2

Álgebra y ecuaciones

A mediados del siglo IX, el matemático árabe Muhammaad ibn Musa al- Hwarizmi publicó en Bagdad, la capital del Imperio islámico, el libro *Hisab a-jabr w'al-muqabala*.

Este libro representó el nacimiento del álgebra y el origen del nombre de esta rama de las matemáticas.

La paraula *al-jabr* hace referencia a dos de los pasos que debemos aplicar cuando resolvemos ecuaciones:

- La transposición de términos de un miembro a otro de la igualdad.
- La multiplicación de los dos miembros por un mismo número para aislar la incógnita.

La palabra *al-muqabala* quiere decir:

- La reducción de los términos parecidos en los dos miembros de una ecuación.

De esta forma, *al-jabr* y *al-muqabala*, unidas por *w'*, que significa «y», dieron nombre al procedimiento de resolución de ecuaciones y fueron el antecedente de la palabra *álgebra*.

Contenidos

Competencias básicas

En esta unidad trabajaremos las siguientes competencias, aparte de la matemática:

1. Competencia en comunicación lingüística

3. Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico

8. Autonomía e iniciativa personal

Aprenderás a:

Calcular con expresiones algebraicas.

Identificar y diferenciar identidades y ecuaciones.

Resolver las identidades notables.

Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Plantear y resolver problemas de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

¿Recuerdas?

1. Calcula:

a) $4x - 9x + 2$ *b)* $5a(10 - a)$ *c)* $(-4x)^2$ *d)* $5y^2 - 5y - 5 + y$

2. Determina para qué valor de z se verifican las siguientes igualdades:

a) $z - 8 = 6$ *b)* $-2z = -5$ *c)* $\frac{z}{6} = -7$ *d)* $10 + 3z = 40$

3. Expresa en lenguaje algebraico:

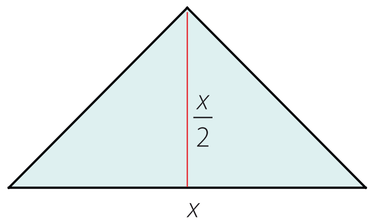
a) Dos nombres consecutivos.

b) El cuadrado del triple de un número.

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $9x - 15 + x = 24 + 2x$ *b)* $\frac{x}{5} + x = 8$

1. Las expresiones algebraicas



Si la base de un triángulo mide x y la altura es la mitad de la base, ¿cómo se calcula el área A de este triángulo?

Aunque no conocemos las medidas de la base y de la altura de este triángulo, podemos escribir una expresión que indique de manera general cómo calcular su área:

$$A = \frac{x \cdot \frac{x}{2}}{2}$$

Recuerda

El área de un triángulo se halla multiplicando la longitud de la base por la de la altura y dividiendo el producto entre 2.

Recuerda que con los términos de las expresiones algebraicas, pueden realizarse las mismas operaciones que con los números:

$$A = \frac{x \cdot \frac{x}{2}}{2} = \frac{x^2}{2} : 2 = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{x^2}{4}$$

Calcularemos el área de este triángulo elevando al cuadrado la longitud de la base y dividiendo el resultado entre 4. La expresión algebraica que lo indica es:

$$A = \frac{x^2}{4}$$

En una expresión algebraica aparecen números y letras separados por los símbolos de las operaciones matemáticas y, si es necesario, por paréntesis.

Una **expresión algebraica** permite representar, de manera general, situaciones con valores numéricos que no se conocen.

¿Cuál es el área del triángulo, si la longitud de la base es de 6 cm?

Este área es es **valor numérico** de la expresión algebraica que hemos escrito antes, pero sustituyendo la letra x por 6:

$$A = \frac{x^2}{4} = \frac{6^2}{4} = 9 \rightarrow A = 9 \text{ cm}^2$$

Actividades resueltas

1. Calcula:

a) $\frac{3}{4}x - x + \frac{x}{2} + y$ *b)* $(8z - 9m)(-2z + 3m)$

a) Recuerda que los términos de las expresiones algebraicas sólo pueden sumarse si son semejantes, es decir, si tienen la misma letra y elevada al mismo exponente. Reducimos los términos con x, efectuando las sumas de fracciones correspondientes.

$$\frac{3}{4}x - x + \frac{x}{2} + y = \frac{3}{4}x - \frac{4x}{4} + \frac{2x}{4} + y = \frac{x}{4} + y$$

b) No es posible resolver las sumas de los paréntesis porque sus términos no son semejantes. Para poder realizar este cálculo, aplicamos la propiedad distributiva dos veces y reducimos los términos semejantes.

$$(8z - 9m)(-2z + 3m) = -16z^2 + 24zm + 18mz - 27m^2 = -16z^2 + 42zm - 27m^2$$

Actividades resueltas

2. Extrae el factor común:

a) $4x - x^3 + x^2$ *b)* $45y - 9$ *c)* $8(x+1) - a(x+1)$

Recuerda que extraer factor común es el proceso inverso de aplicar la propiedad distributiva. Hay que encontrar el término algebraico más grande que multiplica al mismo tiempo los sumandos de la expresión inicial:

a) $4x - x^3 + x^2 = x(4 - x^2 + x)$

b) $45y - 9 = 9(5y - 1)$

c) $8(x+1) - a(x+1) = (x+1)(8-a)$

Actividades propuestas

1. El número de diagonales d que tiene un polígono convexo de n lados viene dado por la expresión $d = \dfrac{n(n-3)}{2}n$.

a) Comprueba que un triángulo no tiene diagonales.

b) ¿Cuántas diagonales tiene un pentágono convexo?

2. Calcula:

a) $4x - 7x + 2 + 3x$ *b)* $23y - 12y + 5$

c) $2m^2 + 3m - m$ *d)* $3b(-5c^2) - 13b^2 \cdot 2c$

e) $(2x - 3y)(-3x + 2y)$ *f)* $25x + 43x - 78x$

3. Calcula el valor numérico de las expresiones siguientes para $x = 15$:

a) $x^2 + x + 5$ *b)* $x(x - 1) + x$

4. Expresa en lenguaje algebraico:

a) El radio de un círculo de área A.

b) El importe de una factura de x € con el 7 % de IVA añadido.

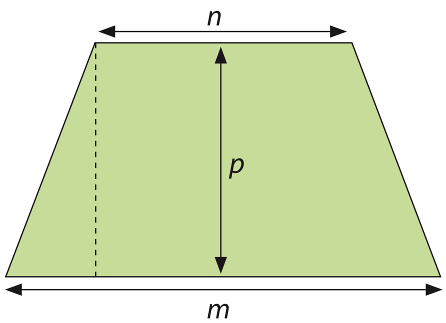
c) El precio de un artículo marcado en y € si se rebaja el 20 %.

5. Extrae el factor común:

a) $x - x^2 - x^3$ *b)* $a(a + b) - b(a + b)$

c) $p(q - r) + q - r$ *d)* $50m^4 - 15m^2 - 5m - 5$

6. Expresa, de la forma más sencilla posible, el área del polígono de la figura:



7. Escribe en lenguaje algebraico las igualdades que pueden deducirse de estos enunciados:

a) La diferencia entre los cuadrados de dos números pares consecutivos es 44.

b) El ala delta de la imagen es triangular. La base mide 5 m más que la altura. La superficie es de 12 m².

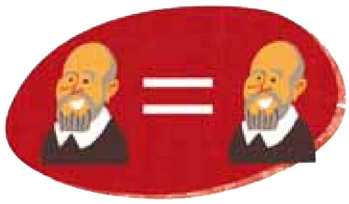
c) La base b de un rectángulo mide 1 cm más que la altura a y la diagonal d, 1 cm más que la base. El cuadrado de la longitud de la diagonal es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados.

d) La división, entre el número natural D y el número natural d no es exacta: se obtiene 5 de cociente y 7 de resto.

2. Igualdades, identidades y ecuaciones

Sabías que...

El signo "=" se utilizó por primera vez a mediados del siglo XVI por Robert Recorde. Este matemático inglés publicó un libro de álgebra y al comprobar que debía escribir muchas veces «es igual a», decidió simbolizar esta expresión mediante dos líneas paralelas y horizontales.



¿Cuándo se considera que dos expresiones matemáticas son iguales?

Dos expresiones matemáticas son **iguales** cuando representan el mismo valor o el mismo concepto.

En una **igualdad**, tenemos dos miembros separados por el signo "=" que pueden intercambiarse y la igualdad no varía.

$$9 - 15 = -6 \rightarrow -6 = 9 - 15$$

Fíjate en los ejemplos de igualdades del cuadro al margen. La primera es una **igualdad numérica** porque solo aparecen números y signos. La segunda y la tercera son **igualdades algebraicas o literales** porque, además de números y signos, aparecen letras que representan valores desconocidos.

Todas las igualdades verifican siempre estas dos propiedades:

- Si sumamos un mismo número a los dos miembros de una igualdad, obtenemos una nueva igualdad.
- Si multiplicamos los dos miembros de una igualdad por un mismo número diferente de cero, se obtiene una nueva igualdad.

La igualdad algebraica $3(a + b) = 3a + 3b$ es una **identidad**, ya que es cierta para cualquiera de los valores numéricos que asignamos a a y a b:

- $a = -2,\ b = 3 \rightarrow 3(a + b) = 3a + 3b \rightarrow 3(-2 + 3) = 3(-2) + 3 \cdot 3 \rightarrow$
  $\rightarrow 3 \cdot 1 = -6 + 9 \rightarrow 3 = 3$
- $a = \frac{1}{2},\ b = 1 \rightarrow 3(a + b) = 3a + 3b \rightarrow 3\left(\frac{1}{2} + 1\right) = 3\cdot\frac{1}{2} + 3 \cdot 1 \rightarrow$
  $\rightarrow 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + 3 \rightarrow \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$

Ejemplos de igualdades:

$-6 \cdot 3 - 4 : (-4) = (-2)2 + 13 \cdot (-1)$

$(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

$3x - 4 = 2$

Una **identidad** es una igualdad algebraica que se verifica numéricamente para cualquier valor que asignamos a la letra o letras que aparecen en sus miembros.

Veamos si la igualdad algebraica $2x - 4y = 3x + y$ es una identidad.

- $x = -5,\ y = 1 \rightarrow 2x - 4y = 3x + y \rightarrow 2(-5) - 4 \cdot 1 = 3(-5) + 1 \rightarrow$
  $\rightarrow -10 - 4 = -15 + 1 \rightarrow -14 = -14$
- $x = 4,\ y = -2 \rightarrow 2x - 4y = 3x + y \rightarrow 2 \cdot 4 - 4(-2) = 3 \cdot 4 - 2 \rightarrow$
  $\rightarrow 8 + 8 = 12 - 2 \rightarrow 16 = 14$

Al menos existen un par de valores, $x = 4$ e $y = -2$, por los cuales la expresión no se cumple. Por lo tanto $2x - 4y = 3x + y$ no es una identidad, es una ecuación.

Una **ecuación** es una igualdad algebraica que solo se cumple para determinados valores de las variables.

Identidades notables

Existen tres identidades que se utilizan muchas veces en los cálculos algebraicos. Por esta razón se las conoce como **identidades notables.**

Las identidades notables son el resultado de aplicar la propiedad distributiva y, si memorizamos su desarrollo, podremos realizar estos cálculos mucho más rápido:

- Cuadrado de la suma de dos números:

  $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

- Cuadrado de la diferencia de dos números:

  $(a - b)^2 = = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

- Suma por diferencia de dos números:

  $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$

Identidades notables

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Grado de una ecuación

La igualdad algebraica $3x - 4 = 2$ solo se verifica para $x = 2 \rightarrow 3 \cdot 2 - 4 = 2$. Se trata de una ecuación.

$3x - 4 = 2$ es una **ecuación de primer grado con una sola incógnita.** Esta ecuación solo tiene una solución: $x = 2$.

$2x - 4y = 3x + y$ es una ecuación de primer grado con dos incógnitas. Tiene múltiples soluciones. Por ejemplo $x = -5$ e $y = 1$, o bien $x = 10$ e $y = -2$.

El **grado de una ecuación** hace referencia al exponente al que está elevada la incógnita.

Actividades resueltas

3. Clasifica en ecuaciones e identidades las siguientes igualdades algebraicas:

a) $6f + f = 7f$ *b)* $y^2 = 49$

a) Se trata de una identidad, porque la letra *f* puede tomar cualquier valor numérico: sea el que sea el valor de *f*, la suma $6f + f$, siempre es $7f$.

b) $y^2 = 49$ es una ecuación numérica porque la igualdad numérica correspondiente solo será cierta si es igual a 7 o a -7.

4. ¿A qué identidad notable pertenece el desarrollo $36 - q^2$?

Se trata de la diferencia entre dos números cuadrados: 6^2 y q^2. Por tanto, esta diferencia corresponde a la suma por la diferencia de dos números:

$$36 - q^2 = (6 + q)(6 - q)$$

Actividades propuestas

8. Desarrolla las siguientes identidades notables:

a) $(3x - 7b)^2$ *b)* $(ax + p)^2$

c) $(3m + 7p)(3m - 7p)$ *d)* $(ab - cd)(ab + cd)$

9. Indica si las siguientes igualdades algebraicas son identidades o ecuaciones:

a) $m(7 - m) = 7m - m^2$ *b)* $x + y = 10$

3. Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

¿Qué número multiplicado por 3 da -15? O, dicho de otro modo, ¿cuál es el valor de x que verifica la igualdad $3x = -15$?

¿Qué valor de x verifica la igualdad $5x - 1 = 2x - 10$?

Seguro que la primera pregunta la respondes rápido: $x = -5$. Solo hay que dividir -15 entre 3.

La segunda cuestión no es tan fácil de resolver mediante el cálculo mental. Por eso, es necesario un procedimiento que nos permita encontrar este valor de x, es decir, que permita **resolver la ecuación.**

Para resolver una ecuación, aplicamos las propiedades de las igualdades y transformamos la ecuación inicial en otras más sencillas que tienen la misma solución que la ecuación inicial y son **equivalentes** a la primera:

$$5x - 1 = 2x - 10$$

Pasos de la resolución de la ecuación $5x - 1 = 2x - 10$	Propiedades de las igualdades aplicadas
1) Transposición de términos: $5x - 1 = 2x - 10$ $\downarrow$ $5x - 2x = -10 + 1$	Suma de un mismo valor a los dos miembros de la igualdad: $5x - 1 + 1 - 2x = 2x - 10 + 1 - 2x$
2) Reducción de términos semejantes: $5x - 2x = -10 + 1$ $3x = -9$	Suma de términos algebraicos semejantes.
3) Aislar la x: $3x = -9$ $\downarrow$ $x = -\frac{9}{3} \rightarrow x = -3$	Producto por el mismo número de los miembros de la igualdad: $\frac{3x}{3} = -\frac{9}{3}$

Observa que las ecuaciones $5x - 1 = 2x - 10$ y $3x = -9$ son equivalentes, porque tienen la misma solución:

$$x = -3$$

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen la misma solución.

Resolver una ecuación de primer grado con una incógnita es encontrar el valor numérico de la incógnita que verifica la igualdad.

Para comprobar que hemos resuelto correctamente una ecuación, substituimos la incógnita de la ecuación inicial por la solución, efectuamos los cálculos correspondientes a los dos miembros de la igualdad y comprobamos si se verifica:

$$5x - 1 = 2x - 10$$

$x = -3 \rightarrow$

$5 \cdot (-3) - 1 = -15 - 1 =$
$= -16$

$2 \cdot (-3) - 10 = -6 - 10 =$
$= -16$

3.1 Soluciones de una ecuación de primer grado

Siempre es posible transformar una ecuación de primer grado en otra equivalente del tipo $ax = b$, donde x es la incógnita de la ecuación y a y b son dos números enteros.

Cuando hacemos esto, podemos encontrarnos en tres situaciones diferentes:

- Si $a \neq 0$, la ecuación tiene **una única solución:** $x = \frac{b}{a}$
- Si $a = 0$ y $b \neq 0$, la ecuación es del tipo $0x = b$. No existe ningún valor numérico de x que verifique esta igualdad. En este caso, la ecuación **no tiene solución.**
- Si $a = 0$ y $b = 0$, obtenemos una igualdad del tipo $0x = 0$. Esta igualdad se verifica para cualquier valor de x, ya que cualquier número multiplicado por cero da como resultado cero. Así pues, **es una identidad** y no una ecuación.

Una ecuación de primer grado con una incógnita tiene siempre una única solución o bien no tiene ninguna.

Sabías que...

En química, una solución o disolución es una mezcla homogénea, es decir, una mezcla en la que no se distinguen las sustancias que la forman.

En la última página de esta unidad encontrarás más relaciones entre las matemáticas y la química.

Actividades resueltas

5. Resuelve la siguiente ecuación:

$$5 - 3(x + 6) = 7(x - 1)$$

Aplicamos la propiedad distributiva a los dos miembros de la igualdad para quitar los paréntesis:

$$5 - 3(x + 6) = 7(x - 1)$$
$$5 - 3x - 3 \cdot 6 = 7x - 7 \cdot 1$$
$$5 - 3x - 18 = 7x - 7$$

Transponemos los términos, reducimos los términos parecidos y aislamos la variable:

$$5 - 3x - 18 = 7x - 7$$
$$-3x - 7x = -7 - 5 + 18$$
$$-10x = 6$$
$$x = -\frac{6}{10}$$

Hallamos finalmente la fracción irreductible, antes de dar el resultado. Debemos dividir el numerador y el denominador por 2:

$$x = -\frac{3}{5}$$

La solución de la ecuación es $x = -\frac{3}{5}$.

Actividades resueltas

6. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{2(x-1)}{9} - \dfrac{6+2x}{3} = 4$

b) $(x-2)^2 - (x+2)(x-3) = x-2$

c) $\dfrac{4}{x-1} = \dfrac{3}{x-2}$

a) Aplicamos la propiedad distributiva:

$$\frac{2x-2}{9} - \frac{6+2x}{3} = 4$$

Multiplicamos los dos miembros de la ecuación por 9, que es el mcm de los denominadores de la ecuación, y obtenemos una ecuación equivalente sin denominadores:

$$9\left(\frac{2x-2}{9} - \frac{6+2x}{3}\right) = 9 \cdot 4 \rightarrow 2(2x-2) - 3(6+2x) = 36$$

Aplicamos de nuevo la propiedad distributiva, transponemos términos y reducimos los términos semejantes:

$$2x - 2 - 18 - 6x = 36 \rightarrow 2x - 6x = 36 + 2 + 18$$

$$-4x = 56 \rightarrow x = -\frac{56}{4} = = -14$$

La solución de la ecuación es $x = -14$.

b) Para quitar los paréntesis del primer miembro, desarrollamos el cuadrado de una diferencia y aplicamos la propiedad distributiva. Hay que prestar atención con el signo menos que precede al segundo paréntesis:

$$x^2 - 4x + 4 - (x^2 - 3x + 2x - 6) = x - 2$$

$$x^2 - 4x + 4 - x^2 + 3x - 2x + 6 = x - 2$$

Fíjate que obtenemos términos con x^2 y parece que esta ecuación sea de segundo grado. Transponemos los términos semejantes:

$$x^2 - 4x - x^2 + 3x - 2x - x = -2 - 4 - 6$$

En el primer miembro aparece $x^2 - x^2$, que es cero. Por tanto:

$$-4x = -12 \rightarrow x = \frac{-12}{-4} = 3$$

La solución es $x = 3$.

c) Se trata de una ecuación en forma de proporción, Por tanto, podemos aplicar la propiedad fundamental de las fracciones equivalentes para quitar los denominadores:

Si $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{d}$, entonces se verifica que $a \cdot d = b \cdot c$.

$$\frac{4}{x-1} = \frac{3}{x-2} \rightarrow 3(x-1) = 4(x-2)$$

Resolvemos la ecuación:

$$3x - 3 = 4x - 8 \rightarrow 3x - 4x = -8 + 3 \rightarrow -x = -5 \rightarrow x = 5$$

Actividades propuestas

10. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{5}\left(\frac{x}{3}+5\right)=4\left(\frac{1}{5}x-\frac{1}{2}\right)$

b) $\frac{x}{2}+\frac{2}{3}x-\frac{5x+30}{6}=0$

11. Aísla la letra x en cada una de las siguientes igualdades:

a) $ax - 1 = bx + 2$ *b)* $ax + c = d - bx$

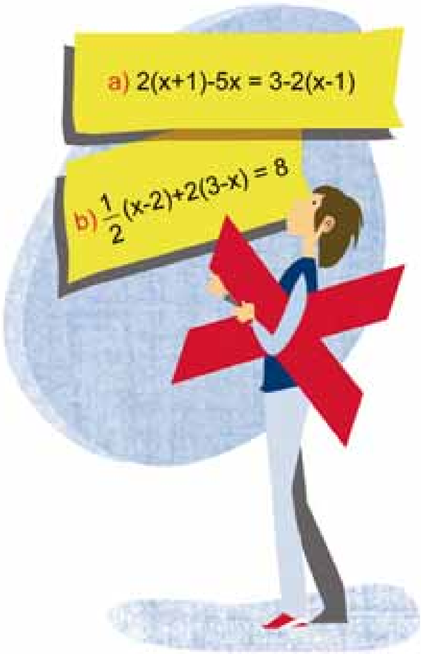
12. Indica cuál de los valores propuestos para x es solución de cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $2(x+1) - 5x = 3 - 2(x-1)$

$x = 3$ $x = \frac{3}{4}$ $x = -3$

b) $\frac{1}{2}(x-2) + 2(3-x) = 8$

$x = \frac{1}{2}$ $x = -2$ $x = 0$



13. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $7 + 3(2+x) - 3x = 2x + 9$ *b)* $2{,}5 - x = 6(\frac{1}{3} - 1{,}5\,x$

c) $\frac{x-3}{2}-\frac{x-1}{7}=-1$ *d)* $\frac{x-3}{2}-\frac{1-2x}{6}=-2(1-x)$

e) $(2x-5)(1-x) \neq (4-2x)(x-\frac{1}{2})$ *f)* $\frac{-3(x+3)}{4}=\frac{5(x-1)}{2}$

14. Los números $\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{3}$ -1 y 0 son las soluciones de las siguientes ecuaciones. Relaciona cada ecuación con su solución:

a) $6(x-1) = x+3(x-2)$ *b)* $2x + 1 = x + \frac{3}{2}$

c) $4 - 2(x+3) = 13 - 5(x+4)$ *d)* $3 + (x-1)(x+4) = (x+2)(x-2)$

15. Halla el valor de m para que la solución de la ecuación sea $x = -2$:

$$\frac{x+2}{3}-\frac{m(1-2x)}{6}=\frac{x-3}{2}$$

16. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $-2x+\frac{2}{3}-x=\frac{5}{4}x-1$ b) $4x + 7(3x-9) = -(10+x)$

c) $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}(8x-5)=\frac{3}{8}-x$ d) $x-\frac{2}{5}-2(-3x-5)=\frac{1}{10}$

4. Resolución de problemas mediante ecuaciones de primer grado con una incógnita

En época de rebajas, Juan compra un microondas y le hacen un descuento de 15 %. Si paga 106,25 €, ¿cuál era el precio de venda del microondas antes de las rebajas?

Precio antiguo

100%	
15%	85%

Descuento Precio nuevo

El álgebra permite resolver problemas, mediante el planteamiento y la resolución de ecuaciones. Se trata de traducir el enunciado al lenguaje algebraico.

Después de leer y comprender bien el enunciado, para planificar la resolución identificamos la incógnita del problema y la definimos con una letra:

Precio del microondas antes de las rebajas $\rightarrow x$

Planteamos la ecuación a partir de los datos del problema:

$$x - 15 \cdot \frac{x}{100} = 106{,}25$$

Resolvemos la ecuación:

$$x - 0{,}15x = 106{,}25 \rightarrow 0{,}85x = 106{,}25 \rightarrow x = \frac{106{,}25}{0{,}85} = 125$$

Comprobamos que, en efecto, si a 125 € le aplicamos un descuento del 15 %, el precio a pagar por el microondas es 106,25 €:

$$125 - 0{,}15 \cdot 125 = 125 - 18{,}75\ € = 106{,}25\ €$$

Antes de las rebajas el microondas valía 125 €.

Importante

Recuerda que los diferentes pasos que has de aplicar para resolver un problema son:

1. Lectura atenta del enunciado.
2. Planificación de la resolución.
3. Cálculos.
4. Comprobación de los resultados.
5. Revisión.
6. Respuesta.

Actividades resueltas

7. Un padre tiene actualmente cinco veces la edad de su hijo. Cuando pasen tres años, su edad solo será cuatro veces superior. ¿Qué edad tiene cada uno?

Organizamos los datos para plantear la ecuación:

	Edad del padre	Edad del hijo
Actualidad	$5x$	x
Dentro de 3 años	$5x + 3$	$x + 3$

Dentro de 3 años → $5x + 3 = 4(x+3)$

$5x + 3 = 4x + 12 \rightarrow$

$5x - 4x = 12 - 3 \rightarrow x = 9$

El hijo tiene 9 años y el padre 45 años.

8. Dos números suman 30. Si dividimos uno entre otro, obtenemos un cociente de 2 y un residuo de 3. ¿Cuáles son estos números?

Aunque el ejercicio nos pida encontrar dos números, podemos trabajar con una sola incógnita x:

$$x \rightarrow \text{número pequeño}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que la suma de los dos números es 30, tenemos que:

$$30 - x \rightarrow \text{número grande}$$

Para plantear la ecuación, aplicamos la propiedad fundamental de la división. Recuerda que esta propiedad explica que el dividendo de una división es igual al producto del divisor y el cociente, más el residuo. Por lo tanto:

$$30 - x = 2x + 3$$

Ahora resolvemos la ecuación, para encontrar la x, o sea, el número pequeño:

$$-x - 2x = 3 - 30 \rightarrow -3x = -27 \rightarrow x = \frac{-27}{-3} = 9$$

Y encontramos después el número grande:

$$x = 9 \rightarrow 30 - x = 30 - 9 = 21$$

Un número es 9 y el otro 21.

Actividades propuestas

17. Un padre de familia tiene 49 años, y su hijo mayor, 26. ¿Cuántos años hace que la edad del padre era el doble de la del hijo?

18. Intenta hallar dos números enteros consecutivos que sumen 60.

19. Ramón leyó la semana pasada $\frac{3}{4}$ partes del libro que le regalaron en su cumpleaños. Mañana tiene intención de leer $\frac{2}{5}$ partes más. Después de hacerlo aún le faltarán 30 páginas para terminarlo, ¿cuántas páginas en total tiene su libro?

Actividades finales

1. La edad de Marta es la mitad que la de Pedro y la de este, la tercera parte que la de Ana.

a) Si x es la edad de Marta, expresa algebraicamente las edades de Pedro y de Ana.

b) Si y es la edad de Ana, expresa algebraicamente las edades de Marta y Pedro.

2. ¿Si $a = -8$ y $b = 10$, cuál es el valor numérico de la expresión $a^2 + 2ab + b^2$?

3. Escribe la expresión algebraica del área de una figura que resulta de restar un cuadro de lado c a un rectángulo de altura c y base 20 cm.

4. Una empresa de autocares cobra una cantidad fija de 300 € y un plus de 0,25 € por cada kilómetro. Determina la expresión algebraica que expresa el importe y que deberíamos pagar, si alquilamos un autocar de esta empresa para hacer una excursión con los alumnos de 3.º de ESO a un lugar situado a d quilómetros de la escuela.

5. Identifica la identidad notable que se corresponde con las siguientes expresiones algebraicas:

a) $b^2 - 25c^2$ *b)* $16x^2 - 56xy + 49y^2$

6. Extrae el factor común de:

a) $-64m^3 + 44m^2 - 4m$

b) $(x + 6)(p + 7) + (x + 6)(10 + t)$

7. Halla el valor de la letra que hace que se verifique cada una de estas igualdades algebraicas:

a) $2 + 12 : a = 5$ *b)* $(b + 3)^2 = 0$

c) $5c + 3c + 1 = 25$ *d)* $d : 7 + 3 = 6$

8. Indica en cada caso si se trata de una identidad o de una ecuación. Si es una ecuación, encuentra la solución:

a) $3(x + 1) = 2(x - 2)$

b) $(a - 5) \cdot 2 + 3(2a - 1) = 2a - 13$

c) $x + \dfrac{2x}{5} = \dfrac{5x}{3}$

d) $p^2 - 25 = (p + 5)(p - 5)$

9. Aísla x en cada una de las siguientes igualdades:

a) $ax + b = 0$ *b)* $ax + b = x$

c) $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{c}$ d) $\dfrac{-1}{a} = \dfrac{1}{x}$

10. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $1 - (3x-2) - 2(x - 1) = 5(1 - 2x)$

b) $x + 5(x + 3) = 3(2x + 4)$

c) $\dfrac{2x + 4}{5} = \dfrac{x - 1}{3}$

d) $(x + 1)^2 - x^2 = 9$

e) $(x - 2)(x + 2) = x(x - 1)$

f) $(x - 2) \cdot x - x^2 = 0$

g) $\dfrac{1}{2}x + \dfrac{x}{3} - \dfrac{5}{6}x - 5 = 0$

11. Un padre reparte su herencia entre sus cuatro hijos de forma arbitraria y decide dar al hijo mayor la mitad del dinero, al segundo la tercera parte, al tercero la cuarta parte y al menor, 1500 €. ¿Cuántos euros reparte entre sus hijos?

12. Si aumentamos en 3 cm el lado de un cuadrado, obtenemos otro cuadrado cuya área supera en 51 cm² la del cuadrado original. ¿Cuánto mide el lado del primer cuadrado?

13. Aísla la letra x en cada una de las siguientes igualdades:

a) $2ax = ax + 3b$

b) $qx + 2x - a = 3x + 2c$

14. La edad de un padre de familia es el triple que la de su hijo y, dentro de 16 años solo será el doble. ¿Cuántos años tiene cada uno?

Actividades finales

15. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3(x - 3) - 4(2 - 3x) = 2(1 - 2x)$

b) $\frac{2}{3}\left(\frac{x}{5} - 3\right) = 2\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right) - \frac{x}{5}$

c) $\frac{x-2}{2} - \frac{x-4}{4} - \frac{x-3}{3} = 0$

d) $\frac{3}{2x+5} = \frac{1}{x-1}$

e) $5 + x^2 = (x - 2)^2$

f) $(3x - 2) \cdot 8 - 4(5 + 6x) = 6(4 - x)$

g) $10 - x^2 = 4x - (x - 3)^2$

h) $\frac{x+4}{3} - 2(x - 5) = -5\left(\frac{x}{15} - \frac{2}{5}\right)$

16. Cristina quiere una bicicleta para ir al campo. Por una bicicleta rebajada en un 8 % ha pagado 115 €. ¿Cuál era el precio antes de la rebaja?

17. Resuelve:

a) $\frac{3}{-2(2+3x)} = \frac{2}{-4(x+3)}$

b) $(2x + 1)^2 - (2x - 1)^2 = 208$

c) $-9(x + 4)(x - 5) = 3x(2 - 3x)$

d) $\frac{1}{3}(3x + 1) - \frac{x+3}{5} - \frac{x-2}{10} = x + 5$

e) $\frac{x-3}{x-4} = \frac{x-5}{x-6}$

18. Una fracción es equivalente a $\frac{29}{13}$ y su numerador tiene 32 unidades más que su denominador ¿De qué fracción se trata?

19. La diferencia entre dos números naturales es 4 y la diferencia entre sus cuadrados, 384. ¿De qué números se trata?

20. Halla el valor de *n* en cada caso:

a) $-2 - [n - (-2)] = 0$

b) $-3 \cdot 5 + n(-3) = -3 \cdot 2$

21. Encuentra dos números cuya diferencia sea 42 y su razón, $\frac{5}{2}$.

22. Escribe el enunciado de un problema que se resuelva mediante la ecuación $\frac{x}{6} + \frac{x}{5} + \frac{x}{3} + 9 = x$

23. La abuela de María tiene seis veces la edad de su nieta. María tiene 8 años. ¿Cuántos años han de pasar para que la edad de la abuela sea el doble de la de su nieta?

24. A una fiesta asisten 45 personas. El número de mujeres es el doble que el de hombres y el de niños, la mitad que el de hombres y mujeres juntos. ¿Cuántas mujeres, cuántos hombres y cuántos niños hay en la fiesta?

25. Resuelve:

a) $x + \frac{x}{7} + \frac{1}{1}\left(x + \frac{x}{7}\right) = 1$

b) $-\frac{1}{5} - \left(x + \frac{3}{4}\right) = -(2x - 4)$

26. El 10 % de los habitantes de una población hablan correctamente cuatro lenguas, el 15 % hablan tres, el 80 % hablan dos y el resto, 900 habitantes, solo hablan su lengua materna. ¿Cuántos habitantes tiene la población? Analiza la solución de la ecuación en relación a la respuesta que has de dar en el problema.

27. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\frac{5-3x}{4} - \frac{4x-3}{10} + 2x - 3 = \frac{2x-1}{5}$

b) $\frac{x}{3} + \frac{1}{2} - \frac{4x-1}{2} = x + 1$

c) $\frac{4x-1}{3} - \frac{3}{4} = \frac{5x}{6} + \frac{3x-1}{4}$

d) $\frac{2(x-1)}{3} - 3\left(x - \frac{1}{4}\right) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$

¿Qué te cuentas?

El álgebra puede ayudar a la calculadora

En la pantalla de la calculadora de Juan aparece el número 7 y en la de Pilar, el número 32. Juan suma repetidamente 6 a su número y Pilar resta 9 al suyo, de manera simultánea a Juan. Después de cada una de estas operaciones, se comunican el número que aparece en la pantalla.

Están llenos de curiosidad por saber si, cuando repitan la misma operación varias veces, llegarán a obtener en algún momento el mismo número. En caso afirmativo, ¿cuántas veces deberán repetir la operación de sumar 6 y restar 9, respectivamente?

Ponte en el lugar de Juan y con un compañero o compañera que haga de Pilar, coged la calculadora y ¡a jugar!

Juan: 7 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 ...

Pilar: 325 − 7 − 7 − 7 − 7 − 7 ....

¿Habéis llegado a un número común? ¿Cuántas veces habéis repetido la operación?

Quizás el álgebra puede ayudaros a resolver el problema. Representad por *x* el número de veces que se repite la operación y plantead una ecuación.

Interpretad la solución de la ecuación y comprenderéis porqué con la calculadora no conseguíais llegar a un número común.

Rápido, rápido

Resuelve mentalmente, sin lápiz, calculadora, ¡ni contando con los dedos!

a) $9 - x = 2$

b) $20 - x = 3$

c) $-14x = 7$

d) $x + 5 = 3$

e) $2x + 1 = \frac{1}{2}$

f) $4x + 3 = 2x + 5$

g) $3x + 2 = 3x - 4$

h) $-x + 5 = -1$

i) $2x + 3 = 2x + 7$

j) $x - 2 = \frac{3}{4}$

k) $\frac{3}{x} = \frac{1}{5}$

l) $4 - x = 2 + x$

m) $13x - 1 = 25$

n) $6 - 2x = 10$

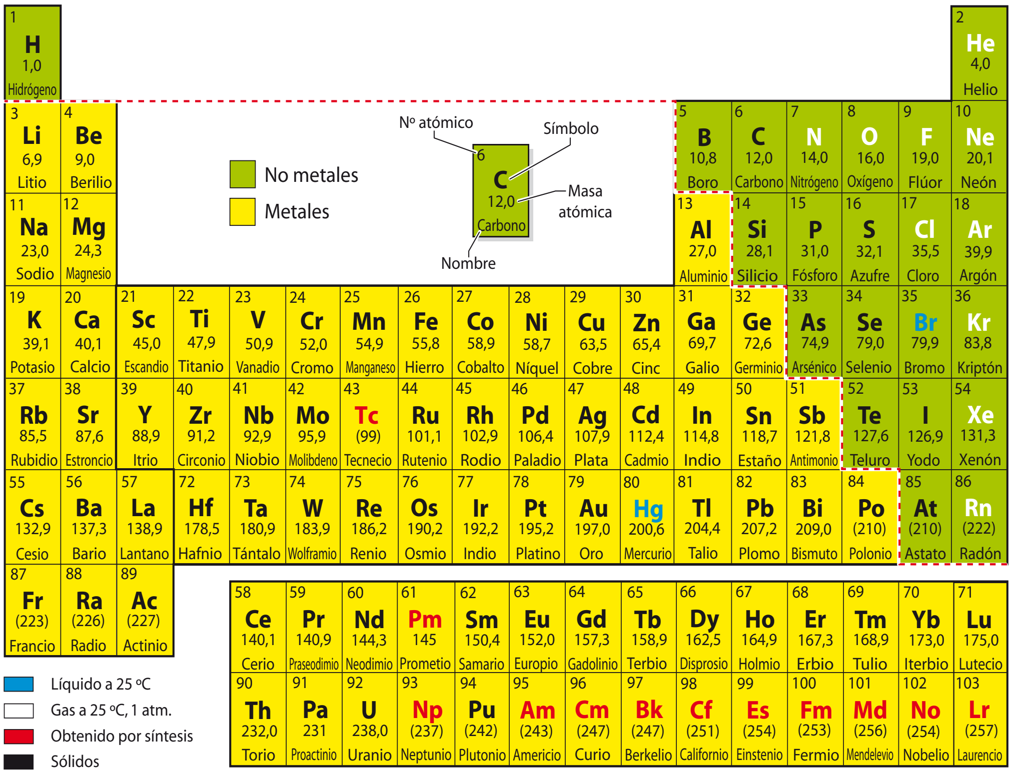
o) $-3x = -\frac{1}{2}$

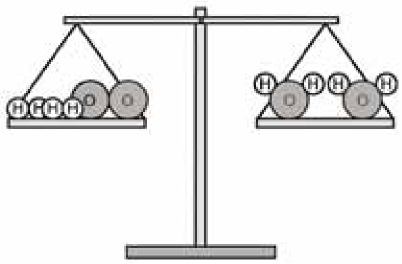
p) $x + 7 = 2$

Cambios y relaciones: las reacciones químicas y las ecuaciones

Las matemáticas no son la única ciencia que utiliza las ecuaciones para indicar y describir procedimientos y cálculos de manera simbólica, pero precisa.

En la química, ciencia que estudia la materia y los cambios que puede experimentar, se utilizan las ecuaciones para explicar qué compuestos reaccionan con otros compuestos en un proceso de cambio químico, qué productos se obtienen y en qué cantidades y proporciones.

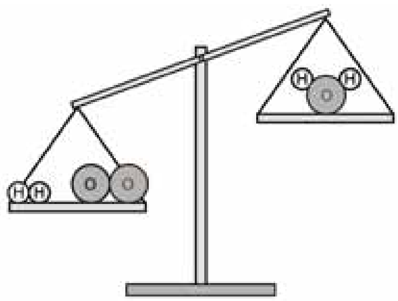




Ecuación ajustada

Los símbolos, en este caso los de los elementos químicos, y los números, los coeficientes y los subíndices, además del signo de sumar, se utilizan para describir el proceso.

El concepto de **igualdad,** clave en una ecuación matemática, lo es también en una ecuación química, por lo que debe quedar claro que se tienen los mismos átomos de cada elemento al principio y al final del proceso, aunque organizados de una manera diferente.



Ecuación no ajustada

El signo = de matemáticas es sustituido por → en una ecuación química.

Fíjate en la ecuación que explica la reacción de hidrógeno y oxígeno para producir agua:

$$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$$