

$$\int \cot^m x\,dx = \int \cot^m x \cdot \frac{\csc^2 x}{\csc^2 x}\,dx$$

$$= \int \frac{\cot^m x}{1+\cot^2 x} \cdot \csc^2 x\,dx$$

$$= -\int \frac{u^m}{1+u^2}\,du \qquad \text{เมื่อ} \quad u = \cot x$$

จากนั้นทำการหารยาว $\frac{u^m}{1+u^2}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่ายต่อการหาค่าต่อไป

วิธีที่ 3 เปลี่ยน

$$\int \tan^m x dx = \int \frac{\sin^m x}{\cos^m x}\,dx = \int \sin^m x \cos^{-m} x\,dx$$

แล้วหาค่าตามกรณีที่ 1

ตัวอย่าง (สูตรลดทอน) จงหา $\int \tan^5 x\,dx$

วิธีทำ

สูตรลดทอน! $\displaystyle \int \tan^m x\,dx = \frac{\tan^{m-1} x}{m-1} - \int \tan^{m-2} x\,dx$

พิจารณา $\displaystyle \int \tan^5 x\,dx = \frac{\tan^4 x}{4} - \int \tan^3 x\,dx$

$$= \frac{\tan^4 x}{4} - \left[\frac{\tan^2 x}{2} - \int \tan x\,dx\right]$$

$$= \frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\sec x| + C$$

ตัวอย่าง (สูตรลดทอน) จงหา $\int \cot^6(4x)\,dx$

วิธีทำ

$$\int \cot^m(ax)\,dx = \int \cot^{m-2}(ax)\cot^2(ax)\,dx$$

$$= \int \cot^{m-2}(ax)\left(\csc^2(ax)-1\right)dx$$

$$= \int \cot^{m-2}(ax)\csc^2(ax)\,dx - \int \cot^{m-2}(ax)\,dx$$

$$= \int \cot^{m-2}(ax)\cancel{\csc^2(ax)}\frac{d[\cot(ax)]}{(-a)\cancel{\csc^2(ax)}} - \int \cot^{m-2}(ax)\,dx$$

$$= \left(\frac{-1}{a}\right)\int \cot^{m-2}(ax)\,d[\cot(ax)] - \int \cot^{m-2}(ax)\,dx$$

$$= \left(-\frac{1}{a}\right)\frac{\cot^{m-1}(ax)}{m-1} - \int \cot^{m-2}(ax)\,dx$$

$$\int \cot^m(ax)\,dx = -\frac{\cot^{m-1}(ax)}{a(m-1)} - \int \cot^{m-2}(ax)\,dx$$

ดังนั้น $\int \cot^{\overset{m}{6}}(\underset{a}{4}x) = -\frac{\cot^5(4x)}{4\cdot 5} - \int \cot^4(4x)\,dx$

$$= -\frac{\cot^5(4x)}{20} - \left[-\frac{\cot^3(4x)}{4\cdot 3} - \int \cot^2(4x)\,dx\right]$$

$$= -\frac{\cot^5(4x)}{20} + \frac{\cot^3(4x)}{12} + \int \cot^2(4x)\,dx$$

$$= -\frac{\cot^5(4x)}{20} + \frac{\cot^3(4x)}{12} \left[-\frac{\cot(4x)}{4} - \int 1\,dx \right]$$

$$= -\frac{\cot^5(4x)}{20} + \frac{\cot^3(4x)}{12} - \frac{\cot(4x)}{4} - x + C$$

1.2.3) $\int \sin(mx)\cos(nx)dx$, $\int \sin(mx)\sin(nx)dx$, และ $\int \cos(mx)\cos(nx)dx$

สามารถหาค่าได้โดยใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติต่อไปนี้

$$\sin(m+n)x = \sin(mx)\cos(nx) + \sin(nx)\cos(mx) \quad (1)$$

$$\sin(m-n)x = \sin(mx)\cos(nx) - \sin(nx)\cos(mx) \quad (2)$$

$$\cos(m+n)x = \cos(mx)\cos(nx) - \sin(mx)\sin(nx) \quad (3)$$

$$\cos(m-n)x = \cos(mx)\cos(nx) + \sin(mx)\sin(nx) \quad (4)$$

$$(1)+(2): \Longrightarrow \sin(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right]$$

$$(4)-(3): \Longrightarrow \sin(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]$$

$$(3)+(4): \Longrightarrow \cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right]$$

เพื่อเปลี่ยนตัวปริพัทธ์ซึ่งอยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติให้อยู่ในรูปผลบวกหรือผลต่างของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ตัวอย่าง จงหา $\int \sin(3x)\cos(2x)dx$

วิธีทำ

สูตร! $\sin(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right]$

ดังนั้น $\int \sin(3x)\cos(2x)dx = \int \frac{1}{2}\left[\sin(3+2)x + \sin(3-2)x\right]dx$

$$= \frac{1}{2}\int\left[\sin 5x + \sin x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 5x}{5} - \cos x\right] + C$$

ฝาก! $\int \sin x \cos 2x \sin 4x\, dx$

ตัวอย่าง จงหา $\int \cos(4x)\cos(7x)dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int \sin(3x)\sin(4x)dx$

วิธีทำ