ค. $\int \tan^{m} x \sec^{n} x\,dx$ **หรือ** $\int \cot^{m} x \csc^{n} x\,dx$

เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกคี่

สามารถหาค่าได้โดยใช้เทคนิคการหาปริพันธ์ทีละส่วน ซึ่งจะศึกษาในหัวข้อต่อไป

ง. $\int \tan^{m} x \sec^{n} x\,dx$ **หรือ** $\int \cot^{m} x \csc^{n} x\,dx$

เมื่อ $n = 0,\ m \in \mathbb{Z}^{+}$

พิจารณา $\int \tan^{m} x\,dx$ **หรือ** $\int \cot^{m} x\,dx$

<u>**วิธีที่ 1** โดยการสร้างสูตรลดทอน (Reduction formula)</u>

$$\begin{aligned}
\int \tan^{m} x\,dx &= \int \tan^{m-2} x \tan^{2} x\,dx \\
&= \int \tan^{m-2} x(\sec^{2} x - 1)dx \\
&= \int \tan^{m-2} x \sec^{2} x\,dx - \int \tan^{m-2} x\,dx \\
&= \int \tan^{m-2} x\,d(\tan x) - \int \tan^{m-2} x\,dx \\
&= \frac{\tan^{m-1} x}{m-1} - \int \tan^{m-2} x\,dx
\end{aligned}$$

สูตร! $\int \tan^{m} x\,dx = \frac{\tan^{m-1} x}{m-1} - \int \tan^{m-2} x\,dx$

$$\int \cot^m x\,dx = \frac{-\cot^{m-1} x}{m-1} - \int \cot^{m-2} x\,dx$$

และ

$$\begin{aligned}
\int \cot^m x\,dx &= \int \cot^{m-2} x \cot^2 x\,dx \\
&= \int \cot^{m-2} x(\csc^2 x - 1)\,dx \\
&= \int \cot^{m-2} x \csc^2 x\,dx - \int \cot^{m-2} x\,dx \\
&= \int \cot^{m-2} x[-d(\cot x)] - \int \cot^{m-2} x\,dx \\
&= -\frac{\cot^{m-1} x}{m-1} - \int \cot^{m-2} x\,dx
\end{aligned}$$

วิธีที่ 2 หาค่า $\int \tan^m x\,dx$ โดยการคูณด้วย $\frac{\sec^2 x}{\sec^2 x}$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\int \tan^m x\,dx &= \int \tan^m x \cdot \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x}\,dx \\
&= \int \frac{\tan^m x}{1+\tan^2 x} \cdot \sec^2 x\,dx \\
&= \int \frac{u^m}{1+u^2}\,du \qquad \text{เมื่อ} \quad u = \tan x
\end{aligned}$$

จากนั้นทำการหารยาว $\frac{u^m}{1+u^2}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่ายต่อการหาค่าต่อไป

และหาค่า $\int \cot^m x\,dx$ โดยการคูณด้วย $\frac{\csc^2 x}{\csc^2 x}$ ได้ดังนี้

$$\int \cot^m x\,dx = \int \cot^m x \cdot \frac{\csc^2 x}{\csc^2 x}\,dx$$

$$= \int \frac{\cot^m x}{1+\cot^2 x} \cdot \csc^2 x\,dx$$

$$= -\int \frac{u^m}{1+u^2}\,du \qquad \text{เมื่อ} \quad u = \cot x$$

จากนั้นทำการหารยาว $\frac{u^m}{1+u^2}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่ายต่อการหาค่าต่อไป

วิธีที่ 3 เปลี่ยน

ดน.คี่

$$\int \tan^m x\,dx = \int \frac{\sin^m x}{\cos^m x}\,dx = \int \sin^m x \cos^{-m} x\,dx$$

แล้วหาค่าตามกรณีที่ 1

ตัวอย่าง (สูตรลดทอน) จงหา $\int \tan^5 x\,dx$

วิธีทำ

วิธีที่ 1: จากสูตรลดทอน

$$\int \tan^m x\,dx = \frac{\tan^{m-1} x}{m-1} - \int \tan^{m-2} x\,dx$$

จะได้ว่า

m

$$\int \tan^{5} x\,dx = \frac{\tan^{5-1} x}{5-1} - \int \tan^{5-2} x\,dx$$

$$= \frac{\tan^4 x}{4} - \int \tan^3 x\,dx$$

$$= \frac{\tan^4 x}{4} - \left[\frac{\tan^{3-1} x}{3-1} - \int \tan^{3-2} x\,dx\right]$$

$$= \frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} + \int \tan x\,dx$$

$$= \frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\sec x| + C$$

วิธีที่ 2: ข้อสรุป

$$\tan^5 x = \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} = \sin^5 x \cos^{-5} x$$

$$= \sin^4 x \cos^{-5} x \sin x$$

$$= (1-\cos^2 x)^2 \cos^{-5} x \sin x$$

กำหนดให้ $u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$

นั่นคือ

$$\int \tan^5 x \, dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \cos^{-5} x \sin x \, dx$$

$$= \int (1-u^2)^2 u^{-5} \cancel{\sin x} \frac{du}{(-\cancel{\sin x})}$$

$$= (-1) \int (1-u^2)^2 u^{-5} \, du$$

$$= (-1) \int (1-2u^2+u^4) u^{-5} \, du$$

$$= (-1) \int (u^{-5} - 2u^{-3} + u^{-1}) \, du$$

$$= (-1) \left[\frac{u^{-4}}{(-4)} - \frac{2u^{-2}}{(-2)} + \ln|u| \right] + C$$

$$= \frac{1}{4\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \ln|\cos x| + C$$

$$= \frac{\sec^4 x}{4} - \sec^2 x + \ln|\cos x|^{-1} + C$$

$$= \frac{\sec^4 x}{4} - \sec^2 x + \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + C$$

$$= \frac{\sec^4 x}{4} - \sec^2 x + \ln|\sec x| + C$$

$$= \frac{(\tan^2 x + 1)^2}{4} - (\tan^2 x + 1)$$

$$+ \ln|\sec x| + C$$

$$= \frac{\tan^4 x}{4} + \frac{\tan^2 x}{2} \boxed{+ \frac{1}{4}} - \tan^2 x \boxed{-1}$$

$$+ \ln|\sec x| \boxed{+ C}$$

$$= \frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\sec x| + C_1$$

where $C_1 := \frac{1}{4} - 1 + C = C - \frac{3}{4}$

ตัวอย่าง (สูตรลดทอน) จงหา $\int \cot^{6}(4x)\,dx$

วิธีทำ

$$\int \cot^{m}(ax)\,dx = \int \cot^{m-2}(ax)\cot^{2}(ax)\,dx$$

$$= \int \cot^{m-2}(ax)\left(\csc^{2}(ax)-1\right)dx$$

$u = \cot(ax)$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = -a\csc^{2}(ax)$

$\Rightarrow dx = \frac{du}{(-a)\csc^{2}(ax)}$

$$= \int \cot^{m-2}(ax)\csc^{2}(ax)\,dx - \int \cot^{m-2}(ax)\,dx$$

$$= \int u^{m-2}\cancel{\csc^{2}(ax)}\frac{du}{(-a)\cancel{\csc^{2}(ax)}} - \int \cot^{m-2}(ax)\,dx$$

$$= \frac{1}{(-a)}\int u^{m-2}\,du - \int \cot^{m-2}(ax)\,dx$$

$$= \frac{1}{(-a)}\cdot\frac{u^{m-1}}{m-1} - \int \cot^{m-2}(ax)\,dx$$

ดังนั้น

$$\int \cot^{m}(ax)\,dx = \frac{-\cot^{m-1}(ax)}{a(m-1)} - \int \cot^{m-2}(ax)\,dx$$

1.2.3) $\int \sin(mx)\cos(nx)dx,\ \int \sin(mx)\sin(nx)dx,$ และ $\int \cos(mx)\cos(nx)dx$

สามารถหาค่าได้โดยใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติต่อไปนี้

$$\sin(m+n)x = \sin(mx)\cos(nx) + \sin(nx)\cos(mx) \quad (1)$$

$$\sin(m-n)x = \sin(mx)\cos(nx) - \sin(nx)\cos(mx) \quad (2)$$

$$\cos(m+n)x = \cos(mx)\cos(nx) - \sin(mx)\sin(nx) \quad (3)$$

$$\cos(m-n)x = \cos(mx)\cos(nx) + \sin(mx)\sin(nx) \quad (4)$$

$$(1)+(2): \Longrightarrow \sin(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right]$$

$$(4)-(3): \Longrightarrow \sin(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]$$

$$(3)+(4): \Longrightarrow \cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right]$$

เพื่อเปลี่ยนตัวปริพัทธ์ซึ่งอยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติให้อยู่ในรูปผลบวกหรือผลต่างของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$\int \cos(4x)\cos(7x)dx$$

ตัวอย่าง จงหา $\int \sin(3x)\cos(2x)dx$

วิธีทำ

พิจารณา

$$\sin(3x)\cos(2x) = \frac{1}{2}[\sin(3x+2x)+\sin(3x-2x)]$$

$$= \frac{1}{2}[\sin(5x)+\sin(x)]$$

นั่นคือ

$$\int \sin(3x)\cos(2x)dx = \int \frac{1}{2}[\sin(5x)+\sin(x)]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \sin 5x\,dx + \int \sin x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos 5x}{5}\right) + \frac{1}{2}(-\cos x) + c$$

$$= \frac{-\cos 5x}{10} - \frac{\cos x}{2} + c$$

$\square$

ตัวอย่าง จงหา $\int \cos(4x)\cos(7x)dx$

วิธีทำ

พิจารณา

$$\cos(4x)\cos(7x) = \frac{1}{2}\left[\cos(4x-7x)+\cos(4x+7x)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos(-3x)+\cos(11x)\right]$$

ดังนั้น $\int \cos(4x)\cos(7x)\,dx = \int \frac{1}{2}\left[\cos(-3x)+\cos(11x)\right]dx$

$$= \frac{1}{2}\int \cos(-3x)dx + \frac{1}{2}\int \cos(11x)dx$$

$ds \rightarrow c$

$s \leftarrow \int c$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(-3x)}{(-3)}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(11x)}{11}\right) + C$$

$$= \frac{\sin 3x}{6} + \frac{\sin 11x}{22} + C$$

$\square$

ตัวอย่าง จงหา $\int \sin(3x)\sin(4x)dx$

วิธีทำ ฝึก!

ทดลองทำ ดูนะ $\int \sin x \cos 2x \sin 4x\,dx$

วิธีทำ

$$\sin x\cos 2x\sin 4x = \left[\sin x\cos 2x\right]\sin 4x$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin 3x + \sin(-x)\right]\sin 4x$$

$$= \frac{1}{2}\sin 3x\sin 4x + \frac{1}{2}\sin(-x)\sin 4x$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[\cos(-x) - \cos 7x\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[\cos(-5x) - \cos 3x\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\cos x - \cos 7x + \cos 5x - \cos 3x\right]$$

ดังนั้น

$$\int \sin x\cos 2x\sin 4x\,dx = \frac{1}{4}\left[\int \cos x\,dx - \int \cos 7x\,dx + \int \cos 5x\,dx - \int \cos 3x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sin x - \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 5x}{5} - \frac{\sin 3x}{3}\right]$$

$$+ C$$

$\square$

1.2.1.2.2 การหาปริพันธ์โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ (หน้า 35)

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$\sqrt{a^2-x^2}$ หรือ a^2-x^2

$\sqrt{a^2+x^2}$ หรือ a^2+x^2

$\sqrt{x^2-a^2}$ หรือ x^2-a^2

โดยที่ a เป็นค่าคงตัวที่มีค่าเป็นบวก

พิจารณาตัวอย่างฟังก์ชัน $\sqrt{a^2-x^2}$ การแทนค่า $x = a\cdot\sin\theta$ ทำให้ได้ว่า

พิจารณา

$$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-(a\sin\theta)^2}$$

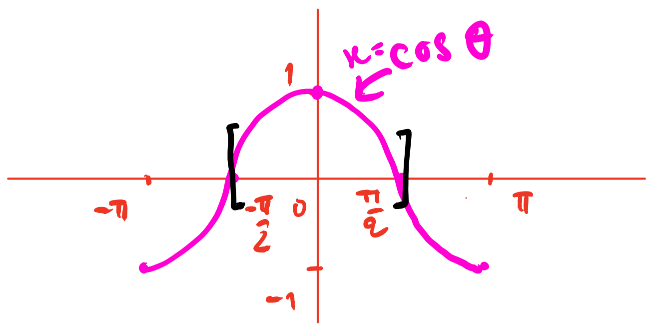
$$= \sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}$$

$$= \sqrt{a^2\cos^2\theta} = |a\cos\theta| \leftarrow \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

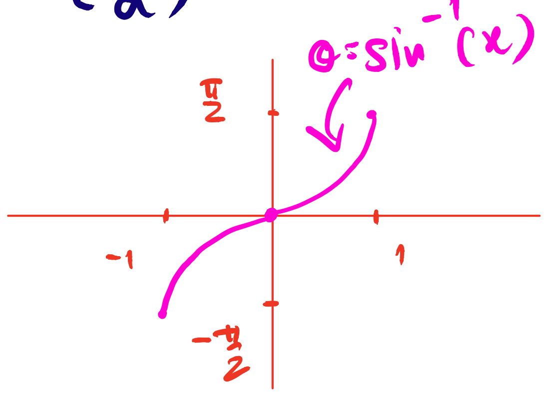
สังเกตว่าฟังก์ชันตรีโกณมิติที่เกี่ยวข้องนั้นอยู่ในรูปค่าสัมบูรณ์

และในขั้นตอนสุดท้าย เราอาจจะต้องแทนค่า x โดย

ทราบแล้วว่า $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$



$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos\theta \geq 0$



ตัวอย่าง จงหา $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

$9 = 3^2$

วิธีทำ

I

พิจารณา $\sqrt{9-x^2} = \sqrt{3^2-x^2}$

กำหนดให้ $\boxed{x = 3\sin\theta}$ โดยที่ $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

จะได้ว่า $\sqrt{9-x^2} = \sqrt{3^2-x^2}$

$$= \sqrt{3^2-(3\sin\theta)^2}$$

$$= \sqrt{3^2(1-\sin^2\theta)}$$

$$= \sqrt{3^2\cos^2\theta} = |3\cos\theta| = 3\cos\theta$$

II

เนื่องจาก $x = 3\sin\theta$ จะได้ $\frac{dx}{d\theta} = \frac{d(3\sin\theta)}{d\theta}$

$$= 3\cos\theta \Rightarrow \boxed{dx = 3\cos\theta\, d\theta}$$

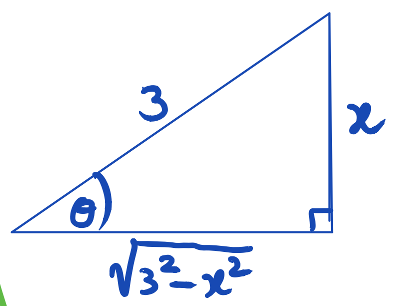
ดังนั้น $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int \frac{3\sin\theta}{\cancel{3\cos\theta}}\,\cancel{3\cos\theta}\,d\theta$

$$= 3\int \sin\theta\, d\theta = -3\cos\theta + C$$

III

พิจารณา จาก $x = 3\sin\theta$ จะได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉากอ้างอิงดังนี้

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{x}{3}$



ดังนั้น $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = -3\cos\theta + C$

$$= (-3)\left(\frac{\sqrt{3^2-x^2}}{3}\right) + C$$

$= -\sqrt{9-x^2} + C$

ในทำนองเดียวกันนี้ เราสามารถใช้การแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติเพื่อหาปริพันธ์ในรูปแบบอื่น ๆ ได้ ดังตารางต่อไปนี้

พจน์	การแทนค่า	ขอบเขตของ θ	ผลลัพธ์
$\sqrt{a^2-u^2}$ หรือ a^2-u^2	$u=a\cdot\sin\theta$	$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$	$a\cdot\cos\theta$
$\sqrt{a^2+u^2}$ หรือ a^2+u^2	$u=a\cdot\tan\theta$	$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$	$a\cdot\sec\theta$
$\sqrt{u^2-a^2}$ หรือ u^2-a^2	$u=a\cdot\sec\theta$	$0\le\theta<\frac{\pi}{2};u\ge a$ $\frac{\pi}{2}<\theta\le\pi;u\le -a$	$a\cdot\tan\theta$

และใช้**เอกลักษณ์**ดังต่อไปนี้

$$1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$$

$$\sec^2\theta-1=\tan^2\theta$$

$$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$$

ตัวอย่าง 1. $\sqrt{1-u^2}$ จะแทนค่าด้วย

2. $\sqrt{u^2-36}$ จะแทนค่าด้วย

3. $\sqrt{9+u^2}$ จะแทนค่าด้วย