2. Construcciones Geométricas

Las construcciones geométricas adquirieron gran importancia, tanto en Grecia como en India, en relación con rituales religiosos para la construcción de altares con forma y magnitud dadas.

En Grecia, esto llevó al famoso problema de la duplicación del cubo, mientras que en India, lo importante en los altares era el área y no el volumen. En ambos casos, un paso esencial era resolver el siguiente problema: hallar un cuadrado que tenga la misma área que un rectángulo dado. Mientras los griegos lo resolvieron usando fundamentalmente la construcción del medio proporcional entre segmentos, los indios utilizaron el teorema de Pitágoras para resolverlo, en alrededor del año -600, cuando difícilmente podían haber sido influenciados por los griegos, lo que nos habla de algún origen común.

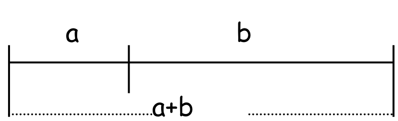
Los problemas aparecen en los textos; así encontramos en textos griegos, por ejemplo, un diálogo donde los delianos consultan al oráculo para liberarse de una plaga. El Dios (Apolo) les contesta a través del oráculo que deben construir un altar que tenga el doble de tamaño que el actual, pero la misma forma. La resolución de problemas de este tipo utilizando sólo la regla y el compás (aunque los mismos griegos no vacilaron en construir y utilizar otros instrumentos) preocupó a los matemáticos durante siglos.

Los llamados "problemas clásicos", como la duplicación del cubo, la trisección del ángulo, la construcción del heptágono regular y la cuadratura del círculo, fueron satisfactoriamente resueltos (de hecho se probó la imposibilidad de realizar cualquiera de ellos) recién en los siglos XVIII y XIX.

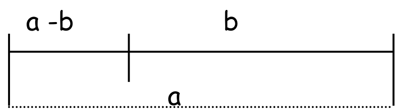
1. Resolubilidad de las construcciones con regla y compás

Para tratar el caso en general, veamos cómo dadas cantidades a,b,c,... se puede construir una cantidad x dependiendo de su relación algebraica con las cantidades dadas. Para ello veamos primero cómo construir $a+b$, $a-b$, ra ($r \in Q$) , a/b y $a*b$.

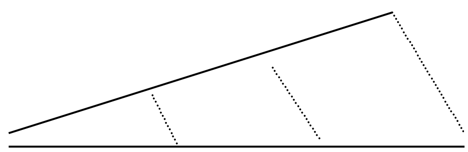
Para construir $a+b$, transportamos sobre una recta las longitudes a y b desde un punto, con sentidos opuestos.



Para $a-b$, con el mismo sentido.



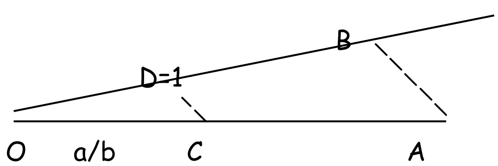
Para $m.a$ con $m \in N$ sumamos a m veces, y para a/m , con $m \in N$, desde un extremo de a trazamos m veces un segmento fijo sobre una semirrecta, unimos el último punto con el otro extremo de a , y la paralela a ésta por el primer punto corta a a en a/m .



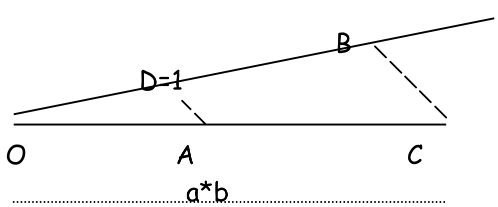
a/3

Con ello podemos construir $r*a$ con $a \in Q$.

Para construir a/b trazamos desde O , OA y OB desde O , sobre OB buscamos D a distancia 1 de O , la paralela a AB por D corta a OA en C , con $OC=a/b$.



Para $a*b$ procedemos análogamente hasta obtener D , la paralela a DA por B corta a OA en C , con $OC=a*b$.

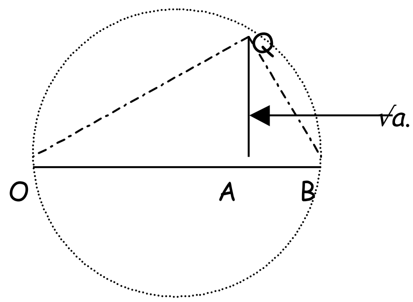


Es decir, **toda cantidad x expresable con operaciones algebraicas racionales a partir de las cantidades dadas**, puede construirse con regla y compás.

La única otra operación admitida es la extracción de raíz cuadrada. Para construir $\sqrt{a}$, trazamos sobre una recta los puntos OAB , de modo que OA=a y AB=1. La intersección de la circunferencia que tiene a OB como diámetro y la perpendicular a OB en A se cortan en Q . Los triángulos OAQ y QAB son semejantes, y llamando x=AQ , resulta

$$a/x=x/1$$

de donde $x^2=a$ y $x=\sqrt{a}$.



A partir de esto es claro que es **condición suficiente** para que un punto pueda ser obtenido mediante construcciones con regla y compás a partir de otros, que sus coordenadas se expresen en función de las de los datos, con un número finito de operaciones racionales y extracción de raíces cuadradas.

Se puede demostrar, aunque no lo haremos aquí, que esta condición también es **necesaria** para la construcción con regla y compás.

La idea que hay detrás de la demostración es la siguiente:
Si para comenzar damos un segmento (que consideraremos el segmento unitario), podemos construir cualquier segmento de medida racional. Decimos entonces que **Q** es un cuerpo de números.

Si le agregamos $\sqrt{k}$, $k\in\mathbf{Q}$, $\sqrt{k}\notin\mathbf{Q}$, entonces el conjunto $\{a+b\sqrt{k},\ a\in Q \wedge b\in Q\}$ es un cuerpo de números (cualquie combinación racional de dos de ellos vuelve a ser de la misma forma).

Supongamos entonces que comenzamos con un cuerpo de números al que llamaremos F (podemos construir con regla y compás cualquiera de sus elementos).

1. El uso de la regla no nos permite salir del cuerpo (con sólo la regla podemos construir la recta que pasa por dos puntos, o el punto intersección de dos rectas. En ambos casos, las coordenadas de los puntos solución son expresiones racionales de los elementos del cuerpo, lo quese prueba planteando las ecuaciones).

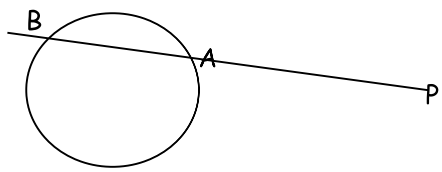
2. Con una sola aplicación del compás, podemos ampliar el cuerpo a los números de la forma *a+b√k, k* fijo (son intersecciones de 2 circunferencias o de una circunferencia y una recta, las coordenadas resultan de esta forma, planteando las ecuaciones).

Para definir todos los números construibles, partimos de un F_0, (por ejemplo Q, si el dato es el segmento unitario) y agregando sucesivamente $\sqrt{k}$, $k \in F_i$, $\sqrt{k} \notin F_i$; obtenemos una sucesión F_0 , ... , F_n , ... tal que

Un número k es construible con regla y compás $\Leftrightarrow$ $k \in F_i$, *para algún i.*

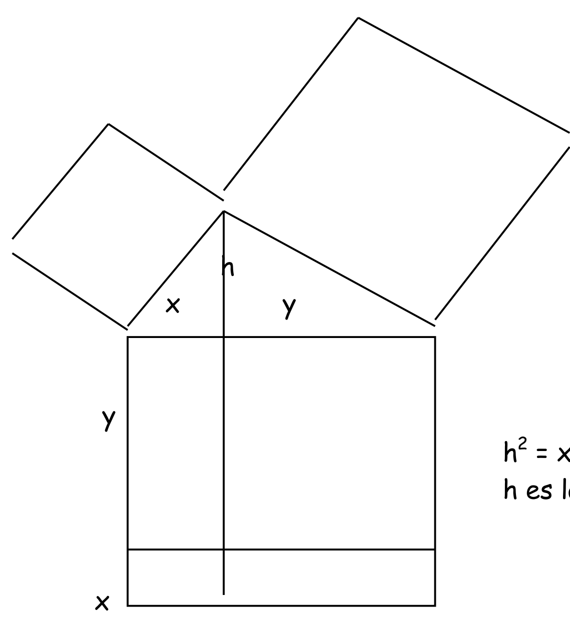
Además se puede demostrar, aunque no lo haremos aquí pues necesita un tratamiento algebraico particular que no daremos, que todos los números construibles con regla y compás son algebraicos (lo que significa que son raíces de una ecuación polinómica con coeficientes enteros).

También podemos entonces construir tangentes, por ejemplo usando potencia.



Para un secante cualquiera, construimos a=PA, b=PB, y luego construimos la raíz de a*b, que es la distancia desde P a los puntos de tangencia.

La raíz de un producto (media geométrica), también se puede construir usando Pitágoras:



$h^2 = x * y$

h es la media geométrica de x,y

Observación: Si el triángulo rectángulo es el de base a+b, de la construcción sale la relación entre la media aritmética y la geométrica, ya que el radio de la circunferencia circunscripta es la media aritmética, que es mayor o igual que la altura, es decir,

$$\sqrt{(a*b)} \leq (a+b)/2$$

Problemas clásicos

Comentaremos aquí brevemente los problemas clásicos, y la manera de probar su irresolubilidad, aunque no presentamos las demostraciones involucradas.

Vamos a usar además un resultado muy útil en el análisis de los problemas clásicos, a saber, que si una ecuación de grado tres con coeficientes racionales no tiene raíces racionales, entonces ninguna de sus raíces puede construirse con regla y compás.

Demostración por el absurdo.
Sea x_1 una raíz construible de la ecuación $x^3 + a x^2 + b x + c = 0$. Entonces x_1 pertenece a F_k para algún k. Supongamos además que k es el menor entero tal que alguna de las raíces de la ecuación está en F_k.
k>0, ya que la ecuación no tiene raíces racionales.
Además,

$$x_1 = p + q\sqrt{w}$$

con p,q , w elementos de F_{k-1} ; y $\sqrt{w} \notin F_{k-1}$

Como $x_2 = p - q\sqrt{w}$ también es una raíz de la ecuación, distinta de x_1 , y $x_1 + x_2 = -a$,
resulta

$$x_3 = -a - 2p$$

es decir, x_3 pertenece a F_{k-1} (lo cual es un absurdo, ya que k era el menor).

La duplicación del cubo

Dado un cubo, se trata de construir otro cubo con el doble de volumen. El lado del cuerpo que quiere construirse satisface la ecuación $x^3-2=0$. Como esta ecuación no tiene raíces racionales, la construcción no es posible con regla y compás.

La trisección del ángulo

Claramente existen ángulos como 180 grados o 90 grados cuya trisección es posible. Lo que tratamos es de mostrar que no es posible en general, para lo cual veremos que no lo es para 60 grados.
Para buscar el equivalente algebraico de este problema, consideramos el ángulo dado por su coseno, de modo que el problema es construir $\cos(\theta/3)$. Como $\cos \theta = 4 \cos^3 (\theta/3) - 3 \cos$

$(\theta/3)$, se debe construir una solución de la ecuación que, para el caso de 60 grados, se reduce a

$$8z^3-6z=1 .$$

Como ésta no tiene raíces racionales, no se pueden construir sus raíces con regla y compás.

El heptágono regular

Los puntos buscados para la construcción del heptágono son las raíces séptimas complejas de la unidad, entonces partimos de la ecuación $z^7-1=0$.

Dividiendo por el polinomio $z-1$, reemplazando $y=z+(1/z)$, y usando que si se puede construir *y* también se podrá construir *z* y viceversa, la ecuación que debemos analizar es

$$y^3+y^2-2y-1=0 ,$$

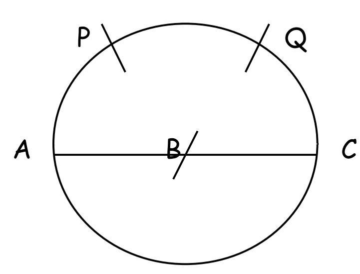
que no tiene raíces racionales, por lo cual el heptágono regular no puede construirse con regla y compás.

La cuadratura de círculo

Este problema es algo más complicado que los anteriores, ya que aquí se trata de construir un lado de longitud $(\sqrt{\pi}*r)$. Este segmento será construible si y sólo si se puede construir un segmento de longitud π. El hecho de que π sea trascendente, que fue demostrado por F.Lindemann en 1882, utilizando técnicas desarrolladas por Charles Hermite (1822-1905), prueba que la cuadratura del círculo no es posible con regla y compás.

Construcciones con sólo el compás o con sólo la regla

El italiano Mascheroni (1750-1800) descubrió que toda construcción que puede hacerse con regla y compás, puede hacerse con el compás solamente, considerando que una recta viene dada por dos de sus puntos.
Como ejemplo construyamos, dado el segmento AB, el segmento AC que mide el doble de AB:



Dado AB, con centro en B trazamos la circunferencia de radio AB, desde A marcamos P, Q, C con el mismo radio (propiedad del hexágono regular inscripto en la circunferencia).

Inspirado por Mascheroni, Jacob Steiner (1796-1863) intentó lo análogo con sólo la regla, viendo que no era posible, pero que se podía restringir el uso del compás a 1 sola aplicación. Dicho de otro modo, todos los números construibles con regla y compás pueden construirse con sólo la regla, supuestos dados una circunferencia fija y su centro. Estas construcciones se basan en la propiedad de la construcción del cuarto armónico.

2. Construcciones con regla y compás

Sabemos construir la recta perpendicular a otra que pasa por un punto, buscando sobre la recta dada dos puntos que equidisten del punto dado, y trazando la mediatriz del segmento determinado.

Usando que dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí, podemos construir rectas paralelas.

Construcción de triángulos

Se trata de ver si es posible construir un triángulo, con regla y compás, dados tres de sus elementos, elegidos entre sus lados a,b,c, sus ángulos A,B,C, sus medianas m_a,m_b,m_c, sus alturas h_a,h_b,h_c, sus bisectrices w_a,w_b,w_c y los radios de las circunferencias inscripta r y circunscripta R.

Combinando de diferentes maneras estos elementos, resultan problemas con diferente grado de dificultad, algunos incluso sin solución.

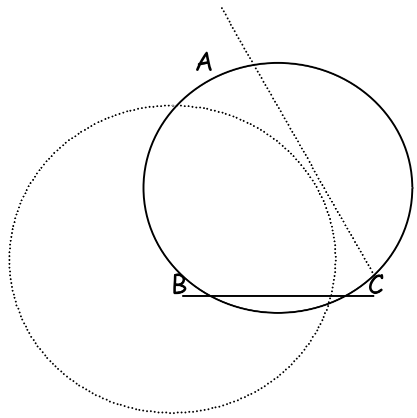
Así por ejemplo son triviales los que corresponden a los casos clásicos de congruencia de triángulos (a,b,c), (A,b,c), (A,B,c) y (A,b,a), mientras que no es posible construir el triángulo dadas las tres bisectrices (salvo el caso en que las tres sean iguales).

En cada caso corresponde analizar las posibilidades. Desarrollamos aquí un ejemplo, dejando otros como ejercicios.

Ejemplo: Construir un triángulo dados un lado, la altura de uno de los vértices del lado y el radio de la circunferencia circunscripta.

Nombramos los elementos de modo que los datos son **(a,h_b,R).** Construimos una circunferencia de radio **R** y desde un punto cualquiera sobre ella, **B**, buscamos otro punto de la circunferencia a distancia **a**, **C**.

Trazamos con centro en **B** la circunferencia de radio **h_b**, la tangente a esta circunferencia que pasa por **C** corta a la circunferencia de radio **R** en **A** (es perpendicular al radio).



Construcción de Circunferencias

Análogamente al caso de construcción de triángulos, aquí se trata de estudiar la posibilidad de construir con regla y compás una circunferencia, determinada por tres condiciones, elegidas entre:

- pasar por un punto P ,
- ser tangente a una recta r y
- ser tangente a otra circunferencia C .

El caso (CCC) es el llamado problema de Apolonio, donde se pide construir, dadas tres circunferencias, una cuarta tangente a las otras tres. El caso trivial es (PPP), ya que la circunferencia buscada es la circunscripta al triángulo. Veremos una solución al problema de Apolonio en el último capítulo. Dejamos el análisis de algunos casos como ejercicio.

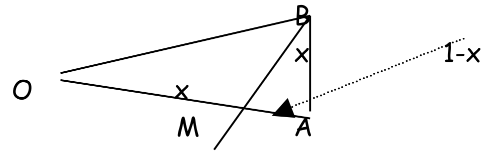
Construcción de polígonos regulares

Los polígonos regulares están inscriptos en una circunferencia. La idea es, dada la circunferencia, ¿se puede construir con regla y compás el polígono de **n** lados inscripto en ella para cualquier **n**?

Es fácil construir el hexágono, utilizando la propiedad de que su lado tiene la misma longitud que el radio de la circunferencia. A partir de él, es sencillo construir el triángulo (basta elegir tres de los seis vértices alternadamente), y el dodecágono (trazando la mediatriz de cada uno de los lados del hexágono, éstas cortan a la circunferencia en los demás vértices), y así siguiendo podemos construir cualquier polígono de n lados con $\mathbf{n=3*2^k}$

Trazando un diámetro de la circunferencia y su mediatriz, podemos construir el cuadrado, y a partir de él cualquier polígono que tenga n lados con $\mathbf{n=2^k}$, procediendo de manera análoga al caso anterior.

También hay varias construcciones para obtener el pentágono, o el decágono. Por ejemplo, si pensamos en un polígono de 10 lados, el ángulo central que subtiende al lado es de 36 grados, es decir el ABO es isósceles con sus otros dos ángulos de 72 grados.



Si trazamos la bisectriz de B , determina un punto M en OA y el BAM es isósceles y semejante al ABO . Usando esta relación de semejanza y llamando x al lado del decágono, resulta

$$1/x = x/(1-x)$$

de donde $x=(\sqrt{5} -1)/2$, que puede construirse con regla y compás (para construir $\sqrt{5}$ basta tomar un triángulo rectángulo de catetos 1 y 2).

Como en los casos anteriores, se pueden construir a partir de él todos los polígonos de **n** lados con $\mathbf{n=5*2^k}$.

Sin embargo, no podemos construir el heptágono. Gauss (1777-1855), a la edad de 17 años, probó que un polígono de n lados, para n primo, puede construirse con regla y compás siempre que n sea un *primo de Fermat* , es decir, que sea de la forma $n=2^{2^n}+1$. Los primeros primos de Fermat son 3, 5, 17, 257, 65537 (se conocen construcciones para todos ellos)[3].

A partir de ello, un polígono de n lados puede construirse con regla y compás si y sólo si todos los factores primos de n (distintos de 2) son primos de Fermat distintos. Los polígonos de n lados con n impar y menor que 257 que pueden construirse son los de 3, 5, 15, 17, 51, 85 y 255 lados.

3.Triángulos y Circunferencias

Dado un triángulo ABC , es fácil ver que las bisectrices y las mediatrices concurren en un punto, que son respectivamente *el centro de la circunferencia inscripta de radio r* , y el *centro de la circunferencia circunscripta de radio R* (ver ejercicios). No es tan inmediato demostrar que las medianas y las alturas concurren en un punto llamados respectivamente *el baricentro o centro de gravedad* y el *ortocentro* del triángulo. Una manera de ver esto es usando afinidades, como veremos más adelante.

Suponiendo probado que las medianas concurren en un punto, podemos probar que

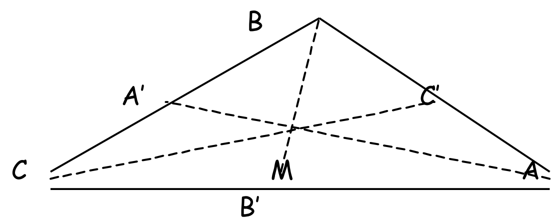
Teorema: El punto de concurrencia de las medianas de un triángulo divide a cada una de ellas en la razón 1:2.

Para ello observemos primero que

Lema: En triángulos de igual altura, las áreas son proporcionales a las bases respectivas.

Dem.: Es trivial usando la fórmula para el área.

Dem. (del Teorema): Consideramos los 6 triángulos que quedan determinados al trazar las medianas, resultando que por tener la misma base y la misma altura tienen la misma área respectivamente los triángulos



BMA' y A'MC , llamemos x al área;
BMC' y C'MA , de área y ;
AMB' y B'MC , de área z.

BCC' y CC'A $\Rightarrow$ $2x + y = 2z + y \Rightarrow$ **x = z** ;
ABB' y B'BC $\Rightarrow$ $2y + z = 2x + z$ $\Rightarrow$ **x = y** ;
con ello **x = y = z** $\Rightarrow$ las medianas dividen al triángulo en 6 triángulos de igual área $\Rightarrow$ el triángulo MAB tiene el doble del área del MBA' , y como ambos triángulos tienen las misma altura, MA mide el doble de MA' , de donde el punto en que concurren las medianas divide a cada una de ellas en la razón 1:2.

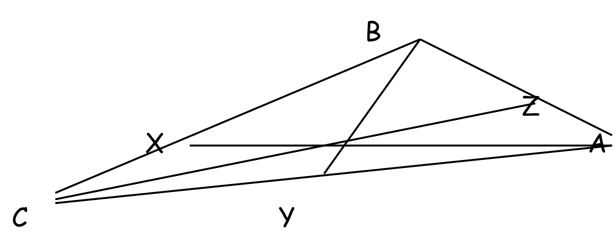
Para trabajar con este tipo de segmentos "notables", vamos a definir algo más general:

Definición: Las *cevianas* de un triángulo son segmentos que unen un vértice del triángulo con algún punto del lado opuesto.

Llevan este nombre en honor al italiano *Giovanni Ceva*, quien en 1678 publicó el siguiente resultado:

Teorema: Si tres cevianas **AX, BY, CZ** , una por cada vértice del triángulo **ABC** son concurrentes, entonces BX / XC * CY / YA * AZ / ZB = 1.

Dem.: Indicando con barras el área o la longitud, según corresponda:



$$|BX|/|XC| = |ABX|/|AXC| = |PBX|/|PXC| = (|ABX|-|PBX|)/(|AXC|-|PXC|) = |ABP|/|APC|$$

Análogamente,

$$|CY|/|YA| = |CBP|/|ABP| \quad y \quad |AZ|/|ZB| = |ACP|/|BCP|$$

Entonces

$$|BX|/|XC|*|CY|/|YA|*|AZ|/|ZB| = = |ABP|/|APC|*|CBP|/|ABP|*|ACP|/|BCP| = 1$$

Teorema recíproco: Si tres cevianas **AX, BY, CZ** verifican $BX/XC*CY/YA*AZ/ZB=1$, entonces son concurrentes.

Dem.: Sean $BY \cap XA = \{ P \}$, $CP \cap AB = \{ Z' \}$, entonces usando el teorema resulta

$$BX / XC * CY / YA * AZ' / Z'B = 1$$

y usando la hipótesis,

$$AZ' /Z'B = AZ / ZB ,$$

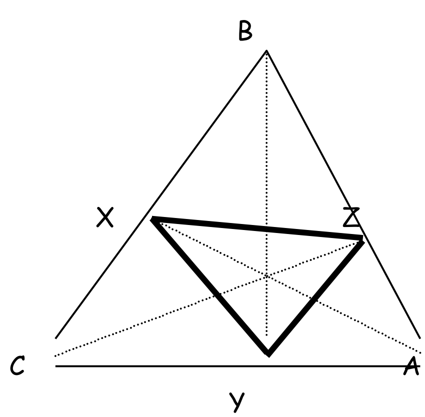
entonces

$$Z=Z' ,$$

con lo cual AX, BY, CZ son concurrentes.

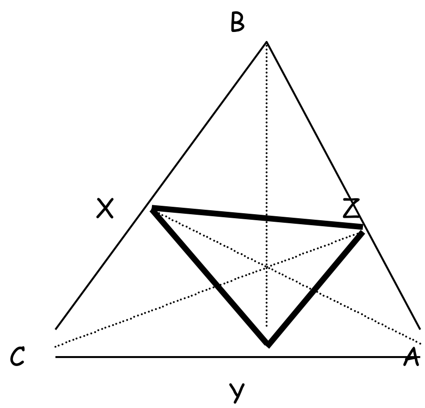
Observación: Utilizando este teorema recíproco, y dado que los pies de las medianas son los puntos medios de los lados, es inmediato concluir que las medianas son concurrentes.

Definición: Si en un triángulo ABC , llamamos X,Y,Z a los pies de las alturas, el triángulo XYZ se llama *triángulo órtico* del ABC



Proposición: Las alturas de un triángulo son bisectrices de su triángulo órtico.

Dem.: Supongamos ABC acutángulo. Llamemos ha, hb, hc a las alturas, X, Y, Z a los pies de las alturas.



BC es la hipotenusa de los triángulos rectángulos BCY y BCZ ⇒ la circunferencia de diámetro BC pasa por Y y por Z ⇒ los ángulos CZY = CBY (están inscriptos en el mismo arco CY).

Además, por ser el Δ CBY rectángulo, recto en Y, el ángulo CBY = 90° - BCA ⇒ CZY = 90° - BCA

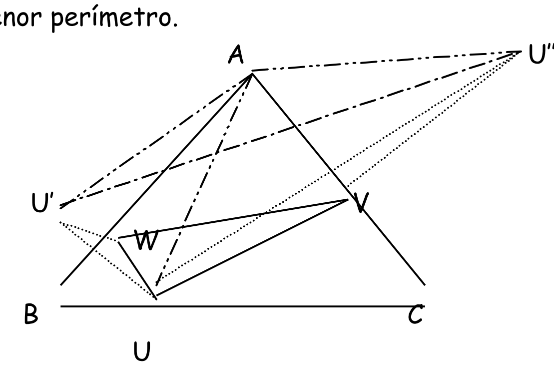
Análogamente,
AC es la hipotenusa de los triángulos rectángulos ACX y ACZ ⇒ la circunferencia de diámetro AC pasa por X y por Z ⇒ los ángulos XZC = XAC (están inscriptos en el mismo arco XC).

Además, por ser el Δ XAC rectángulo, recto en X, el ángulo XAC = 90° - BCA ⇒ XZC = 90° - BCA

⇒ CZY = XZC ⇒ ZC es bisectriz del XZY.

Si el triángulo ABC es obtusángulo, alguna de las alturas es bisectriz exterior. Completar...

Observación: dado ABC acutángulo, de todos los triángulos inscriptos, el órtico es el de menor perímetro.

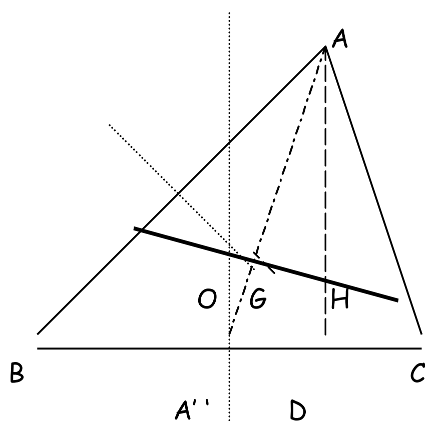


Dem.: Sean U' el simétrico de U respecto de AB, U'' el simétrico de U respecto de AC.
El perímetro del UVW = longitud(U'WVU'') >= longitud(U'U'').
Como el ángulo U'AU'' es el doble del ángulo $A \Rightarrow$ longitud(U'U'') = 2*|AU|*senA, que es mínima si |AU| es mímima, es decir, si AU es altura.

Se hace el razonamiento análogo con los otros puntos. Para completar la demostración, se puede ver (no lo hacemos) que no existe otro triángulo inscripto con igual perímetro.

Proposición: Baricentro (medianas), ortocentro (alturas) y centro de la circunferencia circunscripta (mediatrices) están alineados. La recta a la que pertenecen se llama *recta de Euler* del triángulo. El baricentro divide la distancia del ortocentro al centro de la circunferencia circunscripta en la razón 2:1

Dem.:
Sea O el punto de intersección de las mediatrices y sea G el punto de intersección de las medianas. A' es el punto medio de BC.
Construimos H sobre OG tal que OH03*OG, de donde GH=2*OG. Como GA=2*GA', resulta



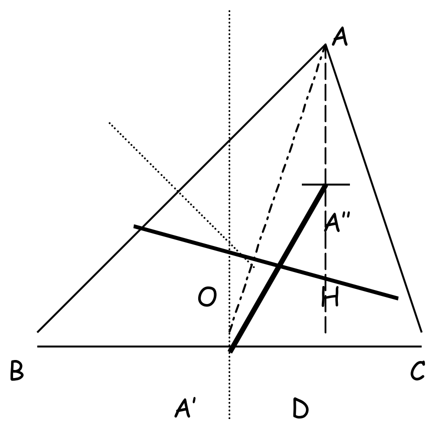
AH // A'O $\Rightarrow$ AH $\perp$ BC
(criterio LAL para GOA' y GHA)

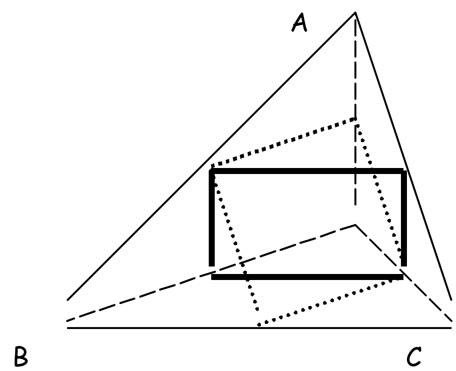
Análogamente, BH $\perp$ AC y CH $\perp$ AB

Es decir, H es el ortocentro.

Proposición: Los pies de las alturas, los puntos medios de los lados y los punto medios de los segmentos que unen el ortocentro con cada uno de los vértices, están en una misma circunferencia de radio *(1/2)R* llamada *circunferencia de los 9 puntos*. El centro de la circunferencia está sobre el segmento de Euler, a mitad de camino entre entre el ortocentro y el centro de la circunferencia circunscripta.

Dem.:





A', B', C' puntos medios de BC, AC y AB
AD, BE, CF alturas, **H** ortocentro
A'', B'', C'' puntos medios de AH, BH, CH.

Entonces **BC // B'C' // B''C''** (por bases medias, por ejemplo)
B'C'' // B''C' // AH
Es decir, **B'C'B''C'' es un rectángulo.**

Análogamente **C'A''C''A' es un rectángulo.**

Luego, la circunferencia de diámetro **C'C''** pasa por **B', A'', B''** y **A'** y tiene por diámetros a **B'B''** y **A'A''** (es la circunferencia circunscripta del triángulo órtico).

Además, el ángulo **A''DA' es recto**, con lo cual **A'A''** subtiende un ángulo recto en D, es decir, **D pertenece a la circunferencia.** Análogamente pertenecen **E** y **F.**

Como **A''B''C''** y **A'B'C'** están en extremos opuestos de diámetros, cada uno se obtiene del otro por una rotación de 180° alrededor del centro de la circunferencia.

Esta rotación manda el ortocentro del **A''B''C''** (es decir **H**) en el ortocentro del **A'B'C'** (que es el punto de intersección de las alturas, que son las mediatrices del ABC, es decir **O**), de donde el centro de la *circunferencia de los 9 puntos* está a mitad de camino entre O y H.

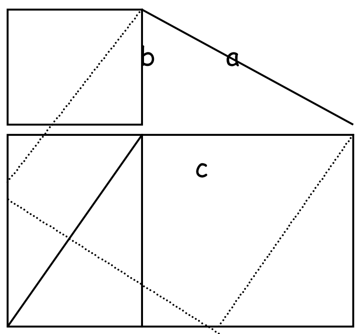
La relación del radio con R, se obtiene del hecho que la *circunferencia de los 9 puntos* también es la circunferencia circunscripta del triángulo medial (definición y proposición siguientes).

Definición: Dado un triángulo ABC, se llama *triángulo medial* al que resulta de unir los puntos medios de los lados, A'B'C'.

Observación: Un triángulo y su triángulo medial son semejantes, y la relación de proporción es 1:2 (quedan determinados 4 triángulos congruentes). Las medianas de ambos, y con ellas el baricentro, coinciden. Las alturas del A'B'C' son mediatrices del ABC. El punto medio del segmento de Euler es el centro de la circunferencia circunscripta al A'B'C' (ver práctica).

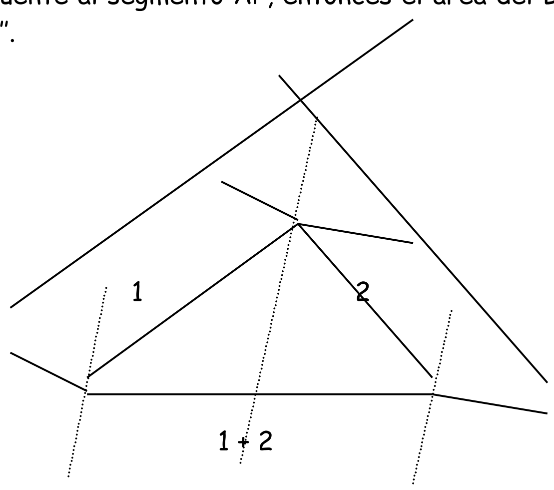
Resultado de Pappus (una generalización del teorema de Pitágoras):

Analicemos la siguiente demostración del teorema de Pitágoras:



$$a^2 + 3\ T = 3\ T + b^2 + c^2$$

Sea ABC un triángulo cualquiera, construimos paralelogramos ABB'A' y ACC''A'' hacia fuera del triángulo de modo que no se solape uno con otro. Prolongamos B'A' y B''A'' hasta que se corten en P. Trazamos sobre BC un paralelogramo BCMN de modo que el otro lado sea paralelo y congruente al segmento AP, entonces el área del BCMN es la suma de las áreas de ABB'A' y ACC''A''.



Comparo triángulos y paralelogramos con igual base e igual altura.....

4. Cuadriláteros y Cuadraturas

Algunas cosas sobre cuadriláteros

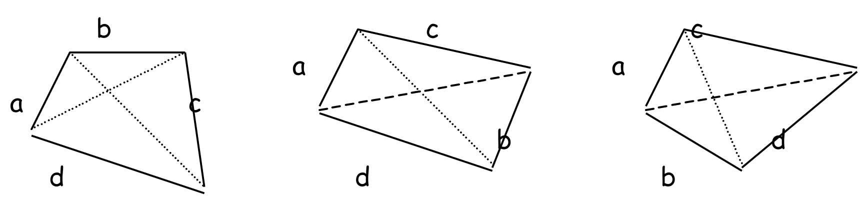
Ya pasando a cuadriláteros en general, las construcciones se complican bastante. Por ejemplo, dados cuatro lados en un cierto orden, podemos construir infinitos cuadriláteros que los tengan por lados. Si damos cuatro lados en un cierto orden y una diagonal, ya nos queda fijo el cuadrilátero (toda diagonal lo divide en dos triángulos). O si pedimos que el cuadrilátero esté inscripto en una circunferencia fija, también tendremos uno solo. Algunos resultados curiosos aparecen relacionados con los cuadriláteros, por ejemplo el siguiente, publicado recién en 1731 a pesar de que su demostración es inmediata usando la propiedad de la base media de un triángulo

Teorema: La figura que se obtiene al unir los puntos medios de un cuadrilátero es un paralelogramo cuya área es la mitad del área del cuadrilátero original (práctica).

Cuadriláteros cíclicos

Si pensamos en un número n de segmentos (cantidades), que unen V puntos de a pares (cada segmento une dos vértices), tenemos que el triángulo ($n=3, V=3$) es rígido, mientras que el cuadrilátero ($n=4, V=4$) tiene un grado de libertad: uno de sus ángulos puede variarse originando los cambios correspondientes en los demás.

Un conjunto de n segmentos y V vértices se dice j/rígido si es rígido pero deja de serlo al quitarle uno de sus segmentos. Sir H. Lamb probó que una condición necesaria (no suficiente) para que un conjunto sea j/rígido es que $n=2V-3$. Tal es el caso mencionado arriba de un cuadrilátero dado por sus cuatro lados y una diagonal ($n=5$, $V=4$) ; al quitar la diagonal, nos queda un grado de libertad. Utilizando este grado de libertad, podemos modificar dos ángulos opuestos del cuadrilátero hasta hacerlos suplementarios, quedando éste inscripto en una circunferencia (cíclico). Esto es así pues, si dos ángulos son suplementarios, los otros dos también, Tomo la circunferencia que pasa por 3 puntos, el 4to punto está en la circunferencia por se suplementario del que tiene el arco suplemetario. Separándolo por una de las diagonales para volverlos a juntar luego de invertir uno de los dos triángulos, se puede ver la validez del siguiente resultado:

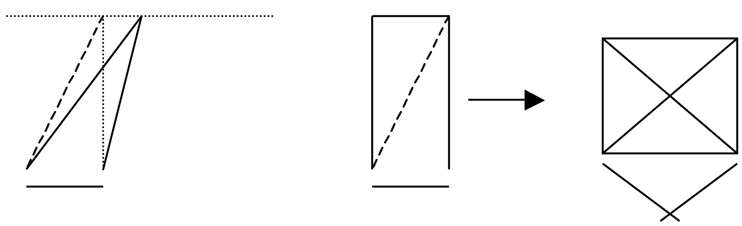


Proposición: Cuatro cantidades distintas cualesquiera tales que cada una es menor que la suma de las otras tres, sirven como los lados de tres cuadriláteros cíclicos distintos, todos con la misma área. Si los lados miden respectivamente a,b,c,d y el semiperímetro es s, su área K está dada por $K^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$ (fórmula de Brahmagupta) (práctica).

Cuadraturas

Los problemas de cuadratura de polígonos en general, es decir, dado un polígono, construir un cuadrado con la misma área, pueden siempre resolverse separando el polígono en triángulos (por ejemplo trazando las diagonales desde un vértice), pasando éstos a cuadrados, y sumándolos con el teorema de Pitágoras (que me da un cuadrado cuya área es la suma de las áreas de los cuadrados dados).

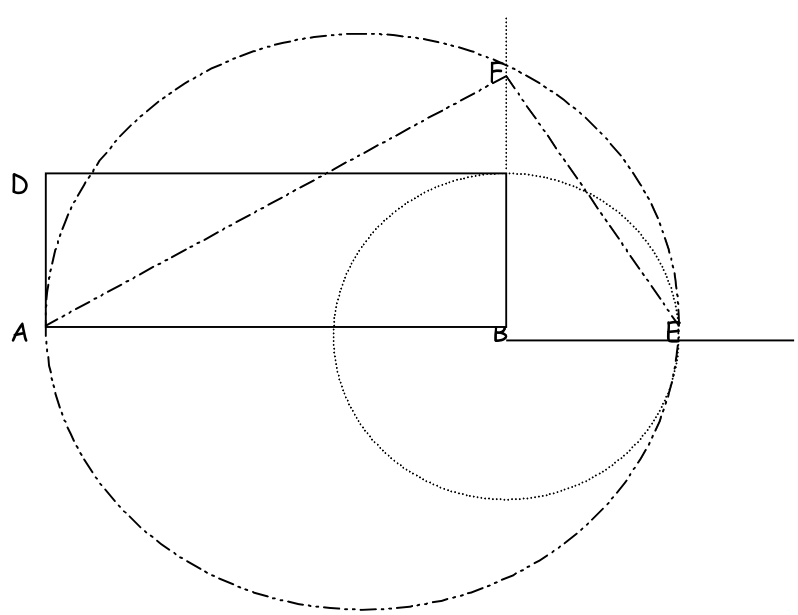
Basta entonces ver cómo hacer la cuadratura de un triángulo. Una manera de verlo es pasar del triángulo cualquiera a un triángulo rectángulo [1] (para lo cual basta con construir paralelas y perpendiculares), tomar un rectángulo con el doble de área y hacer la cuadratura de éste. Quedarse entonces con uno de los 4 triángulos que determinan las dos diagonales y duplicarlo a un cuadrado.



Al rectángulo también se puede llegar pasando por el paralelogramo.

Para hacer la cuadratura del rectángulo ABCD (suponemos AB > BC), trazamos con centro en B la circunferencia de radio BC que corta a la prolongación de lado AB en E . BF es el lado del cuadrado buscado, ya que trazando la circunferencia de diámetro AE que corta a la prolongación de BC en F son semejantes los triángulos EFB y BFA . Entonces,

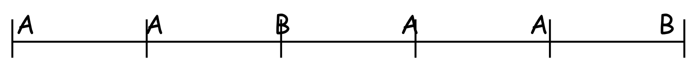
$$BF/BE = AB/BF \Rightarrow BF^2 = AB*BE = AB*BC$$



Según las características de los polígonos particulares, la cuadratura puede hacerse de diferentes maneras. Si pensamos a la circunferencia como el caso límite de los polígonos regulares, podríamos aproximar con ello la cuadratura del círculo.

El problema inverso: triangulaciones

Sea l=AB un segmento que dividimos en N partes congruentes l_1 , l_2 , ... , l_N , tales que tienen uno o ningún punto común. Nombramos aleatoriamente con A o B los puntos, entonces necesariamente existe un segmento que se llama AB (lema de Sperner).

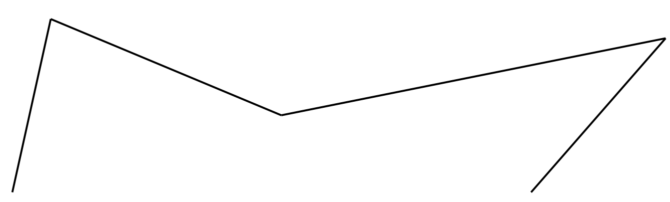


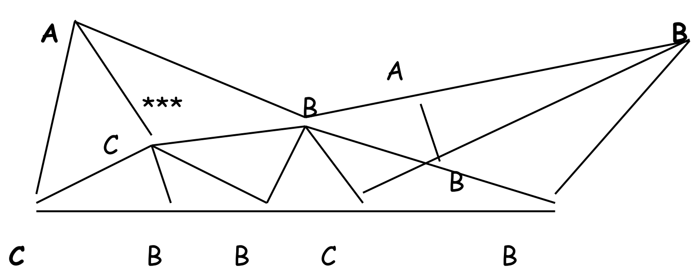
Dem.: Si el primero que nombramos es B, ya está. Si no, si el siguiente es B, ya está, Si no, como el último es B, ya está.

Definición: Sea R una región del plano delimitada por una poligonal cerrada P sin puntos múltiples. Una *triangulación* T de R es una división de R en un número finito de triángulos tales que dos de ellos no tienen puntos comunes, o comparten sólo un vértice o comparten un lado.

Decimos que una triangulación T se ha denominado según la regla de Sperner cuando cada vértice se llama A, B o C de modo que

- Hay al menos tres vértices en P que se llaman respectivamente A, B y C.
- Si un vértice está sobre P, entre dos vértices consecutivos de P denominados A y B respectivamente, entonces se llama A o B (idem para AC, BC).





Lema de Sperner
Consideramos un segmento L (de extremos A y B) que dividimos en N segmentos tales que 2 de ellos tienen un único punto común o ninguno. Asignamos arbitrariamente la letra A o B a los extremos de los nuevos segmentos, entonces existe un segmento AB.

Dem.: recorremos de izquierda a derecha, si el primero es B, ya está, si no, seguimos hasta encontrar el primer B (a lo sumo será el último), y tenemos un AB.

Definicion: Sea R una región en el plano delimitada por una poligonal P cerrada simple. Una triangulación de la región R, es una división de R en triángulos tales que dos de ellos tienen en común un lado, un vértice o nada.

Lema de Sperner (2)
Llamamos A, B, C a tres de los vértices de la triangulación que estén en P. Denominamos el resto de los vértices de la triangulación *según la regla de Sperner,* los vértices que están sobre P en el segmento entre A y B que no contiene a C se llaman A o B (idem para el resto). Entonces hay por lo menos un triángulo ABC.

Dem.: inducción sobre el número ***h*** de triángulos de la triangulación.

h=1, es trivial.
$h \Rightarrow h+1$: elegimos un segmento AB sobre P (¿por qué siempre existe?). Si el otro vértice del triángulo es C, ya está. Si no, suprimimos el segmento y por Hipótesis inductiva (ver que se puede aplicar) hay en lo que queda un ABC.

A partir de este resultado, se puede probar el *teorema de punto fijo de Brouwer.*

Definicion: Si llamamos F a la región delimitada por el ABC, $h:F\to F$ es una transformación continua si satisface que si tengo una sucesión de puntos $U_n\to U$ en F, entonces $h(U_n)\to h(U)$ en F.

Teorema del punto fijo de Brouwer:
Sea T la región delimitada por un triángulo equilátero de vértices ABC. Sea $h:T\to T$ continua, entonces h tiene un punto fijo. (Se hacen triangulaciones, y se ve que tiene que tener un punto fijo)

Se ve que también vale para el círculo (en general para muchas otras figuras cerradas).

De este teorema se puede deducir por ejemplo el Teorema fundamental del algebra:

Teorema fundamental del álgebra: un polinomio con coeficientes complejos tiene una raíz compleja.

Defino h(z)=z-[P(z)/*] donde * depende del polinomio, y se ve que es continua en el círculo de radio 1, tiene un punto fijo, que es raíz de P.

Otros resultados sorprendentes que se deducen del teorema de punto fijo son:

- Tenemos un pocillo de café en reposo, lo revolvemos y esperamos a que vuelva a estar en reposo. Hay al menos una partícula de líquido que ocupa el mismo lugar que antes de revolver.
- El viento no puede estar soplando simultáneamente en todos los lugares de la Tierra. En cada instante debe existir al menos un punto en reposo sobre la superficie terrestre.
- Una bola de billar no puede cubrirse totalmente de pelos, de modo que varíen de dirección en forma continua. Al tratar de hacerlo. Al menos un punto de la bola se queda sin pelo.