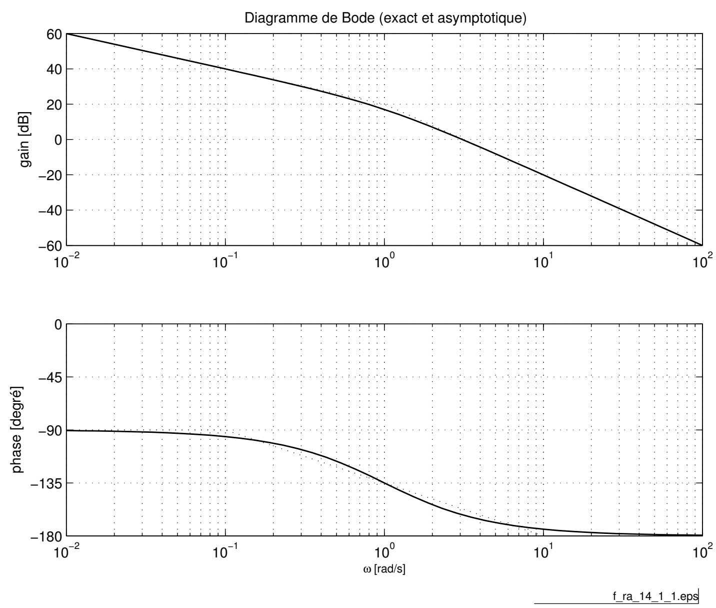
14 Lieu de Nyquist et diagramme de Bode

14.1

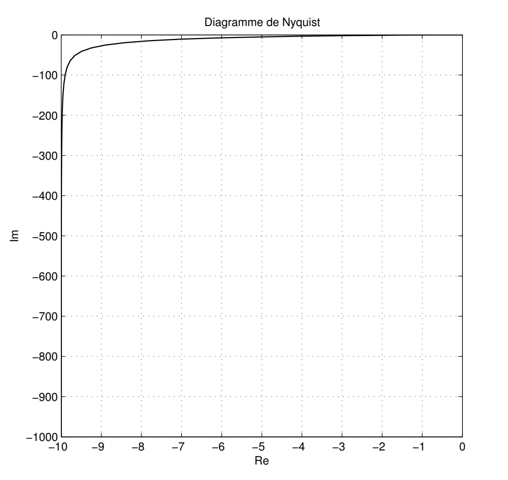
Diagrammes de Bode exact et asymptotique de

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s \cdot (1 + s \cdot T)}$$

pour $K = 10$ et $T = 1\,[\mathrm{s}]$:



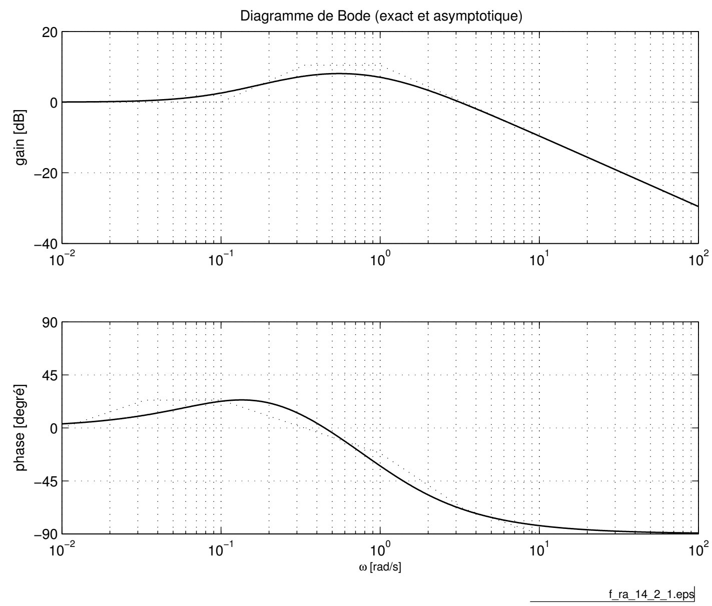
Lieu de Nyquist :



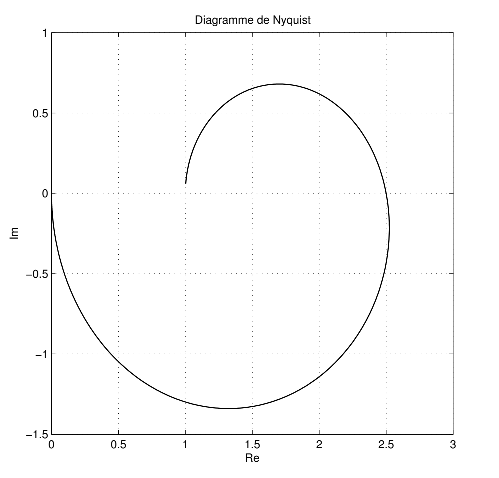
14.2

Diagrammes de Bode exact et asymptotique de

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(1 + 10 \cdot s)}{(1 + s) \cdot (1 + 3 \cdot s)}$$



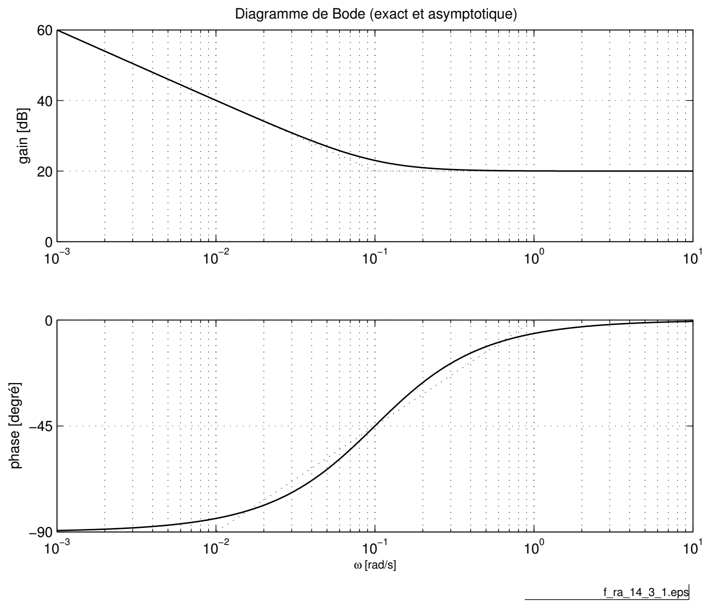
Lieu de Nyquist :



14.3

Diagrammes de Bode exact et asymptotique de

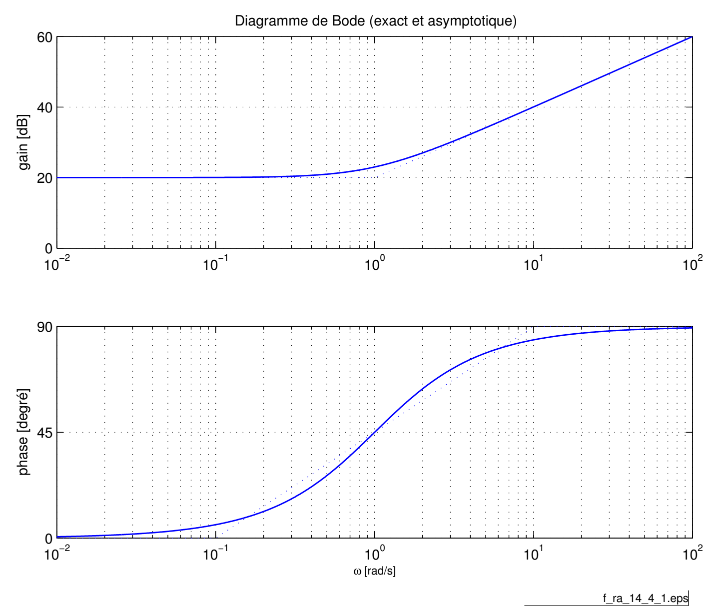
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = 10 \cdot \frac{(1 + 10 \cdot s)}{s \cdot 10}$$



14.4

Diagrammes de Bode exact et asymptotique de

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = 10 \cdot (1 + s)$$



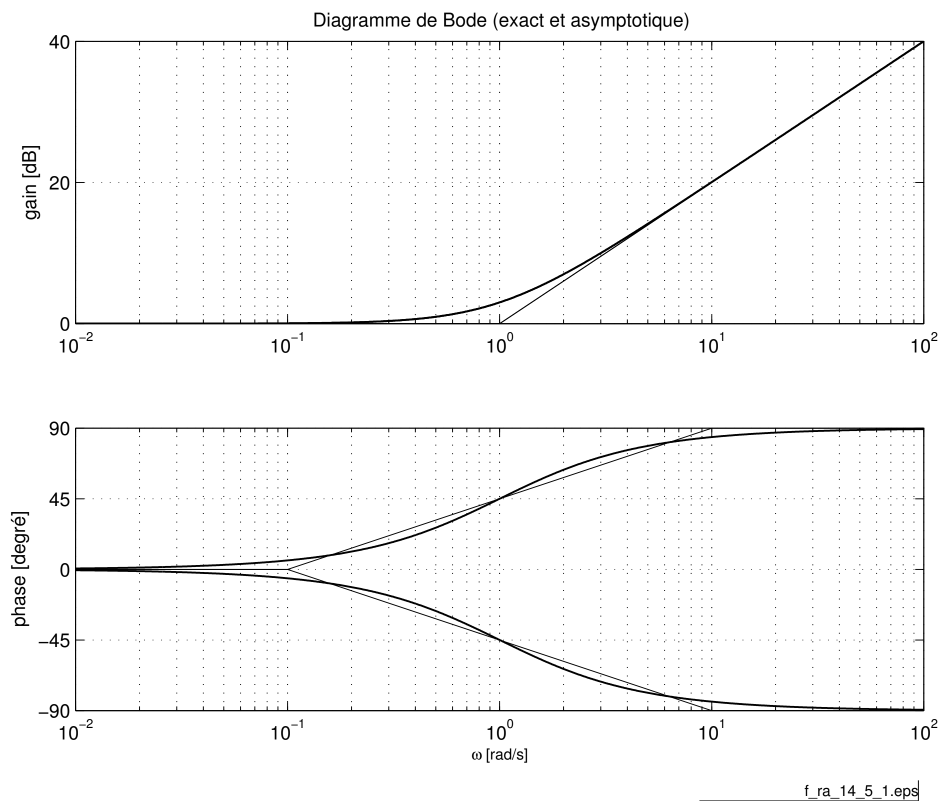
14.5

Diagrammes de Bode exact et asymptotique de

$$N_1(s) = 1 - s$$

et

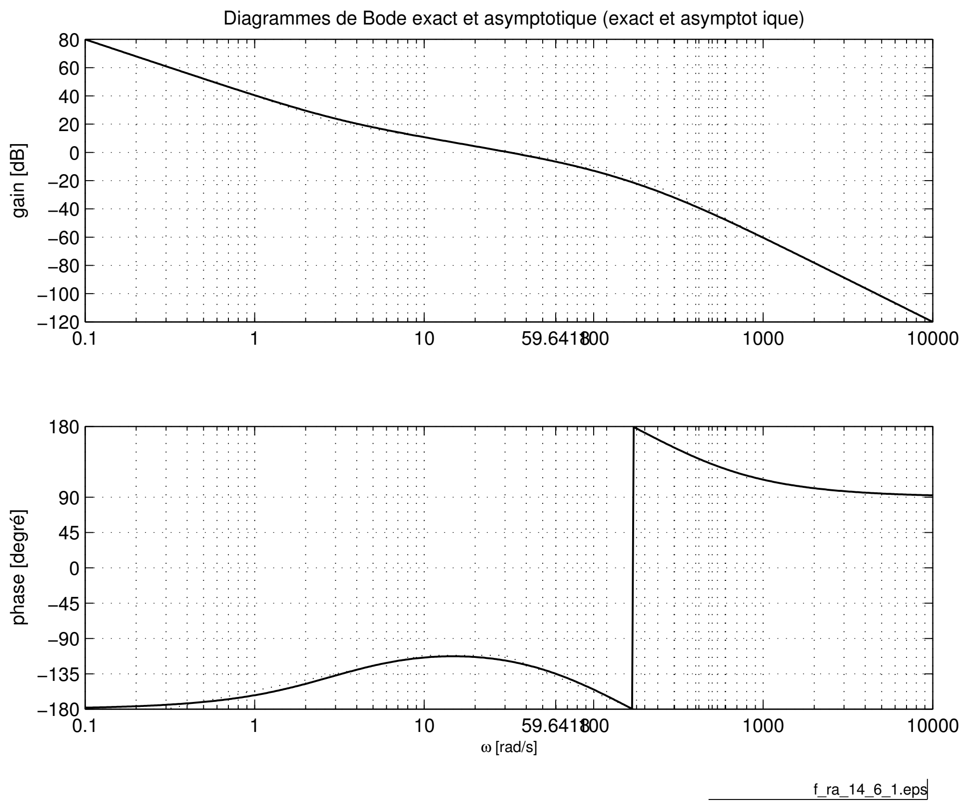
$$N_2(s) = 1 + s$$



14.6

Diagrammes de Bode exact et asymptotique de

$$G(s) = \frac{100}{s^2} \cdot \frac{(1 + s \cdot 0.3333)}{(1 + s \cdot 0.01) \cdot (1 + s \cdot 0.003333)}$$



15 Lieu de Nyquist et diagramme de Bode d'un système asservi

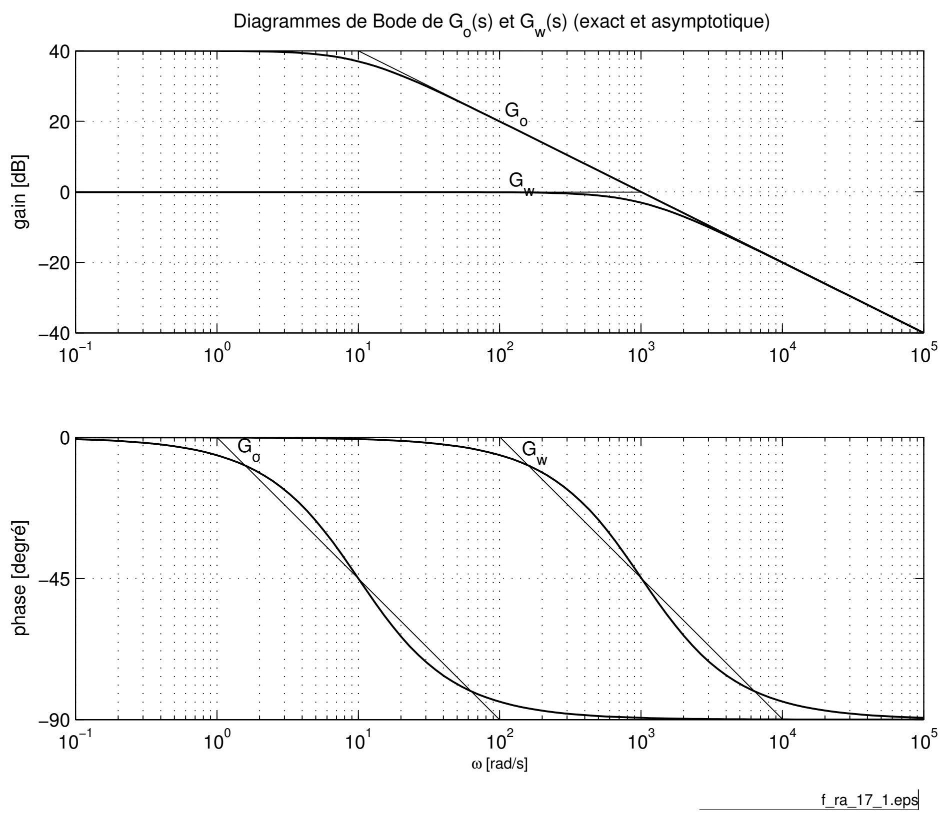
On commence par mettre la fonction de transfert en boucle ouverte $G_o(s)$ sous forme de Bode :

$$G_o(s) = 10 \cdot \frac{100}{s+10} = \frac{100}{1 + s \cdot 0.1} = \frac{K_o}{1 + s \cdot T_o}$$

On en déduit l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée, régulation de correspondance :

$$\begin{aligned} G_w(s) &= \frac{W(s)}{Y(s)} = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{\frac{K_o}{1+s \cdot T_o}}{1 + \frac{K_o}{1+s \cdot T_o}} \\ &= \frac{K_o}{1 + s \cdot T_o + K_o} = \frac{K_o}{1 + K_o} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \frac{T_o}{1+K_o}} = \frac{K_w}{1 + s \cdot T_w} \end{aligned}$$

Le tracé des diagrammes de Bode exact et asymptotique est le suivant :

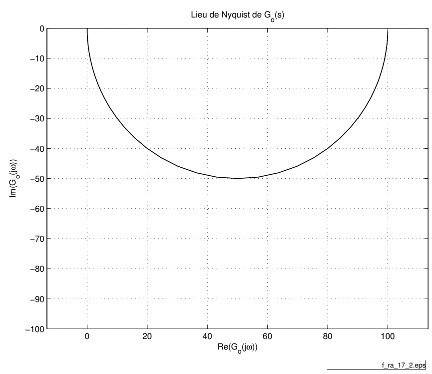


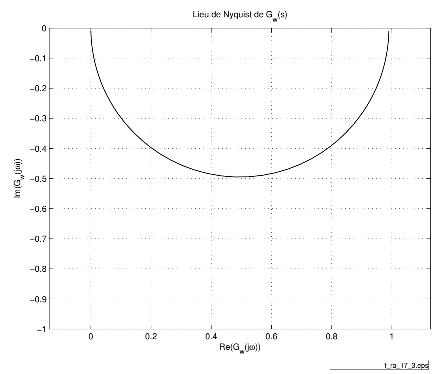
Ces diagrammes confirment que :

1. Tout pendant que le gain de boucle $|G_o(j \cdot \omega)|$ est élevé, la précision en boucle fermée est bonne puisque $|G_w(j \cdot \omega)| \rightarrow 1$;

2. Le système est généralement plus dynamique en boucle fermée qu'en boucle ouverte ;
3. A partir d'une certaine pulsation, de l'ordre de grandeur de la pulsation de coupure à 0 [dB] en boucle ouverte ω_{co} , le gain en boucle fermée chute et rejoint celui en boucle ouverte.

Les lieux de Nyquist correspondants sont tracés ci-dessous et ne font que corroborer ces dires.





16 Lieu de Nyquist et diagramme de Bode d'un système asservi

16.1

Les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée $G_w(s)$ ou $G_v(s)$ sont les valeurs annulant leur dénominateur ; écrire que celui-ci est égal à zéro revient à résoudre l'équation caractéristique $d_c(s)$:

$$d_c\,(s) = 1 + G_o\,(s) = 0$$

La fonction de transfert en boucle ouvert G_o(s) a pour expression :

$$G_o\,(s) = K_p \cdot (1 + s \cdot T_d) \cdot \frac{K_{a2}}{(1 + s \cdot T)} \cdot \frac{K_e}{s} = \frac{K_o}{s} \cdot \frac{(1 + s \cdot T_d)}{(1 + s \cdot T)}$$

avec $K_o = K_p \cdot K_{a1} \cdot K_e$

On peut en déduire soit directement l'équation caractéristique, soit tout d'abord la fonction de transfert en boucle fermée, régulation de correspondance, G$_w$(s) :

$$G_w\,(s) = \frac{Y\,(s)}{W\,(s)} = \frac{G_o\,(s)}{1 + G_o\,(s)} = \frac{\frac{K_o}{s} \cdot \frac{(1+s\cdot T_d)}{(1+s\cdot T)}}{1 + \frac{K_o}{s} \cdot \frac{(1+s\cdot T_d)}{(1+s\cdot T)}} = \frac{K_o \cdot (1 + s \cdot T_d)}{s \cdot (1 + s \cdot T) + K_o \cdot (1 + s \cdot T_d)}$$

$$= \frac{(1 + s \cdot T_d)}{1 + s \cdot \left(T_d + \frac{1}{K_o}\right) + s^2 \cdot \frac{T}{K_o}}$$

Le dénominateur obtenu est à identifier terme à terme au dénominateur de la fonction de transfert d'un système fondamental d'ordre 2 :

$$G_2(s) = \frac{K_2}{1 + \frac{2\cdot\zeta}{\omega_n}\cdot s + \frac{1}{\omega_n^2}\cdot s^2}$$

On a :

$$\begin{aligned}
&\omega_n = \sqrt{\tfrac{K_o}{T}}\\
&\zeta = \tfrac{1}{2}\cdot\left(T_d + \tfrac{1}{K_o}\right)\cdot\omega_n = \tfrac{1}{2}\cdot\left(T_d + \tfrac{1}{K_o}\right)\cdot\sqrt{\tfrac{K_o}{T}}
\end{aligned}$$

On en extrait l'expression de K_o en fonction de ζ :

$$\begin{aligned}
&\zeta^2 = \tfrac{1}{4}\cdot\left(T_d + \tfrac{1}{K_o}\right)^2\cdot\tfrac{K_o}{T}\\
&4\cdot\zeta^2\cdot T\cdot K_o = K_o^2\cdot T_d^2 + 2\cdot T_d\cdot K_o + 1\\
&K_o^2\cdot T_d^2 + K_o\cdot 2\cdot(T_d - 2\cdot\zeta^2\cdot T) + 1 = 0
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
&K_o^2\cdot T_d^2 + K_o\cdot 2\cdot(T_d - 2\cdot\zeta^2\cdot T) + 1 = 0\\
&K_{o1,2} = \tfrac{-2\cdot\left(T_d-2\cdot\zeta^2\cdot T\right)\pm\sqrt{4\cdot(T_d-2\cdot\zeta^2\cdot T)^2-4\cdot T_d^2}}{2\cdot T_d^2}\\
&= \tfrac{-\left(T_d-2\cdot\zeta^2\cdot T\right)\pm\sqrt{(T_d-2\cdot\zeta^2\cdot T)^2-T_d^2}}{T_d^2} = \tfrac{-\left(T_d-2\cdot\zeta^2\cdot T\right)\pm\sqrt{-4\cdot T_d\cdot\zeta^2\cdot T+4\cdot\zeta^4\cdot T^2}}{T_d^2}\\
&= \tfrac{-\left(T_d-2\cdot\zeta^2\cdot T\right)\pm 2\cdot\zeta\cdot\sqrt{T\cdot(-T_d+\zeta^2\cdot T)}}{T_d^2}
\end{aligned}$$

Pour que $\zeta = 0.5$, il faut donc que :

$$K_{o1,2} = \frac{-(1-2\cdot 0.25\cdot 10)\pm 2\cdot 0.5\cdot\sqrt{10\cdot(-1+0.25\cdot 10)}}{1} = \begin{cases} 7.873 \\ 0.127 \end{cases}$$

On choisit ici de manière arbitraire la solution assurant le comportement le plus rapide en boucle fermée. Sachant que la durée de réglage T_{reg} est donnée, pour un système à deux pôles dominants, de manière relativement précise par

$$T_{\text{reg}} = \frac{3}{\delta} = \frac{3}{\zeta\cdot\omega_n}$$

et que selon la relation obtenue précédemment

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_o}{T}}$$

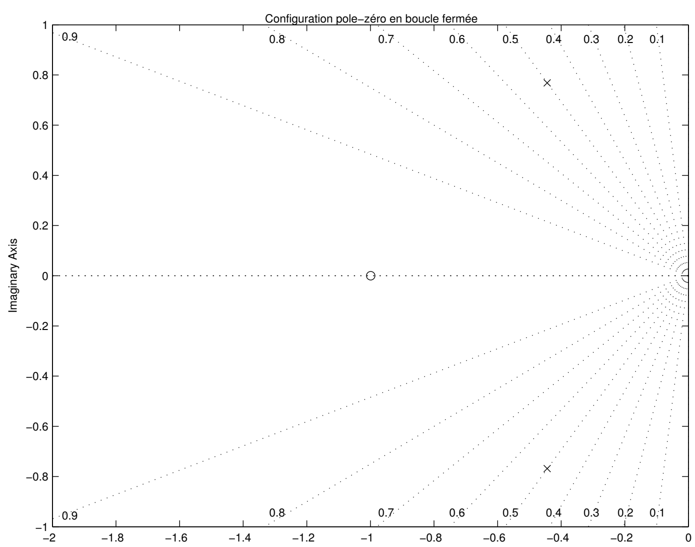
il est évident que c'est la valeur la plus élevée de K_o qui doit être choisie. On en déduit le gain K_p du régulateur :

$$K_p = \frac{K_o}{K_{a1}\cdot K_e} = \frac{7.873}{10\cdot 1} = 0.7873$$

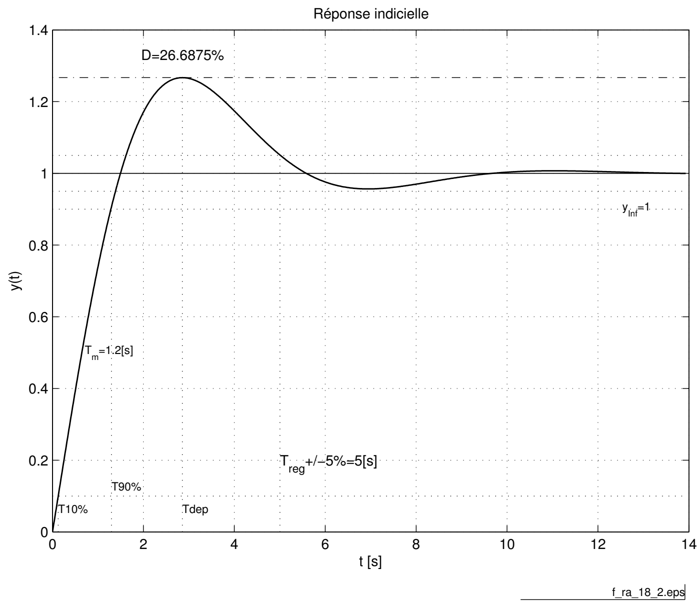
Le programme MATLAB suivant permet de vérifier qu'avec cette valeur de K_p, le taux d'amortissement ζ est bien égal à 0.5.

```
%     Initialisation des parametres
      T = 10;
      Ka2 = 10
      Ke = 1;

      Kp = 0.7873;
      Td = 1;
      a = 1e-3;

%     Fonctions de transfert
%     Regulateur
      [numGc, denGc] = parallel([Kp],[1], Kp*[Td,0],[a*Td,1]);
%     Systeme a regler
      numGa = Ka2*Ke;
      denGa = [T,1,0];
%     Fonctions de transfert en boucle ouverte
      [numGo, denGo] = series(numGc, denGc, numGa, denGa);

%     Fonctions de transfert en boucle fermee regulation de correspondance
      [numGw, denGw] = cloop(numGo, denGo);

%     Calcul du taux d'amortissement zeta a l'aide de la fonction damp
      damp(denGw)

%     Affichage de poles et des courbes equi amortissement avec mise en forme
      figure(1)
      pzmap(numGw, denGw)
      sgrid([0.1:0.1:0.9],[])
      axis([-2,0,-1,1])
      axis('square')
      title('Configuration pole-zéro en boucle fermée')

%     Trace de la reponse indicielle
      figure(2)
      step_me(numGw, denGw)
```

Le tracé de la configuration pôle-zéro en boucle fermée confirme que $\zeta = 0.5$



alors que la réponse indicielle de $G_w(s)$ montre un comportement bien amorti.



16.2

Les fonctions de transfert en boucle ouverte G_o(s) ainsi qu'en boucle fermée $G_w(s)$, régulation de correspondance, ont déjà été calculées au point précédent. La fonction de transfert en boucle fermée G_v(s), régulation de maintien, a quant à elle pour expression :

$$G_v(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{G_{a2}(s)}{1+G_o(s)} = \frac{\frac{K_{a2}\cdot K_e}{s}\cdot\frac{1}{(1+s\cdot T)}}{1+\frac{K_o}{s}\cdot\frac{(1+s\cdot T_d)}{(1+s\cdot T)}} = \frac{K_{a2}\cdot K_e}{s\cdot(1+s\cdot T)+K_o\cdot(1+s\cdot T_d)}$$
$$= \frac{1}{K_p}\cdot\frac{1}{1+s\cdot\left(T_d+\frac{1}{K_o}\right)+s^2\cdot\frac{T}{K_o}}$$

Les diagrammes de Bode des trois fonctions de transfert sont donnés ci-dessous.

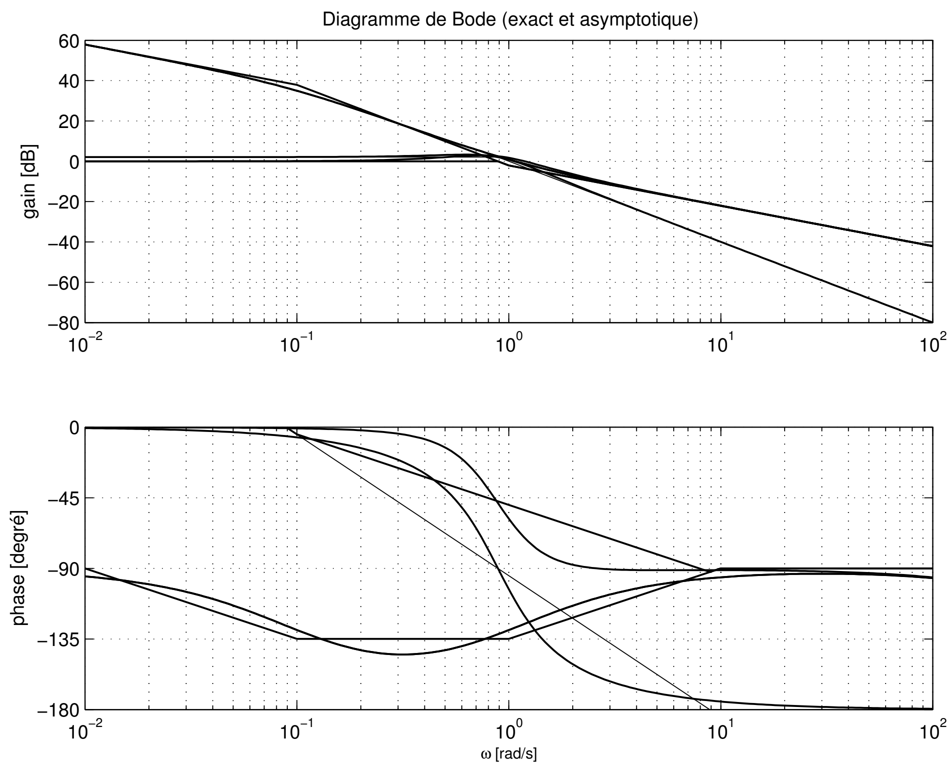


Diagramme de Bode (exact et asymptotique)
gain [dB]
60
40
20
0
−20
−40
−60
−80
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
phase [degré]
0
−45
−90
−135
−180
ω [rad/s]

f_ra_18_3.eps

17 Lieu de Nyquist et diagramme de Bode de systèmes possédant un retard pur

17.1

Diagramme de Nyquist de $G(s) = e^{-s \cdot T_r}$, avec $T_r = 2\,[\mathrm{s}]$:

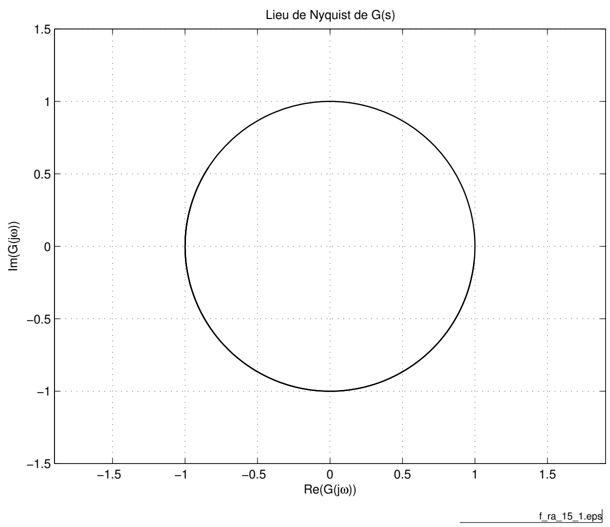
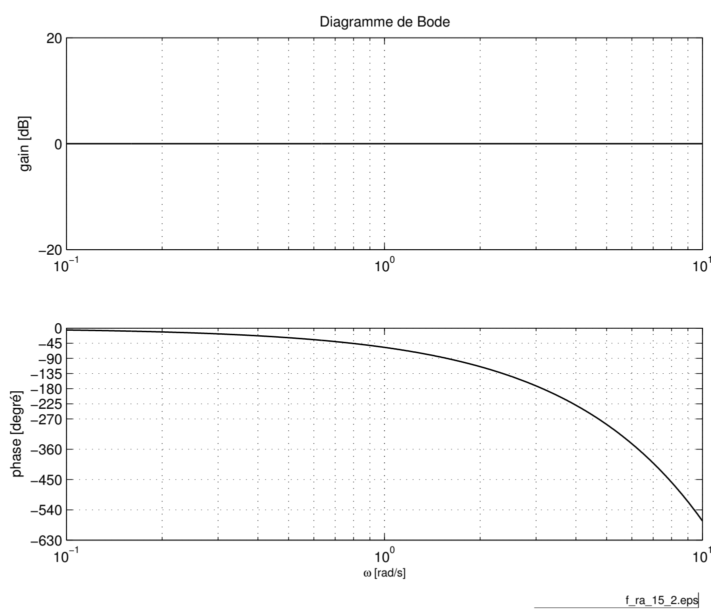
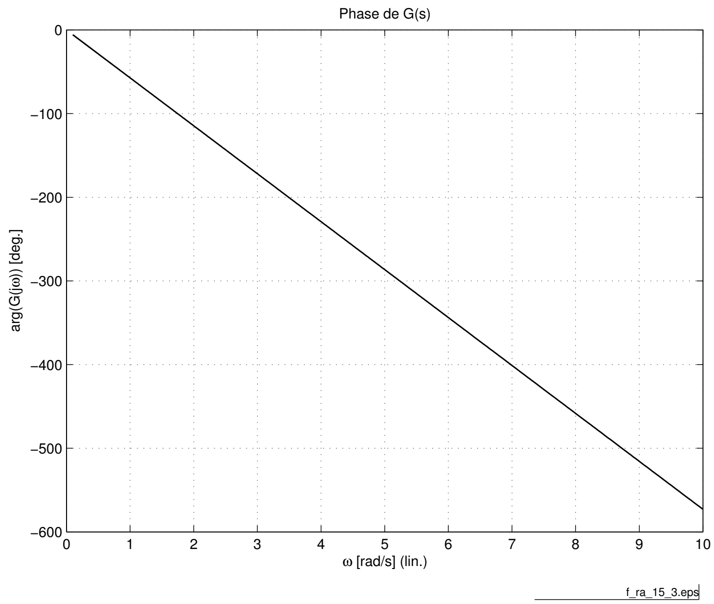


Diagramme de Bode :



La représentation de la phase de l'élément retard pur en échelles linéaires pour la pulsation est la suivante :



18 Lieu de Nyquist

L'examen du diagramme de Bode met en évidence les comportement suivants :
- Pour les basses fréquences, la phase tend vers -180 [°] et le gain vers l'infini.
- A hautes fréquences, le gain tend naturellement vers zéro et la phase vers -180 [°].
- Dans une zone de fréquences intermédiaires, la phase remonte provisoirement, avant de chuter vers -180 [°].