Universidad Nacional de La Plata – Facultad de Ciencias Exactas
ANÁLISIS MATEMÁTICO II (CiBEx - Física Médica)
2014 – Segundo Semestre

GUÍA Nro. 6: CAMPOS VECTORIALES

1. Definición de campo vectorial

Durante el curso de Análisis Matemático II hemos estudiado distintos tipos de funciones. Trabajamos con funciones vectoriales de una variable, $\vec{r}(t) : \mathbb{R} \to V_n$, y con funciones escalares de varias variables, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; también presentamos, en la guía anterior, funciones vectoriales de dos variables, $\vec{r}(u, v) : \mathbb{R}^2 \to V_3$. Introduciremos ahora un tipo diferente de función llamada campo vectorial, $\vec{F} : \mathbb{R}^n \to V_n$, esto es, una función que a cada punto del espacio (de n dimensiones) le asigna un vector (de n componentes). Estudiaremos, como para los otros tipos de funciones, el dominio y rango de un campo vectorial, representación gráfica, continuidad y límites, sus derivadas (parciales) e integrales (de línea y de superficie).

Nos concentraremos en el estudio de campos vectoriales definidos en un dominio en el plano ($n = 2$) o en el espacio ($n = 3$), esto es, una función que a cada punto del dominio le asigna un vector de V_2 o de V_3, respectivamente. Veamos primero las correspondientes definiciones, algunos ejemplos y la forma de representarlos gráficamente; analizaremos por último la derivación de campos vectoriales.

DEFINICIÓN:
Un *campo vectorial sobre* $D \subset \mathbb{R}^2$ es una función $\vec{F}$ que a cada punto $(x, y) \in D$ le asigna un (único) vector de dos componentes $\vec{F}(x, y) \in V_2$.

Para cada par ordenado (x, y), se tiene un vector bidimensional $\vec{F}(x, y)$; luego podemos escribirlo en términos de sus dos funciones componentes $P(x, y)$ y $Q(x, y)$, que son funciones escalares de dos variables:

$$\vec{F}(x, y) = \breve{\imath}\ P(x, y) + \breve{\jmath}\ Q(x, y)$$

Usaremos también la notación de vector del plano como par ordenado: $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$.

Ejemplo: el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = \breve{\imath}\, \text{sen}\, y + \breve{\jmath}\, e^x$ le asigna al punto $P_0(x_0, y_0)$ del plano, el vector de primera componente $\text{sen}\, y_0$ y segunda componente e^{x_0}; por ejemplo $\vec{F}(0, \pi) = \breve{\imath}\, \text{sen}\, \pi + \breve{\jmath}\, e^0 = \breve{\jmath}$, en el punto $(0, 2\pi)$ el campo también vale $\breve{\jmath}$, mientras que $\vec{F}(1, \pi) = e\ \breve{\jmath}$.

DEFINICIÓN:
Un *campo vectorial sobre* $E \subset \mathbb{R}^3$ es una función $\vec{F}$ que a cada punto $(x, y, z) \in E$ le asigna un (único) vector de tres componentes $\vec{F}(x, y, z) \in V_3$.

En este caso se puede expresar el campo en términos de sus tres funciones componentes $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ y $R(x, y, z)$, que son funciones escalares de tres variables:

$$\vec{F}(x, y, z) = \breve{\imath}\, P(x, y, z) + \breve{\jmath}\, Q(x, y, z) + \breve{k}\, R(x, y, z)$$

Se denota también $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$.

Ejemplo: el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \breve{\imath}\, z \operatorname{sen} y + \breve{\jmath}\, e^{xy} + \breve{k}\, z^2$ le asigna al punto (x_0, y_0, z_0) del espacio, el vector de primera componente $z_0 \operatorname{sen} y_0$, segunda componente $e^{x_0 y_0}$, y tercera componente z_0^2; por ejemplo $\vec{F}(0,\pi,2) = \breve{\imath}\, 2 \operatorname{sen} \pi + \breve{\jmath}\, e^{0\,\pi} + \breve{k}\, 2^2 = \breve{\jmath} + 4\,\breve{k}$, mientras que en el origen el campo vale $\breve{\jmath}$.

DOMINIO:

El dominio de un campo vectorial en el plano es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, y el de un campo vectorial en el espacio es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$. El "dominio natural" del campo está dado por la intersección de los dominios naturales de sus funciones componentes.

Ejemplo: $\vec{F}(x,y) = \breve{\imath}\, \ln(xy) + \breve{\jmath}\, \cos(x+y)$ tiene como dominio natural todos los puntos del primer y tercer cuadrante del plano, excepto los ejes coordenados (justifique).

CONTINUIDAD:

Un campo vectorial es continuo si y sólo si todas sus funciones componentes son continuas.

Ejemplo: $\vec{F}(x,y,z) = \breve{\imath}\, \frac{\ln x + \ln y}{\sqrt{z}} + \breve{\jmath}\, \cos(x+y) + \breve{k}\, \frac{1}{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}$ es continuo en todos los puntos del primer octante del espacio, excepto en los planos coordenados y en el punto $(1,1,1)$ (justifique).

REPRESENTACIÓN GRÁFICA:

Una manera de representar gráficamente un campo vectorial en el plano es mediante un conjunto de flechas donde cada una corresponde al vector $\vec{F}(x,y)$, con origen en el punto (x,y) del plano. Análogamente para un campo vectorial en el espacio.

Veamos ejemplos de campos vectoriales y su representación gráfica:

EJEMPLO 1: Describa al campo $\vec{F}(x,y) = -\,\breve{\imath}\, y + \breve{\jmath}\, x$ en el plano, trazando algunos de los vectores.

Para empezar, digamos que el dominio natural de este campo vectorial es todo $\mathbb{R}^2$. Evaluemos el campo en algunos puntos del plano, por ejemplo $\vec{F}(1,0) = \breve{\jmath}$, $\vec{F}(0,1) = -\,\breve{\imath}$, $\vec{F}(-1,0) = -\,\breve{\jmath}$, $\vec{F}(0,-1) = \breve{\imath}$. Estos son todos vectores de módulo 1, y los puntos donde se aplican están a 1 unidad de distancia del origen. Evalúe $\vec{F}$ en $(2,0)$, $(0,2)$, $(-2,0)$, $(0,-2)$ y $(1,1)$; ¿qué observa?

El módulo de $\vec{F}$ para cualquier punto (x,y) es $|\vec{F}(x,y)| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = |\vec{r}|$, donde $\vec{r}$ denota el vector posición del punto de coordenadas (x,y). Esto significa que el campo tiene el mismo módulo para todos los puntos sobre una circunferencia dada, centrada en el origen. A medida que aumenta el radio de la circunferencia, el módulo del campo es mayor.

Por otro lado, en este ejemplo se tiene $\vec{r} \cdot \vec{F} = (x,y) \cdot (-y,x) = 0$, lo que significa que en cada punto del plano el campo es perpendicular al vector posición.

Podemos analizar también los puntos del plano donde el campo da el vector nulo: esto ocurre si y sólo si $-y = 0$ y $x = 0$, o sea solamente para el origen.

Se muestra una representación gráfica de este campo en la Figura 1.

EJEMPLO 2: Describa al campo $\vec{F}(x,y,z) = (x,0,0)$ en el espacio, trazando algunos de los vectores.

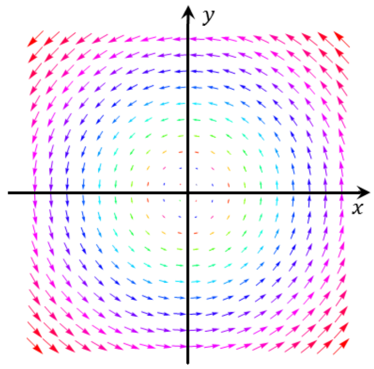

Figura 1: Representación gráfica de un campo vectorial en el plano

Observamos que el campo es siempre un múltiplo escalar del versor $\breve{\imath}$*; efectivamente* $\vec{F}(x, y, z) = x\,(1, 0, 0) = \breve{\imath}\, x$*. Entonces, se representa mediante flechas paralelas al eje* x*, con sentido alejándose del plano* yz*, y de módulo creciente a medida que aumenta* x *en valor absoluto.*
¿Cuándo se anula este campo vectorial? Siempre que la coordenada x *del punto sea cero, o sea* $\vec{F} = \vec{0}$ *para todos los puntos de la forma* $(0, y, z)$*, esto es para los puntos del plano* yz*.*
Esboce una representación gráfica de este campo.

Campo de fuerzas

La fuerza de atracción gravitatoria entre dos objetos de masas M y m, respectivamente, actúa a lo largo de la línea que los une y está dada en módulo por

$$|\vec{F}(r)| = \frac{GMm}{r^2}$$

donde r es la distancia entre los objetos, y $G = 6,67 \times 10^{-11}$ N-m^2/kg^2 es la constante de gravitación universal, de acuerdo a la ley de gravitación universal de Newton.
Supongamos que el objeto de masa M está en el origen y el de masa m está en la posición $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$. La distancia entre los objetos es entonces $r = |\overrightarrow{OP}|$, por lo que: $\vec{F}(|\overrightarrow{OP}|) = -\frac{GMm}{r^2}\frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}$ (el signo $-$ indica que la fuerza es atractiva).
Podemos escribir el campo de fuerza gravitatoria en términos de sus funciones componentes como:

$$\vec{F}(x, y, z) = -\frac{GMm\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\ \breve{\imath} - \frac{GMm\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\ \breve{\jmath} - \frac{GMm\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\ \breve{k}$$

Se representa gráficamente mediante flechas en dirección radial apuntando hacia el origen de coordenadas, de longitud cada vez menor a medida que el objeto m se aleja del objeto M (que está en el origen).

Otro ejemplo es la fuerza peso (fuerza de atracción gravitatoria, muy cerca de la superficie terrestre), que da lugar a un campo vectorial constante: $\vec{F} = -mg\,\breve{k}$.
¿Cómo lo representa gráficamente?

La fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales Q (ubicada en el origen) y q [ubicada en el punto (x, y, z)] puede ser atractiva (si ambas cargas tienen signos opuestos) o repulsiva (si tienen el mismo signo). Según la ley de Coulomb, la fuerza que produce Q sobre q es el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{\varepsilon Qq}{r^2}\,\breve{r} = \varepsilon Qq \frac{\breve{\imath}\,x + \breve{\jmath}\,y + \breve{k}\,z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,3}}$$

donde ε es una constante. ¿Cuál es la diferencia con la representación gráfica de la fuerza gravitatoria?

Campo de gradientes

En muchas aplicaciones (en Física, por ejemplo) surge la necesidad de utilizar campos vectoriales. En la Guía 3, sin saberlo, ya hemos usado este tipo de función: efectivamente dada una función escalar f, su gradiente es de hecho un campo vectorial, ya que está definido para distintos puntos y da como resultado un vector, $\vec{\nabla} f$.

Recordemos que si $f(x,y)$ es una función escalar definida en $D \subset \mathbb{R}^2$ que admite derivadas parciales primeras, se define el vector gradiente en cada punto $(x,y) \in D$ como

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \breve{\imath}\, f_x(x,y) + \breve{\jmath}\, f_y(x,y)$$

Vemos que $\vec{\nabla} f$ es un campo vectorial en $D \subset \mathbb{R}^2$ y se llama *campo vectorial gradiente.*

Análogamente, si $f(x,y,z)$ es una función escalar definida en $E \subset \mathbb{R}^3$, entonces

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \breve{\imath}\, f_x(x,y,z) + \breve{\jmath}\, f_y(x,y,z) + \breve{k}\, f_z(x,y,z)$$

es un *campo vectorial gradiente* en $E \subset \mathbb{R}^3$.

Discuta el siguiente enunciado:
La representación gráfica de un campo de gradientes en el plano (o en el espacio) está dada por vectores que son perpendiculares a las curvas de nivel (o superficies de nivel, respectivamente) de la función escalar de la cual deriva el campo.

EJEMPLO 3: Para cada una de las siguientes funciones escalares, obtenga el campo vectorial gradiente: a) $f(x,y) = \ln(x+2y)$; b) $f(x,y,z) = x\cos\frac{y}{z}$

a) El dominio de la función (y sus derivadas parciales) es la región del plano $D = \{(x,y) : x+2y \geq 0\}$, esto es, por encima de la recta $y = -\frac{1}{2}x$ (grafique el dominio). Calculando las derivadas parciales, se tiene el campo vectorial gradiente en D dado por

$$\vec{F}(x,y) = \vec{\nabla} f(x,y) = \breve{\imath}\,\frac{1}{x+2y} + \breve{\jmath}\,\frac{2}{x+2y}$$

b) La función está definida en la región $E = \{x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \neq 0\}$, o sea, en todo el espacio excepto el plano xy. El campo vectorial gradiente que deriva de esta función escalar es

$$\vec{F}(x,y,z) = \vec{\nabla} f(x,y,z) = \breve{\imath}\,\cos\frac{y}{z} - \breve{\jmath}\,\frac{x}{z}\,\mathrm{sen}\,\frac{y}{z} + \breve{k}\,\frac{xy}{z^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{y}{z}$$

para $(x,y,z) \in E$.

Campo de velocidades

Cuando se pretende describir un fluido, se define la velocidad con que pasa un elemento de fluido por un dado punto del espacio. Esto es, se usa un *campo vectorial de velocidades*. Una *línea de flujo* de un campo de velocidades es la trayectorias seguida por una partícula en dicho campo, de forma que los vectores que representan un campo de velocidades son tangentes a las líneas de flujo. La representación por medio de líneas de flujo es usada, por ejemplo, para mostrar el movimiento de un fluido alrededor de un objeto (como el ala de un avión); las corrientes oceáncias también se representan indicando líneas de flujo.

CAMPO VECTORIAL CONSERVATIVO Y FUNCIÓN POTENCIAL

Estudiaremos una clase particular de campos vectoriales, que tienen importancia en aplicaciones físicas: los llamados campos vectoriales conservativos. Damos ahora su definición y más adelante veremos un teorema que da una condición para determinar si un dado campo vectorial es conservativo o no.

DEFINICIÓN:
Un campo vectorial $\vec{F}$ se dice *conservativo* si es el gradiente de alguna función escalar, es decir, si existe una función f tal que $\vec{F} = \vec{\nabla} f$. En tal caso, f se llama *función potencial* de $\vec{F}$.

Observamos que si $f(x, y)$ es una función potencial del campo vectorial conservativo $\vec{F}(x, y) = \breve{\imath}\, P(x, y) + \breve{\jmath}\, Q(x, y)$ en el plano, entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = P(x, y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = Q(x, y)$$

Escriba relaciones similares para el caso de un campo vectorial conservativo en el espacio.

Veremos más adelante un método para hallar una función potencial de un campo vectorial conservativo.

Los campos de gradientes son conservativos por definición, y la función de la cual derivan es una función potencial (notar que ésta queda definida a menos de una constante, o sea que en realidad se tiene una *familia de funciones potenciales*).
Se puede probar que los campos de fuerza gravitatoria y eléctrica son ambos conservativos. La función potencial en ambos casos es de la forma $f(x, y, z) = \frac{K}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + c$, donde K es GMm ó $-\varepsilon Qq$ de acuerdo al problema, y la constante c es arbitraria. En Física, para campos de fuerza conservativos, se define una cantidad llamada *energía potencial* U de manera que $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$ (entonces $-U$ juega el papel de la función potencial f dada aquí).

Ejemplo: la fuerza de restitución elástica (en 1 dimensión) $\vec{F}(x) = -kx\,\breve{\imath}$ es conservativa. En "lenguaje físico", se dice que existe una función $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ (energía potencial elástica) tal que $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$. Aquí usamos el "lenguaje matemático" y diremos que existe una función $f(x) = -\frac{1}{2}kx^2$ (función potencial) tal que $\vec{F} = \vec{\nabla} f$.

EJEMPLO 4: Determine si $\vec{F}(x, y) = \breve{\imath}\, ye^{xy} + \breve{\jmath}\, xe^{xy}$ es un campo vectorial conservativo en $\mathbb{R}^2$.

De acuerdo a la definición, deberíamos encontrar una función escalar $f(x, y)$ tal que su gradiente es el campo dado. Por simple inspección, notamos que las derivadas parciales de la función exponencial

e^{xy} dan las dos componentes del campo. Luego la familia de funciones potenciales es

$$f(x, y) = e^{xy} + k$$

pues, efectivamente, $\vec{\nabla} f(x, y) = (ye^{xy}, xe^{xy}) = \vec{F}(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1:

1. En los siguientes casos, describa al campo $\vec{F}(x, y)$ en el plano, trazando algunos de los vectores.

   a) $\vec{F}(x, y) = \breve{\imath}\, x + \breve{\jmath}\, y$

   b) $\vec{F}(x, y) = \breve{\imath}\, y + \breve{\jmath}$

   c) $\vec{F}(x, y) = \frac{-\breve{\imath}\, y + \breve{\jmath}\, x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, con $(x, y) \neq (0, 0)$

2. Describa al campo $\vec{F}(x, y, z) = \breve{\imath}\, x + \breve{\jmath}\, z + \breve{k}\, y$ en el espacio, trazando algunos de los vectores.

3. Proporcione una fórmula $\vec{F} = P(x, y)\ \breve{\imath} + Q(x, y)\ \breve{\jmath}$ para el campo vectorial en el plano con la propiedad de que $\vec{F}$ apunte hacia el origen con una magnitud inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de (x, y) al origen. El campo no está definido en $(0, 0)$.

4. Encuentre el campo vectorial gradiente de la función f:

   a) $f(x, y) = \ln(x + 2y)$

   b) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

   c) $f(x, y, z) = x \cos(\frac{y}{z})$, $z \neq 0$.

2. Derivación de un campo vectorial

Consideremos un campo vectorial en el espacio $\vec{F}(x, y, z)$. Éste posee tres funciones componentes, cada una de las cuales depende de tres variables: $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, y $R(x, y, z)$. Entonces podemos evaluar la variación de cada una de las funciones componentes (suponiendo que son de clase $\mathcal{C}^1$) respecto de cada una de las variables, en total son nueve derivadas parciales primeras:

$$\begin{matrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{matrix}$$

A partir de éstas, se definen dos operaciones sobre el campo vectorial: una de ellas genera una <u>magnitud escalar</u> (sumando las 3 derivadas de la diagonal), mientras que la otra genera un <u>nuevo campo vectorial</u> (combinando las restantes seis derivadas).

DEFINICIÓN:
Dado un campo vectorial en el espacio $\vec{F}(x, y, z) = \breve{\imath}\, P(x, y, z) + \breve{\jmath}\, Q(x, y, z) + \breve{k}\, R(x, y, z)$, se define la *divergencia* de $\vec{F}$ como la función escalar de tres variables dada por

$$\text{div}(\vec{F}) = P_x + Q_y + R_z$$

si las tres derivadas parciales existen.

Notación: usando el "operador diferencial vectorial" (nabla)

$$\vec{\nabla} = \breve{\imath}\,\frac{\partial}{\partial x} + \breve{\jmath}\,\frac{\partial}{\partial y} + \breve{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

se puede escribir la divergencia de un campo vectorial como un producto escalar entre el operador nabla y el campo. Se denota

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial}{\partial y}Q + \frac{\partial}{\partial z}R$$

EJEMPLO 5: Calcule la divergencia del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \breve{\imath}\,e^x \operatorname{sen} y + \breve{\jmath}\,e^x \cos y + \breve{k}\,z^2$.

Se tiene para todo $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ que la divergencia es la siguiente función escalar:

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}[e^x \operatorname{sen} y] + \frac{\partial}{\partial y}[e^x \cos y] + \frac{\partial}{\partial z}[z^2] = e^x \operatorname{sen} y - e^x \operatorname{sen} y + 2z = 2z$$

Definición: Si $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 0$, se dice que $\vec{F}$ es un campo vectorial *incompresible*.

DEFINICIÓN:

Dado un campo vectorial en el espacio $\vec{F}(x,y,z) = \breve{\imath}\,P(x,y,z) + \breve{\jmath}\,Q(x,y,z) + \breve{k}\,R(x,y,z)$, se define el *rotor* (o rotacional) de $\vec{F}$ como el nuevo campo vectorial en el espacio dado por

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \breve{\imath}\,(R_y - Q_z) - \breve{\jmath}\,(R_x - P_z) + \breve{k}\,(Q_x - P_y)$$

si las seis derivadas parciales existen.

Notación: usando el "operador diferencial vectorial" (nabla), se puede escribir el rotor de un campo vectorial como un producto vectorial entre el operador nabla y el campo. Se denota

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

EJEMPLO 6: Calcule el rotor del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \breve{\imath}\,e^x \operatorname{sen} y + \breve{\jmath}\,e^x \cos y + \breve{k}\,z^2$.

Se tiene para todo $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ que el rotor es el siguiente nuevo campo vectorial:

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \breve{\imath}\left(\frac{\partial}{\partial y}[z^2] - \frac{\partial}{\partial z}[e^x \cos y]\right) - \breve{\jmath}\left(\frac{\partial}{\partial x}[z^2] - \frac{\partial}{\partial z}[e^x \operatorname{sen} y]\right) + \breve{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}[e^x \cos y] - \frac{\partial}{\partial y}[e^x \operatorname{sen} y]\right)$$

que resulta igual a $0\,\breve{\imath} + 0\,\breve{\jmath} + (e^x \cos y - e^x \cos y)\,\breve{k} = \vec{0}$.

Definición: Si $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$ (vector nulo), se dice que $\vec{F}$ es un campo vectorial *irrotacional.*

En el caso de un campo vectorial en el plano, la divergencia y el rotor se definen de manera similar:

Dado un campo vectorial en el plano $\vec{F}(x, y) = \breve{\imath}\, P(x, y) + \breve{\jmath}\, Q(x, y)$, se define la *divergencia* de $\vec{F}$ como la función escalar de dos variables dada por

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = P_x + Q_y$$

si las dos derivadas parciales existen.

Dado un campo vectorial en el plano $\vec{F}(x, y) = \breve{\imath}\, P(x, y) + \breve{\jmath}\, Q(x, y)$, se define el *rotor* (o rotacional) de $\vec{F}$ como el nuevo campo vectorial en el espacio (a lo largo del eje z) dado por

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \breve{\imath}\, 0 - \breve{\jmath}\, 0 + \breve{k}\, (Q_x - P_y)$$

si las dos derivadas parciales existen.

Enunciamos a continuación algunas propiedades y teoremas:

PROPIEDADES: Sea $f(x, y, z)$ una función escalar que admite derivadas parciales segundas, entonces:
a) la divergencia del campo de gradientes de f da como resultado el *laplaciano* de f:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$$

b) el rotor del campo de gradientes de f da como resultado el vector nulo, si f es de clase $\mathcal{C}^2$:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \vec{0}$$

Pruebe ambos resultados.

TEOREMA:
Si un campo vectorial es conservativo, entonces es irrotacional. Simbólicamente:

$$\text{Si } \vec{F} = \vec{\nabla} f \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$$

Este teorema es muy útil para determinar cuándo un campo vectorial <u>no</u> es conservativo.

Además, se puede probar que:

Si $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$ <u>y además</u> P, Q, R son de clase $\mathcal{C}^1$ en todo $\mathbb{R}^3$, entonces $\vec{F}$ es conservativo.

Utilice alguna de estas propiedades para justificar que el campo $\vec{F} = (xz, xyz, -y^2)$ no es conservativo.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 2:

1. Halle la divergencia y el rotor de los siguientes campos vectoriales:

a) $\vec{F}(x, y, z) = xy\ \breve{\imath} + yz\ \breve{\jmath} + zx\ \breve{k}$

b) $\vec{F}(x, y, z) = xyz\ \breve{\imath} - x^2y\ \breve{k}$

c) $\vec{F}(x, y, z) = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}\ \breve{\imath} + \frac{y}{x^2+y^2+z^2}\ \breve{\jmath} + \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\ \breve{k}$

2. Determine si el campo vectorial dado es o no conservativo:

a) $\vec{F}(x, y, z) = yz\ \breve{\imath} + xz\ \breve{\jmath} + xy\ \breve{k}$

b) $\vec{F}(x, y, z) = 2xy\ \breve{\imath} + (x^2 + 2yz)\ \breve{\jmath} + y^2\ \breve{k}$

c) $\vec{F}(x, y, z) = e^x\ \breve{\imath} + e^z\ \breve{\jmath} + e^y\ \breve{k}$

3. Muestre que cualquier campo vectorial de la forma

$$\vec{F}(x, y, z) = f(y, z)\ \breve{\imath} + g(x, z)\ \breve{\jmath} + h(x, y)\ \breve{k}$$

donde f, g y h son funciones diferenciables, es incompresible.

4. Muestre que cualquier campo vectorial de la forma

$$\vec{F}(x, y, z) = f(x)\ \breve{\imath} + g(y)\ \breve{\jmath} + h(z)\ \breve{k}$$

donde f, g y h son funciones derivables, es irrotacional.

3. Integral de línea de un campo vectorial

Sabemos que el trabajo realizado por una fuerza constante $\vec{F}$ al mover un objeto desde el punto P hasta otro punto Q, en el espacio, está dado por el producto escalar: $W = \vec{F} \cdot \vec{PQ} = F \cdot \vec{D}$, donde $\vec{D}$ es el vector desplazamiento. En esta sección definiremos el trabajo realizado por un campo de fuerzas (por ejemplo el campo gravitatorio o un campo eléctrico) al mover un objeto a lo largo de una curva suave C parametrizada por $\vec{r}(t)$ ($\vec{r}(t)$ continua y $\vec{r}\,'(t) \neq 0$.

Como hicimos para definir integral de línea de una función escalar, aproximaremos la curva C, parametrizada por $\vec{r}(t)$, con una poligonal formada por pequeños segmentos de longitud Δs. Si Δs es pequeño, entonces cuando el objeto se mueve de un extremo al otro del i-ésimo subarco, avanza aproximadamente en la dirección dada por $\vec{r}\,'(t_i)$, para $\vec{r}(t_i)$ un punto del i-ésimo subarco. ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ para mover la partícula, a lo largo del subarco? Esto es el producto escalar de la fuerza por el vector de desplazamiento:

$$\vec{F}(x_i, y_i, z_i) \cdot \left[\Delta s \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}\right] = \left[\vec{F}(x_i, y_i, z_i) \cdot \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}\right] \Delta s$$

El trabajo total para mover la partícula a lo largo de C es aproximado por la correspondiente suma de Riemann. El trabajo W realizado por el campo de fuerza $\vec{F}$, se define como el límite de las sumas de Riemann, es decir:

$$W = \int_C \vec{F}(x, y, z) \cdot \breve{T}(x, y, z)\, ds$$

donde $\breve{T}(x, y, z)$ es el vector tangente unitario en el punto (x, y, z) de C. Notemos que esta ecuación nos indica que el trabajo es la integral de línea con respecto a la longitud de arco, de la componente tangencial de la fuerza.

Si la curva está parametrizada por: $\vec{r}(t)$, entonces $\breve{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}$, de modo que podemos escribir:

$$W = \int_a^b \left[\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}\right] |\vec{r}\,'(t)|dt = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)dt$$

DEFINICIÓN:
Sea $\vec{F}$ un campo vectorial continuo definido sobre una curva suave C dada por una función vectorial $\vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Entonces la integral de línea de $\vec{F}$ a lo largo de C es:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)dt$$

Notar que $\vec{F}(\vec{r}(t)) = \vec{F}(x(t), y(t), z(t))$.

EJEMPLO 7: Evalúe $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, a lo largo de la hélice C dada por $\vec{r}(t) = (\cos t)\ \breve{\imath} + (\operatorname{sen} t)\ \breve{\jmath} + t\ \breve{k}$, con $0 \leq t \leq \pi/2$; donde $\vec{F}(x, y, z) = x\ \breve{\imath} + z\ \breve{\jmath} + y\ \breve{k}$.

Aplicaremos la definición de integral de línea, para lo cual calculamos:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (\cos t)\ \breve{\imath} + (\operatorname{sen} t)\ \breve{\jmath} + t\ \breve{k} \\ \vec{r}\,'(t) &= (-\operatorname{sen} t)\ \breve{\imath} + (\cos t)\ \breve{\jmath} + 1\ \breve{k} \\ \vec{F}(\vec{r}(t)) &= (\cos t)\ \breve{\imath} + t\ \breve{\jmath} + (\operatorname{sen} t)\ \breve{k} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{\pi/2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (\cos t)(-\operatorname{sen} t) + (\cos t)(t) + (\operatorname{sen} t)(1)dt \\ &= \left[\frac{\cos^2 t}{2} + t \operatorname{sen} t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

EJEMPLO 8: Encuentre el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x, y, z) = (y - x^2)\ \breve{\imath} + (z - y^2)\ \breve{\jmath} + (x - z^2)\ \breve{k}$, para mover una partícula desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$, a lo largo de la curva $C : \vec{r}(t) = t\ \breve{\imath} + t^2\ \breve{\jmath} + t^3\ \breve{k}$.

El trabajo está dado por $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, para lo cual calcularemos:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= t\ \breve{\imath} + t^2\ \breve{\jmath} + t^3\ \breve{k} \\ \vec{r}\,'(t) &= 1\ \breve{\imath} + 2t\ \breve{\jmath} + 3t^2\ \breve{k} \\ \vec{F}(\vec{r}(t)) &= (t^2 - t^2)\ \breve{\imath} + (t^3 - t^4)\ \breve{\jmath} + (t - t^6)\ \breve{k} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt \\ &= \int_0^1 \left(2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8\right) dt = \frac{29}{60} \end{aligned}$$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3:

1. Calcule la integral de línea de $\vec{F}$ a lo largo de la curva C definida por la función vectorial indicada en cada caso, en la dirección en la que se incrementa t:

   a) $\vec{F}(x,y,z) = xy\ \breve{\imath} + y\ \breve{\jmath} - yz\ \breve{k}$,
   $\vec{r}(t) = t\ \breve{\imath} + t^2\ \breve{\jmath} + t\ \breve{k}$, $0 \le t \le 1$

   b) $\vec{F}(x,y,z) = 2y\ \breve{\imath} + 3x\ \breve{\jmath} + (x+y)\ \breve{k}$,
   $\vec{r}(t) = (\cos t)\ \breve{\imath} + (\operatorname{sen} t)\ \breve{\jmath} + \frac{t}{6}\ \breve{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

2. Evalúe $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ para el campo vectorial $\vec{F} = y\ \breve{\imath} - x\ \breve{\jmath}$ en el sentido contrario a las agujas del reloj, a lo largo de la circunferencia unitaria $x^2+y^2=1$ desde $(1,0)$ hasta $(0,1)$.

3. Encuentre el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x,y,z) = 3y\ \breve{\imath} + 2x\ \breve{\jmath} + 4z\ \breve{k}$ desde $(0,0,0)$ hasta $(1,1,1)$ sobre cada una de las siguientes trayectorias y grafique cada una de ellas:

   a) La trayectoria recta C_1: $\vec{r}(t) = t\ \breve{\imath} + t\ \breve{\jmath} + t\ \breve{k}$, $0 \le t \le 1$

   b) La trayectoria curva C_2: $\vec{r}(t) = t\ \breve{\imath} + t^2\ \breve{\jmath} + t^4\ \breve{k}$, $0 \le t \le 1$

   c) La trayectoria $C_3 \cup C_4$, formada por el segmento de recta desde $(0,0,0)$ hasta $(1,1,0)$ seguido por el segmento desde $(1,1,0)$ hasta $(1,1,1)$.

4. Calcule la circulación $\oint_C [x\ \breve{\imath} + y\ \breve{\jmath}]\cdot d\vec{r}$, donde C es la elipse: $\vec{r}(t) = (\cos t)\ \breve{\imath} + (4\operatorname{sen} t)\ \breve{\jmath}$, con $0 \le t \le 2\pi$.

4. Teorema fundamental para integrales de línea

Si aplicamos el Teorema Fundamental del Cálculo estudiado en Análisis Matemático I, a una función de una variable $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, con derivada continua en el intervalo $[a,b]$, obtenemos:

$$\int_a^b g'(x)\,dx = g(b) - g(a)$$

Este resultado afirma que el valor de la integral de $g'(x)$ depende sólo del valor de g en los puntos extremos del intervalo $[a,b]$. Pensemos ahora en una función f, de dos o de tres variables, con derivadas parciales continuas, y en su vector gradiente $\vec{\nabla} f$. Éste es un campo vectorial, que de alguna manera generaliza el concepto de derivada para el caso de funciones de más de una variable. A partir de esto, uno se podría preguntar si el Teorema Fundamental del Cálculo también se puede generalizar, esto es: ¿el valor de la integral de línea del campo $\vec{\nabla} f$ a lo largo de una curva C, en el plano o en el espacio, está determinado sólo por el valor de f en los puntos extremos de la curva C?

Expresemos más formalmente la situación, para el caso de funciones de tres variables: sea una curva C determinada por la función vectorial $\vec{r}(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ y sea f una función con gradiente continuo en C, entonces ¿la integral de línea $\int_C \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$, está determinada completamente por $f(\vec{r}(a))$ y $f(\vec{r}(b))$?

La respuesta está contenida en el siguiente teorema fundamental para integrales de línea:

TEOREMA:
Sea C una curva suave (o suave a trozos) determinada por la función vectorial $\vec{r}(t)$, con $a \leq t \leq b$, y f una función diferenciable de dos o de tres variables, cuyo vector gradiente $\vec{\nabla} f$ es continuo en C. Entonces

$$\int_C \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = f\left(\vec{r}(b)\right) - f\left(\vec{r}(a)\right)$$

Demostración: Lo demostraremos para funciones de tres variables, siendo similar la prueba para funciones de dos variables. Aplicando la definición de integral de línea para campos vectoriales, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{\nabla} f \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \right) dt \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la regla de la cadena, notamos que la última integral puede escribirse $\int_a^b \frac{d}{dt}\left[f(\vec{r}(t))\right] dt$. *Por lo tanto,*

$$\int_C \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{d}{dt}\left[f(\vec{r}(t))\right] dt = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$$

Donde se aplicó el teorema fundamental del cálculo para funciones de una variable, en el último paso.

Este teorema da un método práctico para calcular integrales de línea de campos vectoriales conservativos en D, es decir aquellos campos $\vec{F}$ que son el gradiente de alguna función potencial f en D. Efectivamente, si $\vec{F}$ es conservativo:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$$

y aplicando el teorema dado, la última integral se calcula conociendo sólo el valor de la función potencial f en los puntos extremos de la curva C.

Supongamos por ejemplo, que C es una curva suave en $D \subset \mathbb{R}^2$, con extremo inicial $\vec{r}(a) = A(x_A, y_A)$, y extremo final $\vec{r}(b) = B(x_B, y_B)$, y $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función con campo gradiente continuo en C. Entonces, aplicando el teorema la integral línea se calcula fácilmente:

$$\int_{C_{AB}} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = f(x_B, y_B) - f(x_A, y_A)$$

Si $f : E \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y C es una curva suave en E, que comienza en $\vec{r}(a) = A(x_A, y_A, z_A)$ y finaliza en $\vec{r}(b) = B(x_B, y_B, z_B)$, entonces aplicando el teorema se tiene:

$$\int_{C_{AB}} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = f(x_B, y_B, z_B) - f(x_A, y_A, z_A)$$

EJEMPLO 9: Determinar el trabajo realizado por el siguiente campo conservativo:

$$\vec{F} = yz\ \breve{\imath} + xz\ \breve{\jmath} + xy\ \breve{k}$$

a lo largo de una curva suave C_{AB} que une los puntos $A(-1, 3, 9)$ y $B(1, 6, -4)$, desde A hacia B.

El trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}$ está definido por la integral de línea $\int_{C_{AB}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$. Como ya sabemos que el campo $\vec{F}$ es conservativo, podemos aplicar el Teorema Fundamental para integrales de línea y evaluar el trabajo mediante los valores de la función potencial del campo $\vec{F}$ en los extremos de la curva C_{AB}. Tenemos que calcular primero la función potencial, esto es la función f tal que $\vec{\nabla} f = \vec{F}$. En este caso es fácil darse cuenta (casi sin hacer cálculos) que $f(x,y,z) = xyz$, ya que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xz \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = xy$$

que son justamente las funciones componentes del campo $\vec{F}$, con lo cual tenemos que $\vec{\nabla} f = \vec{F}$. Ya estamos en condiciones entonces de evaluar la integral de línea:

$$\begin{aligned}\int_{C_{AB}} \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_{C_{AB}} \vec{\nabla} f\cdot d\vec{r} \\ &= f(B) - f(A) \\ &= (1)(6)(-4) - (-1)(3)(9) = 3\end{aligned}$$

4.1. Independencia de la trayectoria

Vimos que la integral de línea de un campo vectorial conservativo en una región D, a lo largo de una curva C, depende sólo del punto inicial y del punto final de la curva, sin importar la trayectoria que va desde el extremo inicial hasta el extremo final de la curva. Con respecto a estos temas, daremos algunas definiciones:

INDEPENDENCIA DE LA TRAYECTORIA:
Si $\vec{F}$ es un campo vectorial continuo definido en una región D, diremos que la integral de línea de $\vec{F}$ es *independiente de la trayectoria* en D, si $\int_{C_1} F\cdot d\vec{r} = \int_{C_2} F\cdot d\vec{r}$ para cualquier par de trayectorias C_1 y C_2 en D, que tengan *el mismo punto inicial y el mismo punto final.*

NOTA: *Si $\vec{F}$ es un campo vectorial conservativo en una región D, entonces la integral de línea de $\vec{F}$ es independiente de la trayectoria en D. Justificarlo.*

CURVAS CERRADAS:
Decimos que una curva C en D, parametrizada por la función vectorial $\vec{r}(t)$, con $a \leq t \leq b$, es *cerrada* si su *punto final* coincide con su *punto inicial*, esto es, si $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.

Supongamos que $\vec{F}$ sea un campo continuo en una región D y que la integral de línea de $\vec{F}$ sea independiente de la trayectoria en D, nos preguntamos ¿qué valor toma $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ si C es una curva cerrada en D?

Para analizar el valor de la integral de línea, elijamos dos puntos cualquiera A y B en la curva cerrada C y consideremos los dos trozos de curva en los que queda dividida C: la trayectoria C_{AB} que va desde A hasta B, y a continuación la trayectoria C_{BA} que va desde B hasta A. Teniendo en cuenta que $C = C_{AB} \cup C_{BA}$, se tiene:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_{AB}} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_{BA}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_{AB}} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{-C_{BA}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Notemos que la trayectoria $-C_{BA}$ (o sea, C_{BA} recorrida en sentido inverso) va desde A hasta B, es decir que tiene punto inicial A y punto final B. Como el campo es independiente de la trayectoria, $\int_{-C_{BA}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_{AB}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$. Tenemos entonces:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_{AB}} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{C_{AB}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

O sea que si $\vec{F}$ es independiente de la trayectoria en D, el valor de la integral de línea de $\vec{F}$ sobre cualquier curva cerrada en D, es cero.

Ahora veamos la situación recíproca: supongamos que $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$ para cualquier curva cerrada $C \subset D$, ¿será la integral de línea de $\vec{F}$ independiente de la trayectoria en D? Tomemos dos trayectorias cualquiera, C_1 y C_2 en la región D, que vayan ambas desde A hasta B, y llamemos C a la curva formada por C_1 (desde A hasta B) seguida por $-C_2$ (desde B hasta A). Como $C = C_1 \cup -C_2$:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{-C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

pero como C es una curva cerrada (el <u>punto final</u> coincide con el <u>punto inicial</u>) en D, se tiene $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$, por lo que $\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

De esta forma hemos demostrado el siguiente teorema:

TEOREMA:
Supongamos que $\vec{F}$ es un campo vectorial continuo en una región D. La integral de línea de $\vec{F}$ es *independiente de la trayectoria* en D <u>si y sólo si</u> $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$ para cualquier curva cerrada $\mathcal{C}$ en D.

NOTA: *Si $\vec{F}$ es un campo vectorial conservativo en una región D, <u>entonces</u> la integral de línea de $\vec{F}$ a lo largo de cualquier curva cerrada $\mathcal{C}$ en D se anula, es decir: $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$. Justificarlo.*

Nos preguntamos ahora si existen otros campos vectoriales, distintos de los campos conservativos, tales que sus integrales de línea sean independientes de la trayectoria.

Enunciaremos el siguiente teorema, que afirma que los únicos campos vectoriales que son independientes de la trayectoria son los conservativos. En este teorema se supone que el campo $\vec{F}$ está definido en una región D <u>abierta</u> y <u>conexa</u>. Decimos que una región abierta D es conexa si cualquier par de puntos de D se puede unir mediante una curva suave que se encuentra en D.

TEOREMA:
Supongamos que $\vec{F}$ es un campo vectorial continuo en una región conexa abierta D. Si la integral de línea de $\vec{F}$ es *independiente de la trayectoria* en D, entonces $\vec{F}$ es un campo vectorial conservativo en D, es decir, existe una función potencial f tal que $\vec{\nabla} f = \vec{F}$.

Supongamos que $\vec{F}$ es un campo vectorial continuo en una región abierta y conexa D, entonces el siguiente diagrama resume los resultados de los dos últimos teoremas:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \text{ es independiente de la trayectoria en } D \quad \Leftrightarrow \quad \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = \vec{\nabla} f \text{ en } D$$

Dada la importancia que tienen los campos conservativos y observando la conveniencia y facilidad de evaluar integrales de línea de campos conservativos, nos formulamos dos preguntas:

1. En la práctica, ¿cómo podemos determinar si un campo $\vec{F}$ es conservativo o no?
2. Si $\vec{F}$ es un campo conservativo, ¿cómo encontramos una función potencial, es decir una función f tal que $\vec{F} = \vec{\nabla} f$?

Supongamos que se sabe que $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\ \breve{\imath} + Q(x,y)\ \breve{\jmath}$ es conservativo, donde P y Q tienen derivadas parciales continuas de primer orden. Entonces existe una función f, tal que $\vec{F} = \vec{\nabla} f$, es decir:

$$P = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad y \qquad Q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Por lo tanto, aplicando el teorema de Clairaut,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Tenemos entonces el siguiente teorema:

TEOREMA:
Supongamos que $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\ \breve{\imath} + Q(x,y)\ \breve{\jmath}$ es un campo conservativo en una región abierta $D \subset \mathbb{R}^2$, donde sus funciones componentes $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ tienen derivadas parciales de primer orden continuas, entonces se cumple que:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

para todo $(x,y) \in D$.

Este resultado expresa una condición <u>necesaria</u> para que un campo sea conservativo y sirve para demostrar, por ejemplo, que un campo <u>no</u> es conservativo.

Buscamos ahora una condición <u>suficiente</u>, o sea un teorema recíproco del anterior. Para ello necesitamos dos nuevos conceptos: *curva simple* y región *simplemente conexa*.

Una *curva simple* es una curva que no se corta a sí misma en ningún lugar entre sus puntos extremos. Una región *simplemente conexa* del plano es una región D conexa tal que toda curva cerrada simple en D puede contraerse a un punto sin salir de D. Intuitivamente, las regiones simplemente conexas son regiones sin agujeros que puedan ser atrapados por una curva cerrada, y no puede estar formada por piezas separadas. Por ejemplo, todo el plano es una región simplemente conexa.

Enunciamos entonces un teorema para regiones D simplemente conexas, que da un método adecuado para comprobar si un vectorial en $\mathbb{R}^2$ es conservativo o no:

TEOREMA:
Sea $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\ \breve{\imath} + Q(x,y)\ \breve{\jmath}$ un campo vectorial definido en una región D abierta y simplemente conexa del plano. Sus funciones componentes $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ tienen derivadas parciales de primer orden continuas en D que satisfacen:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

para todo $(x,y) \in D$. Entonces $\vec{F}$ es un <u>campo conservativo</u> en D.

EJEMPLO 10: Determinar si el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = e^{xy}\ \breve{\imath} + e^{x+y}\ \breve{\jmath}$ es un campo conservativo en su dominio D.

$\vec{F}$ es un campo definido y continuo en todo el plano, por lo que su dominio es $D = \mathbb{R}^2$. Las funciones componentes de $\vec{F}$ son: $P(x,y) = e^{xy}$ y $Q(x,y) = e^{x+y}$, con derivadas parciales continuas en D. En primer lugar calcularemos $\frac{\partial P}{\partial y}$ y $\frac{\partial Q}{\partial x}$, porque en el caso de que ambas derivadas parciales no coincidan en D, el campo no será conservativo (justificar!). En este caso, tenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x\, e^{xy}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^{x+y}$$

Si $\vec{F}$ fuera conservativo, se debería cumplir: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ en todo D. Por lo tanto, $\vec{F}$ no es conservativo en D.

En el siguiente ejemplo, mostraremos un método para hallar una función potencial para un campo conservativo en el plano.

EJEMPLO 11: Consideremos el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (2x\cos y)\ \breve{\imath} - (x^2 \operatorname{sen} y)\ \breve{\jmath}$.
a) Determinar si $\vec{F}$ es un campo conservativo en su dominio D. b) Si $\vec{F}$ es un campo conservativo en D, encontrar una función potencial para $\vec{F}$. c) Calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde C es la curva definida por $\vec{r}(t) : [1,2] \to \mathbb{R}^2$ con $\vec{r}(t) = e^{t-1}\ \breve{\imath} + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{t})\ \breve{\jmath}$.

a) Igual que en el ejemplo anterior, $\vec{F}$ es un campo continuo en todo el plano, por lo que su dominio es $D = \mathbb{R}^2$. Las funciones componentes de $\vec{F}$ son: $P(x,y) = 2x\cos y$ y $Q(x,y) = -x^2 \operatorname{sen} y$, que tienen derivadas parciales continuas. En primer lugar calcularemos $\frac{\partial P}{\partial y}$ y $\frac{\partial Q}{\partial x}$.
Se tiene:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2x \operatorname{sen} y, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2x \operatorname{sen} y$$

Al ser $D = \mathbb{R}^2$ una región abierta y simplemente conexa, se puede aplicar el teorema estudiado y teniendo en cuenta que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ deducir que $\vec{F}$ es un campo conservativo. O sea que $\vec{F}$ tiene función potencial f, de modo que $\vec{F} = \vec{\nabla} f$.

b) Para encontrar la función potencial partimos de la ecuación: $\vec{\nabla} f = \vec{F}$, es decir,

$$f_x(x,y) = 2x\cos y \qquad f_y(x,y) = -x^2 \operatorname{sen} y$$

Integrando la primera de las expresiones con respecto a x, obtenemos:

$$f(x,y) = x^2 \cos y + h(y)$$

Notar que la constante de integración es constante con respecto a x, es decir es una función de y, que llamamos $h(y)$. A continuación derivamos esta expresión con respecto a y (para comparar con la expresión que ya tenemos de f_y):

$$f_y(x,y) = -x^2 \operatorname{sen} y + h'(y)$$

Comparando tenemos que $h'(y) = 0$, y por lo tanto $h(y) = c$, donde c es un valor constante. Reemplazando en $f(x,y)$ tenemos que, $f(x,y) = x^2 \cos y + c$ es una función potencial de $\vec{F}$.

c) Como $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ es un campo continuo, podemos aplicar el teorema fundamental para integrales de línea. Es decir que,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(2)) - f(\vec{r}(1))$$

donde hemos usado el hecho que la curva C comienza en $\vec{r}(1)$ y termina en $\vec{r}(2)$. Ahora calculamos:

$$\vec{r}(1) = (e^{1-1}, \frac{\pi}{1}) = (1,0) \qquad y \qquad \vec{r}(2) = (e^{2-1}, \frac{\pi}{2}) = (e,1)$$

Con lo cual:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(e,1) - f(1,0) = e^2 \cos(1) - 1$$

ya que $f(x,y) = x^2 \cos y$ es una función potencial para $\vec{F}$. Evidentemente, esta técnica es más fácil que calcular directamente la integral de línea.

Supongamos que $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\ \breve{\imath} + Q(x,y,z)\ \breve{\jmath} + R(x,y,z)\ \breve{k}$ es un campo vectorial conservativo en una región de $E \subset \mathbb{R}^3$. ¿Cuál es el método para hallar una función potencial de $\vec{F}$? El siguiente ejemplo muestra que la técnica para encontrar la función potencial es muy semejante a la utilizada para campos vectoriales conservativos de $\mathbb{R}^2$.

EJEMPLO 12: Determinar una función potencial para el campo conservativo

$$\vec{F}(x,y,z) = (e^x \cos y + yz)\ \breve{\imath} + (xz - e^x \operatorname{sen} y)\ \breve{\jmath} + (xy + z)\ \breve{k}$$

Las funciones componentes de $\vec{F}$ son:

$$P(x,y) = e^x \cos y + yz, \qquad Q(x,y) = xz - e^x \operatorname{sen} y \qquad R(x,y) = xy + z$$

Como $\vec{F}$ es un campo conservativo, entonces existe una función potencial f que satisface: $\vec{\nabla} f = \vec{F}$. Esto significa que:

$$f_x(x,y,z) = e^x \cos y + yz, \qquad f_y(x,y,z) = xz - e^x \operatorname{sen} y \qquad f_z(x,y,z) = xy + z$$

Integrando f_x con respecto a x, obtenemos

$$f(x,y,z) = e^x \cos y + yzx + g(y,z)$$

donde la constante de integración, es constante con respecto a x, pero es una función de las variables y y z, que hemos llamado $g(y,z)$. Entonces derivando la última ecuación con respecto a y obtenemos:

$$f_y(x,y,z) = -e^x \operatorname{sen} y + zx + g_y(y,z)$$

y una comparación con la f_y que ya tenemos, da:

$$g_y(y,z) = 0$$

Entonces $g(y,z) = h(z)$, y podemos escribir:

$$f(x,y,z) = e^x \cos y + yzx + h(z)$$

Finalmente, derivando con respecto a z y comparando con la f_z, obtenemos $h'(z) = z$ y por lo tanto $h(z) = \frac{z^2}{2} + c$, donde c es un valor constante. Así una función potencial del $\vec{F}$ es:

$$f(x,y,z) = e^x \cos y + yzx + \frac{z^2}{2} + c$$

Verificar que $\vec{\nabla} f = \vec{F}$.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 4:

1. En los siguientes casos, determine si $\vec{F}$ es un campo vectorial conservativo en todo el plano:

   a) $\vec{F}(x,y) = (x^3 + 4xy)\ \breve{\imath} + (4xy - y^3)\ \breve{\jmath}$

   b) $\vec{F}(x,y) = (ye^x + \operatorname{sen} y)\ \breve{\imath} + (e^x + x\cos y)\ \breve{\jmath}$

   c) $\vec{F}(x,y) = -y\ \breve{\imath} + x\ \breve{\jmath}$

2. Determine si los siguientes campos vectoriales son conservativos, y en caso afirmativo hallar una función potencial para $\vec{F}$:

   a) $\vec{F}(x,y) = (y,x)$

   b) $\vec{F}(x,y) = (y,1)$

   c) $\vec{F}(x,y) = (x - 2xy, y^2 - x^2)$

   d) $\vec{F}(x,y,z) = (4x - z, 3y + z, y - x)$

3. Muestre que el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (1 + xy)e^{xy}\ \breve{\imath} + (e^y + x^2 e^{xy})\ \breve{\jmath}$ es conservativo en todo el plano, y halle la familia de funciones potenciales para $\vec{F}$.

4. Encuentre la familia de funciones potenciales para los siguientes campos vectoriales y evalúe $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ en cada caso:

   a) $\vec{F}(x,y) = y\ \breve{\imath} + (x + 2y)\ \breve{\jmath}$
   C es la semicircunferencia superior que comienza en $(0,1)$ y termina en $(2,1)$.

b) $\vec{F}(x,y,z) = (2xy^3z^4)\ \breve{\imath} + (3x^2y^2z^4)\ \breve{\jmath} + (4x^2y^3z^3)\ \breve{k}$
$C: x(t) = t,\quad y(t) = t^2,\quad z(t) = t^3$; con $0 \leq t \leq 2$

5. Demuestre que la integral de línea $\int_C [2x \operatorname{sen} y dx + (x^2 \cos y - 3y^2) dy]$, es independiente de la trayectoria en D y evalúe la integral, donde C es una trayectoria arbitraria que va desde $(-1,0)$ hasta $(5,1)$.

6. Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x,y) = (\frac{y^2}{x^2})\ \breve{\imath} - (\frac{2y}{x})\ \breve{\jmath}$ al mover un objeto desde $A(1,1)$ hasta $B(4,-2)$.

7. Dado el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = z\cos(xz)\ \breve{\imath} + e^y\ \breve{\jmath} + x\cos(xz)\ \breve{k}$:

   a) Determine si $\vec{F}$ es conservativo en todo $\mathbb{R}^3$.

   b) En caso afirmativo halle una función potencial para $\vec{F}$.

   c) Calcule la integral de línea de $\vec{F}$ a lo largo de un tramo de hélice que va desde $(\frac{1}{2}, 0, \pi)$ hasta $(\frac{1}{2}, 0, 3\pi)$

5. Teorema de Green

El Teorema de Green relaciona una integral de línea a lo largo de una curva cerrada en el plano, con una integral doble sobre la región encerrada por dicha curva. Podemos pensarlo como un resultado similar al teorema fundamental del cálculo, para integrales dobles.

Una curva C, cerrada y simple en el plano puede estar orientada en sentido contrario al que giran las agujas del reloj (*orientación positiva*), o en el mismo sentido en el que giran las agujas del reloj (*orientación negativa*). Cuando C está orientada en sentido antihorario, la llamaremos C^+; y si está orientada en sentido antihorario la llamaremos C^-.
Una curva plana cerrada delimita o encierra una región del plano. La orientación positiva para la curva frontera de una región del plano se puede recordar mediante este recurso: si caminamos a lo largo de la curva frontera con orientación positiva, la región quedará siempre a nuestra izquierda (trace una curva cerrada en el piso y recórrala en sentido positivo). Para la curva frontera o borde orientado positivamente de una región plana $D \subset \mathbb{R}^2$, usaremos la notación $C^+ = \partial D$.
El teorema de Green se refiere a una curva cerrada con orientación positiva y la región encerrada por ella (ver figura).

TEOREMA DE GREEN:
Sea C^+ una curva suave a trozos, cerrada, simple y positivamente orientada del plano. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ la región limitada por dicha curva. Si $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son funciones escalares de dos variables que tienen derivadas parciales continuas en una región abierta del plano que contiene a D, entonces:

$$\oint_{C^+} [P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy] = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

No incluímos aquí la demostración de este importante teorema del análisis vectorial (consúltela en la bibliografía), pero sí discutimos varios ejemplos y aplicaciones, analizando sus hipótesis y sus consecuencias.

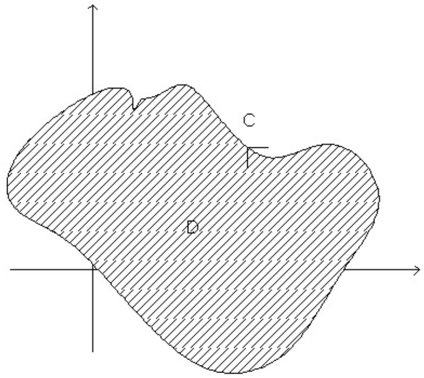

Figura 2: Región de integración y curva frontera positivamente orientada

Haremos la comprobación de que se cumple el teorema de Green para "un" caso particular. Por supuesto, analizar un solo caso no demuestra la validez de una propiedad o teorema, pero nos servirá para ver cómo funciona y los elementos que intervienen. Realizaremos la verificación evaluando las dos integrales del teorema de Green: por un lado la integral doble (como vimos en la Sección 2 de la Guía 5) y por el otro la integral de línea (como vimos en la Sección 4 de la Guía 5), y comprobaremos que dan el mismo resultado.

EJEMPLO 13: Verificar el teorema de Green para el par de funciones $P(x, y) = x$ y $Q(x, y) = xy^2$, donde la región D es el disco unitario.

Antes de utilizar el teorema debemos asegurarnos de que se cumplen todas las hipótesis para la región de integración, para la curva frontera, y para las funciones intervinientes:

a) *región:* $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ *es una región del plano. OK* ✓

b) *curva:* $C^+ = \partial D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, \text{antihoraria}\}$ *es la frontera de* D*, es suave, cerrada y simple, y se toma en sentido antihorario, que es el sentido positivo respecto de la región* D*. OK* ✓

c) *funciones:* $P(x, y) = x$, $Q(x, y) = xy^2$ *son de clase* $\mathcal{C}^1$ *en todo* $\mathbb{R}^2$*. OK* ✓

La frontera de D *es la circunferencia de radio* 1 *con sentido antihorario, y admite la parametrización* $\vec{r}(t) = \cos t\ \breve{\imath} + \operatorname{sen} t\ \breve{\jmath},\ t \in [0, 2\pi]$*. La integral de línea resulta:*

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial D} [x\ dx + xy^2\ dy] &= \int_0^{2\pi} (\cos t)(-\operatorname{sen} t\, dt) + \int_0^{2\pi} (\cos t)(\operatorname{sen} t)^2 (\cos t\, dt) \\
&= \left[\frac{\cos^2 t}{2}\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{1}{8}\left(t - \frac{\operatorname{sen}(4t)}{4}\right)\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

donde usamos identidades trigonométricas para escribir $\operatorname{sen}^2 t \cos^2 t = [\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)]^2 = \frac{1}{4}\frac{1-\cos(4t)}{2}$.

Por otro lado, la integral doble es:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_D (y^2 - 0)\ dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r \operatorname{sen}\theta)^2\,(r\,dr\,d\theta) = \left[\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right)\right]_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

donde usamos coordenadas polares.

El teorema de Green es muy útil, ya que relaciona una integral de línea a lo largo de la curva frontera de una región, con una integral doble sobre el interior de la región [Mencionamos que otros dos importantes teoremas vinculan una integral de línea con una de superficie (Teorema de Stokes o del rotor), y una integral triple con una de superficie (Teorema de Gauss o de la divergencia)].

En muchos casos es más fácil evaluar la integral de línea que la integral de área, usando la igualdad:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \oint_{\partial D} [P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy]$$

Por ejemplo si sabemos que $P(x, y)$ se anula en la frontera de D y $Q(x, y)$ es la función nula, podemos concluir de inmediato que $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dA = 0$ aunque $\frac{\partial P}{\partial y}$ no se anule en el interior de D. Es el caso de $P(x, y) = 1-x^2-y^2$ en el círculo unidad. ¿Podría construir una tal $P(x, y)$ en el cuadrado unitario del plano?
Resaltamos que NO hicimos el cálculo de la integral doble, sino el de la integral de línea equivalente. Usaremos más abajo este resultado como aplicación del teorema de Green para calcular el área de una región plana.

Ahora supongamos que C es una curva cerrada y suave a trozos, que se obtiene uniendo varias curvas por sus extremos; entonces el proceso de evaluación de la integral de línea a lo largo C de una función escalar puede ser muy laborioso porque se deben parametrizar todos los tramos y evaluar las integrales de línea a lo largo de cada tramo. Sin embargo si C encierra una región D para la que se puede aplicar el teorema de Green, podemos usar este teorema para obtener la integral de línea a lo largo de C mediante la evaluación de una integral doble sobre D, como se muestra en los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 14: Usando el teorema de Green, hallar la integral de línea $\oint_{C^+} [xy\ dy - y^2\ dx]$, donde C^+ es el borde del cuadrado del primer cuadrante limitado por las rectas $x = 1$ e $y = 1$, recorrido en sentido positivo.

El enunciado nos sugiere NO hacer el cálculo de la integral de línea, sino el de la integral doble equivalente. Debemos asegurarnos de que las hipótesis del teorema de Green se cumplen tanto para a) la región como para b) la curva frontera, y para c) las funciones que intervienen en esta cuenta (asegúrese).
Vemos que $P(x, y) = -y^2$ *y* $Q(x, y) = xy$, *entonces:*

$$\begin{aligned}
\oint_{C^+} [-y^2\ dx + xy\ dy] &= \iint_D \left(\frac{\partial(xy)}{\partial x} - \frac{\partial(-y^2)}{\partial y} \right) dA \\
&= \iint_D (y + 2y)\, dA = \int_0^1\!\!\int_0^1 3y\ dx\, dy = \int_0^1 [3yx]_0^1\, dy \\
&= \int_0^1 3y\, dy = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 15: Evaluar $\oint_C [(2x^3 - y^3)\, dx + (x^3 + y^3)\, dy]$, donde C es la curva frontera orientada positivamente de la región D del semiplano superior que se encuentra entre las circunferencias
$x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

La curva cerrada C *es la frontera de la región* $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, *y está constituida por dos tramos rectos y dos tramos en forma de semicircunferencia. Podemos evaluar* *la integral de línea aplicando el teorema de Green, con lo cual pasamos a evaluar un integral doble sobre D en lugar de cuatro integrales de línea.*

Para el cómputo de la integral doble, conviene describir la región D en coordenadas polares: $D = \{(r, \theta) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\oint_C [(2x^3 - y^3)\,dx + (x^3 + y^3)\,dy] &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^3) - \frac{\partial}{\partial y}(2x^3 - y^3) \right) dA \\
&= \iint_D [(3x^2) - (-3y^2)]\,dA = \int_0^{\pi} \int_1^2 (3r^2)\,(r\,dr\,d\theta) \\
&= 3\,[\theta]_0^{\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_1^2 = \frac{45}{4}\pi
\end{aligned}$$

Se puede probar que el Teorema de Green es válido también en regiones planas con agujeros. Vemos este resultado en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 16: Verificar el teorema de Green para el anillo D comprendido entre las circunferencias de radios 1 y 2, y las funciones $P(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$ y $Q(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

En este caso la región D no es simple, sino que tiene un <u>*agujero*</u>*. En coordenadas polares está dada por $D = \{(r, \theta) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. La frontera de D está formada por* <u>*dos curvas*</u> *que, para poder aplicar el teorema de Green, debemos considerar con orientación positiva respecto de D. Entonces la circunferencia interior C_1 debe ser recorrida en el sentido de las agujas del reloj, de manera de dejar a la región a su izquierda, mientras que la circunferencia exterior C_2 se recorre en contra de las agujas del reloj. De esta forma, $\partial D = C^+ = C_1 \bigcup C_2$ es la curva frontera de D orientada positivamente. Consideramos las parametrizaciones $C_1 : \vec{r_1}(t) = \cos t\ \breve{\imath} - \operatorname{sen} t\ \breve{\jmath},\ t \in [0, 2\pi]$, y $C_2 : \vec{r_2}(t) = 2\cos t\ \breve{\imath} + 2\operatorname{sen} t\ \breve{\jmath},\ t \in [0, 2\pi]$.*

Calculamos las derivadas parciales de P y Q que necesitaremos:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Las funciones P y Q y sus derivadas parciales de primer orden son continuas en D (que no incluye al origen). Ya podemos aplicar el teorema de Green.

Por un lado la integral doble sobre D es

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D 0\,dA = 0$$

Por otro lado, la integral de línea a lo largo de ∂D es

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial D} [P\ dx + Q\ dy] &= \oint_{C_1} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy \right) + \oint_{C_2} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy \right) \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{(-\operatorname{sen} t)}{1}(-\operatorname{sen} t\ dt) + \frac{\cos t}{1}(-\cos t\ dt) \right) \\
&\quad + \int_0^{2\pi} \left(-\frac{(2\operatorname{sen} t)}{4}(-2\operatorname{sen} t\ dt) + \frac{2\cos t}{4}(2\cos t\ dt) \right) \\
&= \int_0^{2\pi} (-dt) + \int_0^{2\pi} dt = 0
\end{aligned}$$

Luego, hemos verificado que ambas integrales son iguales (en esto caso, ambas dan cero).

Aplicación del Teorema de Green al cálculo del área de una región plana:

Podemos usar el teorema de Green para obtener una fórmula alternativa para calcular el área de una región simple del plano, acotada por una curva cerrada simple y suave a trozos. Hemos visto en la Guía 5 que la siguiente integral doble permite obtener el área de una región D:

$$A(D) = \iint_D 1\, dA$$

Para vincular con el teorema de Green, tendríamos que buscar un par de funciones P y Q tales que el integrando de la integral doble del teorema tenga un valor constante (positiva) dentro de D. Pedimos entonces que:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 1$$

A los fines prácticos, es conveniente que P y Q tengan expresiones sencillas, al menos sobre la curva frontera de D. De esa forma, será fácil (en principio) evaluar la integral de línea correspondiente a lo largo de $C^+ = \partial D$ (orientada positivamente), y obtendremos una fórmula alternativa para el cálculo del área.

Una elección posible es, por ejemplo, tomar $P(x, y) = -y$ con $Q(x, y) = g(y)$, siendo lo más sencillo tomar $Q(x, y) = 0$ (al menos sobre la frontera de D), de tal forma que

$$A(D) = -\oint_{\partial D} y\, dx$$

que también se puede escribir como $A(D) = \oint_{-\partial D} y\, dx$, invirtiendo el sentido de recorrido de la curva.

Otra opción es tomar $Q(x, y) = x$ con $P(x, y) = f(x)$, en particular la elección trivial $P = 0$; luego

$$A(D) = \oint_{\partial D} x\, dy$$

También es útil elegir $P(x, y) = -y$ y $Q(x, y) = x$, pero en este caso obtendremos el doble del área de D, luego

$$A(D) = \frac{1}{2}\oint_{\partial D} [-y\, dx + x\, dy]$$

Demostremos este último resultado:
Dado que se verifican las hipótesis del teorema de Green para la región D, para su curva frontera $C^+ = \partial D$, y para las funciones $P = -y$, $Q = x$, se tiene

$$\oint_{\partial D} [-y\, dx + x\, dy] = \iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right) dA = \iint_D [1 - (-1)]\, dA = 2\iint_D dA = 2\, A(D)$$

Por supuesto, hay una infinidad de opciones para elegir P y Q de manera adecuada para calcular el área de una región plana usando una integral de línea. Las 3 formas que discutimos arriba son las más sencillas. Proponga otras dos elecciones adecuadas para P y Q, que satisfagan que $\frac{\partial Q}{\partial x}$ y $\frac{\partial P}{\partial y}$ difieran en una constante.

Teorema de Green y campos vectoriales

No hemos mencionado en esta sección, hasta ahora, ningún campo vectorial: el teorema de Green, tal como lo enunciamos, vincula una integral de línea y una integral doble para funciones escalares. Veamos que si las funciones P y Q que intervienen en el teorema se consideran como funciones componentes de un campo vectorial, se puede expresar el teorema de Green "en forma vectorial", en términos de la divergencia o el rotor de un campo vectorial.

- Si consideramos un campo vectorial en el plano de la forma $\vec{F}(x,y) = \breve{\imath}\, P(x,y) + \breve{\jmath}\, Q(x,y)$, entonces la integral de línea que aparece en el teorema de Green no es más que la integral de línea de dicho campo vectorial a lo largo de la curva C, esto es, la integral de línea de la componente tangencial del campo:

  $$\oint_C [P\, dx + Q\, dy] = \oint_C \vec{F} \cdot \breve{T}\, ds$$

  donde $\vec{F} = (P, Q)$ y $\breve{T}\, ds = (dx, dy) = d\vec{r}$, siendo $\breve{T}$ el vector tangente unitario en cada punto de C, orientada positivamente respecto de la región D.
  Del otro lado de la igualdad en el teorema, el integrando en la integral doble no es más que la tercera componente del rotor de $\vec{F}$:

  $$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{dx} - \frac{\partial P}{dy} \right) dA = \iint_D (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \breve{k}\ dA$$

  donde $\breve{k}\ dA = d\vec{S}$ representa el elemento de área y apunta en dirección normal al plano xy que contiene a D. Tomando a D como una superficie (plana) en el espacio, la expresión de la derecha recuerda la definición de integral de superficie, en este caso de un campo vectorial.

  Luego, el Teorema de Green se puede expresar alternativamente de la siguiente manera:

  La circulación de la componente tangencial de un campo vectorial a lo largo de la curva C, frontera positivamente orientada de la región D, es igual a la integral doble sobre D de la componente del rotor de dicho campo que es normal al plano que contiene a D (dicho más concretamente, es igual a la integral de superficie o flujo del rotor del campo a través de la superficie D) [1]:

  $$\oint_C \vec{F} \cdot \breve{T}\, ds = \iint_D (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \breve{k}\ dA$$

- Observemos nuevamente la integral doble en el teorema de Green: el integrando puede interpretarse como la divergencia de un campo vectorial en el plano de la forma $\vec{G}(x,y) = \breve{\imath}\, Q(x,y) - \breve{\jmath}\, P(x,y)$:

  $$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{dx} - \frac{\partial P}{dy} \right) dA = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{dx} + \frac{\partial (-P)}{dy} \right) dA = \iint_D (\vec{\nabla} \cdot \vec{G})\, dA$$

  Del otro lado de la igualdad en el teorema, la integral de línea puede interpretarse como la integral de línea de la componente de dicho campo vectorial que es normal a la curva C:

  $$\oint_C [P\, dx + Q\, dy] = \oint_C [Q\, dy + (-P)(-dx)] = \oint_C \vec{G} \cdot \breve{N}\, ds$$

  donde $\vec{G} = (Q, -P)$, y $\breve{N}\, ds = (dy, -dx)$, siendo $\breve{N}$ el vector normal unitario en cada punto de C, apuntando hacia afuera de la región D.

[1] Este resultado se extiende a $\mathbb{R}^3$ para curvas y superficies no necesariamente planas en el espacio, dando lugar al llamado *teorema de Stokes o del rotor*.

Luego, el Teorema de Green se puede expresar alternativamente de la siguiente manera:

La integral de línea de la componente normal de un campo vectorial a lo largo de la curva cerrada C que encierra la región plana D, es igual a la integral doble en D de la divergencia de dicho campo [2]:

$$\oint_C \vec{F} \cdot \breve{N}\, ds = \iint_D (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})\, dA$$

(donde renombramos el campo vectorial como $\vec{F}$).

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 5:

1. Evaluar la siguiente integral de línea por método directo y usando el teorema de Green: $\oint_{C^+} [xy\, dx + x^2 y^3\, dy]$ donde C^+ es el borde del triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,2)$.

2. Utilizar el teorema de Green para evaluar la integral de línea a lo largo de la curva dada, positivamente orientada:

   a) $\oint_C [(y + e^{\sqrt{x}})\, dx + (2x + \cos(y^2)\,)\, dy]$, donde C es la frontera de la región delimitada por las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$

   b) $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F}(x,y) = \breve{\imath}\, y^6 + \breve{\jmath}\, xy^5$ y C es la elipse $4x^2 + y^2 = 1$

3. Usando el teorema de Green, hallar el área de la región limitada por la curva parametrizada por $\vec{r}(t) = \cos t\ \breve{\imath} + \operatorname{sen}^3 t\ \breve{\jmath}$, $t \in [0, 2\pi]$.

4. Usando el teorema de Green, hallar el área de la región encerrada por la elipse parametrizada por $\vec{r}(t) = a\ (\cos t)\ \breve{\imath} + b\ (\operatorname{sen} t)\ \breve{\jmath}$, $t \in [0, 2\pi]$.

6. Integral de superficie de un campo vectorial

En la Sección 4 de la Guía 5 definimos la <u>*integral de superficie de una función escalar*</u> *f sobre una superficie paramétrica S en el espacio, denotada simbólicamente por $\iint_S f\, dS$, donde dS indica un elemento de superficie. Recordemos que formalmente se define como el límite de las sumas dobles de Riemann de la función f evaluada en puntos de la superficie S, multiplicada por el área ΔS del elemento de superficie. A los fines prácticos, si $\vec{r}(u,v)$, con $(u,v) \in D_{uv}$, es una parametrización de la superficie S, se calcula mediante la siguiente integral doble (en el plano paramétrico u,v): $\iint_{D_{uv}} f\,(\vec{r}(u,v))\, |\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)|\, du\, dv$.*
Por otro lado, en la Sección **??** *de esta guía hemos trabajado la* <u>*integral de línea de un campo vectorial*</u> *$\vec{F}$ a lo largo de una curva C del espacio, denotada simbólicamente por $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$. En la práctica, buscamos una parametrización de la curva C, por ejemplo $\vec{r}(t)$ con $t \in [a,b]$, luego la integral se calcula mediante: $\int_a^b \vec{F}\,(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt$.*
Es el turno ahora de definir la <u>*integral de superficie de un campo vectorial*</u>*, también conocida como flujo del campo a través de la superficie.*

DEFINICIÓN:
Sea $\vec{F}(x,y,z)$ un campo vectorial con dominio $E \subset \mathbb{R}^3$, y sea $S \subset E$ una superficie paramétrica en el espacio.

[2] Este resultado se extiende a $\mathbb{R}^3$ para una superficie cerrada y la región sólida encerrada, dando lugar al llamado *teorema de Gauss o de la divergencia.*

Sea $S : \vec{r}(u,v)$, con $(u,v) \in D_{uv}$, una parametrización de la superficie. La *integral de superficie* (o *flujo*) de $\vec{F}$ a través de S está dada por

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \; = $$
$$= \iint_{D_{uv}} \vec{F}\big(\vec{r}(u,v)\big) \cdot \big(\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)\big)\, du\, dv.$$

En la definición, $d\vec{S} = \breve{n}\, dS$ representa un vector de módulo dS (elemento de superficie) y con dirección perpendicular al mismo dada por el vector normal inducido por la parametrización, $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ (repasar lo visto en la Guía 5 - Sección 4.1). Luego, dado que se tiene el producto escalar $\vec{F} \cdot \breve{n}$, podemos interpretar la integral del campo vectorial a través de la superficie como el flujo de la componente del campo que es *normal* a la superficie.[3]

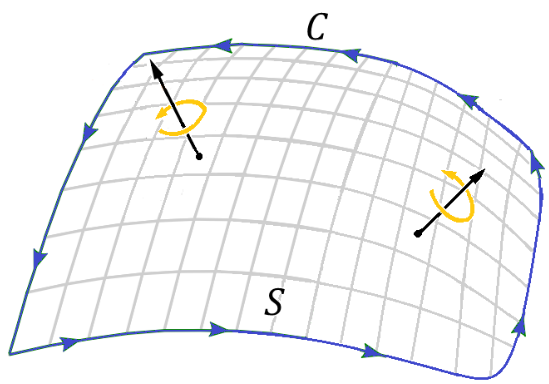

Figura 3: La integral de superficie del campo vectorial $\vec{F}$ a través de la superficie paramétrica S orientada según $\breve{n}$ acumula, para cada punto de la superficie, el valor de la componente normal del campo multiplicado por el área del elemento de superficie.

La integral de superficie de un campo vectorial da como resultado un número real (el resultado es un escalar). Se pueden probar las siguientes propiedades:

PROPIEDAD 1: La integral de superficie de un campo vectorial no depende de la parametrización utilizada para la superficie, siempre que ésta sea cubierta una sola vez.

PROPIEDAD 2: La integral de superficie de un campo vectorial a través de una superficie formada por dos trozos, es igual a la suma de las integrales de superficie de dicho campo a través de cada trozo. Simbólicamente,

$$\iint_{S_1 \bigcup S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

PROPIEDAD 3: La integral de superficie de un campo vectorial depende de la orientación de la superficie, siendo

$$\iint_{-S} \vec{F} \cdot d\vec{S} = -\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

[3]Recordar, de la Sección **??**, que en el caso de la integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una curva, podemos interpretarla como la integral de la componente del campo que es *tangencial* a la curva, dado que allí se tiene el producto escalar $\vec{F} \cdot \breve{T}$, siendo $\breve{T}$ un vector tangente a la curva.

donde $-S$ indica la superficie que tiene la misma representación gráfica que S pero con orientación opuesta (dicho de otro modo, S y $-S$ representan las dos "caras" u orientaciones del mismo conjunto de puntos en el espacio).

Compare estas propiedades con las que corresponden a la integral de superficie de una función escalar. ¿Qué similitudes y diferencias observa?

EJEMPLO 17: Calcular $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, siendo $\vec{F}(x,y,z) = \big(x, y, \cosh^3(xyz)\big)$ y S la superficie cilíndrica de eje z y radio 3, entre $z=0$ y $z=5$, con orientación alejándose del eje del cilindro.

Notar primeramente que, dado que cualquier elemento de superficie de un cilindro circular recto de eje z tiene vector normal perpendicular a dicho eje, se tiene que la tercera componente del vector $d\vec{S}$ es nula. Una parametrización suave y que cubre S una sola vez, está dada mediante la función vectorial $S: \vec{r}(\alpha, z) = (3\cos\alpha, 3\,\mathrm{sen}\,\alpha, z)$ con $\alpha \in [0, 2\pi]$, $z \in [0,5]$, y efectivamente el vector normal a esta superficie paramétrica resulta

$$\vec{n} = \vec{r}_\alpha \times \vec{r}_z = \begin{vmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ -3\,\mathrm{sen}\,\alpha & 3\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3\cos\alpha, 3\,\mathrm{sen}\,\alpha, 0)$$

con tercera componente nula, esto es, $\vec{n}$ es un vector horizontal en todo punto de la superficie cilíndrica dada.
Es importante verificar, antes de calcular el flujo del campo vectorial, que la parametrización utilizada asigne la orientación correcta de la superficie: variando α de 0 a 2π (y para cualquier parámetro z) se verifica que el vector $\vec{n}$ hallado apunta siempre alejándose del eje del cilindro, luego es correcto (sino, era necesario tomar el vector opuesto).
Al hacer el producto escalar entre el campo dado y $\vec{n}$, sólo sobreviven los dos primeros términos. La integral de superficie de $\vec{F}$ a través de S se calcula reemplazando las variables x, y, z de $\vec{F}$ por el valor que toman sobre la superficie: $3\cos\alpha$, $3\,\mathrm{sen}\,\alpha$ y z, respectivamente. Entonces queda por resolver la siguiente integral doble en los parámetros α y z:

$$\begin{aligned} &\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \\ &\quad = \iint_{D_{\alpha z} = [0,2\pi]\times[0,5]} \big(3\cos\alpha, 3\,\mathrm{sen}\,\alpha, \cosh^3(9z\cos\alpha\ \mathrm{sen}\,\alpha)\big) \cdot (3\cos\alpha, 3\,\mathrm{sen}\,\alpha, 0)\ d\alpha\, dz = \\ &\quad = \int_0^5 \int_0^{2\pi} \big(9\cos^2(\alpha) + 9\,\mathrm{sen}^2(\alpha) + 0\big)\ d\alpha\, dz = 9\ \alpha|_0^{2\pi}\ z|_0^5 \quad = \quad 90\,\pi \end{aligned}$$

EJEMPLO 18: Calcular la integral de superficie del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \breve{\imath}\,\frac{x}{4} + \breve{\jmath}\,\frac{y}{4} + \breve{k}\,\frac{z}{4}$ a través de la superficie S dada por la porción del paraboloide $4 - z = x^2 + y^2$ con $z \geq 0$ y con orientación "hacia arriba".

En este caso la superficie S tiene una representación explícita de la forma $S: z = g(x,y)$; dicho de otro modo, S es la parte en el semiespacio superior de la gráfica de la función $g(x,y) = 4 - x^2 - y^2$. Adoptaremos la parametrización trivial, dada por la función vectorial $S: \vec{r}(x,y) = (x, y, 4 - x^2 - y^2)$, *con los parámetros x e y en el círculo $D_{xy} = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Luego el vector normal a esta superficie paramétrica resulta:*

$$\vec{n} = \vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = (2x, 2y, 1)$$

con tercera componente $+1$, lo que asegura que es un vector que apunta "hacia arriba" en todo punto de la superficie dada, esto es, para cualquier par de parámetros (x,y). O sea que la parametrización utilizada asigna la orientación correcta de la superficie.
Luego la integral de superficie de $\vec{F}$ a través de S resulta en la siguiente integral doble sobre el dominio paramétrico D_{xy}:

$$\begin{aligned} &\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \\ &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{4} \left(x, y, 4 - x^2 - y^2\right) \cdot (2x, 2y, 1)\ dx\, dy = \frac{1}{4} \iint_{D_{xy}} \left(x^2 + y^2 + 4\right)\ dx\, dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^2 (r^2 + 4)\, r\ dr\, d\theta \quad = \quad 6\pi \end{aligned}$$

En la última línea, resolvimos la integral doble por medio de coordenadas polares que facilitan el cálculo en este caso.

EJEMPLO 19: Hallar el flujo neto saliente de $\vec{F}(x,y,z) = z\,\breve{\imath} + y\,\breve{\jmath} + x\,\breve{k}$ a través de la superficie de la esfera unitaria centrada en el origen.

La superficie de la esfera de radio 1 centrada en O tiene una representación sencilla en coordenadas esféricas, siendo $S : \rho = 1$ para todo par de valores de las variables angulares ϕ y θ. Haciendo $\rho = 1$ en las ecuaciones de transformación de coordenadas esféricas a cartesianas, obtenemos

$$x = 1 \operatorname{sen}\phi\, \cos\theta \qquad y = 1 \operatorname{sen}\phi\, \operatorname{sen}\theta \qquad z = 1 \cos\phi$$

Luego tenemos x, y, z en términos de ϕ, θ, de modo que podemos tomar a los ángulos como parámetros. Una función vectorial que parametriza la superficie es entonces $S : \vec{r}(\phi,\theta) = (\operatorname{sen}\phi\, \cos\theta, \operatorname{sen}\phi\, \operatorname{sen}\theta, \cos\phi)$ con $\phi \in [0,\pi]$ y $\theta \in [0, 2\pi]$. El vector normal a esta superficie paramétrica resulta

$$\vec{n} = \vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta = \begin{vmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ \cos\phi\, \cos\theta & \cos\phi\, \operatorname{sen}\theta & -\operatorname{sen}\phi \\ -\operatorname{sen}\phi\, \operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\phi\, \cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \left(\operatorname{sen}^2(\phi)\, \cos\theta, \operatorname{sen}^2(\phi)\, \operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\phi\, \cos\phi\right)$$

que tiene orientación saliendo de la esfera, tal como se pide. Notar que en este ejemplo S es una superficie cerrada (es la frontera de una región sólida); luego es orientable, y las dos orientaciones posibles son "hacia afuera" y "hacia adentro" del sólido.
El producto escalar entre el campo vectorial (evaluado sobre la superficie) y el vector normal en cada punto da:

$$\vec{F}(\vec{r}(\phi,\theta)) \cdot \vec{n}(\phi,\theta) = \cos\phi\ \operatorname{sen}^2(\phi)\, \cos\theta + \operatorname{sen}\phi\, \operatorname{sen}\theta\ \operatorname{sen}^2(\phi)\, \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\phi\, \cos\theta\ \operatorname{sen}\phi\, \cos\phi.$$

Por lo tanto, el flujo neto saliente de $\vec{F}$ a través de S es:

$$\begin{aligned}
&\oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \\
&= \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} \left(2\,\mathrm{sen}^2(\phi)\,\cos\phi\;\cos\theta + \mathrm{sen}^3(\phi)\;\mathrm{sen}^2(\theta)\right)\; d\phi\, d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi} \mathrm{sen}^2(\phi)\,\cos\phi\; d\phi\;\int_0^{2\pi}\cos\theta\; d\theta + \int_0^{\pi}\mathrm{sen}^3(\phi)\; d\phi\;\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}^2(\theta)\; d\theta \quad = \quad \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}$$

¿Cuánto vale el flujo neto entrante del mismo campo a través de la superficie esférica unidad en el origen?

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 6:

1. Calcule la integral de superficie $\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$, para el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)$ dado y la superficie orientada S:

   a) $\vec{F}(x,y,z) = xy\,\breve{\imath} + yz\,\breve{\jmath} + zx\,\breve{k}$, y S es la parte del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ que se encuentra arriba del cuadrado $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ con orientación "hacia arriba".

   b) $\vec{F}(x,y,z) = xze^y\,\breve{\imath} - xze^y\,\breve{\jmath} + z\,\breve{k}$, S es la parte del plano $x + y + z = 1$ que está en el primer octante, con orientación "hacia abajo".

   c) $\vec{F}(x,y,z) = x\,\breve{\imath} - y\,\breve{\jmath} + z^4\,\breve{k}$, S es la parte del cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ que está que está debajo del plano $z = 1$, con orientación alejándose del eje del cono.

2. Halle el flujo saliente del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)$ dado, a través de la superficie S:

   a) $\vec{F}(x,y,z) = y\,\breve{\jmath} - z\,\breve{k}$ y la superficie S está formada por el paraboloide $y = x^2 + z^2$, $0 \le y \le 1$, y el disco $x^2 + z^2 \le 1$, con $y = 1$.

   b) $\vec{F}(x,y,z) = x\,\breve{\imath} + 2y\,\breve{\jmath} + 3z\,\breve{k}$ y S es el cubo de vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

   c) $\vec{F}(x,y,z) = x\,\breve{\imath} + y\,\breve{\jmath} + 5\,\breve{k}$ y S es la frontera de la región limitada por el cilindro $x^2 + z^2 = 1$ y los planos $y = 0$ y $x + y = 2$.

7. Teorema de Stokes o Teorema del rotor

El Teorema de Stokes relaciona una integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una curva cerrada simple en el espacio, con cierta integral de superficie a través de una superficie que tiene dicha curva como frontera.

En la Sección 5 vimos el Teorema de Green y discutimos "formas vectoriales" de expresar este teorema. Una de ellas es la siguiente:
La circulación de la componente tangencial de un campo vectorial a lo largo de una curva $C \subset \mathbb{R}^2$, frontera positivamente orientada de la región plana D, es igual a la integral a través de la superficie D (con orientación hacia arriba) del rotor del campo vectorial.
Y adelantamos que este resultado (que involucra una curva C y un región D en $\mathbb{R}^2$) se extiende a $\mathbb{R}^3$ para curvas y superficies no necesariamente planas, dando lugar al llamado *Teorema de Stokes o del rotor.*

TEOREMA DE STOKES (o TEOREMA DEL ROTOR):
Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie suave a trozos, simple y orientable del espacio. Sea $C = \partial S$ la curva cerrada que es frontera de dicha superficie, con orientación positiva respecto de S. Si $\vec{F}(x, y, z)$ es un campo vectorial en el espacio cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta del espacio que contiene a S y a C, entonces:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}.$$

Usando la notación ds para el elemento de arco de la curva y dS para el elemento de área de la superficie, el Teorema de Stokes se escribe:

$$\oint_C \vec{F} \cdot \breve{T}\, ds = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \breve{n}\, dS$$

Escrito así observamos que el Teorema de Stokes establece que:

La integral de la componente normal del rotor de un campo vectorial $\vec{F}$ sobre una superficie orientable S	=	*La integral de la componente tangencial de $\vec{F}$ alrededor de la frontera C de S, estando la curva positivamente orientada respecto de la superficie*

Notar que para aplicar el teorema es necesario elegir una orientación para la curva (cerrada, simple, suave a trozos) que sea compatible con la orientación de la superficie (orientable, simple, suave a trozos). Por otro lado, es imprescindible que el campo vectorial sea de clase $\mathcal{C}^1$ (de tal forma el rotor queda bien definido).

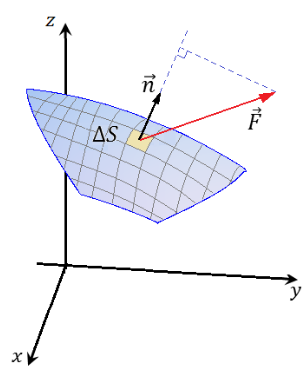

Figura 4: Teorema de Stokes: la integral de $\vec{F}_{\text{tang}}$ a lo largo de C equivale a la integral de $(\vec{\nabla} \times \vec{F})_{\text{norm}}$ a través de S. Prestar atención a la orientación relativa entre la superficie S y su curva frontera C.

No incluímos aquí la demostración de este importante teorema del análisis vectorial (consúltela en la bibliografía), pero sí discutimos ejemplos y aplicaciones, analizando sus hipótesis y sus consecuencias.

Haremos la comprobación de que se cumple el Teorema de Stokes para "un" caso particular. Como ya hemos dicho, analizar un solo caso no demuestra la validez de una propiedad o teorema, pero nos servirá para ver cómo funciona y los elementos que intervienen. Realizaremos la verificación evaluando las dos integrales del

Teorema de Stokes: por un lado la integral de superficie y por el otro la integral de línea, y comprobaremos que dan el mismo resultado.

EJEMPLO 20: Verificar el Teorema de Stokes para el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = 3y\,\breve{\imath} + 4z\,\breve{\jmath} - 6x\,\breve{k}$, y la superficie S que es la parte del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ que se encuentra por encima del plano xy, orientada "hacia arriba".

Antes de utilizar el teorema debemos asegurarnos de que se cumplen todas las hipótesis para la superficie de integración, para su curva frontera, y para el campo vectorial interviniente:

a) *superficie:* $S : z = 9 - x^2 - y^2$, *con* $z \geq 0$, *es una superficie orientable del espacio; eligiendo la cara que se ve desde* $+z$, *en todo punto de* S *el vector normal apunta hacia arriba (esto es, la tercera componente de* $\vec{n}$ *es siempre positiva). OK* ✓

b) *curva:* $C^+ = \partial S = \{(x,y,z) : z = 0, x^2 + y^2 = 9, \text{antihoraria vista desde arriba}\}$ *es la frontera de* S, *es suave, cerrada y simple; elegimos el sentido antihorario mirando desde* $+z$, *que es el sentido "positivo" respecto de la superficie* S. *OK* ✓

c) *campo vectorial:* $\vec{F}(x,y,z) = (3y, 4z, -6x)$ *tiene sus tres funciones componentes de clase* $\mathcal{C}^1$ *en todo* $\mathbb{R}^3$. *OK* ✓

Calculamos por un lado la integral de línea $\oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt$, *considerando la siguiente parametrización de la curva* C^+ : $\vec{r}(t) = 3\cos t\ \breve{\imath} + 3\,\text{sen}\,t\,\breve{\jmath} + 0\ \breve{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
Para aplicar la definición de integral de línea, debemos evaluar $\vec{F}$ *en los puntos* $\vec{r}(t)$ *de la curva, y hallar también la derivada de la función vectorial,* $\vec{r}\,'(t)$, *que apunta en la dirección tangente a la curva* C^+:

$$\begin{aligned}
\vec{F}(\vec{r}(t)) &= 3\,(3\,\text{sen}\,t)\ \breve{\imath} + 4\,(\,0)\ \breve{\jmath} - 6\,(3\cos t)\ \breve{k} = 9\ \text{sen}\,t\ \breve{\imath} + 0\ \breve{\jmath} - 18\ \cos t\ \breve{k} \\
\vec{r}\,'(t) &= -3\,\text{sen}\,t\ \breve{\imath} + 3\cos t\ \breve{\jmath} + 0\ \breve{k}
\end{aligned}$$

Entonces la integral de línea de $\vec{F}$ *a lo largo de* C *da*

$$\begin{aligned}
\oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-27\ \text{sen}^2(t) + 0 + 0\right) dt = (-27) \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2}\ dt \\
&= -27\left(\frac{t}{2} - \frac{\text{sen}(2t)}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} \quad = \quad -27\,\pi
\end{aligned}$$

Calculamos por otro lado la integral de superficie $\iint_S (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot d\vec{S} = \iint_{D_{xy}} (\vec{\nabla}\times\vec{F})(\vec{r}(x,y))\cdot\left(\vec{r}_x\times\vec{r}_y\right)dx\,dy$, *considerando la siguiente parametrización de la superficie* $S : \vec{r}(x,y) = (x, y, 9 - x^2 - y^2)$, *con los parámetros* x *e* y *en el círculo* $D_{xy} = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$.
Para aplicar la definición de integral de superficie, debemos obtener el rotor de $\vec{F}$ *y evaluarlo en puntos* $\vec{r}(x,y)$ *de la superfice, y hallar también el vector normal* $\vec{r}_x(x,y) \times \vec{r}_y(x,y)$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & 4z & -6x \end{vmatrix} = -4\,\breve{\imath} + 6\,\breve{\jmath} - 3\,\breve{k}$$

resulta un vector constante en cualquier punto de la superficie S (y del espacio, en general). El vector normal a la superficie paramétrica resulta:

$$\vec{n} = \vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = (2x, 2y, 1)$$

con tercera componente $+1$, esto es, la parametrización corresponde a la cara del paraboloide que mira hacia arriba. Sugerencia: grafique la superficie S y marque sobre ella varios "parches"; en cada parche dibuje el vector normal y el rotor del campo vectorial.
Entonces la integral de superficie de $\vec{F}$ a través de S da

$$\begin{aligned}\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} &= \iint_{D_{xy}} (\vec{\nabla} \times \vec{F})(\vec{r}(x,y)) \cdot \big(\vec{r}_x(x,y) \times \vec{r}_y(x,y)\big) dx\, dy \\ &= \iint_{D_{xy}} (-4, 6, -3) \cdot (2x, 2y, 1)\ dx\, dy = \iint_{D_{xy}} (-8x + 12y - 3)\ dx\, dy \\ &= 0 + 0 + (-3) \iint_{D_{xy}} dx\, dy = (-3)\ A(D_{xy}) = (-3)\ (\pi 3^2) \quad = \quad -27\pi\end{aligned}$$

donde en la última línea, en lugar de hacer los cálculos explícitamente, hemos aprovechado el hecho de que las integrales $\iint_{D_{xy}} x\ dx\, dy$ y $\iint_{D_{xy}} y\ dx\, dy$ se anulan por simetría, y que $\iint_{D_{xy}} dx\, dy$ es igual al área A del círculo de radio 3.

Ambos resultados coinciden. Verificamos, entonces, el Teorema de Stokes en este caso.

El Teorema de Stokes es muy útil, ya que relaciona una integral de línea a lo largo de la curva frontera de una superficie en el espacio, con una integral de superficie a través de ésta.

En muchos casos es más fácil evaluar la integral de línea que la integral de superficie, o al revés:

EJEMPLO 21: Aplicar el Teorema de Stokes para evaluar la integral de superficie del rotor de $\vec{F}(x, y, z) = (y, -x, e^{xz})$, a través de la mitad superior de la superficie esférica que corta al plano $z = 0$ en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. La superficie está orientada en el sentido de la normal hacia arriba.

El enunciado plantea la resolución de la integral de línea de $\vec{F}$, en vez de computar directamente el flujo de su rotor. Es fácil ver que tanto el campo como las regiones (superficie y curva frontera) satisfacen las condiciones del teorema. La curva sobre la cual debemos integrar es, en coordenadas cartesianas, $C : x^2 + y^2 = 1, z = 0$, y debemos asignarle sentido antihorario mirando desde $+z$ para que sea coherente con la orientación hacia arriba de la superficie dada (grafique la superficie y la curva). En forma paramétrica la curva puede expresarse como $C : x(t) = \cos t, y(t) = \operatorname{sen} t, z(t) = 0$ con $t \in [0, 2\pi]$.
Necesitaremos por un lado el campo vectorial evaluado en puntos de la curva: $\vec{F}\,(x(t), y(t), z(t)) = (y(t), -x(t), e^{x(t)\,z(t)}) = (\operatorname{sen} t, -\cos t, 1)$, y por otro lado el vector $\vec{r}\,'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)$. Luego la integral de superficie pedida se puede calcular por teorema como la siguiente integral de línea:

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t, -\cos t, 1) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)\ dt = \int_0^{2\pi} \big(-\operatorname{sen}^2(t) - \cos^2(t) + 0\big)\, dt = -2\pi$$

Observar que no fue necesario evaluar el rotor del campo vectorial.

Dos resultados importantes que se derivan del Teorema de Stokes para campos vectoriales de clase $\mathcal{C}^1$ son los siguientes:

- Si S es una superficie cerrada, entones $\displaystyle\oiint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0$
- Si S_1 y S_2 son dos superficies con la misma curva frontera y la misma orientación respecto de dicha curva, entonces $\iint_{S_1} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$

Pruebe ambos resultados.
¿Cómo aplicaría la segunda propiedad para facilitar el cómputo de la integral de superficie del Ejemplo 21?

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 7:

1. Obtenga el Teorema de Green como caso particular del Teorema de Stokes.
2. Utilice el Teorema de Stokes para evaluar $\iint_S \mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S}$:

   a) $\vec{F}(x,y,z) = x^2 e^{yz}\,\breve{\imath} + y^2 e^{xz}\,\breve{\jmath} + z^2 e^{xy}\,\breve{k}$, y S es la superficie de la semiesfera $x^2+y^2+z^2=4$, $z \geq 0$, orientada "hacia arriba".

   b) $\vec{F}(x,y,z) = (x + \tan^{-1}(yz))\,\breve{\imath} + y^2 z\,\breve{\jmath} + z\,\breve{k}$, y S es la parte de la semiesfera $x = \sqrt{9-y^2-z^2}$, que se encuentra dentro del cilindro $y^2+z^2=4$, orientada en el sentido positivo del eje x.

   c) $\vec{F}(x,y,z) = xyz\,\breve{\imath} + xy\,\breve{\jmath} + x^2yz\,\breve{k}$, y S está formada por la cara superior y las cuatro caras laterales, pero no la base, del cubo de vértices $(\pm1,\pm1,\pm1)$, orientada "hacia afuera".

3. Utilice el Teorema de Stokes para evaluar $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$. En cada caso C está orientada en sentido contrario al giro de las agujas del reloj, visto desde "arriba":

   a) $\vec{F}(x,y,z) = (x+y^2)\,\breve{\imath} + (y+z^2)\,\breve{\jmath} + (z+x^2)\,\breve{k}$, y C es el triángulo con vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$.

   b) $\vec{F}(x,y,z) = 2z\,\breve{\imath} + 4x\,\breve{\jmath} + 5y\,\breve{k}$, y C es la curva intersección del plano $z = x+4$ y el cilindro $x^2+y^2=4$.

4. Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x,y,z) = (x^2+z^2)\,\breve{\imath} + (y^2+x^2)\,\breve{\jmath} + (z^2+y^2)\,\breve{k}$, al mover una partícula alrededor del borde de la parte de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ que está en el primer octante, en sentido antihorario (visto desde "arriba").

8. Teorema de Gauss o Teorema de la divergencia

El Teorema de Gauss relaciona una integral de superficie de un campo vectorial a través de una superficie cerrada simple en el espacio, con cierta integral triple en la región sólida que tiene dicha superficie como frontera.

Al discutir en la Sección 5 el Teorema de Green y sus "formas vectoriales", vimos que podía expresarse de la siguiente manera:
La integral de línea de la componente normal de un campo vectorial a lo largo de una curva cerrada $C \subset \mathbb{R}^2$, frontera positivamente orientada de la región plana D, es igual a la integral doble en D de la divergencia del campo vectorial.
Y mencionamos que este resultado (que involucra una curva cerrada C y la región plana D que ella encierra, en $\mathbb{R}^2$) se extiende a $\mathbb{R}^3$, pero ahora para el caso de una superficie cerrada y la región sólida que ella encierra, dando lugar al llamado *Teorema de Gauss o de la divergencia.*

TEOREMA DE GAUSS (o TEOREMA DE LA DIVERGENCIA):
Sea $R \subset \mathbb{R}^3$ una región sólida simple del espacio. Sea $S = \partial R$ la superficie cerrada, suave a trozos, simple y orientable que es frontera de dicha región, con orientación hacia afuera del sólido. Si $\vec{F}(x, y, z)$ es un campo vectorial en el espacio cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta del espacio que contiene a R y a S, entonces:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_R (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})\, dV.$$

Empleando la notación dS para el elemento de área de la superficie, el Teorema de Gauss se escribe:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \breve{n}\, dS = \iiint_R \vec{\nabla} \cdot \vec{F}\ dV.$$

Puesto así notamos que el Teorema de Gauss establece que:

La integral de la divergencia de un campo vectorial $\vec{F}$ dentro de una región sólida R	=	*La integral de la componente normal de $\vec{F}$ a través de la frontera S de R, estando la superficie positivamente orientada respecto del sólido*

Notar que para aplicar el teorema es necesario que la orientación de la superficie (cerrada, simple, orientable, suave a trozos) sea hacia afuera de la región sólida (simple). Por otro lado, es imprescindible que el campo vectorial sea de clase $\mathcal{C}^1$ (de tal forma la divergencia queda bien definida).

No incluímos aquí la demostración de este importante teorema del análisis vectorial (consúltela en la bibliografía), pero sí discutimos ejemplos y aplicaciones, analizando sus hipótesis y sus consecuencias.

Haremos la comprobación de que se cumple el Teorema de Gauss para "un" caso particular. Como ya hemos dicho, analizar un solo caso no demuestra la validez de una propiedad o teorema, pero nos servirá para ver cómo funciona y los elementos que intervienen. Realizaremos la verificación evaluando las dos integrales del Teorema de Gauss: por un lado la integral de superficie (flujo neto) y por el otro la integral triple, y comprobaremos que dan el mismo resultado.

EJEMPLO 22: Verificar el Teorema de Gauss para el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = x\,\breve{\imath} + y\,\breve{\jmath} + z\,\breve{k}$, y la esfera sólida $R : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, para $a \in \mathbb{R}$.

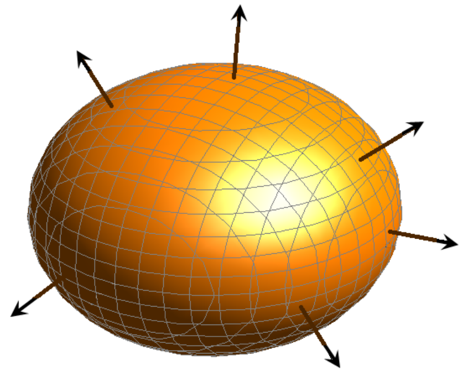

Figura 5: Teorema de Gauss: la integral de $\vec{F}_{\text{norm}}$ a través de S equivale a la integral de $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$ dentro de R. La orientación de la superficie S es hacia afuera del sólido R.

Antes de utilizar el teorema debemos asegurarnos de que se cumplen todas las hipótesis para la superficie de integración, para la región sólida, y para el campo vectorial interviniente:

a) *región sólida:* $R = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq a^2\}$ *es una región simple del espacio. OK* ✓

b) *superficie:* $S = \partial R : x^2+y^2+z^2 = a^2$ *es una superficie cerrada, simple, suave y orientable del espacio; elegimos la cara exterior (esto es, el vector normal apunta hacia afuera del sólido* R*). OK* ✓

c) *campo vectorial:* $\vec{F}(x,y,z) = x\,\breve{\imath} + y\,\breve{\jmath} + z\,\breve{k}$ *tiene sus tres funciones componentes de clase* $\mathcal{C}^1$ *en todo* $\mathbb{R}^3$*. OK* ✓

Calcularemos primero la integral de superficie, $\oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \oiint_S \vec{F}\cdot\breve{n}\,dS$*. Considerando que la superficie* $S:\ x^2+y^2+z^2=a^2$ *es una superficie de nivel de la función* $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$*, un vector normal a* S *está dado por el gradiente de* f*, y entonces el vector unitario exterior normal a* S*, es:*

$$\breve{n} = \frac{2(x\,\breve{\imath} + y\,\breve{\jmath} + z\,\breve{k})}{\sqrt{4(x^2+y^2+z^2)}} = \frac{x\,\breve{\imath} + y\,\breve{\jmath} + z\,\breve{k}}{a}$$

Por lo tanto,

$$\vec{F}\cdot\breve{n} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a}$$

y teniendo en cuenta que $x^2+y^2+z^2=a^2$ *en la superficie* S*,*

$$\begin{aligned}\oiint_S \vec{F}\cdot\breve{n}\,dS &= \oiint_S \frac{a^2}{a}\,dS \\ &= a\oiint_S dS = a(4\pi a^2) = 4\pi a^3\end{aligned}$$

Por otro lado calculamos la integral triple $\iiint_R (\vec{\nabla}\cdot\vec{F})\,dV$*, considerando que la divergencia de* $\vec{F}$ *es:*

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3$$

de modo que

$$\iiint_R (\vec{\nabla}\cdot\vec{F})\,dV = \iiint_R 3\,dV = 3\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) = 4\pi a^3$$

Ambos resultados coinciden. Verificamos, entonces, el Teorema de Gauss en este caso.

El Teorema de Gauss es muy útil, ya que relaciona una integral de superficie a lo largo de la superficie frontera de una región sólida en el espacio, con una integral triple dentro de dicho sólido.

En muchos casos es más fácil evaluar la integral de superficie que la integral triple, o al revés:

EJEMPLO 23: Aplicar el Teorema de Gauss para evaluar la integral de superficie de $\vec{F}(x, y, z) = (xy^2, x^2y, y)$, a través de la superficie S del bloque cilíndrico $x^2 + y^2 = 1$ acotado por los planos $z = \pm 1$.

El enunciado plantea la resolución de la integral triple de la divergencia de $\vec{F}$, en vez de computar directamente el flujo neto del campo (que, en este caso, estaría dado por 3 integrales de superficie: una para la pared lateral cilíndrica, y dos para las tapas inferior y superior del cilindro). Es fácil ver que tanto el campo como las regiones (sólido y su superficie frontera) satisfacen las condiciones del teorema. Un aspecto a tener en cuenta es que el enunciado no plantea si se trata del flujo neto entrante o saliente; dado que la orientación que impone el teorema de Gauss es hacia afuera del cilindro, nuestra respuesta será el flujo saliente (para el flujo entrante, bastará dar el valor opuesto al obtenido). Grafique el sólido y su superficie frontera indicando el vector normal para cada una de las 3 porciones que la componen.

Necesitaremos la divergencia del campo vectorial: $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} xy^2 + \frac{\partial}{\partial y} x^2 y + \frac{\partial}{\partial z} y = y^2 + x^2 + 0.$

Luego, la integral de superficie (hacia afuera) se puede calcular por teorema como la siguiente integral triple:

$$\begin{aligned} \oiint_{S = S_1 \bigcup S_2 \bigcup S_3} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iiint_R \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dV = \\ &= \iiint_R (x^2 + y^2) \, dV = \int_{-1}^{1} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \, (r \, dr \, d\theta \, dz) = \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^1 \; \theta|_0^{2\pi} \; |z|_{-1}^{1} = \pi \end{aligned}$$

donde hemos utilizado coordenadas cilíndricas para el cómputo de la integral triple.

Un resultado importante que se deriva del Teorema de Gauss para campos vectoriales de clase $\mathcal{C}^2$ (hasta segundas derivadas parciales continuas) es el siguiente:

- Si S es una superficie cerrada y orientable, y $\vec{G}$ es un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^2$, entonces $\oiint_S (\vec{\nabla} \times \vec{G}) \cdot d\vec{S} = 0$.

Pruebe este resultado.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 8:

1. Verifique que se cumple el Teorema de la divergencia para el campo $\vec{F}(x, y, z) = 3x\,\breve{\imath} + xy\,\breve{\jmath} + 2xz\,\breve{k}$, en la región R que es el cubo limitado por los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ y $z = 1$.

2. Utilice el Teorema de Gauss para evaluar en cada uno de los casos siguientes la integral de superficie $\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$:

   a) $\vec{F}(x,y,z) = x^2y\,\breve{\imath} - x^2z\,\breve{\jmath} + z^2y\,\breve{k}$, S es la superficie de la caja rectangular limitada por los planos $x=0$, $x=3$, $y=0$, $y=2$, $z=0$, $z=1$.

   b) $\vec{F}(x,y,z) = -xz\,\breve{\imath} - yz\,\breve{\jmath} + z^2\,\breve{k}$, S es el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

   c) $\vec{F}(x,y,z) = (3xy, y^2, -x^2y^4)$, S es la superficie del tetraedro con vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$.

3. Sea $\vec{F}(x,y,z) = z\tan^{-1}(y^2)\,\breve{\imath} + z^3\ln(x^2+1)\,\breve{\jmath} + z\,\breve{k}$. Encuentre el flujo de $\vec{F}$ que atraviesa la parte del paraboloide $x^2+y^2+z=2$ que está arriba del plano $z=1$ y está orientado hacia arriba.

4. Pruebe las siguientes identidades, suponiendo que S y R satisfacen las correspondientes condiciones del Teorema de Gauss y las funciones escalares y componentes de los campos vectoriales tienen derivadas parciales continuas de segundo orden.

   a) $\oiint_S (\vec{a} \cdot \breve{n})\, dS = 0$, donde $\vec{a}$ es un vector constante.

   b) $V(R) = \frac{1}{3}\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$, donde $\vec{F}(x,y,z) = x\,\breve{\imath} + y\,\breve{\jmath} + z\,\breve{k}$.

   c) $\oiint_S rot(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0$

ACTIVIDADES INTEGRADORAS DE LA GUÍA Nro 6

1. Dado el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = z\cos(xz)\ \breve{\imath} + e^y\ \breve{\jmath} + x\cos(xz)\ \breve{k}$:

   a) determinar si $\vec{F}$ es conservativo en todo $\mathbb{R}^3$;

   b) en caso afirmativo, obtener una función potencial para $\vec{F}$ mediante la técnica de integraciones parciales;

   c) hallar la integral de línea de $\vec{F}$ a lo largo del tramo de hélice que va desde $A(\frac{1}{2}, 0, \pi)$ hasta $B(\frac{1}{2}, 0, 3\pi)$.

2. Verificar que el campo $\vec{F}(x,y,z) = (2xy, x^2+z^2, 2zy)$ es conservativo en todo $\mathbb{R}^3$. Hallar la integral de línea a lo largo de una curva que une el punto $A(1,1,0)$ con $B(0,2,3)$. ¿Qué teorema utiliza? Enunciar y demostrar.

3. ¿Cuánto vale la circulación de un campo vectorial $\vec{F}(x,y)$ conservativo, a lo largo de cualquier curva cerrada, suave y simple del plano? Justificar la respuesta.

4. Dada la función escalar $f(x,y,z)$, suponiendo que todas las derivadas parciales requeridas son continuas, verificar la siguiente propiedad:

$$\mathrm{div}(\vec{\nabla} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

5. *a*) Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F} = z\ \breve{\imath} - x\ \breve{\jmath} + z\ \breve{k}$, a lo largo de la curva C determinada por la intersección de la superficie $z = (x-1)^2 + y^2$ y el plano $z = 4$, en sentido contrario a las agujas del reloj mirando desde el semieje z positivo.

   b) Idem *a)* pero a lo largo de $-C$.

6. Calcular la integral de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F}(x,y,z) = (2-y,\ x,\ 0)$ y C es la curva intersección de las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = 4y$, con C recorrida en sentido antihorario mirando desde el semieje z positivo.

7. Utilizando una integral de línea, calcular el área de la región del primer cuadrante limitada por la recta $x + y = 5$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$.

8. Calcular utilizando una función potencial, si es posible, $\int_C [y^2 z\, dx + 2xyz\, dy + xy^2\, dz]$ siendo C una curva en el espacio que va desde $A(0,1,1)$ hasta $B(2,5,2)$.

9. Evaluar la circulación del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = y^2\ \breve{\imath} - y\ \breve{\jmath} + 3z^2\ \breve{k}$ a lo largo de la curva en la que el plano $2x + 6y - 3z = 6$ corta al cilindro $x^2 + y^2 = 1$, en el sentido antihorario visto desde arriba.

10. Verificar el teorema de Green, siendo $\vec{F}(x,y) = (y^2, x^2)$ y C el borde de la región comprendida entre las gráficas de $y = x$ e $y = \frac{x^2}{4}$.

11. Considerar una región plana de tipo I, $D = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$. Sean $P(x,y) = f(y)$ y $Q(x,y) = 0$ en D, con f' continua. Aplicar el teorema de Green, planteando la integral de línea y la integral doble; probar que en ambos casos se llega a $\int_a^b [f(g_1(t)) - f(g_2(t))]\, dt$.

12. *a*) Desarrolle la expresión del Teorema de Stokes en términos de las componentes del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$, de clase $\mathcal{C}^1$, para una superficie que es la gráfica de la función $g(x,y)$ apuntando hacia arriba, esto es $S : z = g(x,y)$ con $(x,y) \in [0,a] \times [0,a]$, siendo $a > 0$, fijo.

    b) Desarrolle la expresión del Teorema de Gauss en términos de las componentes del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$, de clase $\mathcal{C}^1$, para la región sólida $R = [0,a] \times [0,a] \times [0,a]$, siendo $a > 0$, fijo.

13. *a*) ¿Cómo emplearía el Teorema de Green para calcular el área de una región plana en $\mathbb{R}^2$ (sin resolver una integral doble)?

    b) Describa cómo se podría emplear el Teorema de Stokes para calcular el área superficial de una superficie abierta y orientable en $\mathbb{R}^3$ (sin resolver una integral de superficie).

    c) ¿Cómo emplearía el Teorema de Gauss para calcular el volumen de una región sólida en $\mathbb{R}^3$ (sin resolver una integral triple)?

14. Verifique que se cumple el Teorema de Stokes para el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = x^2\,\breve{\imath} + y^2\,\breve{\jmath} + z^2\,\breve{k}$ siendo S la parte del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ que está arriba del plano xy, con orientación hacia arriba.

15. Evalúe la integral de superficie o flujo para el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, xy, z)$, a través de la superficie S que es la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ abajo del plano $z = 1$ con orientación hacia arriba.

16. Aplique el Teorema de Stokes para evaluar $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ donde $\vec{F}(x, y, z) = xy\,\breve{\imath} + yz\,\breve{\jmath} + zx\,\breve{k}$ y C es el triángulo con vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, orientado en sentido antihorario, visto desde arriba.

17. Utilice el Teorema de Gauss para calcular la integral de superficie $\oiint_S (\vec{\nabla} \times \vec{G}) \cdot d\vec{S}$, donde $\vec{F}(x, y, z) = x^3\,\breve{\imath} + y^3\,\breve{\jmath} + z^3\,\breve{k}$ y S es la superficie del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = 0$ y $z = 2$.

18. *a*) Dado el campo de velocidades de un fluído $\vec{V} = y\,\breve{\imath} - x\,\breve{\jmath} + z\,\breve{k}$, halle cuátos $\mathrm{m}^3/\mathrm{seg}$ fluyen a través de la superficie S del cilindro $x^2 + (y-1)^2 = 4$ limitada por los planos $z = 0$ y $z = 1$.

    b) Si a la superficie del inciso anterior se agrega la parte sobre el plano $z = 0$ y la parte sobre $z = 1$, calcule el flujo total hacia afuera del sólido encerrado por esas superficies.

19. Sean S_1 y S_2 dos superficies orientables con la misma curva frontera y $\vec{F}$ un campo derivable con continuidad en R^3. ¿Qué relación hay entre los flujos del $rot(\vec{F})$ a través de estas superficies?