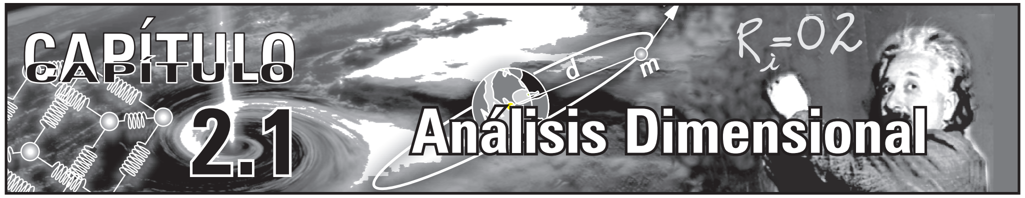


El trabajo científico no siempre se ha realizado bajo las rigurosas formas establecidas por el método científico, es necesario indicar que en muchos casos los descubrimientos se han debido a hechos fortuitos, casualidades, y en algunos casos, a determinados presentimientos.

En estos últimos se ha recurrido al Análisis Dimensional para tratar de confirmar un determinado descubrimiento. La palabra dimensión, por lo general, denota la naturaleza física de una cantidad. [Física I, Serway, Ed. McGraw Hill, México, 1994]

2.1.1. Definiciones Fundamentales

2.1.1A. Notación de las Cantidades Físicas

Es frecuente denotar a las cantidades físicas mediante letras cursivas minúsculas o mayúsculas.

Ejemplo.- Las siguientes son un grupo de cantidades físicas y sus notaciones más frecuentes: distancia (*d*), masa (*m*), tiempo (*t*), velocidad (*v*), aceleración (*a*), fuerza (*F*), trabajo (*W*), etc.

2.1.1B. Definición de Análisis Dimensional

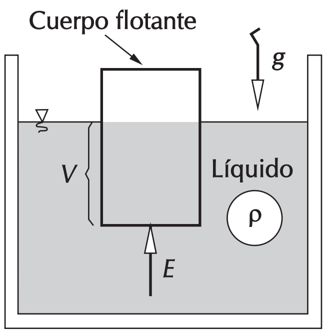
El Análisis Dimensional, llamado también Análisis de las Dimensiones, es un método matemático mediante el cual se puede establecer el carácter de la dependencia que relaciona a un determinado conjunto de cantidades físicas, que participan en un fenómeno dado, comparando sus dimensiones. [Unidades de las magnitudes físicas y sus dimensiones; L. A. Sena, Ed. Mir, 1979].

Ejemplo.- Analicemos la flotación de un cuerpo en un líquido.

Reconocemos que entre las distintas variables que aparecen en el fenómeno están: El *volumen* sumergido V del cuerpo, la *densidad* ρ del líquido, la *aceleración* de la gravedad g del lugar y la acción del líquido sobre el cuerpo, que llamaremos *fuerza* de empuje E. Ahora planteamos la siguiente hipótesis:

$$E = \rho^a g^b V^c$$

Mediante un análisis de las dimensiones se puede establecer que el carácter de la dependencia entre estas cantidades físicas está definida por: $a = b = c = 1$. Luego: $\boldsymbol{E = \rho \cdot g \cdot V}$



2.1.2. Ecuaciones y Fórmulas Físicas

2.1.2A. Ecuación

Dadas dos expresiones matemáticas de una sola variable «x», A(x) y B(x), se llama ecuación a la igualdad A(x) = B(x), que se verifica para determinados valores admitidos de su variable. [Álgebra y Análisis de Funciones Elementales, Potápov, Ed Mir, Moscú, 1993]

Ejemplos.- Las siguientes son algunas ecuaciones:

a) $\sqrt{2x^2-5x-6}=3x$, b) $3\log(x-2)=8$, c) $(x+4)(x-5)=0$

2.1.2B. Ecuación Física

Una Ecuación Física es toda ecuación que se obtiene de definiciones e hipótesis físicas deducidas exclusivamente a partir de ellas. [Física en Perspectiva, Eugene Hecht, Ed. Addison Wesley, USA, 1987]

Ejemplo 1.- Sabiendo que las posiciones inicial y final, de un móvil, en el eje x fueron x_1 y x_2 respectivamente, definimos la cantidad física desplazamiento (Δx) del móvil como:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Ejemplo 2.- Definamos la cantidad física velocidad media (v_m) de un movimiento rectilíneo en el eje x, como la razón entre el desplazamiento Δx y el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$, es decir:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad \Delta x = v_m \cdot \Delta t$$

De donde podemos obtener la siguiente ecuación física: $x_2 = x_1 + v_m \cdot \Delta t$

2.1.2C. Fórmula

Una fórmula es una igualdad en la que una variable se expresa en términos de otras variables. [Álgebra Elemental Moderna, Ph. D. Barnett Rich, Ed. McGraw Hill, México, 1973]

Ejemplos.- Las siguientes son algunas fórmulas conocidas:

a) $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$ b) $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ c) $S = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$ d) $M = C \cdot e^{rt}$

2.1.2D. Fórmula Física

Una fórmula física es una Ley Física Cuantitativa enunciada matemáticamente como una igualdad en la que una cantidad física se expresa en términos de otras cantidades físicas. [Física, Principios con Aplicaciones, Ph. D. Douglas Giancoli, Ed. Prentice Hall, USA, 1997]

Ejemplo 1.- La Segunda Ley de Newton relaciona tres cantidades físicas: la fuerza (*F*), la masa (*m*) y la aceleración (*a*). Los experimentos nos aseguran que se cumple la siguiente ley física: $F = m \cdot a$

Ejemplo 2.- La Ley de los Periodos de Kepler relaciona dos cantidades físicas: el radio (*r*) y el periodo de revolución (*T*). Luego la ley física que los vincula es: $T^2 = k \cdot r^3$, donde k es una constante.

2.1.3. Fórmulas Dimensionales

2.1.3A. Dimensión

El término dimensión alude a la naturaleza física de una cantidad. [Física, Serway & Faughn, Ed. Thomson, 6ta Edición, USA, 2005]

A cada cantidad física básica o derivada le corresponde una dimensión determinada. Por ejemplo:

a) La distancia entre dos puntos tiene como dimensión la longitud.

b) La duración de un evento tiene como dimensión el tiempo, etc.

2.1.3B. Dimensiones de las Cantidades Físicas Fundamentales

Llamaremos dimensiones de las cantidades físicas fundamentales a los símbolos que las representan.

CANTIDAD FÍSICA BÁSICA	LONGITUD	MASA	TIEMPO	TEMPERATURA TERMODINÁMICA	INTENSIDAD DE CORRIENTE	INTENSIDAD LUMINOSA	CANTIDAD DE SUSTANCIA
DIMENSIÓN	L	M	T	Θ	I	J	N

Al conjunto formado por los símbolos: L, M, T, Θ, I, J, N, se le conoce con el nombre de *Dimensiones Físicas Fundamentales* o simplemente Dimensiones Fundamentales.

Es frecuente el uso de los corchetes [ ] para denotar las dimensiones de una cantidad física.

Ejemplo.- ¿Qué significa que la notación dimensional de la distancia sea $[d] = L$?

Esto significa que toda distancia como la altura de un árbol, la base de un triángulo, la profundidad de una piscina, el radio de un círculo, etc, tienen como dimensión la longitud.

Obsérvese que, en el caso de la distancia, el exponente de la dimensión L es 1. Para otras cantidades físicas la dimensión puede estar dada por L^2, L^3,... etc. Las dimensiones de una cantidad física derivada suele estar formada por una o varias dimensiones físicas fundamentales.

En adelante, al referirnos a la dimensión de una cantidad física nos estamos refiriendo a la dimensión ó dimensiones físicas fundamentales de las que está compuesta incluyendo sus respectivos exponentes. [*Física I,Tipler, Ed. Reverté, Barcelona, 2001*]

2.1.3C. Fórmula Dimensional

Si x es una cantidad física derivada, la fórmula dimensional o dimensiones de x, denotada como [x], es una expresión matemática formada por las dimensiones fundamentales que la cantidad física posee. [Unidades de las magnitudes físicas y sus dimensiones; L. A. Sena, Ed. Mir, 1979].

En general, si *x* es una cantidad física derivada, su fórmula dimensional viene dada por:

$$\boxed{[x] = L^a M^b T^c \Theta^d I^e J^f N^g}$$, donde *a, b, c ..., g* son números reales.

Ejemplo.- Si *A*, *v*, y *D*, son cantidades físicas como área, velocidad y densidad, respectivamente, sus dimensiones o fórmulas dimensionales, que demostraremos después, son:

$$[A] = L^2\ ;\ [v] = LT^{-1}\ ;\ [D] = LM^{-3}$$

2.1.4. Obtención de Fórmulas Dimensionales

«Las fórmulas dimensionales se obtienen a partir de relaciones matemáticas o físicas».

Si conocemos una relación matemática en donde figura una cantidad física, cuya fórmula dimensional pretendemos conocer, lo que haremos es sustituir las dimensiones fundamentales de las demás cantidades físicas involucradas y despejar, si fuera el caso.

Ejemplos.- Determinemos las fórmulas dimensionales de las siguientes cantidades físicas:

Cantidad Física Derivada	Fórmula Matemática, Ecuación Física o Fórmula Física	Fórmula Dimensional	Unidades Físicas
Área	$A = b\cdot h\ ;\ \begin{cases} h = \text{Altura} \\ b = \text{Base} \end{cases}$	$[A] = L\cdot L \rightarrow [A] = L^2$	m^2
Volumen	$V = A\cdot h\ ;\ \begin{cases} A = \text{Área de la base} \\ h = \text{Altura} \end{cases}$	$[A] = L\cdot L\cdot L \rightarrow [A] = L^3$	m^3
Velocidad	$v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}\ ;\ \begin{cases} \Delta x = \text{Desplazamiento} \\ \Delta t = \text{Variación de tiempo} \end{cases}$	$[v] = \dfrac{L}{T} \rightarrow [v] = LT^{-1}$	$m\cdot s^{-1} = m/s$
Aceleración	$a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}\ ;\ \begin{cases} \Delta v = \text{Variación de velocidad} \\ \Delta t = \text{Variación de tiempo} \end{cases}$	$[a] = \dfrac{LT^{-1}}{T} \rightarrow [a] = LT^{-2}$	$m\cdot s^{-2} = m/s^2$
Fuerza	$F = ma\ ;\ \begin{cases} m = \text{Masa} \\ a = \text{Aceleración} \end{cases}$	$[F] = [m][a] \rightarrow [F] = MLT^{-2}$	$kg\ m\cdot s^{-2} = N$

Ejemplos.- Determinar las fórmulas dimensionales de:

a) El trabajo (W), si: $W = d\cdot F$

$$[W] = [F][d] \rightarrow [W] = LMT^{-2}\cdot L \quad \therefore \quad [W] = L^2MT^{-2}$$

b) La potencia (Pot), si: $\text{Pot} = \dfrac{W}{t}$

$$[\text{Pot}] = \frac{[W]}{[t]} \rightarrow [\text{Pot}] = \frac{L^2MT^{-2}}{T} \quad \therefore \quad [\text{Pot}] = L^2MT^{-3}$$

c) La densidad (ρ), si: $\rho = \dfrac{m}{V}$

$$[\rho] = \frac{[m]}{[V]} \rightarrow [\rho] = \frac{M}{L^3} \quad \therefore \quad [\rho] = L–3M$$

d) La energía cinética (E_c), si: $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$

$$[E_c] = \left[\tfrac{1}{2}\right][m][v]^2 \rightarrow [E_c] = 1\cdot M\cdot (LT^{-1})^2$$

$$\therefore \quad [E_c] = L^2MT^{-2}$$

¿Qué significa Δ?

Este símbolo no se debe interpretar como lo que parece, un triángulo, si no como una forma de notación matemática referida a una variación. Así ΔT o Δv significan:

$$\Delta T = T_f - T_i\ ;\ \Delta v = v_f - v_i$$

Los subíndices i, f se refieren a los valores inicial y final, respectivamente, de las cantidades físicas dadas.

Si «x» es una cantidad física derivada se cumple que:

$$[\Delta x] = [x]$$

2.1.5. Expresiones Dimensionales

2.1.5A. Definición

Llamaremos expresión dimensional a la expresión matemática cuyos términos son dimensiones físicas fundamentales o variables que representan a fórmulas dimensionales.

Ejemplo.- Las siguientes son expresiones dimensionales:

a) $L^2 + L^2 + L^2$ b) $M^x + M^y + M^z$ c) $L^2T^{-3} - L^2T^{-3}$

d) $L^3T^{-2} - L[x] + [y]T^2$ e) $\sqrt{ML^3T^{-2} + M[p]} - [q]T^{-3}$ f) $\dfrac{L^3T^{-1} + [x]^2T^{-1}}{[y]^2M}$

2.1.5B. Regla Básica

«Las dimensiones de las cantidades físicas, así como sus unidades, se pueden tratar como cantidades algebraicas y cumplen con las reglas de todas las operaciones matemáticas a excepción de la adición y sustracción». [Física I, Serway, Ed. McGraw Hill, México, 1994]

En efecto, la suma o diferencia de dos cantidades físicas no tiene sentido si éstas son de distinta naturaleza. Por tanto la suma o diferencia de dos cantidades físicas de igual naturaleza da por resultado una tercera cantidad física de igual naturaleza que ellas.

Ejemplo.- Efectuemos las operaciones indicadas entre las siguientes cantidades físicas:

a) $30\ m^2 + 45\ m^2 = 75\ m^2$, esto significa que: $L^2 + L^2 = L^2$

b) 67 m/s - 20 m/s = 47 m/s , esto significa que: $LT^{-1} - LT^{-1} = LT^{-1}$

Nota.- Debe quedar establecido que podemos multiplicar o dividir dos cantidades físicas cualesquiera. Asimismo a una cantidad física la podemos elevar a cualquier exponente real.

2.1.5C. Cantidad Adimensional

Una cantidad adimensional es toda expresión numérica que carece de dimensiones y unidades físicas, de modo que su fórmula dimensional es uno.

Si una cantidad adimensional carece de unidades es porque también carece de dimensiones físicas fundamentales. Luego en su fórmula dimensional se tendrá que:

$$[\text{Cantidad Adimensional}] = L^0\, M^0\, T^0\, Q^0\, I^0\, J^0\, N^0 \quad \therefore \quad \boxed{[\text{Cantidad Adimensional}] = 1}$$

Todos los números en sus diferentes formas: números reales, funciones numéricas (funciones trigonométricas, logarítmicas, exponenciales, ... etc), ángulos planos y ángulos sólidos, expresados en *radianes y estereoradianes* respectivamente, son *cantidades adimensionales*.

Ejemplo.- Las siguientes son cantidades adimensionales:

$$[\sqrt{3}] = 1 \quad ; \quad [2\pi\ rad] = 1 \quad ; \quad [\text{sen } 45°] = 1 \quad ; \quad [\log 19] = 1$$

En general se cumple que:

$$\left.\begin{array}{c} y = f(x) \\ \text{Número real} \uparrow \quad \uparrow \text{Número real} \end{array}\right\} \rightarrow \quad [y] = 1 \ \wedge\ [x] = 1$$

2.1.6. Ecuaciones Dimensionales

Son aquellas relaciones de igualdad entre dos expresiones dimensionales que se verifican para determinadas dimensiones físicas fundamentales de sus variables o para determinados valores de sus exponentes.

Debe quedar claro que en una ecuación dimensional existen dos *miembros*, que son expresiones dimensionales, ligadas por el símbolo de igualdad (=), y en donde las incógnitas pueden ser: las dimensiones fundamentales de sus variables o los valores de sus exponentes desconocidos.

Ejemplos.- Las siguientes son ecuaciones dimensionales:

a) $\underbrace{L^3M - L[X]}_{\text{1er miembro}} = \underbrace{[Y]T^2 + [Z]^3M}_{\text{2do miembro}}$, aquí las incógnitas son las variables: [*X*] , [*Y*], [*Z*]

b) $\underbrace{L^s \cdot T^3 \cdot \Theta^{-2}}_{\text{1er miembro}} = \underbrace{L^4 \cdot T^r \cdot \Theta^{2r-u}}_{\text{2do miembro}}$, aquí las incógnitas son los valores de los exponentes: *r*, *s*, *u*.

Resolver una ecuación dimensional es determinar las dimensiones físicas fundamentales de sus variables o los valores numéricos de sus exponentes que verifican la igualdad de las expresiones dimensionales.

En términos generales una fórmula física puede dar lugar a una ecuación dimensional si al menos una de las cantidades físicas o algún exponente de aquella resulta ser una incógnita.

2.1.7. Principio de Homogeneidad Dimensional

«Una ecuación física, una fórmula física o una ecuación dimensional, se dice que es dimensionalmente homogénea si sus miembros tienen las mismas dimensiones». [La Mecánica de los Fluidos, I. Shames, McGraw Hill, México, 1986]

Evidentemente una ecuación o fórmula física será *dimensionalmente homogénea* o *correcta* si los términos que componen una adición o sustracción, en cualquiera de sus miembros, son de iguales dimensiones. Asimismo en ambos miembros de una ecuación dimensionalmente correcta deben aparecer las mismas dimensiones físicas fundamentales afectadas de los mismos exponentes.

Ejemplo 1.- Determinar las dimensiones de las variables si las ecuaciones son homogéneas:

a) $L^3 + L[X] = [Y]L^2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} L[X] = L^3 & \rightarrow \quad [X] = L^2 \\ [Y]L^2 = L^3 & \rightarrow \quad [Y] = L \end{cases}$

b) $L^{-3}M - L[X] = [Y]T^2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} L[X] = L^{-3}M & \rightarrow \quad [X] = L^{-4}M \\ [Y]T^2 = L^{-3}M & \rightarrow \quad [Y] = L^{-3}MT^{-2} \end{cases}$

Observación.- Estos ejemplos sugieren que es más práctico aplicar el principio de homogeneidad haciendo que los términos de una adición o sustracción se igualen entre sí.

$$\text{Si:} \quad [A] + [B] = [C] - [D] \quad \rightarrow \quad [A] = [B] = [C] = [D]$$

Ejemplo 2.- Determinemos los exponentes indicados en cada ecuación dimensional si éstas son homogéneas:

a) $L^a = L^2 T^{3b} \rightarrow \begin{cases} \text{De L: } a = 2 \\ \text{De T: } b = 0 \end{cases}$ b) $T^a \Theta^{b-2} = T^{-3}\Theta^{-1+a} \rightarrow \begin{cases} \text{De T: } a = -3 \\ \text{De } \Theta\text{: } b-2 = -1+a \rightarrow b = -2 \end{cases}$

Finalmente, en física existen fórmulas en donde algunas cantidades físicas aparecen en los exponentes. En tales casos el análisis dimensional exige que los exponentes sean tratados como cantidades adimensionales ya que, según la definición de fórmula dimensional, estos son números reales.

Ejemplo 3.- Sea la siguiente una fórmula física dimensionalmente correcta:

$$Pa = mv^2 d^{\frac{x \cdot y}{z}} \quad \rightarrow \quad \left[\frac{x \cdot y}{z}\right] = 1$$

2.1.8. Teorema Fundamental del Análisis Dimensional

Si una cantidad física (a) está vinculada con otras (b, c, d), entonces éstas se pueden relacionar mediante una constante numérica (k), tal que:

$$a = k \cdot b^x \cdot c^y \cdot d^z \qquad \textbf{Fórmula Empírica}$$

donde x, y, z tienen valores apropiados que deben verificar la igualdad dimensional.

Respecto del valor de la constante k diremos que se calcula a partir de los valores que asumen todas las variables para un determinado caso. Cuando la constante no posee unidades físicas se llama *constante numérica* y cuando sí los tiene se llama *constante física*.

Ejemplo.- Determinar una fórmula empírica para la aceleración centrípeta a_c de una partícula que se mueve uniformemente por una curva de radio R con una velocidad de magnitud v.

Bajo el supuesto que a_c depende de v y R, planteamos:

$$a_c = k \cdot v^x \cdot R^y \quad \rightarrow \quad [a_c] = [k][v]^x \cdot [R]^y$$

$$LT^{-2} = 1 \cdot (LT^{-1})^x \cdot L^y \rightarrow LT^{-2} = L^{x+y} \cdot T^{-x} \rightarrow x = 2 \wedge y = -1 \rightarrow a_c = kv^2 \cdot R^{-1} \quad \therefore \quad a_c = k\frac{v^2}{R}$$

2.1.9. Aplicaciones del Análisis Dimensional

El Análisis Dimensional no es un método omnipotente, que todo lo puede resolver, pues sus posibilidades resultan ser limitadas, sin embargo este método nos permite:

1ro.- Determinar si una ecuación física es o no correcta.

Ejemplo.- Si v_i, v_f, a y t son velocidades, aceleración y tiempo respectivamente, determinemos si la fórmula: $v_f^2 = v_i^2 + 2at^2$, es correcta.

$$[v_f]^2 = [v_i]^2 + [2][a][t]^2 \rightarrow (LT^{-1})^2 = (LT^{-1})^2 + 1 \cdot (LT^{-2})T^2 \rightarrow L^2T^{-2} = L^2T^{-2} + L : \text{Es incorrecta.}$$

Esta última ecuación dimensional es incorrecta porque la suma indicada no se puede realizar.

2do.- Crear modelos reducidos, llamados maquetas, y el estudio de sus posibles cambios.

Este último alcance ha permitido desarrollar una rama de la física llamada Hidrodinámica.

PROBLEMAS RESUELTOS

Prob. 01

Dada la siguiente ecuación dimensional, se pide determinar las dimensiones de [A/B].

$$[A]L^2T^{-1} + [B]M = (M^{-1}[C] - [B]^2)L^{-3}$$

RESOLUCIÓN

Aplicando el principio de homogeneidad en el 1er miembro de la ecuación dada, se tiene:

$$[A]L^2T^{-1} = [B]M \quad \rightarrow \quad \frac{[A]}{[B]} = \frac{M}{L^2T^{-1}}$$

$$\therefore \quad \left[\frac{A}{B}\right] = \mathbf{L^{-2}MT}$$

Prob. 02

Sabiendo que la siguiente ecuación es dimensionalmente correcta, se pide determinar las dimensiones de "k":

$$L^2[k] = L^3[x] - M^6[k]^3$$

RESOLUCIÓN

Se observa que si aplicamos el principio de homogeneidad en ambos miembros, se tendrá que:

$$L^2[k] = M^6[k]^3 \quad \rightarrow \quad L^2 = M^6[k]^2$$

$$\rightarrow \frac{L^2}{M^6} = [k]^2 \quad \rightarrow \quad L^2M^{-6} = [k]^2$$

$$\therefore \quad \mathbf{[k] = LM^{-3}}$$

Prob. 03

Determinar las dimensiones de R en la siguiente ecuación dimensionalmente correcta:

$$R = A \bullet B + \frac{C}{A^2B - \text{sen } 30}$$

Donde: A = Altura

RESOLUCIÓN

Aplicando el principio de homogeneidad se establece que:

$$[R] = [A.B] \qquad \ldots (1)$$

Si aplicamos el mismo principio en el denominador de C, y recordando que [A] = L , tendremos:

$$[A]^2 \cdot [B] = [\text{sen } 30°] \quad \rightarrow \quad L^2 . [B] = 1$$

$$\rightarrow \quad [B] = L^{-2} \qquad \ldots (2)$$

Reemplazando (2) en la relación (1):

$$[R] = L \cdot L^{-2} \qquad \therefore \quad \mathbf{[R] = L^{-1}}$$

Prob. 04

Determinar las dimensiones de A.B, si la siguiente ecuación es dimensionalmente correcta:

$$V = A \cdot t + B^{-1} \cdot d$$

Donde: V = volumen, t = tiempo y
d = densidad.

RESOLUCIÓN

Si aplicamos el principio de homogeneidad (P.H) en el 2do miembro de la ecuación dada, tendremos:

$$[A \cdot t] = [B]^{-1} \cdot [d] \quad \rightarrow \quad [A] \cdot [t] = [B]^{-1} \cdot [d]$$

$$\rightarrow \quad [A]T = [B]^{-1} \cdot L^{-3}M \rightarrow [A][B] = L^{-3}M/T$$

$$\therefore \quad \mathbf{[A \cdot B] = L^{-3}MT^{-1}}$$

Prob. 05

La energía (E) de un fotón de luz viene dada por la relación: E = hf ; donde «f» es la frecuencia y «h» es la Constante de Planck ¿Cuál es la fórmula dimensional de «h»? Considere que las dimensiones de la frecuencia son las inversas que las del tiempo.

RESOLUCIÓN

Elaborando la ecuación dimensional de la relación dada, tendremos :

$$[E] = [h]\cdot[f] \quad \rightarrow \quad L^2\cdot M\cdot T^{-2} = [h]\cdot T^{-1}$$

$$\frac{L^2MT^{-2}}{T^{-1}} = [h] \qquad \therefore \qquad \mathbf{[h] = L^2MT^{-1}}$$

Prob. 06

Sabiendo que X = mav, donde: m = masa, a = aceleración, y , v = velocidad; se pide determinar la cantidad física representada por X?

RESOLUCIÓN

Un modo de reconocer a qué magnitud corresponde X, sería indagando sus dimensiones, esto es, obteniendo su fórmula dimensional, y comparándola con la lista de fórmulas dimensionales que se muestran en el ítem 2.2.4. Veamos:

$$[X] = [m]\cdot[a]\cdot[v]$$

$$[X] = M\cdot L\cdot T^{-2}\cdot LT^{-1} \quad \rightarrow \quad [X] = L^2MT^{-3}$$

De acuerdo con lo expuesto en el ítem 2.2.4 se puede reconocer que:

$\therefore$ **"X" es potencia**

Prob. 07

Determinadas pruebas experimentales, nos han permitido comprobar que: E = ρ·g·V, donde: ρ = densidad, g = aceleración de la gravedad, y, V = volumen. Se pide indicar cuáles serían las unidades de «E» en el S.I.

RESOLUCIÓN

Lo que haremos aquí, será deducir primero la fórmula dimensional para E, para ello procederemos tal como se hizo en el ejercicio anterior.

$$[E] = [D]\cdot[g]\cdot[V]$$

$$[E] = (L^{-3}M)\cdot(LT^{-2})\cdot(L^3)$$

$$[E] = LMT^{-2}$$

Finalmente reemplazamos cada dimensión física fundamental por su respectiva unidad básica, obteniéndose:

$$(E) = m\cdot kg\cdot s^{-2}$$

Prob. 08

Sabiendo que la siguiente ecuación es dimensionalmente correcta:

$$Am = (B^2 - a\,e)t$$

donde: m = masa, a = aceleración, e = distancia, y, t = tiempo; se pide determinar las dimensiones de A y B respectivamente.

RESOLUCIÓN

En casos como estos, es preferible empezar la resolución con el análisis de la ecuación dimensional de la expresión dada, para que allí hagamos uso del Principio de Homogeneidad. Veamos:

$$[A]\cdot[m] = ([B]^2 - [a]\cdot[e])\cdot[t]$$

$$[A]\,M = ([B]^2 - LT^{-2}\cdot L)T \qquad \ldots(*)$$

$$\rightarrow \quad [B]^2 = L^2T^{-2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{[B] = LT^{-1}}$$

Reemplazamos en (*): $[A]\cdot M = (L^2T^{-2})T$

$$\therefore \quad \mathbf{[A] = L^2M^{-1}T^{-1}}$$

Prob. 09

Encontrar las dimensiones de A, B y C, para que la ecuación mostrada sea dimensionalmente correcta, donde: h = altura; v = velocidad; a = aceleración lineal.

$$A - \frac{\sqrt{B}}{h} = \left(\frac{v\bullet C}{A + at}\right)m$$

RESOLUCIÓN

Empleando el mismo procedimiento del ejercicio anterior y haciendo uso de la última observación, tendremos:

(γ)

$$[A] - \frac{\sqrt{[B]}}{L} = \left(\frac{LT^{-1}[C]}{[A] + LT^{-2}T}\right)M$$

(α) (β)

De (β), deducimos que: $\mathbf{[A] = LT^{-1}}$

Empleando el resultado obtenido, tendremos en (α):

$$\frac{\sqrt{[B]}}{L} = [A] \rightarrow \frac{[B]}{L^2} = \left(LT^{-1}\right)^2 \quad \therefore \ \mathbf{[B] = L^4T^{-2}}$$

Sustituyendo los resultados obtenidos en (γ) tenemos:

$$LT^{-1} = \frac{LT^{-1}\cdot[C]\cdot M}{LT^{-1}} \qquad \therefore \quad \mathbf{[C] = LM^{-1}T^{-1}}$$

Prob. 10

Calcular el valor de x que permite que la siguiente expresión sea dimensionalmente correcta:

$$K = \frac{1}{x}I\cdot\omega^x$$

Donde: (I) = m^2· kg ; (ω) = rad/s ;
K = energía.

RESOLUCIÓN

De acuerdo con el enunciado, podemos inferir que *x* es un número, y por tanto, es una cantidad adimensional. Esta observación nos permite asegurar que «*x*» en la ecuación dimensional deberá ser sustituida por la unidad (1) cuando ella aparezca como coeficiente, sin embargo, si ésta aparece en el exponente, entonces conservará su posición y valor, y deberá ser tratado como cualquier otro exponente. Observamos también que las cantidades I y ω, tienen dimensiones que pueden ser deducidas de sus respectivas unidades; veamos:

$$(I) = m^2\cdot kg \quad \rightarrow \quad [I] = L^2\cdot M$$

$$(w) = rad/s \quad \rightarrow \quad [w] = T^{-1}$$

A continuación, elaboramos la ecuación dimensional a partir de la relación dada:

1ro) $\quad [K] = \left[\frac{1}{x}\right]\cdot[I]\cdot[\omega]^x$

$$\rightarrow \quad L^2MT^{-2} = 1\cdot L^2M\cdot(T^{-1})^x$$

2do) Simplificando, se tiene: $\quad T^{-2} = T^{-x}$

3ro) Igualando exponentes, se concluye que:

$$-x = -2 \qquad \therefore \qquad \mathbf{x = 2}$$

Prob. 11

Determinar la medida de «θ» para que la expresión mostrada sea dimensionalmente correcta, donde: f = frecuencia; l = longitud; y; g = Aceleración de la gravedad.

$$f = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\pi}\left(\frac{l}{g}\right)^{-\operatorname{sen}\theta}$$

La frecuencia es la inversa del periodo

RESOLUCIÓN

Primero elaboramos la ecuación dimensional de la relación dada, respetándose el valor del exponente: -sen θ, que es, por coincidencia, quien está vinculado con la incógnita original θ. A continuacion aplicamos el Principio de Homogeneidad para determinar primero el valor de sen θ, de donde identificaremos la medida del ángulo θ que le corresponde. Veamos:

1ro) Ecuación dimensional:

$$[f] = \left[\frac{\operatorname{sen}\theta}{\pi}\right]\left[\frac{l}{g}\right]^{-\operatorname{sen}\theta}$$

2do) Y en base al dato y al cuadro de fórmulas dimensionales del item 2.2.4, se tiene:

$$T^{-1} = 1\cdot\left(\frac{L}{LT^{-2}}\right)^{-\operatorname{sen}\theta}$$

3ro) Efectuando las operaciones indicadas y simplificando, se tendrá:

$$T^{-1} = T^{-2\operatorname{sen}\theta}$$

4to) Y por el Principio de Homogeneidad, igualamos los exponentes:

$$-1 = -2 \operatorname{sen}\theta$$

5to) Despejando el sen θ, se obtiene:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad \boldsymbol{\theta = 30^o}$$

Prob. 12

Deducir las dimensiones de «B», para que la siguiente expresión sea dimensionalmente correcta:

$$k = n \bullet A^{B \bullet t^2}$$

donde: n = Cantidad de sustancia, t = tiempo.

RESOLUCIÓN

Puesto que nuestra incógnita principal B, se ubica en el exponente diremos que éste es necesariamente un número, es decir, es una cantidad adimensional puesto que éstas están definidas solo para números reales. Observa:

$$(\text{Cantidad física})^{\text{Exponente}} \rightarrow [\text{Exponente}] = 1$$

1ro) Ecuación dimensional del exponente:

$$[Bt^2] = 1$$

2do) Sustituyendo el dato de t:

$$[B] \cdot T^2 = 1$$

3ro) Despejando [B], se obtiene finalmente:

$$\therefore \quad \mathbf{[B] = T^{-2}}$$

Prob. 13

Identificar las dimensiones de A y B, si la siguiente ecuación física es dimensionalmente correcta:

$$A = p \bullet tan\left(\frac{Bm}{A}\right)$$

donde: p = masa .velocidad, m = masa.

RESOLUCIÓN

Reconociendo que la ecuación dada contiene una función numérica, llamada tangente, se debe cumplir que:

$$[A] = [p]\overbrace{\left[\tan\left(\frac{Bm}{A}\right)\right]}^{1}$$

$$\rightarrow [A] = [p]\cdot 1 \quad \rightarrow [A] = [m][v] = M \cdot LT^{-1}$$

$$\therefore \quad \mathbf{[A] = LMT^{-1}}$$

Asimismo la Ecuación Dimensional de la variable angular se escribirá así:

$$\left[\frac{Bm}{A}\right] = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{[B]\cdot M}{LMT^{-1}} = 1$$

$$\therefore \quad \mathbf{[B] = LT^{-1}}$$

Prob. 14

Sabiendo que la siguiente ecuación es dimensionalmente correcta, donde: h = altura, ¿cuál es la fórmula dimensional de P?

$$P = \sqrt{z\,(h+z)} \bullet \left(\frac{y}{z} + log\ x\right)(y + A)$$

RESOLUCIÓN

Si aplicamos ordenadamente el P.H en cada expresión entre paréntesis, tendremos:

a) De: $(h + z) \quad \rightarrow \quad [h] = [z] \quad \rightarrow \quad [z] = L$

b) De: $\left(\frac{y}{z} + log\ x\right) \rightarrow \frac{[y]}{[z]} = 1 \rightarrow [y] = L$

c) De: $(y + A) \quad \rightarrow \quad [y] = [A] = L$

Luego, al reemplazar estos resultados en la ecuación dimensional de la ecuación dada, se tendrá:

$$[P] = \sqrt{L(L+L)} \cdot \left(\frac{L}{L} - 1\right)(L + L)$$

$$\rightarrow \quad [P] = \sqrt{L^2} \cdot (1)\,(L)$$

$$\therefore \quad \mathbf{[P] = L^2}$$

Prob. 15

Una grúa tiene una potencia que depende de la velocidad angular del rotor ω([ω] = T^{-1}), de la longitud de su brazo y de la fuerza de tensión en los cables. Determine una fórmula empírica para dicho fenómeno.

RESOLUCIÓN

Sean: *Pot* = potencia , ω = velocidad angular, *b* = longitud del brazo , *F* = fuerza.

Aplicando el Teorema Fundamental del Análisis Dimensional establecemos que:

$$Pot = k \cdot \omega^x \cdot F^y \cdot b^z \qquad \ldots (*)$$

donde: k = constante numérica.

Luego escribimos la Ecuación Dimensional de la Fórmula (*):

$$[Pot] = [k] \cdot [\omega]^x \cdot [F]^y \cdot [b]^z$$

$$\rightarrow \quad L^2MT^{-3} = 1 \cdot (T^{-1})^x \cdot (LMT^{-2})^y \cdot [L]^z$$

$$\rightarrow \quad L^2M1T^{-3} = L^{x+z} \cdot M^y \cdot T^{-x} - 2^y$$

De donde por comparación, se establece que:

$$\left.\begin{array}{rr} L: & x + z = 2 \\ M: & y = 1 \\ T: & -x - 2y = -3 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Finalmente en (*): $\quad \boldsymbol{Pot = k \cdot \omega F b}$

Prob. 16

Deducir una fórmula empírica para la fuerza centrípeta (F_c), si se sabe que esta depende de la masa (m) del cuerpo afectado, de la velocidad tangencial (v) y del radio (r) de giro. Considerar k: constante numérica.

RESOLUCIÓN

El problema de elaborar una fórmula empírica para una cantidad física dada (F_c), se resuelve encontrando los exponentes que deben poseer tales cantidades, en este caso de: *m, v,* y, *r*. Estos valores serán determinados por medio del Principio de Homogeneidad.

El Proyecto de Fórmula Empírica, será obtenido empleando la constante de proporcionalidad numérica k:

$$F_c = k \cdot m^x \cdot v^y \cdot r^z$$

$$MT^{-2} = 1 \cdot M^x \cdot (LT^{-1})^y \cdot L^z$$

$$L^1 \cdot M^1 \cdot T^{-2} = L^{y+z} \cdot M^x \cdot T^{-y}$$

De "L": $\quad 1 = y + z$

De "M": $\quad 1 = x$

De "T": $\quad -2 = -y$

Resolviendo: $x = 1$; $y = 2$; $z = -1$

Finalmente la Fórmula Empírica buscada será:

$$F_c = k \cdot m^1 \cdot v^2 \cdot r^{-1} \quad \text{o} \quad \boldsymbol{F_c = k\frac{mv^2}{r}}$$

Prob. 17

La velocidad crítica v_c a la cual el flujo de un líquido a través de un tubo se convierte en turbulento, depende de la viscocidad η, de la densidad r del fluido, del diámetro D del tubo y de una constante adimensional R. Si [η] = $L^{-1}MT^{1}$, dar la dependencia de v_c con η, ρ, D y R.

RESOLUCIÓN

Nuestro problema consiste en elaborar una fórmula empírica para v_c. Para ello aplicamos el Teorema Fundamental del Análisis Dimensional:

$$v_c = R\eta^x\rho^yD^z \ \ldots(*)$$

$$\rightarrow \quad [v_c] = [R][\eta]^x[\rho]^y[D]^z$$

$$\rightarrow \quad LT^{-1} = 1 \cdot (L^{-1}MT^{-1})^x \cdot (L^{-3}M)^y \cdot (L)^z$$

$$\rightarrow \quad L^1 \cdot M^0 \cdot T^{-1} = L^{-x-3y+z} \cdot M^{x+y} \cdot T^{-x}$$

Por comparación de exponentes se logra establecer que:

$$x = 1 \quad ; \quad y = -1 \quad ; \quad z = -1$$

Finalmente, en (*), se tiene: $\quad \boldsymbol{v_c = \frac{R\eta}{\rho D}}$

I. PRINCIPIO DE HOMOGENEIDAD

Sabiendo que todas las ecuaciones que se muestran, son dimensionalmente correctas, se pide determinar la fórmula dimensional de «X» en cada caso:

01.- $[A] + [X]L = L^3$

A) L^4 B) L^3 C) L D) L^2 E) L^{-1}

02.- $\frac{[X]}{T} - LT^{-2} = [B]$

A) LT^{-1} B) T C) T^{-1} D) L E) LT^{-2}

03.- $\frac{M^3L^{-1}}{[X]} = [Y]L^2 + ML^{-2}$

A) L B) M^2 C) $L^{-1}M$
D) LM E) LM^2

04.- $[X]^2 - [Z]L^3 = \theta^4J^6$

A) θJ^2 B) θ^2J^3 C) θJ^{-1} D) $\theta^{-1}J$ E) θ^2J

05.- $L^{-2}\cdot I^3 = \frac{M\sqrt{[X]}}{L^2} - [Y]\theta$

A) MI^3 B) M^2I C) $M^{-2}I^6$
D) LM E) $L^{-4}I^6M^{-1}$

06.- $[X]\,L^3 - [Y]T^{-2} = \frac{L\bullet M^2\bullet I^{-4}}{[X]}$

A) LMI^{-2} B) MI^2 C) $L^{-1}M$
D) LM E) $L^{-1}MI^{-2}$

07.- $\frac{[X]^3-[A]}{[B]^2+[X]L} = LT^{-2}$

A) L B) T^{-1} C) LT^{-1} D) LT E) $L^{-1}T$

08.- $\frac{L^2}{[X]} + \frac{[X]T^2}{[Y]^2} = [\text{sen } 30°]$

A) T^{-2} B) T^2 C) L D) L^2 E) L^{-2}

09.- $\sqrt{\frac{[A]-L^3\theta^2}{L[X]^2-[B]T}} = L\bullet\theta^2$

A) 0^{-1} B) L C) $L\theta$
D) $L\theta^{-1}$ E) $L^2\theta^{-1}$

10.- $\frac{[X]^3\,L^4+[X]M^2}{[A]-[B]} = [A]^2$

A) $L^{-1}M$ B) $L^{-2}M$ C) L^{-2}
D) M E) LM

11.- $[A]L - M^{-2}\,\theta = \frac{[X]^a\,\theta+[B]}{\sqrt{L^8-L^{4a}}}$

A) M^{-1} B) L^2 C) L^2M^{-1}
D) M^{-2} E) L^3

12.- $[X]^y + L^3[Z] = (L^r - L^y)^3$

A) L^{-3} B) L^{-2} C) L^3T^{-3} D) L^3 E) L^4T

13.- $\left[\frac{X}{Y}\right]^3 - \frac{L^3-[Y]}{T^{-3}} = [Z]$

A) L^2T^{-1} B) LT^{-2} C) LT^{-1}
D) LT E) L^4T

14.- $\left\{\frac{I^{-2}J^4-[Y]}{M^2T^2}\right\}^{\text{sen}\,30°} = \frac{[X]}{IT}$

A) $M^{-1}J^2$ B) $M^{-1}J^2$ C) $I^{-1}J$
D) $I^{-1}J^2$ E) MIJ^2

II. FÓRMULAS DIMENSIONALES

15.- En un resorte ideal se verifica que: $F = kx$; donde F = fuerza, x = deformación (distancia). Encontrar $[k]$.

A) M B) L^2 C) T^{-1} D) LT E) MT^{-2}

16.- La Ley de Gravitación Universal establece que: $F = Gm_1\cdot m_2/d^2$, donde F = fuerza, m_1 y m_2 = masas, y d = distancia. Encontrar $[G]$.

A) $L^3M^{-1}T^{-2}$ B) L^3M^{-1} C) T^{-2}
D) L^3T^{-2} E) N.A.

17.- La velocidad (v) de las ondas en una cuerda que experimenta una fuerza de tensión (T) viene dada por: $v = \sqrt{T/\mu}$. Determinar $[\mu]$

A) $L^{-2}M$ B) LM C) $L^{-1}M$
D) L^2M E) N.A

18.- La energía interna (U) de un gas ideal se obtiene así: $U = ikT/2$, donde i = número adimensional, T = temperatura. Se pide calcular $[k]$.

A) $L^1MT^{-1}\theta^{-2}$ B) $L^2M^{-2}\theta^2$ C) $MT^{-2}\theta^{-1}$
D) $L^2MT^{-2}\theta^{-1}$ E) L^2MT^{-1}

19.- El estado de un gas ideal se define por la relación: $pV = RTn$, donde p = presión, V = volumen, T = temperatura, y n = cantidad de sustancia. De esto, encontrar $[R]$.

A) $L^2T^{-2}\theta^{-1}$ B) $L^2MT^{-2}\theta^{-1}N^{-1}$
C) $L^2M^1\theta^{-2}N^{-1}$ D) $L^2\theta^{-1}N^{-1}$
E) $L^3MT^{-1}\theta^1N$

20.- Sabiendo que: $i = q/t$, se pide identificar las dimensiones de la carga eléctrica (q), si se sabe que: i = intensidad de corriente, t = tiempo.

A) IT^2 B) I^{-1} C) T^{-1} D) TI^{-1} E) TI

21.- La fórmula de Coulomb es: $F = k_e\,q_1q_2/d^2$, donde: q_1, q_2 = Cargas eléctricas, d = distancia y F = fuerza. Indicar qué dimensión no posee k_e.

A) L^3 B) I^2 C) T^{-4} D) M E) I^{-2}

22.- Si la siguiente ecuación es dimensionalmente homogénea: $m = hf/x^2$, donde m = masa, f = frecuencia y h = constante de Planck, podemos asegurar que x es:

A) Area B) Densidad C) Presión
D) Periodo E) Velocidad lineal

III. ECUACIONES DIMENSIONALES

23.- De la ecuación homogénea:

$$W = \left\{\frac{Bk-Ck^2}{D(Ek-F)}\right\}^{\text{sen}\,37°}$$, calcular $[F]$,

Si B = altura, C = masa y E = fuerza.

A) LT B) L^2T^{-2} C) LT^{-2} D) $L^{-2}T$ E) LT^{-1}

24.- En la siguiente expresión dimensionalmente correcta: $\omega^2\,\text{sen}\,30^o = \frac{x}{\sqrt{3}\,t^2} + \frac{a-y}{\pi\bullet z}$

ω = velocidad angular, a = aceleración, t = tiempo. Se pide determinar: $[x\cdot y\cdot z]$

A) L^2T^{-2} B) L^3M C) L^3
D) L^2T^{-1} E) LMT^{-2}

25.- Si la ecuación indicada es homogénea:

UNA + UNI = IPEN

tal que: U = energía, R = radio, entonces, las dimensiones de [PERU] será:

A) $L^4M^4T^{-4}$ B) $L^{-4}M^2T^4$ C) $L^4M^2T^{-6}$
D) $L^5M^2T^{-4}$ E) $L^5M^5T^{-2}$

26.- Si la siguiente expresión es dimensionalmente correcta, calcular: $y - 2z - 3x$

$$F = B^z\cdot A^{-y}\cdot V^x ,$$

donde: F = presión, B = densidad,
A = aceleración, V = volumen.

A) -2 B) -4 C) 6 D) 9 E) 10

27.- Sabiendo que la siguiente expresión es dimensionalmente correcta, determinar las dimensiones de z.

$$K\bullet log\,(xt + yv) = A^{\frac{x\bullet y}{z}}$$

donde: t = tiempo, v = velocidad, A = presión.

A) L B) L^{-1} C) L^2 D) L^2T^{-1} E) LM^{-2}

28.- La frecuencia (f) de oscilación de un péndulo simple depende de su longitud l y de la aceleración de gravedad (g) de la localidad. Determinar una fórmula empírica para la frecuencia. Nota: k = constante de proporcionalidad numérica.

A) klg^2 B) kl/g C) kg/l

D) $k\sqrt{g/l}$ E) $k\sqrt{l/g}$

29.- En la siguiente ecuación dimensionalmente correcta: V = volumen; h = altura; t = tiempo.

$$V = \frac{a}{t^3} + \frac{b+h}{c}$$. Evaluar: $[b/ac]$

A) LT^3 B) T^3 C) T^4 D) T^2 E) L^2

30.- Determinar las dimensiones de $K.C$, si la ecuación dada es dimensionalmente correcta, siendo: m: masa, V: volumen, P = masa·velocidad, a: aceleración, F: fuerza.

$$K^2 + F \bullet P^3 = \frac{m}{V \bullet a \bullet C}$$

A) $L^{11}M^8T^{12}$ B) $L^{-6}M^{-1}T^{9/2}$ C) $L^{-3}MT^2$

D) $L^{-7}M^{-2}T^5$ E) $L^{-2}M^{-1}T^{9/2}$

31.- Evaluar z para que la siguiente ecuación sea dimensionalmente correcta:

$$p \bullet V^{z-1} = \frac{F^x \bullet \log^z 8}{\rho^y \bullet (\cos x)^{z-y}}$$; donde:

V: volumen, F: fuerza, p: presión = $\frac{\text{Fuerza}}{\text{` rea}}$

ρ: Densidad

A) -2 B) 4 C) -1/3 D) 2 E) 5/3

32.- Determine las dimensiones que debe tener Q para que la expresión sea dimensionalmente correcta.

$$W = 0{,}5\, mv^{\alpha} + Agh + BP$$

$$Q = A^{\alpha} \bullet \sqrt[\alpha]{B}$$

Donde: m = masa; v = velocidad; h = altura; g = aceleración de la gravedad; a = exponente desconocido; W = Trabajo; P = potencia. A y B son dimensionalmente desconocidas.

A) $M^{1/2}\,T^{3/2}$ B) $LM^{2/3}T^{2/3}$ C) $M^{3/2}T^{5/2}$

D) MT^1 E) $M^2T^{1/2}$

33.- Determinar la fórmula dimensional de C en la expresión: $P = P_o(e^{-\frac{mv^2}{2CTE}} - 1)$, donde:

v = velocidad; m = masa ; E = energía;

T = temperatura; P_o = potencia; e = 2,7182...

A) L B) θ C) θ^{-1} D) θ^L E) $M\cdot\theta^{-1}$

34.- Se sabe que la velocidad de una onda mecánica en una cuerda en vibración depende de la Fuerza llamada de Tensión (T), de la masa (m) y de la longitud (L) de la cuerda. Encontrar una fórmula que permita determinar dicha velocidad.

A) $v = Tm^2L$ B) $v = m\sqrt{T \bullet L}$

C) $v = \sqrt{\frac{T \bullet L}{m}}$ D) $v = \sqrt{\frac{m}{T \bullet L}}$

E) $v = \sqrt{\frac{m \bullet T}{L}}$

35.- Sabiendo que la siguiente expresión es dimensionalmente correcta:

$$p \cdot \gamma = \left(m + \frac{\alpha}{q}\right)^{\text{sen}(\omega\beta)}$$

donde: p = presión, m = masa, q = carga eléctrica y ω = velocidad angular, se pide encontrar las unidades S.I. de: α/β.

A) $kg^{-1}\cdot s^{-2}$ B) $kg\cdot s$ C) $kg\cdot A$

D) $kg^2\cdot A^3$ E) $kg\cdot m\cdot A$

CLAVES

01 D	02 A	03 E	04 B	05 C	06 E	07 C	08 D
09 A	10 B	11 C	12 D	13 E	14 A	15 E	16 A
17 C	18 D	19 B	20 E	21 B	22 E	23 B	24 A
25 D	26 B	27 B	28 D	29 B	30 E	31 E	32 E
33 C	34 C	35 C					

RACSO EDITORES