

UNIVERSIDAD DE OVIEDO

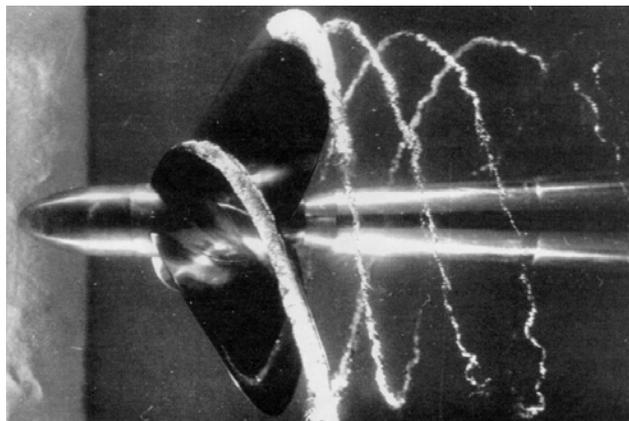
**Escuela Politécnica Superior de Ingeniería de Gijón**

**Ingenieros Industriales**

**Curso 2004-2005**

**Apuntes de Mecánica de Fluidos**

## 3. ANÁLISIS DIMENSIONAL.



**Julián Martínez de la Calle**  
Área de Mecánica de Fluidos  
Gijón noviembre 2004

### 3. ANÁLISIS DIMENSIONAL.

- 3.1. Homogeneidad dimensional.
- 3.2. Teorema de BUCKINGHAM.
- 3.3. Grupos adimensionales.
- 3.4. Normalización de las ecuaciones de conservación.
- 3.5. Teoría de modelos.
- 3.6. Problemas resueltos.

El análisis dimensional es un método para verificar ecuaciones y planificar experimentos sistemáticos. A partir del análisis dimensional se obtienen una serie de grupos adimensionales, que van a permitir utilizar los resultados experimentales obtenidos en condiciones limitadas, a situaciones en que se tengan diferentes dimensiones geométricas, cinemáticas y dinámicas; y muchas veces en casos en que las propiedades del fluido y del flujo son distintas de las que se tuvieron durante los experimentos.

La importancia del análisis dimensional viene dada por la dificultad del establecimiento de ecuaciones en determinados flujos, además de la dificultad de su resolución, siendo imposible obtener relaciones empíricas y teniendo que recurrir al método experimental.

Es importante considerar que si en un experimento en un modelo (a escala geométrica del prototipo), se pueden obtener las escalas cinemáticas (relaciones de velocidades) y las escalas dinámicas (relaciones de fuerzas), los resultados adimensionales que se obtienen para el modelo son también válidos para el prototipo.

#### 3.1. HOMOGENEIDAD DIMENSIONAL.

En toda ecuación física, cada término deberá tener las mismas dimensiones: la ecuación debe ser dimensionalmente homogénea; además la división de todos los términos por uno cualquiera de ellos, haría la ecuación adimensional, y cada cociente sería un grupo adimensional.

Las dimensiones de las magnitudes empleadas normalmente en Mecánica de Fluidos, incluyen sólo una o más de las siguientes 4 dimensiones: M (masa), L (longitud), T (tiempo) y  $\theta$  (temperatura):

longitud	$[l] = L$	entropía	$[s] = M L^2 T^{-2} \theta^{-1}$
área	$[A] = L^2$	calor específico	$[c] = L^2 T^{-2} \theta^{-1}$
volumen	$[V] = L^3$	conductividad térmica	$[\kappa] = M L T^{-3} \theta^{-1}$
momento de inercia	$[I] = L^4$	caudal volumétrico	$[Q] = L^3 T^{-1}$
velocidad	$[v] = L T^{-1}$	caudal másico	$[\dot{m}] = M T^{-1}$
aceleración	$[a] = L T^{-2}$	energía, entalpía	$[E] = M L^2 T^{-2}$
velocidad angular	$[\omega] = T^{-1}$	viscosidad absoluta	$[\mu] = M L^{-1} T^{-1}$
aceleración angular	$[\alpha] = T^{-2}$	viscosidad cinemática	$[\nu] = L^2 T^{-1}$
densidad	$[\rho] = M L^{-3}$	tensión superficial	$[\sigma] = M T^{-2}$
volumen específico	$[v] = L^3 M^{-1}$	compresibilidad	$[K] = M L^{-1} T^2$
fuerza	$[F] = M L T^{-2}$	potencia	$[\dot{W}] = M L^2 T^{-3}$
par	$[T] = M L^2 T^{-2}$		
presión, tensión	$[p], [\tau] = M L^{-1} T^{-2}$		

### 3.2. TEOREMA “PI” DE BUCKINGHAM.

El teorema PI de BUCKINGHAM establece que en un problema físico en que se tengan “n” variables que incluyan “m” dimensiones distintas; las variables se pueden agrupar en “n-m” grupos adimensionales independientes.

Siendo  $V_1, V_2, \dots, V_n$  las variables que intervienen en el problema, se debe tener una función que las relacione:  $f(V_1, V_2, \dots, V_n) = 0$ ; si  $G_1, G_2, \dots, G_{n-m}$  representan los grupos adimensionales que representan a las variables  $V_1, V_2, \dots, V_n$ ; el teorema de BUCKINGHAM también establece que existe una función de la forma:  $g(G_1, G_2, \dots, G_{n-m}) = 0$ .

El método para determinar, los grupos adimensionales ( $G_i, i=1, \dots, n-m$ ); consiste en la selección de “m” de las “n” variables, con diferentes dimensiones, de manera que contengan entre todas las “m” dimensiones, y emplearlas como *variables repetitivas*, formando cada uno de los “n-m” grupos adimensionales a partir de la siguiente expresión genérica:

$$G_i = V_i \cdot \prod_{j=m-n+1}^{j=n} V_j^{a_{ij}} \quad i = 1, \dots, m-n \quad (1)$$

A los grupos adimensionales, se les suele denominar *parámetros adimensionales PI de BUCKINGHAM*, al ser su expresión un productorio adimensional (símbolo de productorio =  $\Pi$ ).

Los exponentes “ $a_{ij}$ ” se determinan por la condición de que cada grupo resulte adimensional; se sustituyen las dimensiones de las variables por ellas mismas y los exponentes de M, L, T,  $\theta$ , ..., se igualan a cero (adimensionalidad del parámetro).

Consideremos como ejemplo, la **fuerza de arrastre** en flujo externo, de un fluido sobre un determinado objeto. Se tiene que la fuerza de arrastre ( $F_D$ ) depende de: la viscosidad absoluta del fluido ( $\mu$ ), la densidad del fluido ( $\rho$ ), la velocidad relativa entre fluido y objeto ( $v$ ) y de una longitud característica del objeto ( $L$ ). Las cinco variables:  $F_D, \mu, \rho, v$ , y  $L$ , aportan 3 dimensiones distintas: M, L y T; con lo que por el teorema de BUCKINGHAM se tendrán  $5-3=2$  grupos adimensionales:

$$G_1 = F_D L^a v^b \rho^c$$

$$G_2 = \mu L^d v^e \rho^f$$

Los exponentes de cada grupo se determinan a partir de sus ecuaciones dimensionales:

$$[G_1] = [F_D] [L^a] [V^b] [\rho^c] \quad M^0 L^0 T^0 = (MLT^{-2})(L)^a (LT^{-1})^b (ML^{-3})^c = M^{1+c} L^{1+a+b-3c} T^{-2-b}$$

$$\dots \quad 0=1+c; 0=1+a+b-3c; 0=-2-b \quad \dots \quad a=-2; b=-2; c=-1$$

con lo que el grupo adimensional  $G_1$  es:

$$G_1 = F_D L^{-2} v^{-2} \rho^{-1} = \frac{F_D}{L^2 v^2 \rho}; \text{ que da lugar al denominado } \mathbf{coeficiente de arrastre } C_D; \text{ en donde se}$$

introduce el factor (1/2) para tener la presión dinámica:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho v^2 L^2} \quad (2)$$

De forma análoga se obtiene el segundo parámetro adimensional:  $G_2 = \mu L^{-1} v^{-1} \rho^{-1}$ ; que da lugar al **número de REYNOLDS Re**:

$$Re = \frac{v L \rho}{\mu} \quad (3)$$

### 3.3. PARÁMETROS ADIMENSIONALES.

Las magnitudes que intervienen en el movimiento de un fluido, se pueden agrupar en tres tipos:

- magnitudes mecánicas del fluido
- magnitudes térmicas del fluido
- magnitudes del flujo

		magnitud	dimensiones	unidades SI
magnitudes mecánicas del fluido	$\mu$	viscosidad absoluta o dinámica	$M L^{-1} T^{-1}$	kg/ms=Pa.s
	$\rho$	densidad ( $dm/dV$ )	$M L^{-3}$	kg/m <sup>3</sup>
	$\nu$	viscosidad cinemática ( $\mu/\rho$ )	$L^2 T^{-1}$	m <sup>2</sup> /s
	$\sigma$	tensión superficial ( $dF/dl$ )	$M T^{-2}$	kg/s <sup>2</sup>
	$K$	módulo de compresibilidad ( $\rho dp/d\rho$ )	$M L^{-1} T^{-2}$	N/m <sup>2</sup> = Pa
	$p, \tau$	presión, tensión	$M L^{-1} T^{-2}$	N/m <sup>2</sup> = Pa
magnitudes térmicas del fluido	$\kappa$	conductividad térmica	$M L T^{-3} \theta^{-1}$	W/mK
	$c_p$	calor específico a presión constante ( $\partial h / \partial T$ ) <sub>p</sub>	$L^2 T^{-2} \theta^{-1}$	J/kg K
	$c_v$	calor específico a volumen constante ( $\partial \hat{u} / \partial T$ ) <sub>v</sub>	$L^2 T^{-2} \theta^{-1}$	J/kg K
	$\beta$	coeficiente de dilatación térmica ( $-(d\rho/\rho) / dT$ )	$\theta^{-1}$	K <sup>-1</sup>
magnitudes del flujo	$v$	velocidad	$L T^{-1}$	m/s
	$L$	longitud característica	$L$	m
	$g$	aceleración gravitacional	$L T^{-2}$	m/s <sup>2</sup>
	$\varepsilon$	rugosidad	$L$	m

Los parámetros adimensionales asociados a las magnitudes anteriores, vienen determinados por relaciones entre los diversos efectos que se pueden considerar:

parámetro	definición	relación cualitativa de efectos	importancia
número de REYNOLDS	$Re = \frac{vL\rho}{\mu}$	$\frac{\text{fuerza de inercia}}{\text{fuerza tensiones viscosas}}$	siempre
número de MACH	$Ma = \frac{v}{\sqrt{K/\rho}} = \frac{v}{a}$	$\frac{\text{inercia}}{\text{compresibilidad}}$	flujo compresible
número de FROUDE	$Fr = \frac{v}{\sqrt{gL}}$	$\frac{\text{inercia}}{\text{gravedad}}$	flujo con superficie libre
número de WEBER	$We = \frac{\rho v^2 L}{\sigma}$	$\frac{\text{inercia}}{\text{tensión superficial}}$	flujo con interfase L-L, L-G
número de EULER	$Eu = \frac{p}{\frac{1}{2}\rho v^2}$	$\frac{\text{presión}}{\text{inercia}}$	siempre
número de STROUHAL	$St = \frac{f L}{v} = \frac{L/v}{T}$	$\frac{\text{oscilaciones}}{\text{velocidad}} \vee \frac{t^\circ \text{residencia}}{t^\circ \text{característico}}$	Flujos oscilatorio transitorio
número de PRANDTL	$Pr = \frac{\mu c_p}{\kappa}$	$\frac{\text{disipación energía}}{\text{conducción calor}}$ (prop. fluido)	transmisión de calor
número de BRINKHAM	$Br = \frac{\mu v^2}{\kappa T}$	$\frac{\text{disipación energía}}{\text{conducción calor}}$ (prop. flujo)	transmisión de calor
número de GRASHOF	$Gr = \frac{\beta \Delta T g L^3 \rho^2}{\mu^2}$	$\frac{\text{flotabilidad}}{\text{viscosidad}}$	Convección natural

### 3.4. NORMALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE CONSERVACIÓN.

Un método para obtener los parámetros adimensionales que controlan un determinado flujo, es el de normalización, en donde se describen las ecuaciones diferenciales de conservación, de forma que aparezcan variables adimensionales, y además que su orden de magnitud sea la unidad.

Para la normalización de las ecuaciones, se adimensionalizan todas las variables por un valor característico, de tal forma que los valores adimensionales (\*) sean próximos a la unidad:

Longitudes:	longitud característica = $L_c$	$x^* = \frac{x}{L_c}$	$y^* = \frac{y}{L_c}$	$z^* = \frac{z}{L_c}$
Tiempos:	tiempo característico = $t_c$	$t^* = \frac{t}{t_c}$		
Velocidades:	velocidad característica = $U_c$	$\vec{v}^* = \frac{\vec{v}}{U_c} = \frac{u}{U_c} \vec{i} + \frac{v}{U_c} \vec{j} + \frac{w}{U_c} \vec{k}$		
Densidades:	densidad característica = $\rho_c$	$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_c}$		
Presiones:	presión característica = $p_c$	$p^* = \frac{p}{p_c}$		
Temperaturas:	temperatura característica = $T_c$	$T^* = \frac{T}{T_c}$		
Operador Nabla:	longitud características = $L_c$	$\nabla^* = \frac{\partial}{\partial x^*} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y^*} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z^*} \vec{k} = L_c \cdot \nabla$		
Operador Nabla <sup>2</sup> :	longitud características = $L_c$	$\nabla^{*2} = L_c^2 \cdot \nabla^2$		

#### 3.4.1. NORMALIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD:

Números de **MACH** y de **STROUHAL**

La ecuación de continuidad es:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \cdot \vec{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \nabla \rho = 0$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\Delta \rho_c}{t_c} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} \quad \text{siendo } \Delta \rho^* = \frac{\Delta \rho}{\Delta \rho_c}$$

La normalización de los términos es:

$$\rho \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\rho_c U_c}{L_c} \rho^* \nabla^* \cdot \vec{v}^*$$

$$\vec{v} \nabla \rho = \frac{U_c}{L_c} \Delta \rho_c \vec{v}^* \nabla^* \rho^*$$

Con lo que la ecuación de continuidad normalizada es:

$$\frac{\Delta \rho_c}{t_c} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_c U_c}{L_c} \rho^* \nabla^* \cdot \vec{v}^* + \frac{U_c}{L_c} \Delta \rho_c \vec{v}^* \nabla^* \rho^* = 0$$

dividiendo todos los términos por  $\frac{\rho_c U_c}{L_c}$ , queda:

$$\left( \frac{\Delta \rho_c}{\rho_c} \right) \left( \frac{L_c / U_c}{t_c} \right) \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \rho^* \nabla^* \cdot \vec{v}^* + \left( \frac{\Delta \rho_c}{\rho_c} \right) \vec{v}^* \nabla^* \rho^* = 0$$

El término adimensional  $\frac{\Delta\rho_c}{\rho_c}$  es el cuadrado del número de MACH, que es la relación entre la velocidad del fluido y la velocidad de una pequeña perturbación en el seno del fluido:

$$\text{Ma} = \frac{U_c}{a_c}$$

$$a^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad \left| \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{\rho} = \frac{dp/a^2}{-dp/vdv} = -\frac{v \cdot dv}{a^2} = \dots // \frac{dv}{v} \approx 1 // \dots = -\frac{v^2}{a^2} = -\text{Ma}^2$$

$$s \text{ cte} \Rightarrow \frac{dp}{\rho} + v \cdot dv = 0$$

El término adimensional  $\frac{L_c/U_c}{t_c}$  es el número de STROUHAL, que es la relación entre el tiempo de residencia y el tiempo característico:

$$\text{St} = \frac{L_c/U_c}{t_c}$$

Con lo que la ecuación de continuidad normalizada y adimensional es:

$$\left( \text{Ma}^2 \right) \left( \text{St} \right) \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} - \rho^* \nabla^* \cdot \vec{v}^* + \left( \text{Ma}^2 \right) \vec{v}^* \nabla^* \rho^* = 0 \quad (4.)$$

a partir de la cual se pueden establecer hipótesis simplificadoras en función de los valores de los números adimensionales que controlan la ecuación de continuidad:

Si el Ma es pequeño ( $\text{Ma} < 0,3$ ) el término del gradiente de densidad se puede despreciar, y el flujo se puede considerar como “cuasi-incompresible”. Si el Ma es grande, el gradiente de densidad no se puede despreciar y el flujo es compresible.

Si el St es pequeño (es decir el tiempo de residencia es mucho menor que el tiempo característico) el término de la variación temporal se puede despreciar, y el flujo se puede considerar como “cuasi-estacionario”. Si el St es grande, el proceso es no estacionario.

## 3.4.2. NORMALIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE NAVIER-STOKES:

Números de **REYNOLDS**, de **EULER**, de **FROUDE** y de **STROUHAL**

Euación de NAVIER-STOKES: 
$$\rho \bar{g} - \nabla p + \frac{\mu}{3} \nabla(\nabla \cdot \bar{v}) + \mu \nabla^2 \bar{v} = \rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \cdot \bar{v} \right)$$

La normalización de los términos es:

$$\left. \begin{aligned} \rho \bar{g} &= \rho_c g \cdot \bar{g}^* && \text{siendo } \bar{g}^* = \frac{g}{g} \\ \nabla p &= \frac{p_c}{L_c} \nabla^* p^* \\ \mu \nabla(\nabla \cdot \bar{v}) &= \frac{\mu_c U_c}{L_c^2} \mu^* \nabla^* (\nabla^* \cdot \bar{v}^*) && \text{siendo } \mu^* = \frac{\mu}{\mu_c} \\ \nabla^2 \bar{v} &= \frac{U_c}{L_c^2} \nabla^{*2} \bar{v}^* \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} &= \frac{U_c}{t_c} \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial t^*} \\ (\bar{v} \cdot \nabla) \cdot \bar{v} &= \frac{U_c^2}{L_c} (\bar{v}^* \cdot \nabla^*) \cdot \bar{v}^* \end{aligned} \right\}$$

Con lo que la ecuación de NAVIER-STOKES normalizada es:

$$\rho_c g \cdot \bar{g}^* - \frac{p_c}{L_c} \nabla^* p^* + \frac{\mu_c}{3} \frac{U_c}{L_c^2} \mu^* \nabla^* (\nabla^* \cdot \bar{v}^*) + \mu_c \frac{U_c}{L_c^2} \mu^* \nabla^{*2} \bar{v}^* = \rho_c \frac{U_c}{t_c} \rho^* \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial t^*} + \rho_c \frac{U_c^2}{L_c} \rho^* (\bar{v}^* \cdot \nabla^*) \cdot \nabla^*$$

para dejar el último término solo con variables normalizadas, se dividen todos los términos por:  $\rho_c \frac{U_c^2}{L_c}$ ; con lo que queda la ecuación de NAVIER-STOKES normalizada y adimensional es:

$$\left( \frac{gL_c}{U_c^2} \right) \cdot \bar{g}^* - \left( \frac{p_c}{\rho_c U_c^2} \right) \nabla^* p^* + \left( \frac{\mu_c}{\rho_c L_c U_c} \right) \left[ \frac{\mu^*}{3} \nabla^* (\nabla^* \cdot \bar{v}^*) + \mu^* \nabla^{*2} \bar{v}^* \right] = \left( \frac{L_c / U_c}{t_c} \right) \rho^* \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial t^*} + \rho^* (\bar{v}^* \cdot \nabla^*) \cdot \nabla^*$$

Los números adimensionales que se tienen son:

Número de Reynolds: 
$$Re = \frac{\rho_c L_c U_c}{\mu_c}$$

Número de Euler<sup>1</sup>: 
$$Eu = \frac{p_c}{\frac{1}{2} \rho_c U_c^2}$$

Número de Froude<sup>2</sup>: 
$$Fr = \frac{U_c^2}{gL_c}$$

Número de Strouhal: 
$$St = \frac{L_c / U_c}{t_c}$$

<sup>1</sup> El factor 1/2 se introduce para adimensionalizar la presión característica con la presión dinámica

<sup>2</sup> En determinados ámbitos el número de Froude se define por  $Fr = \frac{U_c}{\sqrt{gL_c}}$

Con lo que la ecuación de Navier-Stokes, normalizada y adimensionalizada queda:

$$\left(\frac{1}{Fr}\right) \cdot \vec{g}^* - \left(\frac{Eu}{2}\right) \nabla^* p^* + \left(\frac{1}{Re}\right) \left[ \frac{\mu^*}{3} \nabla^* (\nabla^* \cdot \vec{v}^*) + \mu^* \nabla^{*2} \vec{v}^* \right] = (St) \rho^* \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} + \rho^* (\vec{v}^* \cdot \nabla^*) \cdot \vec{v}^* \quad (5.)$$

La importancia de cada uno de los términos, viene determinada por los valores de los números adimensionales:

**NÚMERO DE REYNOLDS:** controla el término de los efectos de la viscosidad; si el **Re es pequeño**, se tiene flujo con viscosidad dominante, y el término al que afecta el Re es importante; en el movimiento de las partículas, las altas interacciones por viscosidad las ordenan en la dirección del flujo, con lo que sus trayectorias no se cruzan, se tiene **régimen laminar**.

Si el **Re es elevado**, en principio los efectos viscosos son despreciables, excepto en las zonas del flujo donde se tengan altos gradientes de velocidad; las partículas se mueven desordenadamente, entrecruzándose continuamente las trayectorias, se tiene **régimen turbulento**.

**NUMERO DE EULER:** controla el término de los efectos de la presión termodinámica con respecto a la presión dinámica. Por ejemplo en flujos confinados que trabajan a alta presión, se tienen Eu grande; en cambio en flujo con superficie libre el Eu es pequeño.

En el flujo en **turbomáquinas hidráulicas**, es importante para evaluar los efectos de la cavitación, el denominado **número de cavitación**:

$$Ca = \frac{p_c - p_{\text{vapor}}}{\frac{1}{2} \rho_c U_c^2}$$

En **flujo externo**, se evalúa la resultante de las fuerzas de superficie sobre un determinado objeto, con los coeficientes de sustentación y de arrastre, que derivan del número de Euler:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho_c U_c A_c} \quad \text{coeficiente de arrastre ("Drag")}$$

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2} \rho_c U_c A_c} \quad \text{coeficiente de sustentación ("Lift")}$$

$$\vec{F} = F_D \cdot \vec{u}_{\vec{v}} + F_L \cdot \vec{u}_{\perp \vec{v}} \quad F_D \text{ en la dirección de la velocidad y } F_L \text{ perpendicular a la velocidad}$$

**NUMERO DE FROUDE:** controla los efectos del campo central de fuerzas en donde pueda estar el fluido, lo más normal es que sea exclusivamente el campo gravitacional. Cuanto mayor sea el Fr menor será la importancia de la fuerza gravitacional.

En **flujo confinado** (limitado por una superficie rígida), el orden de magnitud de las fuerzas de inercia es mayor que el de las fuerzas gravitacionales, con lo que se tiene **Fr altos**, y por lo tanto son poco importantes los efectos gravitacionales.

En **flujo con superficie libre**, se tiene **Fr bajos** del orden de la unidad; y su valor determina el diverso comportamiento del flujo ante perturbaciones. Si se introduce una pequeña perturbación en la superficie libre, la velocidad de propagación de las ondas superficiales que se producen vienen determinadas por:

$$v_p = \sqrt{gL_c}$$

con lo que el número de Froude<sup>3</sup> es el cuadrado de la relación entre la velocidad del flujo y la velocidad de las perturbaciones en la superficie libre:

$$Fr = \frac{U_c^2}{gL_c} = \frac{U_c^2}{v_p^2} = \left( \frac{U_c}{v_p} \right)^2$$

Cuando la velocidad del flujo es menor que la de las perturbaciones, el  $Fr < 1$ , las perturbaciones se van atenuando, el flujo es estable y se denomina subcrítico. Cuando la velocidad de la corriente es mayor que la de las perturbaciones, el  $Fr > 1$ , las perturbaciones se incrementan, el flujo es inestable y se denomina supercrítico.

### 3.4.3. NORMALIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE ENERGÍA:

Números de **MACH**, de **PRANDTL**, de **BRINKHAM** y relación de calores específicos **GAMMA** ( $\gamma$ )

Por simplificación, consideraremos la ecuación de energía para un gas ideal:

$$\rho c_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \cdot T \right) = -p \cdot \nabla \vec{v} + \kappa \cdot \nabla^2 T + \Phi$$

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \rho_c c_{vc} \frac{T_c}{t_c} \rho^* c_v^* \frac{\partial T^*}{\partial t^*} \quad \text{siendo } c_v^* = \frac{c_v}{c_{vc}}$$

$$\rho c_v (\vec{v} \cdot \nabla) T = \rho_c c_{vc} \frac{U_c T_c}{L_c} \rho^* c_v^* (\vec{v}^* \cdot \nabla^*) T^*$$

$$p \nabla \cdot \vec{v} = \frac{p_c U_c}{L_c} p^* \nabla^* \cdot \vec{v}^*$$

La normalización de los términos es:

$$\kappa \nabla^2 T = \frac{\kappa_c T_c}{L_c^2} \kappa^* \nabla^{*2} T^* \quad \text{siendo } \kappa^* = \frac{\kappa}{\kappa_c}$$

$$\Phi = \mu_c \frac{U_c^2}{L_c^2} \Phi^*$$

con lo que queda la ecuación de ENERGIA normalizada es:

$$\left( \frac{\rho_c c_{vc} T_c}{t_c} \right) \rho^* c_v^* \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \left( \rho_c c_{vc} \frac{U_c T_c}{L_c} \right) \rho^* c_v^* (\vec{v}^* \cdot \nabla^*) T^* = - \left( \frac{p_c U_c}{L_c} \right) p^* \nabla^* \cdot \vec{v}^* + \left( \frac{\kappa_c T_c}{L_c^2} \right) \kappa^* \nabla^{*2} T^* + \left( \mu_c \frac{U_c^2}{L_c^2} \right) \Phi^*$$

multiplicando todos los términos por  $\frac{L_c}{\rho_c c_{vc} U_c T_c}$ , se adimensionalizan quedando:

<sup>3</sup> Si se define el Fr por  $\frac{U_c}{\sqrt{gL_c}}$ , coincide con la relación entre la velocidad del flujo y la de la perturbación

$$\left(\frac{L_c/U_c}{t_c}\right) \rho^* c_v^* \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \rho^* c_v^* (\vec{v}^* \cdot \nabla^*) T^* = -\left(\frac{p_c}{\rho_c c_{vc} T_c}\right) p^* \nabla^* \cdot \vec{v}^* + \left(\frac{\kappa_c}{L_c U_c \rho_c c_{vc}}\right) \kappa^* \nabla^{*2} T^* + \left(\frac{\mu_c U_c}{L_c T_c \rho_c c_{vc}}\right) \Phi^*$$

Los parámetros adimensionales que afectan a los términos normalizados se pueden reescribir como:

$$\left(\frac{p_c}{\rho_c c_{vc} T_c}\right) = // p = \frac{1}{2} \rho v^2 \quad \wedge \quad \text{gas ideal} \quad a^2 = \gamma RT // = \frac{\frac{1}{2} \rho_c U_c^2}{\rho_c c_{vc} a^2 / \gamma R} = \frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma}^2 \quad \gamma = \frac{c_{pc}}{c_{vc}}$$

$$\left(\frac{\kappa_c}{L_c U_c \rho_c c_{vc}}\right) = \frac{c_{pc} / c_{vc}}{\frac{U_c \rho_c L_c}{\mu_c} \frac{\mu_c c_{pc}}{\kappa}} = \frac{\gamma}{\text{Re} \cdot \text{Pr}}$$

$$\left(\frac{\mu_c U_c}{L_c T_c \rho_c c_{vc}}\right) = \frac{(c_{pc} / c_{vc}) \left(\frac{\mu_c U_c^2}{\kappa_c T_c}\right)}{\frac{U_c \rho_c L_c}{\mu_c} \frac{\mu_c c_{pc}}{\kappa_c}} = \frac{\gamma \cdot \text{Br}}{\text{Re} \cdot \text{Pr}}$$

Los números adimensionales que se tienen son:

Número de Reynolds:  $\text{Re} = \frac{\rho_c L_c U_c}{\mu_c}$

Número de Prandtl:  $\text{Pr} = \frac{\mu_c c_{pc}}{\kappa_c}$

Número de Brinkham:  $\text{Br} = \frac{\mu_c U_c^2}{\kappa_c T_c}$

Número de Strouhal:  $\text{St} = \frac{L_c / U_c}{t_c}$

Número de Mach:  $\text{Ma} = \frac{U_c}{a_c}$

Con lo que la ecuación de ENERGIA normalizada y adimensionalizada queda:

$$(\text{St}) \rho^* c_v^* \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \rho^* c_v^* (\vec{v}^* \cdot \nabla^*) T^* = -\left(\frac{\gamma - 1}{2} \cdot \text{Ma}\right) p^* \nabla^* \cdot \vec{v}^* + \left(\frac{\gamma}{\text{Re} \cdot \text{Pr}}\right) \kappa^* \nabla^{*2} T^* + \left(\frac{\gamma \cdot \text{Br}}{\text{Re} \cdot \text{Pr}}\right) \Phi^* \quad (6.)$$

El número de PRANDTL y GAMMA (relación de calores específicos), son propiedades del fluido y no dependen del flujo. El Pr expresa la relación entre la capacidad de generar calor por la viscosidad frente a la capacidad de transmitir calor.

El número de BRINKHAM, también es una relación entre el calor generado por viscosidad y la capacidad de transmitir calor, pero depende del flujo.

El número de MACH, es la relación entre la velocidad del flujo y la velocidad de pequeñas perturbaciones en el seno del fluido, que se denomina velocidad del sonido. Las perturbaciones provocan compresiones-expansiones (variaciones de densidad) en el fluido, y la rapidez de transmitir las, es decir la velocidad del sonido (con perturbaciones de poca intensidad), depende de la “facilidad” del fluido a experimentar variaciones de densidad: así en un fluido de alto módulo de compresibilidad, las perturbaciones se transmiten rápidamente con lo que la velocidad del sonido es alta<sup>4</sup>; todo ello viene reflejado por la ecuación que da la velocidad del sonido:

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$$

y recordando la definición de módulo de compresibilidad<sup>5</sup>:  $K = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$ ; se tiene la relación entre la velocidad del sonido y el módulo de compresibilidad:

$$a = \sqrt{K / \rho}$$

Otra consecuencia del Ma, es el distinto comportamiento del flujo, en función de que la velocidad del flujo sea menor, igual o mayor a la velocidad de las perturbaciones; es decir que el Ma sea menor, igual o mayor que la unidad:

Ma < 1	régimen subsónico	las perturbaciones se mueven más rápidas que el flujo
Ma = 1	régimen sónico	las perturbaciones se mueven a igual velocidad que el flujo
Ma > 1	régimen supersónico	las perturbaciones se mueven más lentas que el flujo

<sup>4</sup> A 1 atm y 20°C, el agua tiene un módulo de compresibilidad de 2185,7 MPa y en esas condiciones la velocidad sónica es de 1480 m/s; en las mismas condiciones el aire tiene un módulo de compresibilidad de 0,14 MPa y la velocidad sónica es de 341 m/s

<sup>5</sup> Tanto en la ecuación de velocidad sónica como de módulo de compresibilidad, debe establecerse el tipo de proceso de compresión-expansión, en este caso isentrópico; con lo que estrictamente se tiene el módulo de compresibilidad isentrópico.

### 3.5. TEORÍA DE MODELOS.

En los **ensayos experimentales** del flujo en un determinado **prototipo**, a veces no es posible realizar los ensayos con el propio prototipo, por su tamaño o por la dificultad de reproducir las condiciones reales de flujo, con lo que se realizan los ensayos con **modelos** a escala (geoméricamente semejantes),.

Por ejemplo, en el estudio experimental de hélices marinas, se realizan dos tipos fundamentales de ensayos con hélices modelo a escala reducida: los de autopropulsión en un canal de agua dulce y los de cavitación en un túnel de cavitación cerrado con agua caliente y a depresión; en la evaluación del comportamiento de una carena, se realizan ensayos de arrastre con modelos a escala reducida en agua dulce, tanto en canales de aguas tranquilas como en piscinas con generadores de olas.

La teoría de modelos permite obtener las condiciones de ensayo del modelo a partir de las condiciones de flujo del prototipo y las magnitudes del prototipo a partir de las medidas experimentales del modelo.

#### 3.5.1. SEMEJANZA..

Prototipo, modelo y sus respectivos flujos considerados, están relacionados entre si por tres tipos de semejanza: geométrica, cinemática y dinámica.

**Semejanza geométrica**, con un factor de escala de longitudes constante<sup>6</sup> entre modelo y prototipo ( $N_L$ ):

$$N_L = \frac{\text{Longitud característica del modelo}}{\text{Longitud característica del prototipo}}$$

$$(N_L)^2 = \frac{\text{Área característica del modelo}}{\text{Área característica del prototipo}}$$

$$(N_L)^3 = \frac{\text{Volumen característico del modelo}}{\text{Volumen característico del prototipo}}$$

**Semejanza cinemática** del campo de velocidades, con un factor de escala de velocidades entre modelo y prototipo:

$$N_V = \frac{\text{Velocidad característica del modelo}}{\text{Velocidad característica del prototipo}}$$

la relación entre los dos factores de escala: de longitudes y de velocidades, viene determinada por el factor de escala de tiempos:

$$N_T = \frac{N_L}{N_V} = \frac{\text{Tiempo característico del flujo en el modelo}}{\text{Tiempo característico del flujo en el prototipo}}$$

**Semejanza dinámica** de los campos de las distintas fuerza que pueden intervenir en el flujo, con un factor de escala de fuerzas, que debe ser constante, entre modelo y prototipo:

$$N_F = \frac{\text{Fuerza característica del modelo}}{\text{Fuerza característica del prototipo}}$$

<sup>6</sup> En determinados modelos, el factor de escala de longitudes se hace variar de una dirección a otra: por ejemplo en un modelo de una playa, para estudiar las variaciones batimétricas por acumulación de arena por efecto de determinadas corrientes, se pueden tener un factor de escala para las longitudes horizontales ( $N_{LH}=1:1000$ ) y otro para las longitudes verticales ( $N_{LV}=1:100$ )

El factor de escala de fuerzas, es el que va a permitir establecer las condiciones del flujo en el ensayo del modelo a partir de las condiciones del flujo en el prototipo, y obtener “fuerzas, potencias y rendimientos” del prototipo a partir de sus correspondientes valores experimentales en el modelo.

Los campos de fuerzas que pueden aparecer en la interacción de un fluido y un objeto, pueden ser:

**Fuerzas de inercia**, determinadas por la variación temporal de la cantidad de movimiento, y cualitativamente podemos expresarlas por:

$$F_i = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{\rho L^3 L/T}{T} = \rho L^2 (L/T)^2 = \rho L^2 v^2$$

**Fuerzas de rozamiento por viscosidad**, determinadas por el campo de tensiones, que a su vez viene determinado por la viscosidad y el campo de velocidades, y podemos expresarlas cualitativamente por:

$$F_\mu = \mu \frac{v}{L} L^2 = \mu v L$$

**Fuerzas gravitatorias**, determinadas por la posición en el campo gravitatorio, expresadas por:

$$F_g = mg = \rho g L^3$$

**Fuerzas de presión**, determinadas por el campo de presiones:

$$F_p = p L^2$$

**Fuerzas de elasticidad**, determinadas por la compresibilidad del fluido, o bien por la velocidad de pequeñas perturbaciones en el seno del fluido:

$$F_e = K L^2 = \rho a^2 L^2$$

**Fuerzas de tensión superficial**, determinadas por:  $F_\sigma = \sigma L$

Para la semejanza dinámica total, el factor de escala de fuerzas debe ser constante, independientemente del campo de fuerzas considerado:

$$N_F = \frac{(F_i)_{\text{modelo}}}{(F_i)_{\text{prototipo}}} = \frac{(F_\mu)_{\text{modelo}}}{(F_\mu)_{\text{prototipo}}} = \frac{(F_g)_{\text{modelo}}}{(F_g)_{\text{prototipo}}} = \frac{(F_p)_{\text{modelo}}}{(F_p)_{\text{prototipo}}} = \frac{(F_\sigma)_{\text{modelo}}}{(F_\sigma)_{\text{prototipo}}}$$

De la relación anterior se obtienen los siguientes resultados:

(1) relación entre **fuerzas de inercia y fuerzas viscosas**

$$\frac{(F_i)_{\text{modelo}}}{(F_\mu)_{\text{modelo}}} = \frac{(F_i)_{\text{prototipo}}}{(F_\mu)_{\text{prototipo}}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{(F_i)_{\text{modelo}}}{(F_\mu)_{\text{modelo}}} = \left( \frac{\rho L^2 v^2}{\mu v L} \right)_{\text{modelo}} = \left( \frac{\rho v L}{\mu} \right)_{\text{modelo}} = Re_{\text{modelo}} \\ \frac{(F_i)_{\text{prototipo}}}{(F_\mu)_{\text{prototipo}}} = \left( \frac{\rho L^2 v^2}{\mu v L} \right)_{\text{prototipo}} = \left( \frac{\rho v L}{\mu} \right)_{\text{prototipo}} = Re_{\text{prototipo}} \end{array} \right. \Rightarrow Re_m = Re_p$$

es decir, para la semejanza de los campos de fuerzas de inercia y de esfuerzos viscosos, entre modelo y prototipo, el **numero de REYNOLDS** del modelo debe ser el mismo que el del prototipo.

(2) relación entre **fuerzas de inercia y fuerzas gravitatorias**

$$\frac{(F_i)_{\text{modelo}}}{(F_g)_{\text{modelo}}} = \frac{(F_i)_{\text{prototipo}}}{(F_g)_{\text{prototipo}}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{(F_i)_{\text{modelo}}}{(F_g)_{\text{modelo}}} = \left( \frac{\rho L^2 v^2}{\rho L^3 g} \right)_{\text{modelo}} = \left( \frac{v^2}{gL} \right)_{\text{modelo}} = (Fr)_{\text{modelo}} \\ \frac{(F_i)_{\text{proto}}}{(F_g)_{\text{proto}}} = \left( \frac{\rho L^2 v^2}{\rho L^3 g} \right)_{\text{proto}} = \left( \frac{v^2}{gL} \right)_{\text{proto}} = (Fr)_{\text{proto}} \end{array} \right. \Rightarrow Fr_m = Fr_p$$

es decir, para la semejanza de los campos de fuerzas de inercia y fuerzas gravitatorias, entre modelo y prototipo, el **numero de FROUDE** del modelo debe ser el mismo que el del prototipo.

(3) relación entre **fuerzas de inercia y fuerzas elásticas.**

$$\frac{(F_i)_{\text{modelo}}}{(F_e)_{\text{modelo}}} = \frac{(F_i)_{\text{prototipo}}}{(F_e)_{\text{prototipo}}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{(F_i)_{\text{modelo}}}{(F_e)_{\text{modelo}}} = \left( \frac{\rho L^2 v^2}{K L^2} \right)_{\text{modelo}} = \left( \frac{v^2}{K/\rho} \right)_{\text{modelo}} = \left( \frac{v^2}{a^2} \right)_{\text{modelo}} = Ma_{\text{modelo}}^2 \\ \frac{(F_i)_{\text{proto}}}{(F_e)_{\text{proto}}} = \left( \frac{\rho L^2 v^2}{K L^2} \right)_{\text{proto}} = \left( \frac{v^2}{K/\rho} \right)_{\text{proto}} = \left( \frac{v^2}{a^2} \right)_{\text{proto}} = Ma_{\text{proto}}^2 \end{array} \right. \Rightarrow Ma_m = Ma_p$$

es decir, para la semejanza de los campos de fuerzas de inercia y de compresibilidad, entre modelo y prototipo, el **numero de MACH** del modelo debe ser el mismo que el del prototipo.

(4) relación entre **fuerzas de inercia y fuerzas de tensión superficial:**

$$\frac{(F_i)_{\text{modelo}}}{(F_\sigma)_{\text{modelo}}} = \frac{(F_i)_{\text{prototipo}}}{(F_\sigma)_{\text{prototipo}}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{(F_i)_{\text{modelo}}}{(F_\sigma)_{\text{modelo}}} = \left( \frac{\rho L^2 v^2}{\sigma L} \right)_{\text{modelo}} = \left( \frac{\rho v^2 L}{\sigma} \right)_{\text{modelo}} = We_{\text{modelo}} \\ \frac{(F_i)_{\text{proto}}}{(F_\sigma)_{\text{proto}}} = \left( \frac{\rho L^2 v^2}{\sigma L} \right)_{\text{proto}} = \left( \frac{\rho v^2 L}{\sigma} \right)_{\text{proto}} = We_{\text{proto}} \end{array} \right. \Rightarrow We_m = We_p$$

es decir, para la semejanza de los campos de fuerzas de inercia y de fuerzas de tensión superficial, entre modelo y prototipo, el **numero de WEBER** del modelo debe ser el mismo que el del prototipo.

(5) relación entre **fuerzas de inercia y fuerzas de presión**

$$\frac{(F_i)_{\text{modelo}}}{(F_p)_{\text{modelo}}} = \frac{(F_i)_{\text{prototipo}}}{(F_p)_{\text{prototipo}}} \Rightarrow \begin{cases} \left( \frac{F_i}{F_p} \right)_{\text{modelo}} = \left( \frac{\rho L^2 v^2}{\rho L^2} \right)_m = \left( \frac{\rho v^2}{\rho} \right)_m = \left( \frac{2}{\rho / \frac{1}{2} \rho v^2} \right)_m = 2 / Eu_m \\ \left( \frac{F_i}{F_p} \right)_{\text{proto}} = \left( \frac{\rho L^2 v^2}{\rho L^2} \right)_p = \left( \frac{\rho v^2}{\rho} \right)_p = \left( \frac{2}{\rho / \frac{1}{2} \rho v^2} \right)_p = 2 / Eu_p \end{cases} \Rightarrow Eu_m = Eu_p$$

es decir, para la semejanza de los campos de fuerzas de inercia y de fuerzas de presión, entre modelo y prototipo, el **numero de EULER** del modelo debe ser el mismo que el del prototipo.

Para la semejanza dinámica total entre modelo y prototipo, el factor de escala de fuerzas debe ser constante, y con ello se tiene las siguientes igualdades entre los parámetros adimensionales de modelo y prototipo:

$$Re_m = Re_p \quad Fr_m = Fr_p \quad Ma_m = Ma_p \quad We_m = We_p \quad Eu_m = Eu_p \quad \dots$$

El cumplimiento simultaneo de todas las igualdades anteriores, lleva al absurdo de que el factor de escala de longitudes sea 1, es decir que el modelo es el propio prototipo; lo que quiere decir que es imposible ensayar un modelo a escala, y que se conserve la semejanza en todos los campos de fuerza entre modelo y prototipo; no obstante, en los ensayos con modelos lo que se hace es considerar cual es el parámetro adimensional controlante, es decir el campo de fuerzas más importante (a parte del de inercia).

Por ejemplo, el ensayo de arrastre de un modelo de carena en un canal de experiencias hidrodinámicas, se realiza de tal forma que el numero de FROUDE del modelo sea el del prototipo, pues en el movimiento de un buque, las fuerzas gravitacionales del campo de olas generado predomina sobre los esfuerzos viscosos sobre la propia carena. Así si la velocidad del buque es de 15 nudos, y el modelo se construye a escala 1:100, la velocidad con la que se debe mover el modelo en el canal es<sup>7</sup> de  $15 \sqrt{1/100} = 1,5 \text{ nudos} = 0,772 \text{ m/s}$

---

<sup>7</sup>  $Fr_m = Fr_p \Rightarrow \frac{v_m^2}{gL_m} = \frac{v_p^2}{gL_p} \Rightarrow v_m = v_p \sqrt{L_m / L_p}$

## 3.5.2. NUMEROS ADIMENSIONALES CONTROLANTES EN SEMEJANZA.

A continuación se establecen una pautas cualitativas en el análisis dimensional de diversos flujos, para establecer que números adimensionales tienen mayor importancia y cuales se pueden no considerar (sus efectos).

(1) En flujo **incompresible, estacionario y sin superficie libre**, el número adimensional controlante es el Re. Es decir se podrá considerar semejanza si el número de **Reynolds** del modelo es el mismo que el del prototipo.

(2) En flujo **incompresible, estacionario y con superficie libre**, los números controlantes son el Re y el Fr. Pero normalmente no es posible mantener los dos números simultáneamente<sup>8</sup> iguales; con lo que en este caso se considera controlante el número de **Froude**.

(3) En flujo **compresible, estacionario y sin superficie libre**, los números controlantes son el Re y el Ma; por no poder mantener simultáneamente las igualdades, se considera el más controlante el número de **Mach**.

(4) En general si el **Re** es muy grande, se puede no considerar sus efectos, siendo controlantes el Ma o el Fr. No obstante el Re marca en que tipo de flujo se esta, pero si se esta en flujo turbulento completamente desarrollado, la influencia del Re es prácticamente constante.

(5) Si el flujo es **no estacionario** se debe considerar además el número de **Strouhal**. Es importante destacar que se pueden tener dos tipos de procesos no estacionarios:

- flujo no estacionario con condiciones de contorno estacionarias.
- flujo no estacionario con condiciones de contorno no estacionarias.

El primer caso de condición de contorno estacionaria, se tiene en la formación de la estela de torbellinos de Von Karman, en el flujo externo de la interacción de un flujo con un objeto. Aguas arriba del objeto, el flujo puede ser bastante uniforme, pero aguas abajo se origina una estela que integra una serie de vórtices contrarrotantes, que van creciendo en el sentido del flujo, hasta alcanzar un tamaño crítico, y son arrastrados por la propia corriente: el crecimiento y desprendimiento de vórtices es alternativo y no estacionario. La frecuencia de desprendimiento de vórtices es función de Re, y viene determinada por el número de Strouhal:

$$St = \frac{t_{\text{residencia}}}{t_{\text{característico}}} = \frac{L_r / U_r}{1/f_c} = f(Re)$$

El segundo caso de condición de contorno no estacionaria, se tiene cuando algunos de los contornos geométricos con los que interacciona el flujo, tiene posiciones no estacionarias (dependen del tiempo).

Un ejemplo clásico es la destrucción del puente de TACOMA por la interacción del viento. En condiciones normales, la estructura esta estacionario (no se mueve), pero para determinadas condiciones del viento, la frecuencia de los torbellinos coincidió con una frecuencia natural de la estructura, que empezó a vibrar (contorno no estacionario), generando nuevas frecuencias y amplitudes de los torbellinos de Von Karman, que resonaron con las frecuencias naturales de la estructura, dando lugar a un proceso de auto excitación, que llevo a la destrucción del puente.

<sup>8</sup> Simultáneamente quiere decir que  $Fr_m = Fr_p$  y  $Re_m = Re_p$ , lo que puede traer problemas. Si el modelo se ensaya en el mismo fluido que el prototipo, la igualdad de los números de Reynolds, lleva a que la velocidad del ensayo sea:  $v_m = v_p(L_p/L_m)$ ; y la igualdad de los números de Froude, lleva a que la velocidad del ensayo sea:  $v_m = v_p\sqrt{L_m/L_p}$ ; es decir dos velocidades distintas. Por ejemplo en el ensayo de una carena de un buque, si la escala del modelo es de 1:100, si se considerase la igualdad de números de Reynolds, el modelo debería moverse a 100 veces la velocidad del prototipo, y se considerase la igualdad de números de Froude, el modelo debería moverse a 0,1 veces la velocidad del prototipo.

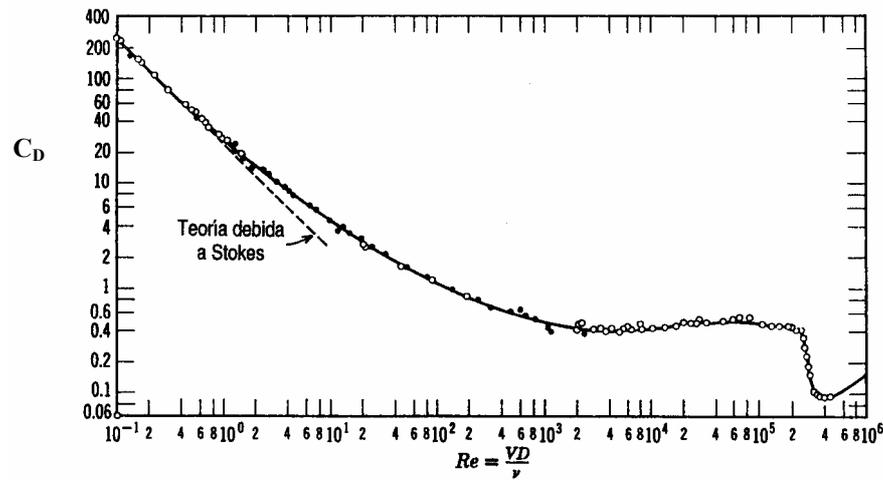
**3.6. PROBLEMAS RESUELTOS.**

- 3.1. Aplicación del teorema de Buckingham: Fuerza de arrastre de una esfera.
- 3.2. Resistencia al avance de carenas: números de Froude y de Reynolds
- 3.3. Fuerza de arrastre: números de Reynolds y de Euler
- 3.4. Cavitación: número de Euler (número de cavitación).
- 3.5. Campo de olas en dinámica de buques: número de Froude
- 3.6. Frecuencias características: número de Strouhal
- 3.7. Aplicación de la teoría de modelos: diseño de un experimento en la impresión por chorro de tinta.
- 3.8. Reglas de semejanza en bombas y ventiladores

**3.1. Aplicación del teorema de Buckingham: Fuerza de arrastre de una esfera:** En el estudio de la resistencia al avance de una esfera en movimiento uniforme en un determinado fluido, la fuerza de arrastre depende de la geometría y del flujo. La geometría viene determinada por el diámetro de la esfera y por la rugosidad superficial, y los parámetros del flujo más importantes son: velocidad de la esfera, y densidad y viscosidad del fluido. A partir de estas consideraciones:

DETERMINE: 1. Parámetros adimensionales que intervienen en el flujo. Identifíquelos.  
2. A partir del dato de la gráfica  $C_D=C_D(Re)$ , los valores de la fuerza de arrastre para una esfera lisa de 45 mm de diámetro, cuando se mueve en aire a velocidades de 0,001, 1, 10 y 100 m/s.

DATOS: Esfera: lisa, diámetro = 45 mm  
Aire: densidad = 1,204 kg/m<sup>3</sup>; viscosidad = 18,1 10<sup>-6</sup> kg/ms  
Coeficiente de arrastre para esferas lisas:



RESOLUCIÓN:

Las variables que intervienen son:	Fuerza de arrastre: $F_D$	$[F_D] = MLT^{-2}$
	Diámetro de la esfera: $D$	$[D] = L$
	Rugosidad de la esfera: $\varepsilon$	$[\varepsilon] = L$
	Velocidad de la esfera: $U$	$[U] = LT^{-1}$
	Densidad del fluido: $\rho$	$[\rho] = ML^{-3}$
	Viscosidad del fluido: $\mu$	$[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$

Es decir hay 6 variables y 3 dimensiones, con lo que por el Teorema de Buckingham, hay tres parámetros adimensionales  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  y  $\pi_3$  de tal forma que:

$$f(F_D, D, \varepsilon, U, \rho, \mu) = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \quad \phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$$

(1) PARAMETROS ADIMENSIONALES: Por el método de Buckingham:

$$\pi_1 = F_D \rho^a U^b D^c \quad M^0 L^0 T^0 = (MLT^{-2}) (ML^{-3})^a (LT^{-1})^b (L)^c \quad 0=1+a; \quad 0=1-3a+b+c; \quad 0=-2-b$$

$$\pi_2 = \mu \rho^d U^e D^f \quad M^0 L^0 T^0 = (ML^{-1}T^{-1}) (ML^{-3})^d (LT^{-1})^e (L)^f \quad 0=1+d; \quad 0=-1-3d+e+f; \quad 0=-1-e$$

$$\pi_3 = \varepsilon \rho^g U^h D^i \quad M^0 L^0 T^0 = (L) (ML^{-3})^g (LT^{-1})^h (L)^i \quad 0=g; \quad 0=1-3g+h+i; \quad 0=-h$$

Obteniéndose los siguientes valores:  $a=-1$ ;  $b=-2$ ;  $c=-2$ ;  $d=-1$ ,  $e=-1$ ;  $f=-1$ ;  $g=0$ ;  $h=0$ ;  $i=-1$ ; con lo que los parámetros adimensionales son:

$$\pi_1 = \frac{F_D}{\rho U^2 D^2} \quad \pi_2 = \frac{\mu}{\rho U D} \quad \pi_3 = \frac{\varepsilon}{D}$$

El **parámetro adimensional**  $\pi_1$ ; puede describirse como:  $\frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 \frac{\pi D^2}{4}} \cdot \frac{\pi}{8}$ ; obteniendo el número adimensional,

que determina la fuerza de arrastre en cualquier geometría: el **coeficiente de arrastre**:  $C_D$ :

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$$

en donde A es el área de la mayor sección perpendicular al flujo<sup>9</sup>.

La inversa del **parámetro adimensional**  $\pi_2$ , es también adimensional, y es el **número de Reynolds**:

$$Re = \frac{\rho DU}{\mu} = \frac{DU}{\mu/\rho} = \frac{DU}{\nu}$$

en donde  $\mu$  es la viscosidad absoluta o dinámica (kg/ms)

y  $\nu$  es la viscosidad cinemática (m<sup>2</sup>/s)

El **parámetro adimensional**  $\pi_3$ , es la **rugosidad relativa**:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{D}$$

Con todo, se obtiene, que existe una función que relaciona los tres números adimensionales:  $f(C_D, Re, \varepsilon_r) = 0$ ; es decir que el coeficiente de arrastre, depende del número de Reynolds, y de la rugosidad relativa<sup>10</sup>:

$$C_D = C_D(Re, \varepsilon_r)$$

(2) FUERZA DE ARRASTRE: En el caso de esferas lisas, se tiene que el coeficiente de arrastre solo depende del Reynolds:  $C_D = C_D(Re)$ , que es gráfica que se suministra en los datos. A Re muy bajos ( $Re < 1$ ), se puede obtener analíticamente<sup>11</sup> que  $C_D = 24/Re$ .

Con los datos numéricos:  $D = 45\text{mm}$ ;  $\nu = (18,1 \cdot 10^{-6} \text{ kg/ms}) / (1,204 \text{ kg/m}^3) = 15,033 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ; la fuerza de arrastre de la esfera lisa de 45 mm de diámetro, para distintas velocidades es:  $F_D = C_D \frac{1}{2}\rho U^2 A$

$$U = 0,001\text{m/s} \quad Re = \frac{0,001 \cdot 0,045}{15,033 \cdot 10^{-6}} = 2,993; \quad C_D = 10 \quad F_D = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,204 \cdot 0,001^2 \cdot \frac{\pi \cdot 0,045^2}{4} = 9,57 \cdot 10^{-9} \text{ N}$$

$$U = 1 \text{ m/s} \quad Re = \frac{1 \cdot 0,045}{15,033 \cdot 10^{-6}} = 2993; \quad C_D = 0,4 \quad F_D = 0,4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,204 \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi \cdot 0,045^2}{4} = 0,383 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

$$U = 10\text{m/s} \quad Re = \frac{10 \cdot 0,045}{15,033 \cdot 10^{-6}} = 29934; \quad C_D = 0,4 \quad F_D = 0,4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,204 \cdot 10^2 \cdot \frac{\pi \cdot 0,045^2}{4} = 38,3 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

$$U = 100\text{m/s} \quad Re = \frac{100 \cdot 0,045}{15,033 \cdot 10^{-6}} = 299341; \quad C_D = 0,1 \quad F_D = 0,1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,204 \cdot 100^2 \cdot \frac{\pi \cdot 0,045^2}{4} = 0,957 \text{ N}$$

<sup>9</sup> En el caso del flujo sobre un perfil aerodinámico, el área es el producto de la cuerda por la envergadura. En el caso de flujo sobre una carena de un barco, el área es la superficie mojada de la carena.

<sup>10</sup> En el problema no hemos considerado los efectos de la compresibilidad, si el flujo se desarrolla a  $Ma > 0,3$ ; el coeficiente de arrastre, también depende del número de Mach.

<sup>11</sup> Es la ecuación de STOKES, que se obtiene resolviendo, en coordenadas esféricas, las ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes, en donde la velocidad tangencial es nula, no así la radial y la meridional. La ecuación coincide con los resultados experimentales a  $Re < 0,1$ ; a  $Re = 1$ , se obtiene un error del 10% ( $C_D = 26,4$ )

**3.2. Ensayo de modelos de carenas: números de Froude y de Reynolds.** La resistencia al avance de una carena, viene determinada por las fuerzas de superficie debidas a la presión y a la viscosidad, sobre la propia superficie mojada de la carena. En cuanto a la presión, se tienen presiones hidrostáticas, generadas por el campo de olas. Para mantener semejanza dinámica total, entre modelo y prototipo, es necesario que los campos de fuerzas sean semejantes, lo que lleva: en el caso de las fuerzas de rozamiento viscoso, a que el  $Re$  de modelo y prototipo sean iguales, y en el caso de las fuerzas de presión hidrostática, a que el  $Fr$  de modelo y prototipo sean iguales. Por la imposibilidad experimental de que simultáneamente se cumpla que  $Fr_M = Fr_P$  y  $Re_M = Re_P$ , los ensayos, se deben realizar con una única condición, que en el caso de carena de buques, es el  $Fr$ , por ser el campo gravitatorio el predominante, en la resistencia al avance.

En el ensayo de un modelo de carena, se realizan ensayos en el canal de experiencias, arrastrando el modelo a determinada velocidad (marcada por el  $Fr$ ), y se mide la resistencia al avance.

DETERMINE para cada punto de funcionamiento de la carena prototipo:

1. Coeficientes de resistencia para el modelo: total, friccional y residual.
2. Coeficientes de resistencia para el prototipo: residual, friccional y total.
3. Resistencia al avance del prototipo para las distintas velocidades del buque.

DATOS: Prototipo: Eslora:  $L_P = 103,77$  m; Superficie mojada:  $A_{MP} = 3103$  m<sup>2</sup>;  
Modelo: factor de escala de longitudes:  $\lambda = 13,02$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$v_M$ (m/s)	1,568	1,640	1,711	1,782	1,853	1,925	1,996	2,067	2,139
$R_{TM}$ (N)	97,9	107,3	118,1	130,5	144,8	161,9	182,6	207,9	238,4

propiedades físicas: aceleración gravedad:  $g = 9,80665$  m/s<sup>2</sup>  
densidad agua de mar (15°C):  $\rho_P = 1025,9$  kg/m<sup>3</sup>  
viscosidad cinemática agua de mar:  $\nu_P = 1,1882 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s  
densidad agua del canal (17,6°C):  $\rho_M = 998,6$  kg/m<sup>3</sup>  
viscosidad cinemática agua del canal:  $\nu_M = 1,0653 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s

RESOLUCIÓN: Ecuaciones de cálculo de coeficientes de resistencia:

$$\text{total: } C_{RT} = \frac{R_T}{\frac{1}{2}\rho v^2 A_m} ; \quad \text{friccional: } C_{RF} = \frac{0,075}{(\log Re - 2)^2} ; \quad \text{residual: } C_{RR} = C_{RT} - C_{RF}$$

La eslora y la superficie mojada del modelo son:

$$L_M = L_P / \lambda = 103,77/13,02 = 7,970 \text{ m}; \quad A_{M_M} = A_{MP}/\lambda^2 = 3101/13,02^2 = 18,293 \text{ m}^2$$

(1) COEFICIENTES PARA MODELO: para cada uno de los puntos de funcionamiento, se obtiene el coeficiente de resistencia total, a partir de la medida de la resistencia al avance; el coeficiente de resistencia friccional, por la ecuación ITTC-57; y finalmente el coeficiente residual por diferencia entre ambos:

punto de funcionamiento 1:

$$(C_{RT})_M = \left( \frac{R_T}{\frac{1}{2}\rho v^2 A_m} \right)_M = \frac{R_T}{\frac{1}{2}\rho v^2 A_m} = \frac{97,9 \text{ N}}{\frac{1}{2} \cdot 998,6 \text{ kg/m}^3 \cdot 1,568^2 \cdot 18,293 \text{ m}^2} = 4,360 \times 10^{-3}$$

$$Re_M = \frac{vL}{\nu} = \frac{1,568 \text{ m/s} \cdot 7,970 \text{ m}}{1,0653 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 11,731 \cdot 10^6 ; \quad (C_{RF})_M = \frac{0,075}{(\log Re - 2)^2} = \frac{0,075}{(\log 11,731 \cdot 10^6 - 2)^2} = 2,919 \cdot 10^{-3}$$

$$(C_{RR})_M = (C_{RT})_M - (C_{RF})_M = (4,360 - 2,919) \cdot 10^{-3} = 1,441 \cdot 10^{-3}$$

Análogamente, se obtienen los valores para el resto de puntos de funcionamiento:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$v_M$ (m/s)	1,568	1,640	1,711	1,782	1,853	1,925	1,996	2,067	2,139
$R_{TM}$ (N)	97,9	107,3	118,1	130,5	144,8	161,9	182,6	207,9	238,4
$C_{RTM}$	4,360E-03	4,368E-03	4,417E-03	4,499E-03	4,617E-03	4,783E-03	5,018E-03	5,328E-03	5,705E-03
$Re_M$	1,173E+07	1,227E+07	1,280E+07	1,333E+07	1,386E+07	1,440E+07	1,493E+07	1,546E+07	1,600E+07
$C_{RFM}$	2,919E-03	2,896E-03	2,875E-03	2,856E-03	2,837E-03	2,819E-03	2,801E-03	2,785E-03	2,769E-03
$C_{RRM}$	1,441E-03	1,472E-03	1,541E-03	1,644E-03	1,780E-03	1,965E-03	2,217E-03	2,542E-03	2,936E-03

(2) COEFICIENTES PARA PROTOTIPO: para cada uno de los puntos de funcionamiento, la determinación de los coeficientes de resistencia es:

Coefficiente de resistencia RESIDUAL: por dependen del  $Fr$ , y ensayar con  $Fr_M = Fr_p$ , los coeficientes residuales serán iguales. La relación entre las velocidades de prototipo y modelo, vienen determinadas por esta igualdad del número de Fraude:

$$Fr_p = Fr_M \Rightarrow \frac{v_p}{\sqrt{gL_p}} = \frac{v_M}{\sqrt{gL_M}} \Rightarrow v_p = v_M \sqrt{\frac{L_p}{L_M}} = v_M \sqrt{\lambda}$$

Coefficiente de resistencia FRICCIONAL: por depender del  $Re$ , y no poder ensayar a  $Re$  constante:  $Re_M \neq Re_p$ ; se obtiene a partir de la determinación del  $Re$  y la aplicación de la ecuación de la ITTC-57.

Coefficiente de resistencia TOTAL: es la suma de los dos anteriores.

Para el punto de funcionamiento 1:

$$(C_{RR})_p = (C_{RR})_M = 1,441 \cdot 10^{-3}$$

$$v_p = v_M \sqrt{\lambda} = 1,568 \text{ m/s} \sqrt{13,02} = 5,658 \text{ m/s} = \dots \times \frac{3600 \text{ s/h}}{1852 \text{ m/milla}} = 11 \text{ nudos}$$

$$Re_p = \left( \frac{vL}{\nu} \right)_p = \frac{5,658 \text{ m/s} \cdot 103,77 \text{ m}}{1,1882 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 494,135 \cdot 10^6;$$

$$(C_{RF})_p = \frac{0,075}{(\log Re - 2)^2} = \frac{0,075}{(\log 494,135 \cdot 10^6 - 2)^2} = 1,674 \cdot 10^{-3}$$

$$(C_{RT})_p = (C_{RR})_p + (C_{RF})_p = (1,441 + 1,674) 10^{-3} = 3,115 \cdot 10^{-3}$$

Análogamente, para el resto de puntos de funcionamiento del prototipo:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$V_p$ (m/s)	5,658	5,918	6,174	6,430	6,686	6,946	7,202	7,458	7,718
$C_{RRP}$	1,441E-03	1,472E-03	1,541E-03	1,644E-03	1,780E-03	1,965E-03	2,217E-03	2,542E-03	2,936E-03
$Re_p$	4,941E+08	5,168E+08	5,392E+08	5,616E+08	5,839E+08	6,066E+08	6,290E+08	6,514E+08	6,741E+08
$C_{RFP}$	1,674E-03	1,664E-03	1,655E-03	1,646E-03	1,638E-03	1,630E-03	1,623E-03	1,615E-03	1,608E-03
$C_{RTP}$	3,115E-03	3,136E-03	3,196E-03	3,290E-03	3,419E-03	3,595E-03	3,839E-03	4,158E-03	4,544E-03

(3) RESISTENCIA TOTAL DEL PROTOTIPO: Para cada punto de funcionamiento, conociendo su coeficiente de resistencia total, se tiene:

para el punto de funcionamiento 1:

$$(R_T)_p = (C_{RT})_p \cdot \left( \frac{1}{2} \rho v^2 A_m \right) = 3,115 \cdot 10^{-3} \frac{1}{2} 1025,9 \cdot 5,658^2 \cdot 3103 = \mathbf{158,71 \text{ kN}}$$

Análogamente para el resto de puntos de funcionamiento:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
V <sub>p</sub> (m/s)	5,658	5,918	6,174	6,430	6,686	6,946	7,202	7,458	7,718
R <sub>TP</sub> (kN)	158,710	174,783	193,926	216,521	243,252	276,076	316,978	368,14	430,85

EN LA TABLA SIGUIENTE, SE RESUMEN TODOS LOS RESULTADOS:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

	M	O	D	E	L	O			
v <sub>M</sub> (m/s)	1,568	1,640	1,711	1,782	1,853	1,925	1,996	2,067	2,139
R <sub>TM</sub> (N)	97,9	107,3	118,1	130,5	144,8	161,9	182,6	207,9	238,4
F <sub>RM</sub>	0,176	0,184	0,192	0,202	0,210	0,217	0,226	0,235	0,243
Re <sub>M</sub>	1,173E+07	1,227E+07	1,280E+07	1,333E+07	1,386E+07	1,440E+07	1,493E+07	1,546E+07	1,600E+07
C <sub>RTM</sub>	4,360E-03	4,368E-03	4,417E-03	4,499E-03	4,617E-03	4,783E-03	5,018E-03	5,328E-03	5,705E-03
C <sub>RFM</sub>	2,919E-03	2,896E-03	2,875E-03	2,856E-03	2,837E-03	2,819E-03	2,801E-03	2,785E-03	2,769E-03
C <sub>RRM</sub>	1,441E-03	1,472E-03	1,541E-03	1,644E-03	1,780E-03	1,965E-03	2,217E-03	2,542E-03	2,936E-03

	P	R	O	T	O	T	I	P	O
V <sub>p</sub> (NUDOS)	<b>11,0</b>	<b>11,5</b>	<b>12,0</b>	<b>12,5</b>	<b>13,0</b>	<b>13,5</b>	<b>14,0</b>	<b>14,5</b>	<b>15,0</b>
V <sub>p</sub> (m/s)	5,658	5,918	6,174	6,430	6,686	6,946	7,202	7,458	7,718
R <sub>TP</sub> (kN)	158,71	174,78	193,93	216,52	243,25	276,08	316,98	368,14	430,85
P <sub>ARRASTRE</sub> (kW)	<b>897,96</b>	<b>1034,31</b>	<b>1197,27</b>	<b>1392,24</b>	<b>1626,44</b>	<b>1917,63</b>	<b>2282,94</b>	<b>2745,77</b>	<b>3325,36</b>
F <sub>TP</sub>	0,176	0,184	0,192	0,202	0,210	0,217	0,226	0,235	0,243
Re <sub>p</sub>	1,173E+07	1,227E+07	1,280E+07	1,333E+07	1,386E+07	1,440E+07	1,493E+07	6,514E+08	6,741E+08
C <sub>RTP</sub>	3,115E-03	3,136E-03	3,196E-03	3,290E-03	3,419E-03	3,595E-03	3,839E-03	4,158E-03	4,544E-03
C <sub>RFP</sub>	1,674E-03	1,664E-03	1,655E-03	1,646E-03	1,638E-03	1,630E-03	1,623E-03	1,615E-03	1,674E-03
C <sub>RRP</sub>	1,441E-03	1,472E-03	1,541E-03	1,644E-03	1,780E-03	1,965E-03	2,217E-03	2,542E-03	2,936E-03

**3.3. Fuerza de arrastre: números de Reynolds y de Euler.** La fuerza de arrastre sobre un dirigible debe determinarse mediante ensayos con un modelo a escala reducida. Los ensayos se realizan en un túnel de agua, en donde el modelo de dirigible se fija a un soporte instrumentado con un sensor de fuerza; la velocidad del flujo de agua que incide sobre el modelo, se controla con una bomba de velocidad variable que es la que origina el flujo hacia el modelo.

- DETERMINE:
1. Cualitativamente los números adimensionales controlantes.
  2. Justifique porque se tiene que ensayar el modelo en un túnel de agua.
  3. Velocidad a la que se debe ensayar el dirigible modelo en el túnel de agua.
  4. Potencia de arrastre del dirigible prototipo.

DATOS:

Dirigible:	$L_p=20\text{m}$ ; $U_p=36\text{ km/h}$ ; aire a $25^\circ\text{C}$ y 1 bar: viscosidad = $15,58 \cdot 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$ ; densidad = $1,2\text{ kg/m}^3$
Modelo:	$L_m=1\text{m}$ ; agua, viscosidad = $10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$ ; densidad = $1000\text{ kg/m}^3$ Fuerza de arrastre a la velocidad de ensayo = 1649 N

RESOLUCIÓN:

(1) PARÁMETROS ADIMENSIONALES CONTROLANTES.

Los números adimensionales más importantes en un proceso de flujo son: Re, Eu, Ma y Fr. Debido a la baja velocidad del submarino con respecto a la velocidad del sonido, los efectos de compresibilidad no son importantes, y en número de MACH no es controlante; por no haber superficies libre, el número de Froude tampoco es controlante; con lo que los números adimensionales que se tienen en cuenta para la similitud dinámica son exclusivamente el número de REYNOLDS y el número de EULER.

Se puede llegar analíticamente a esta conclusión, partiendo de que la fuerza de arrastre depende de las siguientes variables:  $F_D=f(U, L, \rho, \mu)$ , y aplicando el teorema de BUCKINGHAM, se obtienen dos parámetros adimensionales, que están relacionados, respectivamente, con los números de REYNOLDS y de EULER.

(2) ENSAYO EN UN TUNEL DE AGUA.

Para la semejanza dinámica entre modelo y prototipo, sus números de Reynolds deben ser iguales:

$$Re_m = \frac{U_m L_m}{\nu_m} = Re_p = \frac{U_p L_p}{\nu_p} \quad \text{en un dirigible la longitud característica es su ESLORA.}$$

Con lo que la velocidad a la que se debe mover el modelo es:  $U_m = U_p \frac{L_p}{L_m} \frac{\nu_m}{\nu_p}$

Numéricamente, con los datos:

$$U_p = 36(1000/3600) = 10\text{ m/s}$$

$$L_p = 20\text{ m}; L_m = 1\text{ m}$$

$$\nu_p = 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}; \nu_{\text{agua}} = 15,58 \cdot 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$$

Si el ensayo se realiza en un túnel de viento, la velocidad del aire en el túnel debería ser de:

$$U_m = U_p \frac{L_p}{L_m} \frac{\nu_m}{\nu_p} = 10 \frac{20}{1} \frac{15,58 \cdot 10^{-6}}{15,58 \cdot 10^{-6}} = 200\text{ m/s}$$

Esta velocidad tiene dos problemas: uno el experimental, porque se tiene que trabajar con grandes velocidades de flujo de aire y sobre todo porque se tiene números de Mach relativamente altos ( $Ma > 0,3$ ), y se deberían considerar los efectos de la compresibilidad. Para evitar estos dos problemas, se ensaya en un túnel de agua, debido a la que la **viscosidad cinemática** del agua es unas 15 veces **menor** que la del aire, y con ello la **velocidad de ensayo en agua** baja en la misma proporción.

## (3) VELOCIDAD DEL FLUJO QUE INCIDE SOBRE EL MODELO:

La velocidad del flujo uniforme que se hace incidir sobre el modelo, viene determinada por la igualdad de números de Reynolds entre modelo y prototipo:

$$U_m = U_p \frac{L_p \nu_m}{L_m \nu_p} = 10 \frac{20}{1} \frac{10^{-6}}{15,58 \cdot 10^{-6}} = 12,84 \text{ m/s}$$

## (4) POTENCIA DE ARRASTRE:

La potencia de arrastre, viene determinada por:  $P_D = F_D U$ .

El ensayo suministra el valor de la fuerza de arrastre sobre el modelo. La fuerza de arrastre sobre el prototipos se determina por análisis dimensional, que establece que para la semejanza dinámica los números de EULER, deber ser iguales:

$$Eu = \frac{F/L^2}{\frac{1}{2} \rho U^2}; \quad Eu_m = \frac{F_{Dm}}{\frac{1}{2} \rho_m U_m^2 L_m^2} = Eu_p = \frac{F_{Dp}}{\frac{1}{2} \rho_p U_p^2 L_p^2} \quad \Rightarrow \quad F_{Dp} = F_{Dm} \frac{\rho_p}{\rho_m} \left( \frac{U_p}{U_m} \right)^2 \left( \frac{L_p}{L_m} \right)^2$$

Numéricamente con los datos:  $F_{Dm}=1649 \text{ N};$

$\rho_p = 1,2 \text{ kg/m}^3$	$\rho_m = 1000 \text{ kg/m}^3$
$U_p = 10 \text{ m/s}$	$U_m = 12,84 \text{ m/s}$
$L_p = 20 \text{ m}$	$L_m = 1 \text{ m}$

$$F_{Dp} = F_{Dm} \frac{\rho_p}{\rho_m} \left( \frac{U_p}{U_m} \right)^2 \left( \frac{L_p}{L_m} \right)^2 = 1649 \text{ N} \frac{1,2}{1000} \left( \frac{10}{12,84} \right)^2 \left( \frac{20}{1} \right)^2 = 480,1 \text{ N}$$

Con lo que la potencia de arrastre, estimada para el prototipo del dirigible es:

$$P_{Dp} = F_{Dp} U_p = (480,1 \text{ N})(10 \text{ m/s}) = \mathbf{4,8 \text{ kW}}$$

La potencia de arrastre involucrada en el modelo a escala reducida es:

$$P_{Dm} = F_{Dm} U_m = (1649 \text{ N})(12,84 \text{ m/s}) = 21,17 \text{ kW}$$

No debe extrañar, que tanto la fuerza de arrastre, como la potencia de arrastre, sean mayores en el modelo a escala reducida, que en el prototipo, debido a que el modelo se ensaya en agua y el prototipo se mueve en aire.

**3.4. Cavitación: número de Euler (número de cavitación)** En el flujo de líquidos, si por aumento de velocidad, la presión baja hasta valores próximos a la presión de vapor (a la temperatura del flujo), el líquido cambia de fase, se generan burbujas de vapor, que son arrastradas por la corriente hacia zonas de alta presión, en donde las implosiones generan pulsos de alta frecuencia y alta presión. A este fenómeno se denomina cavitación. Consideremos el flujo entorno a un **arpón de pesca submarina**: conforme el disparo se realiza a menos profundidad, la velocidad para condiciones de cavitación es menor. Se realizan un ensayo en donde se determina que a una profundidad de 2 m, si la velocidad es menor de 44 m/s no hay cavitación.

DETERMINE: 1. Número de cavitación mínimo para no cavitación.  
2. Velocidad máxima para no cavitación a una profundidad de 10 m.  
3. A que profundidad deja de cavitarse, si el arpón se dispara verticalmente hacia abajo, desde una profundidad de 2 m a la velocidad del apartado anterior

DATOS: agua de mar: densidad = 1025 kg/m<sup>3</sup>; presión de vapor = 23 mbar  
Arpón: a 2 m de profundidad la velocidad de no cavitación es 44 m/s  
 $C_D = 0,4$  (suponerlo constante)  
Peso = 0,250 kg; densidad = 2300 kg/m<sup>3</sup>; Área recta máxima = 2 cm<sup>2</sup>  
Presión atmosférica: 990 mbar

RESOLUCIÓN:

Se define como número de cavitación, al número de Euler, derivado de considerar la diferencia, entre la presión de vapor y la presión no perturbada por la interacción del objeto que se mueve en el seno del líquido. En nuestro caso:

$$Ca = \frac{p_{\infty} - p_{\text{vapor}}}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \frac{p_{\text{atm}} + \rho gh - p_{\text{vapor}}}{\frac{1}{2} \rho U^2} \quad \text{en donde "h" es la profundidad}$$

(1) NÚMERO DE CAVITACIÓN MÍNIMO:

Con el resultado experimental, de que a 2 m de profundidad la cavitación se inicia a velocidades mayores de 12 m/s; el número de cavitación mínimo para no cavitación es:

$$Ca^* = \frac{p_{\text{atm}} + \rho gh - p_{\text{vapor}}}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \frac{99000 + 1025 \cdot 9,8 \cdot 2 - 2300}{\frac{1}{2} 1025 \cdot 44^2} = 0,118 \quad \text{y se denomina número de cavitación crítico}$$

(2) VELOCIDAD MÁXIMA PARA NO CAVITACIÓN A UNA PROFUNDIDAD DE 10 m:

la condición de no cavitación es que el número de cavitación sea mayor que el crítico:

$$Ca = \frac{p_{\text{atm}} + \rho gh - p_{\text{vapor}}}{\frac{1}{2} \rho U^2} > Ca^* \Rightarrow U < \sqrt{\frac{p_{\text{atm}} + \rho gh - p_{\text{vapor}}}{\frac{1}{2} \rho \cdot Ca^*}}$$

a 10 metros de profundidad, la velocidad debe ser:

$$U < \sqrt{\frac{p_{\text{atm}} + \rho gh - p_{\text{vapor}}}{\frac{1}{2} \rho \cdot Ca^*}} = \sqrt{\frac{99000 + 1025 \cdot 9,8 \cdot 10 - 2300}{\frac{1}{2} 1025 \cdot 0,118}} = 57,1 \text{ m/s}$$

(3) PROFUNDIDAD A LA QUE DEJA DE CAVITAR, CON UN DISPARO VERTICAL DESCENDENTE, EN LAS CONDICIONES:  $h_0 = 2\text{m}$ ;  $U_0 = 57,1 \text{ m/s}$ .

La ecuación de equilibrio de fuerzas sobre el arpón es:  $P - F_D - E = m \frac{dv}{dt}$

En donde: "P" es el peso:  $P = mg$   
 "F<sub>D</sub>" es la fuerza de arrastre  $F_D = C_D \frac{1}{2} \rho v^2 A$   
 "E" es el empuje de flotación  $E = \rho g V$   
 "m" es la masa del arpón  
 "dv/dt" es su aceleración

con todo se tiene la ecuación diferencial:  $mg - C_D \frac{1}{2} \rho v^2 A - \rho g V = m dv/dt$ ; como lo que interesa obtener en la ecuación  $h=h(v)$ ; en la ecuación se puede expresar el elemento de tiempo, en función de la velocidad y de la variación de profundidad:  $dt=dh/v$ ; con todo se tiene la ecuación diferencial:

$dh = \frac{v dv}{B - C \cdot v^2}$  en donde las constantes son:  $B = g(1 - \rho_{\text{agua}} / \rho_{\text{arpón}})$ ;  $C = \frac{1}{2} C_D \rho A / m$

cuya integración da la ecuación  $h=h(v)$ :

$$h = h_0 + \frac{1}{2C} \ln \left( \frac{B - C \cdot v_0^2}{B - C \cdot v^2} \right)$$

obteniedose también la función  $v=v(h)$

$$v = \sqrt{\frac{B - (B - C \cdot v_0^2) \cdot e^{-2C(h-h_0)}}{C}}$$

Numericamente:  $B = g(1 - \rho_{\text{agua}} / \rho_{\text{arpón}}) = 9,8 \left( 1 - \frac{1025}{2300} \right) = 5,433 \text{ m/s}^2$

$$C = \frac{C_D \rho A}{m} = \frac{\frac{1}{2} 0,4 \cdot 1025 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{0,250} = 0,164 \text{ m}^{-1}$$

$$B - C \cdot v_0^2 = 5,433 - 0,164 \cdot 57,1^2 = -529,275 \text{ m/s}^2$$

Con lo que la velocidad en función de la profundidad es:

$$v = \sqrt{\frac{5,433 + 529,275 \cdot e^{-2 \cdot 0,164(h-2)}}{0,164}} = \sqrt{33,128 + 3227,287 \cdot e^{-0,328(h-2)}}$$

el número de cavitación en función de la profundidad es:

$$Ca = \frac{99000 + 1025 \cdot 9,8 \cdot h - 2300}{\frac{1}{2} 1025 \cdot v^2} = \frac{188,683 + 19,6 \cdot h}{v^2}$$

Con las dos últimas ecuaciones se construye la tabla :  $h - v - Ca$ :

profundidad	velocidad	Nº cavitación
m	m/s	-
2,00	57,10	0,070
2,50	52,65	0,086
3,00	48,56	0,105
3,10	47,78	0,109
3,20	47,01	0,114
3,30	46,26	0,118
3,50	44,79	0,128

La zona de cavitación esta en los puntos de número de cavitación menor de 0,118 ( $Ca < Ca^*$ ); es decir, el arpón sale en cavitación ( $Ca=0.070$ ) y al alcanzar la profundidad de 3,3 m deja de cavitatar.

**3.5. Campo de olas en dinámica de buques: número de Froude.** En la dinámica de buques, se estudia el efecto de un campo de olas, sobre el comportamiento de la nave. Para ello se realizan ensayos en canales que incorporan un generador de olas; una vez establecido el campo de olas, se arrastran las carenas modelo y se miden los esfuerzos. Para un determinado buque, se quiere obtener el par escorante al que le sometería un campo de olas de 8 metros de altura y un periodo de 20 segundos. Para ello se construye un modelo que se ensaya en el canal de dinámica del buque. A partir de los datos.

DETERMINE: 1. Números adimensionales que controlan la hidrodinámica de vehículos marinos.  
2. La velocidad a la que hay que mover el modelo.  
3. El campo de olas que hay que generar: amplitud y periodo.  
4. El factor de escala de momentos escorantes entre modelo y prototipo.

DATOS: Buque prototipo: Eslora = 200 m; velocidad 14 nudos; agua de mar:  $1025 \text{ kg/m}^3$   
Carena modelo: Eslora = 4m; agua dulce:  $1000 \text{ kg/m}^3$

RESOLUCIÓN:

(1) NUMEROS ADIMENSIONALES CONTROLANTES:

En hidrodinámica de vehículos marinos, los números adimensionales controlantes son el número de Froude (Fr) y el número de Strouhal (St).

En el movimiento de buque en un campo de olas externo el número adimensional controlante, es el que controla las amplitudes, periodos y frecuencias del oleaje, es decir el número de Strouhal:  $St = \frac{f \cdot L}{U} = \frac{L}{U \cdot T}$

En el movimiento de un buque, el campo de olas generado en su movimiento, por modificación de la superficie libre, es de tal importancia, que la mayor parte de la resistencia al avance, es debida a este campo de olas. Por ello, el parámetro adimensional que controla los fenómenos de superficies libres en campo gravitacional, es el número de Froude, que sería controlante.

En principio los efectos de la viscosidad también deberían considerarse, es decir el número de Reynolds sería también controlante; con lo que los ensayos de modelo, se deberían realizar de tal forma que se cumpliese:  $Fr_m = Fr_p$  y  $Re_m = Re_p$ ; para asegurar la semejanza dinámica. Pero esta doble igualdad, lleva a un absurdo:

La igualdad de Fr's, lleva a que la velocidad de arrastre del modelo sea:

$$Fr_m = \frac{U_m}{\sqrt{gL_m}} = Fr_p = \frac{U_p}{\sqrt{gL_p}} \quad U_m = U_p \sqrt{\frac{L_m}{L_p}}$$

La igualdad de Re's, lleva a que la velocidad de arrastre del modelo sea:

$$Re_m = \frac{U_m L_m}{\nu_m} = Re_p = \frac{U_p L_p}{\nu_p} \quad U_m = U_p \frac{L_p}{L_m} \frac{\nu_m}{\nu_p}$$

Para que las dos expresiones, coincidan, se tiene que:  $\frac{\nu_m}{\nu_p} = \left(\frac{L_m}{L_p}\right)^{3/2}$

En nuestro caso, la escala geométrica es  $L_m/L_p = 1/50$ , con lo que la viscosidad del fluido utilizado en el canal de ensayos, debería ser 1000 veces menor que la del agua de mar ( $(1/50)^{3/2} = 1/354$ ). Evidentemente, la gran cantidad de fluido que se tiene que utilizar en el canal de ensayos, hace inviable la búsqueda de un fluido de ensayo de tal viscosidad, por lo que evidentemente se usa agua dulce como fluido de ensayo.

Así pues, usando agua dulce como fluido de ensayo, la igualdad de Re's, lleva a velocidades de ensayos mucho mayores que las correspondientes a considerar la igualdad de Fr's.

No obstante este problema se resuelve, debido a que en el movimiento de un buque, el Re es poco controlante, frente al Fr, con lo que el ensayo en el canal de dinámica del buque, se realiza a Fr's constantes.

## (2) VELOCIDAD A LA QUE HAY QUE ARRASTRAR EL MODELO.

Por la igualdad de Fr en el modelo y el prototipo, la velocidad de ensayo es:

$$U_m = U_p \sqrt{\frac{L_m}{L_p}} = 14 \sqrt{\frac{4}{200}} = 1,98 \text{ nudos} = 1,4 \frac{1852}{3500} = 1,019 \text{ m/s}$$

## (3) CAMPO DE OLAS:

El modelo y el prototipo deben moverse en campos de olas semejantes cinemáticamente, con lo que sus números de Strouhal deben ser iguales:

$$St_m = \frac{L_m}{U_m T_m} = St_p = \frac{L_p}{U_p T_p}$$

Con lo que el periodo de las olas a generar es:

$$T_m = T_p \frac{L_m}{L_p} \frac{U_p}{U_m} = T_p \frac{L_m}{L_p} \sqrt{\frac{L_p}{L_m}} = T_p \sqrt{\frac{L_m}{L_p}}$$

$$T_m = 20 \sqrt{\frac{4}{200}} = 2,828 \text{ segundos}$$

Y la amplitud de las olas generadas debe ser:

$$A_m = A_p \frac{L_m}{L_p} = 8 \frac{4}{200} = 0,16 \text{ m}$$

## (4) FACTOR DE ESCALA DE MOMENTOS:

Por el Buckingham se puede obtener que hay el parámetro adimensional, con el que esta relacionado el momento de escora es:

$$\frac{M}{\rho \cdot U^2 \cdot L^3}$$

Con lo que por semejanza dinámica entre modelo y prototipo, ambos parámetros adimensionales de momento, deben ser iguales:

$$\frac{M_m}{\rho_m \cdot U_m^2 \cdot L_m^3} = \frac{M_p}{\rho_p \cdot U_p^2 \cdot L_p^3}$$

Lo que lleva a obtener el factor de escala de momentos:

$$N_M = \frac{M_m}{M_p} = \left(\frac{L_m}{L_p}\right)^3 \left(\frac{U_m}{U_p}\right)^2 \frac{\rho_m}{\rho_p} = \dots = \left(\frac{L_m}{L_p}\right)^4 \frac{\rho_m}{\rho_p}$$

$$N_M = \left(\frac{L_m}{L_p}\right)^4 \frac{\rho_m}{\rho_p} = \left(\frac{4}{200}\right)^4 \frac{1000}{1025} = 0,156 \cdot 10^{-6}$$

**3.6. Frecuencias características: número de Strouhal.** En el diseño de aletas de submarinismo, se intenta realizar un prototipo, a partir de los datos obtenidos de la propulsión de un delfín. Al tipo de propulsión que utilizan los peces, se le denomina propulsión por estela de remolinos, en donde el empuje conseguido depende de la amplitud del coleteo, de la velocidad de avance y de la densidad del agua. A partir de los datos:

DETERMINE: 1. Parámetros controlantes de la propulsión por estela de remolinos.  
2. Amplitud con la que deben moverse las aletas del submarinista, para tener un flujo dinámicamente semejante al coleteo del delfín.  
3. Frecuencia de aleteo del submarinista.

DATOS: Delfín: velocidad = 5 m/s; coleteo: amplitud = 1m; frecuencia = 1,5 Hz  
Submarinista: velocidad = 1 m/s  
Hidrodinámica:  $C_{Dsub} = 3 C_{Ddelfin}$ ;  $A_{sub} = 0,5 A_{delfin}$

RESOLUCIÓN:

(1) PARAMETROS CONTROLANTES:

En procesos oscilatorios y/o no estacionarios, el parámetro controlante, es el factor de escala de tiempos, o número de STROUHAL:

$$St = \frac{f \cdot L}{U} = \frac{L}{T \cdot U} = \frac{L/U}{T}$$

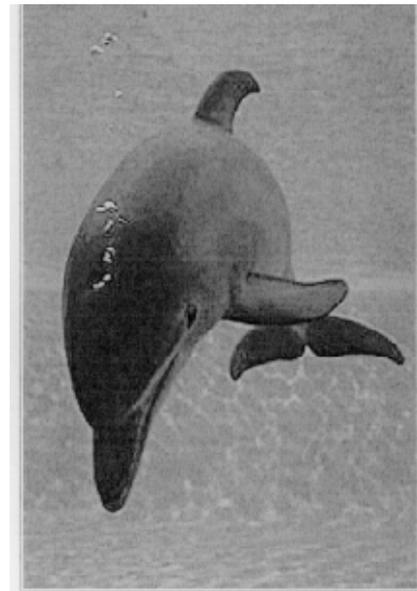
en donde “f” es una frecuencia característica, “T” su periodo, L una longitud característica, U una velocidad característica y L/U el tiempo de residencia.

El otro parámetro controlante, viene determinado por la función  $T=T(L,U,\rho)$ ; se obtiene por el teorema de Buckingham, se denomina coeficiente de empuje  $K_T$ , y deriva del número de EULER:

$$K_T = \frac{T}{\frac{1}{2} \rho U^2 L^2}$$

en donde: “T” es la fuerza de empuje suministrada por el sistema de propulsión (del inglés “thrust”)

“L” es una longitud característica. En el caso de hélices marinas, es el diámetro de la hélice, y en este caso es la amplitud de los coleteos-aleteos.



(2) AMPLITUD DE LAS OSCILACIONES:

De la igualdad de coeficientes de empuje de modelo y prototipo, se obtiene el factor de escala de longitudes:

$$K_{Tdelfin} = \frac{T_d}{\frac{1}{2} \rho U_d^2 L_d^2} = K_{Tsubmarinista} = \frac{T_s}{\frac{1}{2} \rho U_s^2 L_s^2} \quad \frac{L_d}{L_s} = \frac{U_s}{U_d} \sqrt{\frac{T_d}{T_s}} \quad [1]$$

evidentemente las densidades son iguales, porque tanto el delfín como el submarinista se mueven en el mar.

El factor de escala de fuerzas  $T_d/T_s$ , se obtiene a partir de las fuerzas de arrastre que se oponen al movimiento:

$$N_F = \frac{T_d}{T_s} = \frac{F_{Dd}}{F_{Ds}} = \frac{\left( C_D \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot A \right)_{delfin}}{\left( C_D \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot A \right)_{sub}} = \left( \frac{C_{Dd}}{C_{Ds}} \right) \left( \frac{U_d}{U_s} \right)^2 \left( \frac{A_d}{A_s} \right) \quad [2]$$

Con las ecuaciones [1] y [2], se obtiene el factor de escala de longitudes:

$$\frac{L_d}{L_s} = \frac{U_s}{U_d} \sqrt{\frac{T_d}{T_s}} = \frac{U_s}{U_d} \sqrt{\frac{C_{Dd}}{C_{Ds}}} \frac{U_d}{U_s} \sqrt{\frac{A_d}{A_s}} = \sqrt{\frac{C_{Dd}}{C_{Ds}}} \frac{A_d}{A_s}$$

$$\frac{L_d}{L_s} = \sqrt{\frac{C_{Dd}}{C_{Ds}}} \frac{A_d}{A_s} = \sqrt{\frac{1}{3} \frac{1}{0,5}} = 0,816$$

Como la amplitud de los coletoes del delfín es de 1m, la amplitud de los aleteos del submarinista, será de:

$$L_s = L_d/0,816 = 1/0,816 = \mathbf{1,225 \text{ m}}$$

(3) FRECUENCIA DE LOS ALETEOS DEL SUBMARINISTA:

Por la igualdad de números de Strouhal:

$$St_s = \frac{f_s L_s}{U_s} = St_d = \frac{f_d L_d}{U_d} \quad \Rightarrow \quad f_s = f_d \frac{L_d}{L_s} \frac{U_s}{U_d} = 1,5 \frac{1}{1,225} \frac{1}{5} = 0,245 \text{ Hz}$$

La frecuencia del movimiento de las aletas del submarinista debe ser de 0,245 Hz, es decir un aleteo cada 0,245 segundos o bien  $1/0,245 = 4$  segundos /aleteo, que es el periodo del movimiento de las aletas.

### 3.7. Aplicación de la teoría de modelos: diseño de un experimento para el estudio de impresión por chorro de tinta.

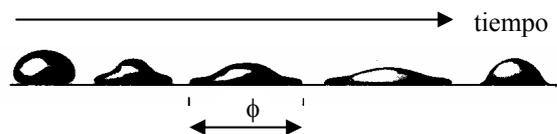
En la impresión por chorro de tinta, se tienen impactos de gotas muy pequeñas sobre superficies planas. La sección de contacto entre la gota de tinta y la superficie del papel, es una función del tiempo. Debido al tamaño de las gotas (volumen del orden de nanolitros y diámetros del orden de décimas de milímetros), es imposible la visualización experimental de la dinámica del proceso; por ello se planifica un experimento, con gotas mas grandes (del orden de milímetros), y se mide el tamaño de contacto en diversos instantes correlativos de tiempo. A partir de los resultados experimentales para las gotas modelo:

- DETERMINE:
1. Números adimensionales controlantes.
  2. Escala de longitudes, velocidades y tiempos.
  3. Diámetro y velocidad de impacto de las gotas modelo.
  4. Evolución temporal del tamaño de contacto de las gotas de tinta.

DATOS: Gotas de tinta : tamaño:  $D_p=0,2$  mm ; Velocidad de impacto:  $V_p=1$  m/s  
 densidad:  $\rho=1040$  kg/m<sup>3</sup>; viscosidad:  $\mu=5$  cP;  
 tensión superficial en aire:  $\sigma = 0,04$  N/m  
 Líquido de ensayo: densidad =  $1000$  kg/m<sup>3</sup>; viscosidad:  $18$  cP,  
 tensión superficial en aire =  $0,05$  N/m

Experimentales:  $\phi$  vs  $t$  ;  $\phi$  = diámetro del área mojada;  $t$  = tiempo

$\phi$ (mm)	0	2,1	4,2	5,9	7,6	7,1	6,2	5,3	4,5	4,1	3,2	2,7
$t$ (ms)	0	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



RESOLUCIÓN:

(1) NÚMEROS ADIMENSIONALES CONTROLANTES:

Las variables que intervienen son:

Diámetro de las gotas:  $D$   
 Velocidad de impacto de las gotas:  $U$   
 Densidad gotas:  $\rho$   
 Viscosidad gotas:  $\mu$   
 Tensión superficial gota-aire:  $\sigma$

$[D] = L$   
 $[U] = LT^{-1}$   
 $[\rho] = ML^{-3}$   
 $[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$   
 $[\sigma] = MT^{-2}$

Por el teorema de Buckingham, con 5 variables y 3 dimensiones distintas, se obtienen  $5-3=2$  parámetros adimensionales: como variables independientes se consideran la viscosidad y la tensión superficial.

$$\pi_1 = \mu D^a U^b \rho^c \quad M^0 L^0 T^0 = (ML^{-1}T^{-1})^a (LT^{-1})^b (ML^{-3})^c = M^{1+c} L^{-1+a+b-3c} T^{-1-b}$$

$$1+c=0; -1+a+b-3c=0; -1-b=0 \quad c=-1; b=-1; c=-1$$

$$\pi_1 = \frac{\mu}{DU\rho}$$

número adimensional = número de REYNOLDS:

$$Re = \frac{DU\rho}{\mu}$$

$$\pi_2 = \sigma D^a U^b \rho^c \quad M^0 L^0 T^0 = (MT^{-2})^a (LT^{-1})^b (ML^{-3})^c = M^{1+c} L^{a+b-3c} T^{-2-b}$$

$$1+c=0; -a+b-3c=0; -2-b=0 \quad c=-1; b=-2; c=-1$$

$$\pi_2 = \frac{\sigma}{DU^2\rho}$$

número adimensional = número de WEBER:

$$We = \frac{DU^2\rho}{\sigma}$$

(2) FACTORES DE ESCALA: LONGITUDES ( $N_L$ ), VELOCIDADES ( $N_V$ ) y TIEMPOS ( $N_T$ ):

Para semejanza entre las gotas modelo y las gotas prototipo, se debe cumplir:

$$Re_m = Re_p \quad \frac{D_m U_m \rho_m}{\mu_m} = \frac{D_p U_p \rho_p}{\mu_p} \quad \Rightarrow \quad N_V = \frac{U_m}{U_p} = \frac{D_p \rho_p \mu_m}{D_m \rho_m \mu_p} = \frac{1}{N_L} \frac{\rho_p \mu_m}{\rho_m \mu_p}$$

$$We_m = We_p \quad \frac{D_m U_m^2 \rho_m}{\sigma_m} = \frac{D_p U_p^2 \rho_p}{\sigma_p} \quad \Rightarrow \quad N_L = \frac{D_m}{D_p} = \frac{U_p^2 \rho_p \sigma_m}{U_m^2 \rho_m \sigma_p} = \frac{1}{N_V^2} \frac{\rho_p \sigma_m}{\rho_m \sigma_p}$$

$$\text{Obteniéndose: } N_L = N_L^2 \frac{\rho_m^2 \mu_p^2 \rho_p \sigma_m}{\rho_p^2 \mu_m^2 \rho_m \sigma_p} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_L = \frac{\rho_p \mu_m^2 \sigma_p}{\rho_m \mu_p^2 \sigma_m}} \quad [1]$$

$$N_V = N_V^2 \frac{\rho_m \sigma_p \rho_p \mu_m}{\rho_p \sigma_m \rho_m \mu_p} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_V = \frac{\sigma_m \mu_p}{\sigma_p \mu_m}} \quad [2]$$

El factor de escala de tiempos viene determinado, a partir de los factores de escala de velocidades y longitudes:

$$N_T = \frac{N_L}{N_V} = \frac{\frac{\rho_p \mu_m^2 \sigma_p}{\rho_m \mu_p^2 \sigma_m}}{\frac{\sigma_m \mu_p}{\sigma_p \mu_m}} = \frac{\rho_p \left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)^3 \left(\frac{\sigma_p}{\sigma_m}\right)^2}{\rho_m \left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)^3 \left(\frac{\sigma_p}{\sigma_m}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_T = \frac{\rho_p \left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)^3 \left(\frac{\sigma_p}{\sigma_m}\right)^2}{\rho_m \left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)^3 \left(\frac{\sigma_p}{\sigma_m}\right)^2}} \quad [3]$$

Con los datos numéricos:

	$\rho_p = 1044 \text{ kg/m}^3$ ;	$\rho_m = 1000 \text{ kg/m}^3$
	$\mu_p = 5 \text{ cP}$	$\mu_m = 17,3 \text{ cP}$
	$\sigma_p = 0,04 \text{ N/m}$	$\sigma_m = 0,05 \text{ N/m}$

se obtienen los siguientes factores de escala:

$$N_L = \frac{\rho_p \mu_m^2 \sigma_p}{\rho_m \mu_p^2 \sigma_m} = \frac{1044 \left(\frac{17,3}{5}\right)^2 \cdot 0,04}{1000 \cdot 0,05} = 10$$

$$N_V = \frac{\sigma_m \mu_p}{\sigma_p \mu_m} = \frac{0,05 \cdot 5}{0,04 \cdot 17,3} = 0,361$$

$$N_T = \frac{\rho_p \left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)^3 \left(\frac{\sigma_p}{\sigma_m}\right)^2}{\rho_m \left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)^3 \left(\frac{\sigma_p}{\sigma_m}\right)^2} = \frac{1044 \left(\frac{17,3}{5}\right)^3 \left(\frac{0,04}{0,05}\right)^2}{1000 \left(\frac{17,3}{5}\right)^3 \left(\frac{0,04}{0,05}\right)^2} = 27,7$$

$$\boxed{N_L = 10; \quad N_V = 0,361; \quad N_T = 27,7}$$

## (3) TAMAÑO Y VELOCIDAD DE IMPACTO DE LAS GOTAS MODELO:

A partir del tamaño y velocidad de impacto de las gotas de tinta (prototipo), y de los factores de escala de longitudes y de velocidades, se obtienen el tamaño y la velocidad de las gotas de líquido, con las que se realizan los experimentos:

$$D_m = N_L D_p = (10) (0,2 \text{ mm}) = 2 \text{ mm}$$

$$V_m = N_V V_p = (0,361)(1 \text{ m/s}) = 0,361 \text{ m/s}$$

## (4) EVOLUCIÓN TEMPORAL DEL TAMAÑO DE LA SUPERFICIE MOJADA POR LA TINTA:

A partir de la tabla de valores experimentales para las gotas modelo, se obtiene una tabla para valores de las gotas de tinta, a partir de los factores de escala de longitudes y de tiempos:

$$\phi_p = \phi_m / N_L = \phi_m / 10$$

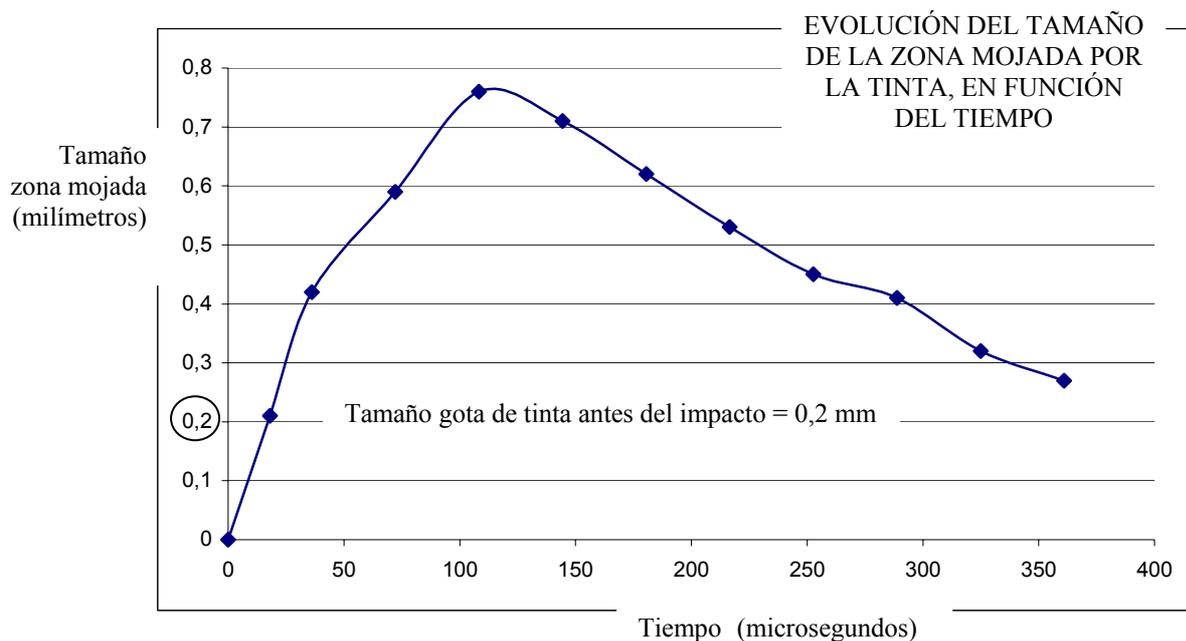
$$t_p = t_m / N_T = t_m / 27,7$$

$\phi_{\text{modelo}}(\text{mm})$	0	2,1	4,2	5,9	7,6	7,1	6,2	5,3	4,5	4,1	3,2	2,7
$t_{\text{mojado}}(\text{ms})$	0	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Las unidades de tiempo para el modelo son milisegundos

$\phi_{\text{prototipo}}(\text{mm})$	0	0,21	0,42	0,59	0,76	0,71	0,62	0,53	0,45	0,41	0,32	0,27
$t_{\text{prototipo}}(\mu\text{s})$	0	18,05	36,1	72,2	108,3	144,4	180,5	216,6	252,7	288,8	324,9	361

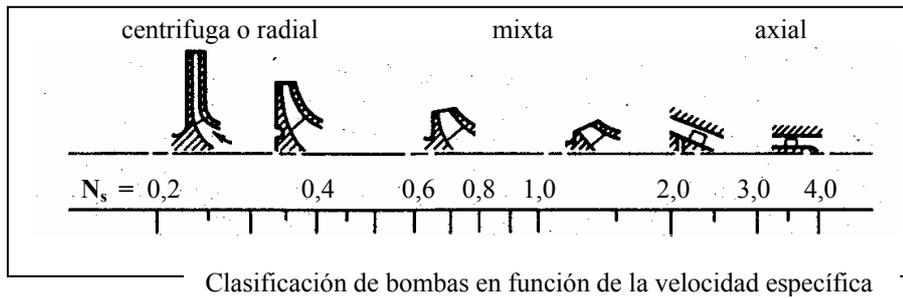
Las unidades de tiempo para el prototipo son microsegundos



**3.8. Reglas de semejanza en bombas y ventiladores:** El flujo en una bomba depende fundamentalmente del caudal, de la velocidad de giro y del tamaño del rodete; además de las propiedades del fluido (viscosidad y densidad). Los parámetros de funcionamiento de interés son: el aumento de presión “ $\Delta p$ ” (altura o carga en unidades de longitud:  $H = \Delta p / \rho g$ ), la potencia consumida “ $P$ ” y el rendimiento “ $\eta$ ” (relación entre la potencia entregada al líquido y la consumida:  $\eta = (Q \Delta p) / P = \rho Q g H / P$ ). La energía específica (por unidad de masa) que se transfiere al líquido es el término “ $gH$ ”, y es el parámetro que normalmente se utiliza en análisis dimensional en bombas: A partir de la información anterior y de los datos:

- DETERMINE:
1. Parámetros adimensionales, a partir del teorema de Buckingham.
  2. Parámetro adimensional independiente del tamaño de la bomba: velocidad específica.
  3. Reglas de semejanza entre máquinas geométrica y dinámicamente semejantes:
  4. Punto de funcionamiento cuando la velocidad de giro aumenta un 20%.

DATOS: Bomba:  $D = 127 \text{ mm}$ ;  $Q = 18 \text{ L/s}$ ;  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ;  $N = 1450 \text{ rpm}$ ;  $H = 6,8 \text{ m}$ ;  $\eta = 63\%$



RESOLUCIÓN:

(1) PARÁMETROS ADIMENSIONALES:

En el flujo de bombas, la variables son:	Energía específica	$gH$	$[gH] = L^2 T^{-2}$
	Caudal	$Q$	$[Q] = L^3 T^{-1}$
	Potencia consumida	$P$	$[P] = M L^2 T^{-3}$
	Diámetro del rodete	$D$	$[D] = L$
	Velocidad de giro	$\omega$	$[\omega] = T^{-1}$
	Densidad del líquido	$\rho$	$[\rho] = M L^{-3}$
	Viscosidad del líquido	$\mu$	$[\mu] = M L^{-1} T^{-1}$

Consideraremos como variables independientes: la densidad, la velocidad de giro y el diámetro; con lo que los 4 parámetros adimensionales que se tienen (7 variables – 3 dimensiones = 4 parámetros) son:

$$\pi_1 = (gH) \rho^a \omega^b D^c \quad M^0 L^0 T^0 = (L^2 T^{-2})(M L^{-3})^a (T^{-1})^b (L)^c = M^a L^{1-3a+c} T^{-b} \quad \pi_1 = \frac{gH}{\omega^2 D^2}$$

$$\pi_2 = P \rho^a \omega^b D^c \quad M^0 L^0 T^0 = (M L^2 T^{-3})(M L^{-3})^a (T^{-1})^b (L)^c = M^a L^{1-3a+c} T^{-b} \quad \pi_2 = \frac{P}{\rho \omega^3 D^5}$$

$$\pi_3 = Q \rho^a \omega^b D^c \quad M^0 L^0 T^0 = (M L^{-3})(M L^{-3})^a (T^{-1})^b (L)^c = M^a L^{1-3a+c} T^{-b} \quad \pi_3 = \frac{Q}{\omega D^3}$$

$$\pi_4 = \mu \rho^a \omega^b D^c \quad M^0 L^0 T^0 = (M L^{-1} T^{-1})(M L^{-3})^a (T^{-1})^b (L)^c = M^a L^{1-3a+c} T^{-b} \quad \pi_4 = \frac{\mu}{\rho \omega D^2}$$

El parámetro adimensional del aumento de energía específica del líquido, se denomina coeficiente de altura, y determina que para una misma bomba, si la velocidad de giro se duplica, la altura de bombeo se cuadruplica; y que la altura depende del cuadrado del tamaño del rodete.

$$C_H = \frac{gH}{\omega^2 D^2}$$

El parámetro adimensional de la potencia consumida, se denomina coeficiente de potencia, y determina que la potencia depende del cubo de la velocidad de giro y de la quinta potencia del tamaño del rodete.

$$C_P = \frac{P}{\rho \omega^3 D^5}$$

El parámetro adimensional del caudal, se denomina coeficiente de caudal, y determina que el caudal aumenta linealmente con la velocidad, y cúbicamente con el tamaño:

$$C_Q = \frac{Q}{\omega D^3}$$

El cuarto parámetro adimensional es la inversa del número de Reynolds:  $Re = \frac{\rho \omega D^2}{\mu}$

## (2) PARÁMETRO ADIMENSIONAL INDEPENDIENTE DEL TAMAÑO: VELOCIDAD ESPECÍFICA.

En bombas, hay un parámetro adimensional, que se obtiene de los anteriores, que no depende del tamaño de la máquina, sino de su morfología: es la **velocidad específica**  $N_s$ , que se obtiene por la relación entre los parámetros adimensionales  $(\pi_3)^{1/2} / (\pi_1)^{3/4}$ :

$$N_s = \frac{\omega Q^{1/2}}{(gH)^{3/4}}$$

El valor de la velocidad característica, permite clasificar las bombas:

Bombas centrífugas o radiales	$N_s$ bajos (0,2 a 0,5)	bajos caudales y altas cargas
Bombas de flujo mixto	$N_s$ intermedio (0,5 a 3)	caudales y alturas intermedias
Bombas axiales	$N_s$ alto (3 a 4)	altos caudales y bajas cargas

En la ecuación de la velocidad característica, las variables se expresan en el S.I., es decir la velocidad de giro en radianes / segundo, el caudal en  $m^3/s$ , la altura o carga en metros y la aceleración gravitatoria en  $m/s^2$ . No obstante es habitual, utilizar dos tipos de sistemas técnicos, el europeo ( en donde la velocidad de giro se expresa en Herzios (Hz=revoluciones/segundo); y el americano (en donde la velocidad de giro se expresa en rpm (revoluciones/minuto), el caudal en gpm (galones / minuto), y en lugar de la energía específica, se pone la carga en pies; las relaciones entre las distintas velocidades características es:

$$N_{sUSA} = 2732 N_{sSI}$$

$$N_{sUE} = N_{sSI} / 2\pi = 0,1592 N_{sSI}$$

$$N_{sUSA} = 17166 N_{sUE}$$

(3) REGLAS DE SEMEJANZA: si se disponen de dos bombas geométrica y dinámicamente semejantes, y los viscosos son despreciables (por trabajar a Re altos), se tiene que el coeficiente de caudal es el mismo en las dos bombas; y además como los coeficientes de altura y de potencia solo dependen (despreciando efectos viscosos) del coeficiente de caudal, se tiene también las igualdades correspondientes de los coeficientes de altura y de potencia:

por similitud geométrica y cinemática:  $C_{Q1}=C_{Q2}$

$$(C_Q)_1 = \frac{Q_1}{\omega_1 D_1^3} = (C_Q)_2 = \frac{Q_2}{\omega_2 D_2^3} \Rightarrow \boxed{\frac{Q_1}{\omega_1 D_1^3} = \frac{Q_2}{\omega_2 D_2^3}} \quad [1]$$

por trabajar a Re muy altos:

$$C_p = C_p(C_Q); \quad C_H = C_H(C_Q) \quad \text{y} \quad C_Q = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad C_{p1} = C_{p2} \quad \text{y} \quad C_{H1} = C_{H2}$$

$$(C_P)_1 = \frac{P_1}{\rho_1 \omega_1^3 D_1^5} = (C_P)_2 = \frac{P_2}{\rho_2 \omega_2^3 D_2^5} \Rightarrow \boxed{\frac{P_1}{\rho_1 \omega_1^3 D_1^5} = \frac{P_2}{\rho_2 \omega_2^3 D_2^5}} \quad [2]$$

$$(C_H)_1 = \frac{gH_1}{\omega_1 D_1^2} = (C_H)_2 = \frac{gH_2}{\omega_2 D_2^2} \Rightarrow \boxed{\frac{H_1}{\omega_1 D_1^2} = \frac{H_2}{\omega_2 D_2^2}} \quad [3]$$

Las expresiones [1], [2] y [3], se denomina leyes de semejanza de las bombas.

#### (4). PUNTO DE FUNCIONAMIENTO CON UN AUMENTO DEL 20% DE VELOCIDAD DE GIRO.

En este caso, se trata de la misma bomba y la semejanza geométrica es total: en este caso  $D_1=D_2$ .

Si lo que varia es la velocidad de giro, el nuevo punto de funcionamiento viene determinado por las leyes de semejanza anteriores:

Punto de funcionamiento "1":  $N_1 = 1450 \text{ rpm}$

$$Q_1=18 \text{ L/s}; \quad H_1=6,8 \text{ m}; \quad P_1 = \frac{\rho g Q H}{\eta} = \frac{1000 \cdot 9,8 \cdot 18 \cdot 10^{-3} \cdot 6,8}{0,63} = \mathbf{1,904 \text{ kW}}$$

Punto de funcionamiento "2":  $N_2 = 1,2 (1450)=1740 \text{ rpm}$

$$Q_2 = Q_1 \frac{\omega_2}{\omega_1} = 18 \frac{1,2 \cdot \omega_1}{\omega_1} = \mathbf{21,6 \text{ L/s}}$$

$$H_2 = H_1 \frac{\omega_2}{\omega_1} = 6,8 \frac{1,2 \cdot \omega_1}{\omega_1} = \mathbf{8,16 \text{ m}}$$

$$P_2 = P_1 \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^3 = 1,904 \left( \frac{1,2 \cdot \omega_1}{\omega_1} \right)^3 = \mathbf{3,290 \text{ kW}}$$