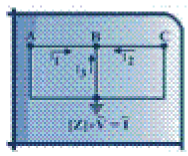
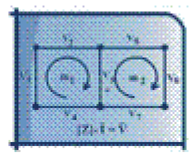
# 3. ANÁLISIS POR NODOS Y MALLAS





## 3.1. INTRODUCCIÓN

Conocer para cada una de las ramas de un circuito sus voltajes de rama y sus corrientes de rama permite realizar todos los cálculos requeridos en el circuito. Una manera de calcular estos valores es la aplicación de las leyes de Kirchhoff, la ley de Ohm y el principio de conservación de potencia.

En el circuito de la Figura 3-1 tenemos siete ramas y seis nodos. Por tanto tendremos catorce variables: siete voltajes de rama y siete corrientes de rama. Si una de las variables de las ramas es conocida, por ejemplo si la rama AD corresponde a una fuente de voltaje conocida y las demás son resistencias conocidas, tendríamos trece incógnitas. De manera que debemos escribir trece ecuaciones. Para obtenerlas podemos hacer: dos de KVL para los dos caminos cerrados ABCDA y BEHCB, seis de KCL para los seis nodos, seis de la ley de Ohm para las seis ramas (resistencias) y una para la conservación de potencia. Esto nos da un total de 21 ecuaciones. Entre todas estas posibilidades, ¿cuáles seleccionar par atener un conjunto de trece ecuaciones linealmente independientes con trece incógnitas?

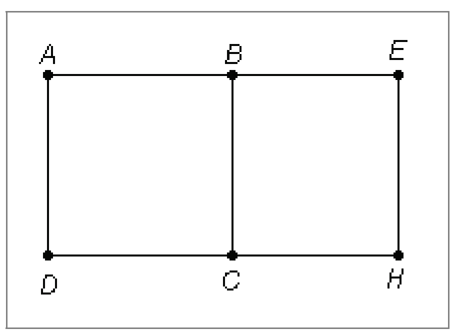



**Figura 3-1**

Los métodos de análisis de nodos y mallas son herramientas que permiten la aplicación organizada y sistemática de las leyes de Kirchhoff (KVL o KCL) para resolver problemas complejos con un número de incógnitas y ecuaciones linealmente independientes muy reducido.

En el método de análisis de nodos nos interesa conocer los voltajes de nodo para cada nodo del circuito. En el método de análisis de mallas nos interesa conocer las corrientes de malla para cada malla del circuito. A partir de estas variables calculadas (voltaje de nodos o corrientes de malla) se pueden calcular todos los voltajes de rama y todas las corrientes de rama: los voltajes de rama se calculan como la diferencia entre los voltajes de nodos de los dos nodos de la rama; las corrientes de rama como la suma algebraica de las corrientes de lazo que pasan por la rama.

En el ejemplo de la Figura 3-1, por el método de análisis de nodos, tendríamos seis incógnitas (seis nodos), los cuales se convierten en cinco si uno de los nodos es el de referencia. Por el método de lazos con tan solo dos incógnitas (corrientes de las dos mallas) y dos ecuaciones sería suficiente.

Es importante anotar que con ninguno de los dos métodos tenemos el total de las variables directamente, pero se pueden calcular fácilmente a partir de ellas utilizando KVL y KCL.

## 3.2. ANÁLISIS POR NODOS

En el análisis por nodos se parte de la aplicación de KCL a cada nodo del circuito para encontrar al final todos los voltajes de nodo del circuito. Para que el sistema de ecuaciones sea consistente debe haber una ecuación por cada nodo. Así el número de incógnitas (voltajes de nodo) es igual al número de ecuaciones (una por nodo).

De acuerdo al tipo de circuito y la forma en que se seleccione el nodo de referencia se pueden tener distintas posibilidades de conexión de las fuentes:

- Fuentes de corriente independientes
- Fuentes de corriente controladas
- Fuentes de voltaje independientes a tierra
- Fuentes de voltaje independientes flotantes
- Fuentes de voltaje controladas a tierra
- Fuentes de voltaje controladas flotantes

Según lo anterior hay varias maneras de resolver un circuito por el método de nodos.

El método que llamaremos *general* aplica a los casos de circuitos con fuentes de corriente independientes y fuentes de voltaje independientes a tierra. Este método NO aplica a los circuitos que tienen:

1. fuentes flotantes de voltaje (se usa el método de supernodos)
2. fuentes controladas de corriente o voltaje (se deben escribir las ecuaciones de dependencia de la variable controlada y controladora)

Si el circuito solo tiene fuentes de corriente independientes entonces se aplica el método general por el sistema llamado de *inspección*.

## 3.3. ANÁLISIS POR MALLAS

En el análisis de mallas se parte de la aplicación de KVL a un conjunto mínimo de lazos para encontrar al final todas las corrientes de lazo. A partir de las corrientes de lazo es posible encontrar todas las corrientes de rama. El número de lazos que se pueden plantear en un circuito puede ser muy grande, pero lo importante es que el sistema de ecuaciones represente un conjunto mínimo de lazos independientes.

Este conjunto mínimo es cualquiera en el cual todos los elementos (ramas) hayan sido tenidos en cuenta en al menos una malla. Las otras posibles mallas serán entonces redundantes. Aquí también el número de incógnitas (corrientes de lazo) debe ser igual al número de ecuaciones (una por malla del conjunto mínimo).

De acuerdo al tipo de circuito y la forma en que se seleccionen las mallas se pueden tener distintas posibilidades de conexión de las fuentes:

- Fuentes de corriente controladas
- Fuentes de voltaje independientes
- Fuentes de voltaje controladas
- Fuentes de corriente independientes no compartidas por varias mallas
- Fuentes de corriente independientes compartidas por varias mallas

Según lo anterior hay varias maneras de resolver un circuito por el método de mallas.

El método que llamaremos *general* aplica a los casos de circuitos con fuentes de voltaje independientes y fuentes de corriente independientes no compartidas por varias mallas. Este método NO aplica a los circuitos que tienen:

1. Fuentes de corriente independientes compartidas por varias mallas (se usa el método de supermalla)
2. fuentes controladas de corriente o voltaje (se deben escribir las ecuaciones de dependencia de la variable controlada y controladora)

Si el circuito solo tiene fuentes de voltaje independientes entonces se aplica el método general por el sistema llamado de *inspección*.

El número mínimo de lazos independientes que hay que definir para tener un sistema de ecuaciones linealmente independientes que se deben tener está dado por la siguiente relación:

***# Lazos independiente = # ramas – # nodos + 1***

Para que un conjunto de lazos sea independiente se requiere que en cada uno de ellos exista al menos un elemento que haga parte de los otros lazos.

## Ejemplo 3-1. Identificación de Lazos y Mallas.

a. Para el circuito de la Figura 3-2:
b. Identificar los nodos y las ramas.
c. Dibujar o identificar todos los lazos diferentes posibles.
d. Dibujar o identificar todas las mallas.
e. Dibujar o identificar un conjunto de lazos independientes que sea diferente al conjunto de mallas.

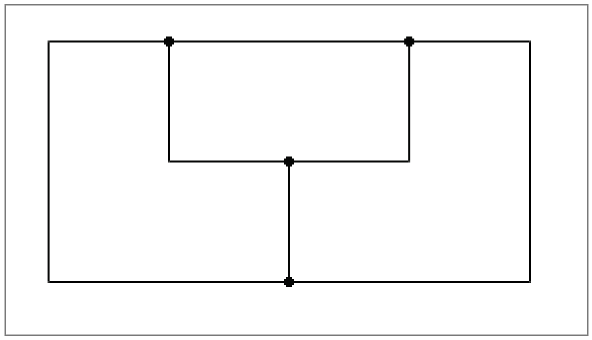


**Figura 3-2**

## Solución

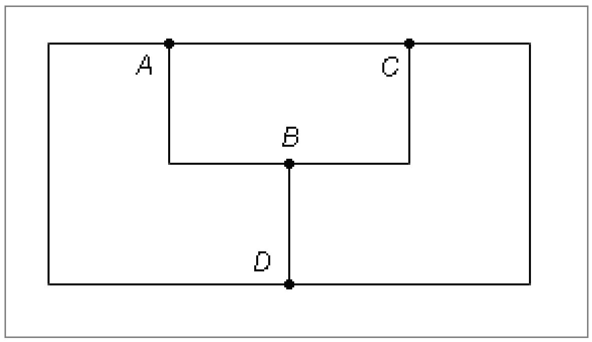



**Figura 3-3**

### Parte a)

Este circuito tiene cuatro nodos que hemos denominado en la Figura 3-3 A, B, C y D. Nótese que los quiebres de las líneas no constituyen necesariamente nodos, pues no siempre hay unión de dos o más ramas.

Tenemos seis ramas: AD, AB, AC, BC, CD y BD.

### Parte b)

Los lazos son los caminos cerrados del circuito. En este caso serían: ABDA, ABCA, CBDB, ACDA, ACBDA, CABDC, ADCBA.

### Parte c)

El número de mallas es igual al de lazos independientes:

$$\# \text{ mallas} = \# \text{ lazos independientes} = \# \text{ ramas} - \# \text{ nodos} + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$$

Estas mallas son los lazos que no contienen otros lazos a su interior: ABDA, ABCA y CBDB.

### Parte d)

Para tener un conjunto de lazos independientes se requiere que al menos una rama de cada lazo no pertenezca a los otros lazos que conformarán los lazos independientes. Como nos piden un conjunto de lazos independientes ya sabemos que deben ser tres (como el número de mallas). Podemos comenzar por seleccionar un lazo cualquiera y luego ir buscando otros que sean independientes.

Vamos a seleccionar el lazo inicial ABDA. Como no hemos adicionado ningún otro lazo al conjunto es evidente que este es independiente.

Ahora seleccionamos el segundo lazo independiente haciendo que una de sus ramas no esté en el primer lazo ABDA. Un candidato puede ser ABCA ya que la rama BC no está en el primer lazo.

Ahora hay que seleccionar un tercer lazo que tenga una rama que no esté en los dos primeros. El lazo exterior ACDA tiene la rama CD que no está en los dos lazos anteriores, de manera que así tenemos el conjunto deseado de tres lazos independientes.

Evidentemente este método para encontrar los lazos independientes es más complejo que el de la mallas.

## Ejemplo 3-2. Análisis por Mallas.

Encontrar un sistema de ecuaciones de mallas para el siguiente circuito.

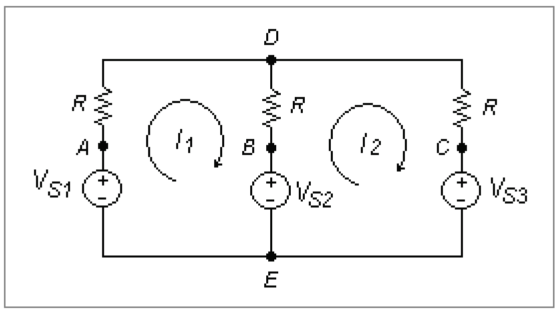



**Figura 3-4**

### Solución

Malla 1:

$$V_{EA} + V_{AD} + V_{DB} + V_{BE} = 0$$

$$-V_{S1} + R \cdot I_{AD} + R \cdot I_{DB} + V_{S2} = 0$$
$$-V_{S1} + R \cdot (I_1) + R \cdot (I_1 - I_2) + V_{S2} = 0$$
$$-V_{S1} + I_1 \cdot (2R) + I_2 \cdot (-R) + V_{S2} = 0$$
$$\boxed{(2R) \cdot I_1 + (-R) \cdot I_2 = V_{S1} - V_{S2}}$$

Malla 2:

$$V_{EB} + V_{BD} + V_{DC} + V_{CE} = 0$$

$$-V_{S2} + R \cdot I_{BD} + R \cdot I_{DC} + V_{S3} = 0$$
$$-V_{S2} + R \cdot (-I_1 + I_2) + R \cdot (I_2) + V_{S3} = 0$$
$$-V_{S2} + I_1 \cdot (-R) + I_2 \cdot (2R) + V_{S3} = 0$$
$$\boxed{(-R) \cdot I_1 + (2R) \cdot I_2 = V_{S2} - V_{S3}}$$

Ecuación Matricial:

$$(2R)\cdot I_1 + (-R)\cdot I_2 = V_{S1} - V_{S2}$$

$$(-R)\cdot I_1 + (2R)\cdot I_2 = V_{S2} - V_{S3}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 2R & -R \\ -R & 2R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{S1} - V_{S2} \\ V_{S2} - V_{S3} \end{bmatrix}}$$

Solución Ecuación Matricial:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2R & -R \\ -R & 2R \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} V_{S1} - V_{S2} \\ V_{S2} - V_{S3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{(4\cdot R^2 - R^2)}\begin{bmatrix} 2R & R \\ R & 2R \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} V_{S1} - V_{S2} \\ V_{S2} - V_{S3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{3R}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} V_{S1} - V_{S2} \\ V_{S2} - V_{S3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{3R}\right)\begin{bmatrix} 2V_{S1} - V_{S2} - V_{S3} \\ V_{S1} + V_{S2} - 2V_{S3} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2V_{S1} - V_{S2} - V_{S3})/3R \\ (V_{S1} + V_{S2} - 2V_{S3})/3R \end{bmatrix}}$$

$$V_{ED} = V_{EA} + V_{AD} = V_E - V_D$$

$$V_D = -V_{AD} - V_{EA}$$

$$V_D = -(R\cdot I_{AD}) - (-V_{S1})$$

$$V_D = -R\cdot I_1 + V_{S1}$$

$$V_D = -R\cdot\left[(2V_{S1} - V_{S2} - V_{S3})/3R\right] + V_{S1}$$

$$V_D = -\left[(2V_{S1} - V_{S2} - V_{S3})/3\right] + V_{S1}$$

$$\boxed{V_D = (V_{S1} + V_{S2} + V_{S3})/3}$$

## Ejemplo 3-3. Análisis por Mallas.

Encontrar el sistema de ecuaciones de mallas para el siguiente circuito.

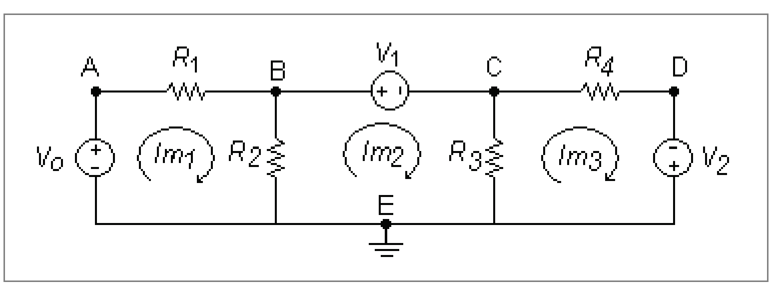



**Figura 3-5**

### Solución

Malla 1:

$$V_{EA} + V_{AB} + V_{BE} = 0$$

$$\begin{gathered}-V_0 + R_1 \cdot I_{AB} + R_2 \cdot I_{BE} = 0 \\ -V_0 + R_1 \cdot (I_{M1}) + R_2 \cdot (I_{M1} - I_{M2}) = 0 \\ -V_0 + I_{M1}(R_1 + R_2) + I_{M2}(-R_2) = 0 \\ I_{M1}(R_1 + R_2) + I_{M2}(-R_2) = V_0\end{gathered}$$

Malla 2:

$$V_{EB} + V_{BC} + V_{CE} = 0$$

$$\begin{gathered}R_2 \cdot I_{EB} + V_1 + R_3 \cdot I_{CE} = 0 \\ R_2 \cdot (I_{M2} - I_{M1}) + V_1 + R_3 \cdot (I_{M2} - I_{M3}) = 0 \\ I_{M1}(-R_2) + I_{M2}(R_2 + R_3) + I_{M3}(-R_3) = -V_1\end{gathered}$$

Malla 3:

$$V_{EC} + V_{CD} + V_{DE} = 0$$

$$\begin{gathered}R_3 \cdot I_{EC} + R_4 \cdot I_{CD} - V_2 = 0 \\ R_3 \cdot (I_{M3} - I_{M2}) + R_4 \cdot (I_{M3}) - V_2 = 0 \\ I_{M2}(-R_3) + I_{M3}(R_3 + R_4) = V_2\end{gathered}$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 & -R_3 \\ 0 & -R_3 & R_3 + R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ -V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

## Ejemplo 3-4. Análisis por Lazos, Mallas (supermalla) y Variable Auxiliar.

Para el circuito de la Figura 3-6 encontrar un sistema de ecuaciones y calcular la corriente $I_{M1}$ por los siguientes métodos:

a. Para la figura (a) hacerlo usando las dos mallas y la variable auxiliar Vx.
b. Para la figura (b) hacerlo usando las **corrientes de malla** y la supermalla indicadas.
c. Para la figura (c) usar las **corrientes de lazo** indicadas.

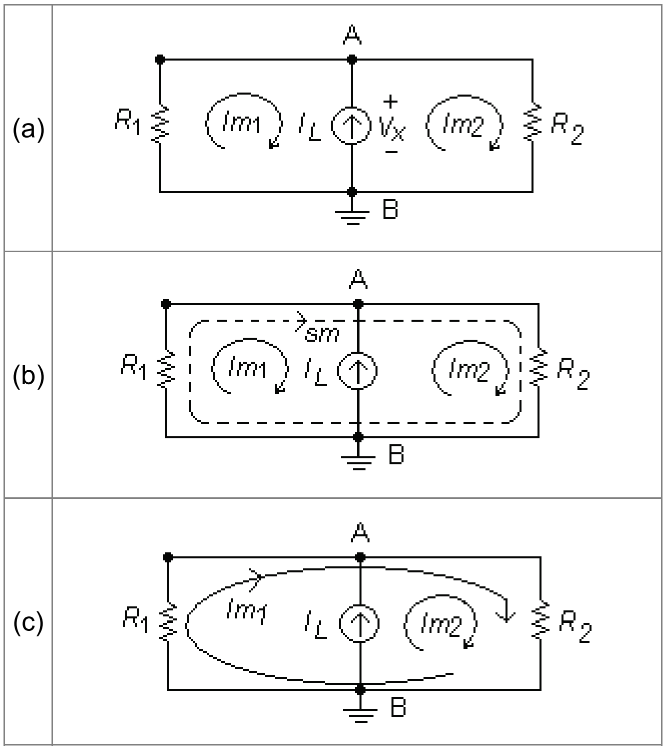



**Figura 3-6**

## Solución

### Parte a)

Se define una variable auxiliar de voltaje Vx en la fuente de corriente compartida por las dos mallas y se plantean las siguientes ecuaciones:

Restricción:

$$I_L = I_{m2} - I_{m1}$$

Malla 1:

$$I_{m1} R_1 + V_X = 0$$

Malla 2:

$$-V_X + I_{m2} R_2 = 0$$
$$V_X = I_{m2} R_2$$

Reemplazando Vx en la malla 1 tenemos:

$$I_{m1} R_1 + I_{m2} R_2 = 0$$

Esta ecuación más la de la restricción en forma matricial será:

$$\boxed{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ R_1 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_L \\ 0 \end{bmatrix}}$$

**Parte b)**

Se tienen dos ecuaciones: una de la restricción de corriente en la fuente y otra calculando KVL para el camino definido por la supermalla pero usando las corrientes de malla definidas.

Restricción:

$$I_L = I_{m2} - I_{m1}$$

Supermalla:

$$I_{m1}R_1 + I_{m2}R_2 = 0$$

Forma matricial:

$$\boxed{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ R_1 & R_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_L \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Ahora podemos calcular Im1 así:

$$I_{M1} = \frac{\begin{vmatrix} I_L & 1 \\ 0 & R_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ R_1 & R_2 \end{vmatrix}} = \frac{-I_S R_L}{R_1 + R_2}$$

$$\boxed{I_{M1} = \frac{-I_L R_2}{R_1 + R_2}}$$

**Parte c)**

Malla 1:

$$I_{m1}R_1 + \left(I_{m2} + I_{m1}\right)R_2 = 0$$
$$I_{m1}\left(R_1 + R_2\right) + I_{m2}R_2 = 0$$

Malla 2:

$$I_{m2} = I_L$$

Forma matricial:

$$\boxed{\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & R_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_L \end{bmatrix}}$$

Ahora podemos calcular Im1 así:

$$I_{M1} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & R_2 \\ I_L & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & R_2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-I_S R_L}{R_1 + R_2}$$

$$\boxed{I_{M1} = \frac{-I_L R_2}{R_1 + R_2}}$$

Nótese que en los tres casos la corriente *Im₁* vale lo mismo y corresponde a la corriente por $R_1$. Sin embargo en el caso (c) la corriente por $R_2$ corresponde a la suma de dos corrientes de lazo ($Im_1 + Im_2$), mientras que en (a) y (b) corresponde directamente a la corriente de malla que pasa por ella ($Im_2$).

## Ejemplo 3-5. Análisis por Nodos.

Encontrar un sistema de ecuaciones de nodos para el circuito mostrado en la siguiente figura.

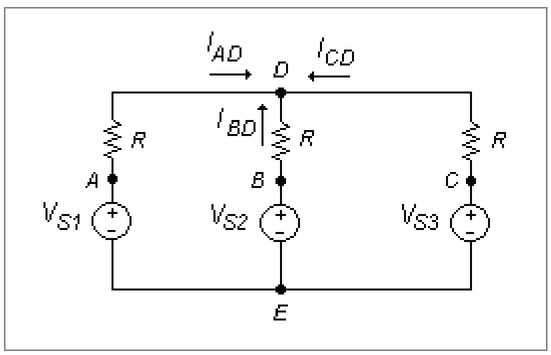



**Figura 3-7**

### Solución

Como se verá los nodos A, B, C y E no requieren la aplicación de KCL y sus valores se calculan directamente. De manera que solo hay que escribir una ecuación de nodos para el nodo D.

Nodo E:

Tomamos como referencia el nodo E: $V_E = 0$

Nodo A:

$$V_{S1} = V_{AE} = V_A - V_E = V_A$$

Nodo B:

$$V_{S2} = V_{BE} = V_B - V_E = V_B$$

Nodo C:

$$V_{S2} = V_{CE} = V_C - V_E = V_C$$

Nodo D:

$$I_{AD} + I_{BD} + I_{CD} = 0$$

$$\frac{V_{AD}}{R} + \frac{V_{BD}}{R} + \frac{V_{CD}}{R} = 0$$

$$V_{AD} + V_{BD} + V_{CD} = 0$$

$$(V_A - V_D) + (V_B - V_D) + (V_C - V_D) = 0$$

$$V_A + V_B + V_C - 3V_D = 0$$

$$3V_D = V_A + V_B + V_C$$

$$\boxed{V_D = \frac{V_A + V_B + V_C}{3}}$$

## Ejemplo 3-6. Análisis por Nodos – Fuentes de Voltaje a Tierra.

Encontrar el sistema de ecuaciones de nodos para el circuito de la Figura 3-8.

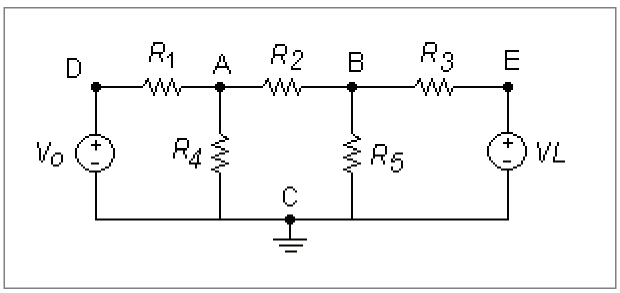



**Figura 3-8**

### Solución

Dado que la referencia es el nodo C y que las fuentes de voltaje están a tierra, solo se requiere aplicar KCL a los nodos A y B.

Nodo C:

Se toma como referencia $V_C = 0$

Nodo D:

$$V_0 = V_{DC} = V_D - V_C = V_D$$

Nodo E:

$$V_E = V_L$$

Nodo A: (corrientes que salen igual a cero)

$$I_{AD} + I_{AC} + I_{AB} = 0$$

$$\frac{V_{AD}}{R_1} + \frac{V_{AC}}{R_4} + \frac{V_{AB}}{R_2} = 0$$

$$\frac{V_A - V_D}{R_1} + \frac{V_A - V_C}{R_4} + \frac{V_A - V_B}{R_2} = 0$$

$$V_A\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right) - \frac{V_B}{R_2} - \frac{V_D}{R_1} - \frac{V_C}{R_4} = 0$$

$$V_A\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2}\right) + V_B\left(\frac{-1}{R_2}\right) = \frac{V_0}{R_1}$$

Nodo B: (corrientes que salen igual a cero)

$$I_{BA} + I_{BC} + I_{BE} = 0$$

$$V_A\left(-\frac{1}{R_2}\right) + V_B\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right) = \frac{V_L}{R_3}$$

En forma matricial tenemos:

$$\boxed{\begin{bmatrix} (1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_4) & -1/R_2 \\ -1/R_2 & (1/R_2 + 1/R_3 + 1/R_5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_O / R_1 \\ V_L / R_3 \end{bmatrix}}$$

## Ejemplo 3-7. Análisis por Nodos – Fuentes de Voltaje a Tierra y Fuentes de Corriente.

Encontrar el sistema de ecuaciones de nodos para el circuito de la Figura 3-9.

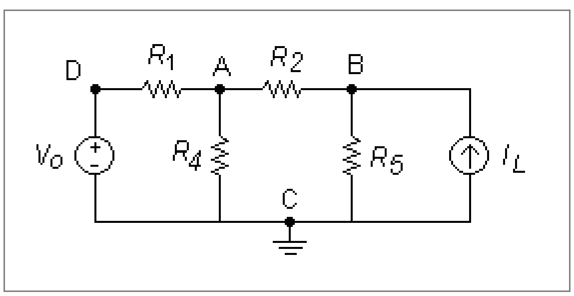



**Figura 3-9**

### Solución

Nodo C:

Se toma como referencia $V_C = 0$

Nodo D:

$$V_0 = V_D$$

En este caso solo los nodos A y B requieren aplicar KCL.

Nodo A: (corrientes que salen igual a cero)

$$I_{AD} + I_{AC} + I_{AB} = 0$$

$$\frac{V_{AD}}{R_1} + \frac{V_{AC}}{R_4} + \frac{V_{AB}}{R_2} = 0$$

$$\frac{(V_A - V_D)}{R_1} + \frac{(V_A - V_C)}{R_4} + \frac{(V_A - V_B)}{R_2} = 0$$

$$V_A\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2}\right) - \frac{V_B}{R_2} - \frac{V_D}{R_1} - \frac{V_C}{R_4} = 0$$

$$V_A\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right) + V_B\left(\frac{-1}{R_2}\right) = \frac{V_0}{R_1}$$

Nodo B: (corrientes que salen igual a cero)

$$I_{AB} + I_{BC} + (-I_L) = 0$$

$$\frac{V_B - V_A}{R_2} + \frac{V_B - V_C}{R_5} - I_L = 0$$

$$V_A\left(\frac{-1}{R_2}\right) + V_B\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5}\right) = I_L$$

En forma matricial tenemos:

$$\boxed{\begin{bmatrix} (1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_4) & -1/R_2 \\ -1/R_2 & (1/R_2 + 1/R_5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_O / R_1 \\ I_L \end{bmatrix}}$$

## Ejemplo 3-8. Análisis por Nodos – Fuentes de Corriente a Tierra o Flotantes.

Encontrar el sistema de ecuaciones de nodos para el circuito de la Figura 3-10.

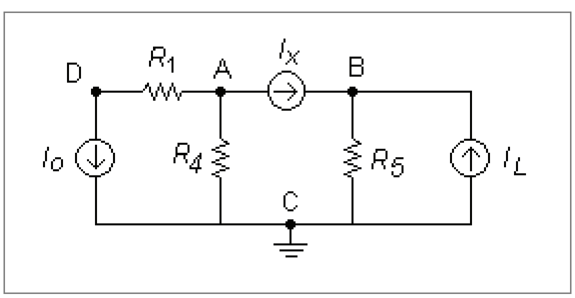



**Figura 3-10**

### Solución

En este caso solo los nodos A, B y D requieren aplicar KCL.

Nodo C: Se toma como referencia $V_C = 0$

Nodo A: (corrientes que salen igual a cero)

$$I_{AD} + I_{AC} + I_{AB} = 0$$

$$\frac{V_{AD}}{R_1} + \frac{V_{AC}}{R_4} + I_X = 0$$

$$\frac{V_A - V_D}{R_1} + \frac{V_A - V_C}{R_4} + I_X = 0$$

$$\frac{V_A - V_D}{R_1} + \frac{V_A}{R_4} + I_X = 0$$

$$V_A\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4}\right) + V_D\left(\frac{-1}{R_1}\right) = -I_X$$

Nodo B: (corrientes que salen igual a cero)

$$I_{BA} + I_{BC1} + I_{BC2} = 0$$

$$-I_X + \frac{V_{BC}}{R_5} - I_L = 0$$

$$\frac{V_B - V_C}{R_5} = I_X + I_L$$

$$\frac{V_B}{R_5} = I_X + I_L$$

Nodo D: (corrientes que salen igual a cero)

$$I_{DC} + I_{DA} = 0$$

$$I_0 + \frac{V_D - V_A}{R_1} = 0$$

$$V_A\left(\frac{-1}{R_1}\right) + V_D\left(\frac{1}{R_1}\right) = -I_0$$

En forma matricial:

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1/R1 + 1/R4 & 0 & -1/R1 \\ 0 & 1/R5 & 0 \\ -1/R1 & 0 & 1/R1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_X \\ I_X + I_L \\ -I_O \end{bmatrix}}$$

## Ejemplo 3-9. Análisis por Nodos – Fuentes de Voltaje Flotantes.

Encontrar el sistema de ecuaciones de nodos para el siguiente circuito.

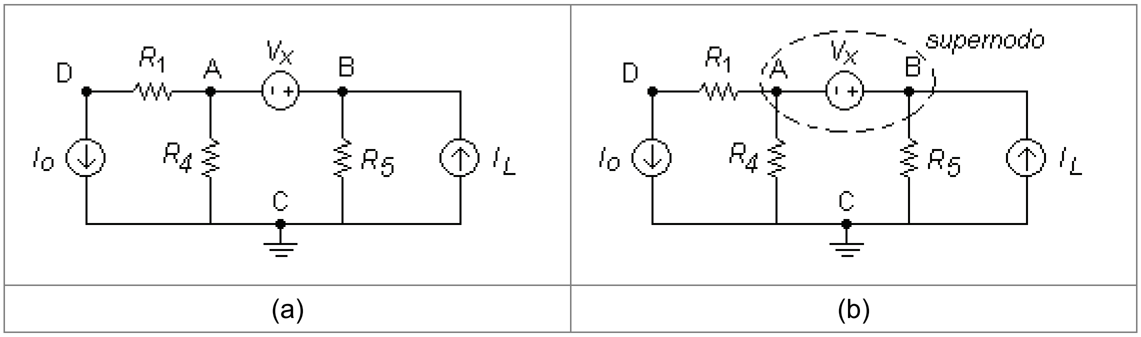



**Figura 3-11**

### Solución

En este caso se tienen cuatro nodos, de manera que al seleccionar el nodo C como referencia el sistema se reduce a tres nodos: A, B y D. Para el nodo D se escribe la ecuación correspondiente a KCL de la manera tradicional. Sin embargo para los nodos A y B no se puede hacer lo mismo, de manera que tenemos tres incógnitas y una ecuación.

Para encontrar dos ecuaciones adicionales se procede a escribir la ecuación de KCL del supernodo (corrientes que entran en la curva gaussiana mostrada) en función de los voltajes de nodo de los nodos A, B y D. La tercera ecuación resulta de la restricción que impone el supernodo: la caída de voltaje en la fuente corresponde a la diferencia de potencial entre los dos nodos A y B.

Nodo D: (corrientes que salen igual a cero)

$$I_{DC} + I_{DA} = 0$$
$$I_0 + \frac{V_D - V_A}{R_1} = 0$$
$$V_A\left(\frac{1}{R_1}\right) + V_D\left(\frac{-1}{R_1}\right) = I_0$$

KCL en el supernodo: (corrientes que salen igual a cero)

$$I_{AD} + I_{AC} + I_{BC} - I_L = 0$$
$$\frac{V_A - V_D}{R_1} + \frac{V_A - V_C}{R_4} + \frac{V_B - V_C}{R_5} - I_L = 0$$
$$\frac{V_A - V_D}{R_1} + \frac{V_A}{R_4} + \frac{V_B}{R_5} = I_L$$
$$V_A\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4}\right) + V_B\left(\frac{1}{R_5}\right) + V_D\left(\frac{-1}{R_1}\right) = I_L$$

Restricción en el supernodo:

$$V_A - V_B = -V_X$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1/R1 & 0 & -1/R1 \\ 1/R1+1/R4 & 1/R5 & -1/R1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_O \\ I_L \\ -V_X \end{bmatrix}$$

## Ejemplo 3-10. Análisis por Nodos – Supernodos con fuente controlada.

Plantear las ecuaciones de nodos para el circuito de la Figura 3-12.

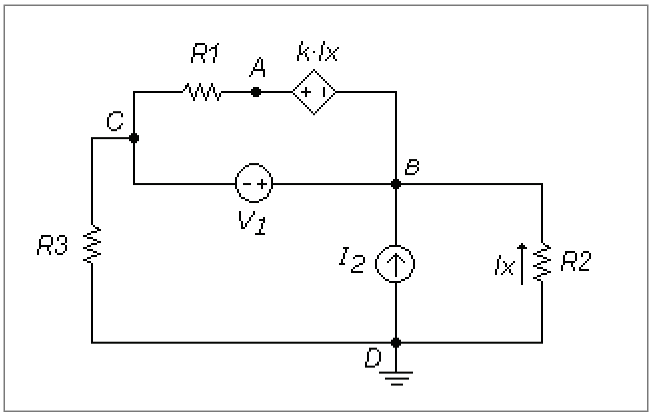



**Figura 3-12**

### Solución

Dado que el nodo D es tierra y que las fuentes de voltaje (independiente y controlada) tienen una conexión directa a ese nodo las dos fuentes de voltaje son flotantes. Por tanto es necesario plantear un supernodo.

Como muestra la siguiente figura un supernodo que tome las dos fuentes al tiempo puede servir.

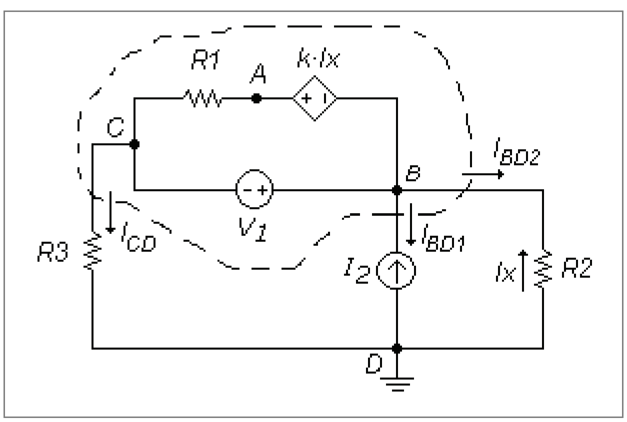



**Figura 3-13**

Nodo D:

$$V_D = 0$$

KCL en el supernodo: (corrientes que salen igual a cero)

$$I_{CD} + I_{BD1} + I_{BD2} = 0$$

$$\frac{V_C - V_D}{R_3} - I_2 + \frac{V_B - V_D}{R_2} = 0$$

$$\frac{V_C}{R_3} - I_2 + \frac{V_B}{R_2} = 0$$

$$V_B\left(\frac{1}{R_2}\right) + V_C\left(\frac{1}{R_3}\right) = I_2$$

Restricciones:

*1)*

$$I_X = -V_B / R_2$$

*2)*

$$V_A - V_B = kI_X = -k\frac{V_B}{R_2}$$

$$V_A - V_B + k\frac{V_B}{R_2} = 0$$

$$V_A + V_B\left(\frac{k}{R_2} - 1\right) = 0$$

*3)*

$$V_B - V_C = V_1$$

Poniendo en forma matricial:

$$\boxed{\begin{bmatrix} 0 & 1/R_2 & 1/R_3 \\ 1 & (k/R_2 - 1) & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 \\ 0 \\ V_1 \end{bmatrix}}$$

## Ejemplo 3-11. Análisis por Nodos y Mallas.

Plantear las ecuaciones en forma matricial para el circuito de la Figura 3-14 por los siguientes métodos:

a. Análisis de mallas.
b. Análisis de nodos.

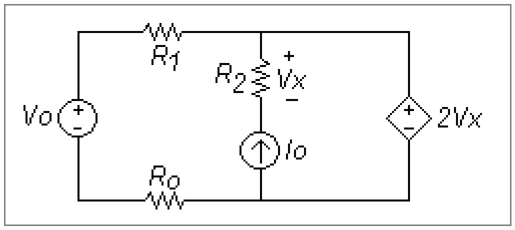



**Figura 3-14**

## Solución

### Parte a)

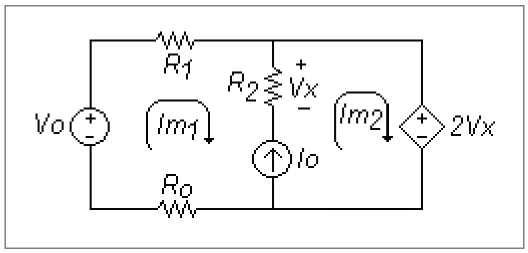



**Figura 3-15**

En este circuito tenemos dos mallas posibles, de manera que debemos tener un sistema de ecuaciones de 2x2.

Vamos a utilizar las dos mallas mostradas en la Figura 3-15 con sus respectivas corrientes de malla. Dado que las dos mallas tienen una fuente de corriente compartida debemos tener una restricción en esta fuente y hacer una supermalla (camino cerrado externo del circuito).

Por otra parte, dado que hay una fuente controlada se debe calcular primero la variable controladora en términos de las variables del sistema (corrientes de malla).

Restricción en la fuente compartida:

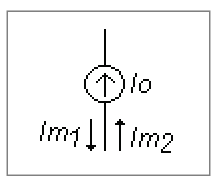



**Figura 3-16**

$$Io = I_{m2} - I_{m1}$$

Calculo de variable controladora *Vx* en $R_2$:

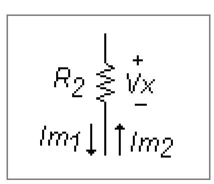



**Figura 3-17**

Teniendo en cuenta la convención pasiva de signos la ley de Ohm en $R_2$ será:

$$V_X = R_2\left[I_{m1} - I_{m2}\right] = 0$$

KVL en la Supermalla:

$$-V_0 + R_1 I_{m1} + 2V_X + R_0 I_{m1} = 0$$

$$-V_0 + R_1 I_{m1} + 2\left(R_2\left[I_{m1} - I_{m2}\right]\right) + R_0 I_{m1} = 0$$

Poniendo la restricción y la supermalla en forma matricial tenemos:

$$\begin{bmatrix} R_0 + R_1 + 2R_2 & -2R_2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ I_0 \end{bmatrix}$$

**Parte b)**

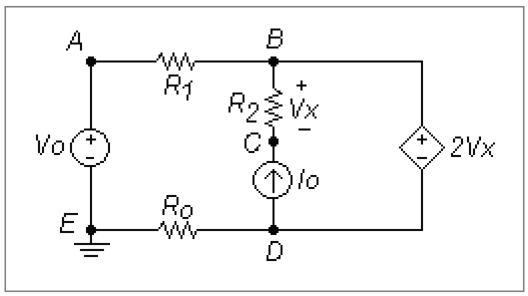



**Figura 3-18**

En este circuito tenemos cinco nodos, los cuales se muestran en la Figura 3-18. Seleccionando el nodo E como referencia ($V_E = 0$) se conoce el nodo A ya que la fuente Vo estaría a tierra: ($V_A = V_0$). De manera que de los cinco nodos nos quedan tres por calcular (sistema de 3x3).

La fuente de voltaje controlada será una fuente flotante y se calcula con KVL en un supernodo y genera una restricción.

Nuevamente se debe calcular la variable controladora *Vx* pero esta vez en función de los voltajes de nodos que la definen en $R_2$.

Calculo de variable controladora *Vx* en $R_2$:

$$V_X = V_B - V_C$$

Restricción en la fuente flotante:

$$V_B - V_D = 2V_X$$

$$V_B - V_D = 2\left(V_B - V_C\right)$$

$$-V_B + 2V_C - V_D = 0$$

KVL en nodo C:

$$\frac{V_B - V_C}{R_2} + I_0 = 0$$

$$V_B - V_C + I_0 R_2 = 0$$

$$V_B - V_C = -I_0 R_2$$

Supernodo:

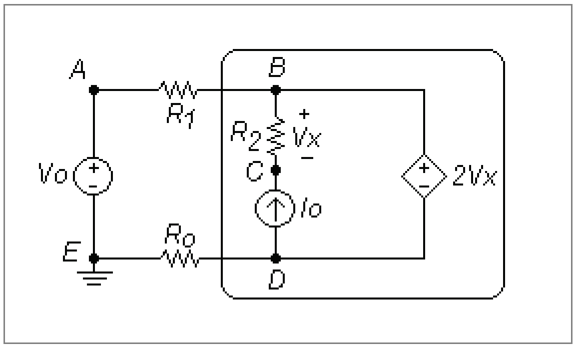



**Figura 3-19**

$$\frac{V_0 - V_B}{R_1} + \frac{0 - V_D}{R_0} = 0$$

$$-\frac{V_B}{R_1} - \frac{V_D}{R_0} = -\frac{V_0}{R_1}$$

En forma matricial tenemos:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & 0 & -\frac{1}{R_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_B \\ V_C \\ V_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -I_0 R_2 \\ -\frac{V_0}{R_1} \end{bmatrix}$$

## Ejemplo 3-12. Análisis por Nodos y Mallas.

Plantear las ecuaciones de nodos y mallas para el circuito de la Figura 3-20 por los siguientes métodos:

a. Análisis de nodos.
b. Análisis de mallas.

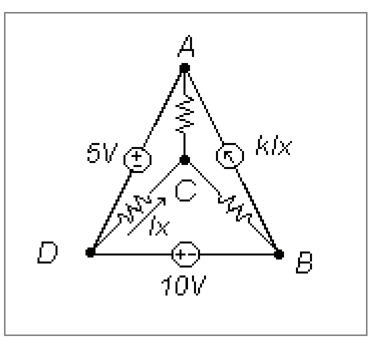



**Figura 3-20**

## Solución

Definimos los nodos y mallas que vamos a utilizar en la Figura 3-21:

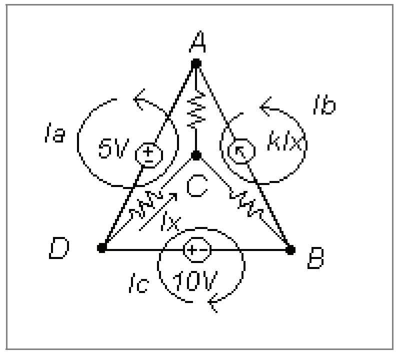



**Figura 3-21**

## Parte a)

| | |
|---|---|
| Nodo D: | $\text{Tierra: } V_d = 0$ |
| Nodo A: | $V_a = 5\text{V}$ |
| Nodo B: | $V_b = -10\text{V}$ |
| Nodo C: | KLC: $\frac{V_a - V_c}{R} + \frac{V_d - V_c}{R} + \frac{V_b - V_c}{R} = 0$ <br> $\frac{5 - V_c}{R} + \frac{0 - V_c}{R} + \frac{-10 - V_c}{R} = 0$ <br> $V_c = -\frac{5}{3}$ |

## Parte b)

| | |
|---|---|
| Malla a: | $R(I_a + I_c) + R(I_a - I_b) + 5 = 0$ <br> $2RI_a - RI_b + RI_c = -5$ |

| | |
|---|---|
| Malla b: | $I_b = kI_x$<br>$I_x = I_a + I_c$<br>$I_b = kI_a + kI_c$<br>$kI_a - I_b + kI_c = 0$ |
| Malla c: | $RI_x + R(I_c + I_b) - 10 = 0$<br>$R(I_a + I_c) + R(I_c + I_b) = 10$<br>$RI_a + RI_b + 2RI_c = 10$ |

A partir de las ecuaciones de mallas se obtiene la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 2R & -R & R \\ k & -1 & k \\ R & R & 2R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

## Ejemplo 3-13. Análisis por Nodos y Mallas.

Para el circuito de la Figura 3-22:

a. Seleccionar un nodo de referencia y plantear los valores o ecuaciones para los demás nodos para poder describir completamente el sistema. Resolver las ecuaciones resultantes.

b. Plantear un sistema de ecuaciones de malla que permita describir el sistema. Resolver las ecuaciones.

c. Plantear un sistema de ecuaciones de corrientes de lazo de manera que pase una sola corriente de lazo por la fuente de corriente.

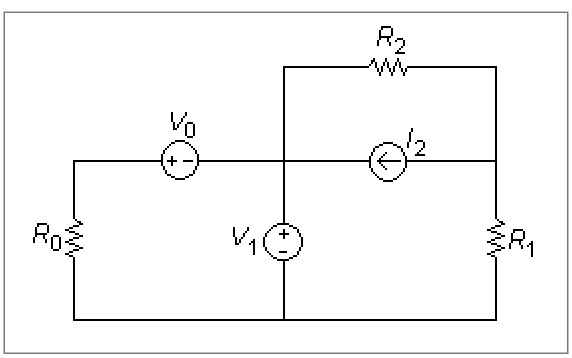



**Figura 3-22**

## Solución

### Parte a)

En la Figura 3-23 se muestran los nodos empleados, se elige como nodo de referencia el nodo B.

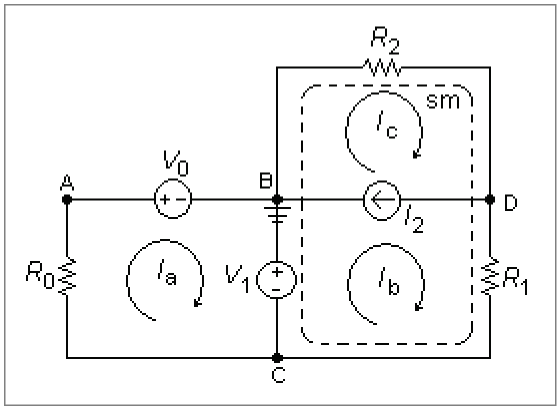



**Figura 3-23**

Ecuaciones de nodos:

| | |
|---|---|
| Nodo B: | Tierra: $V_b = 0$ |
| Nodo A: | $V_a = V_0$ |
| Nodo C: | $V_c = -V_1$ |
| Nodo D: | KLC: $$I_2 + \frac{V_d - V_b}{R_2} + \frac{V_d - V_c}{R_1} = 0$$ $$I_2 + V_d\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right) - \frac{V_c}{R_1} = 0$$ $$V_d\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right) = -I_2 + \frac{V_c}{R_1}$$ $$V_d\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right) = -\frac{R_1 I_2 + V_1}{R_1}$$ $$V_d = -\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)\left(\frac{R_1 I_2 + V_1}{R_1}\right)$$ $$V_d = -\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)(R_1 I_2 + V_1)$$ |

### Parte b)

En la Figura 3-23 se muestran las mallas a utilizar para resolver el sistema.

Ecuaciones de mallas:

| | |
|---|---|
| Malla a: | $R_0 I_a + V_0 + V_1 = 0$ <br> $I_a = -\frac{V_0 + V_1}{R_0}$ |
| Restricción: | $I_c - I_b = I_2$ |
| Supermalla: | $-V_1 + R_2 I_c + R_1 I_b = 0$ <br> $R_2 I_c + R_1 I_b = V_1$ |

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & R_1 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{V_0 + V_1}{R_0} \\ I_2 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

### Parte c)

En la siguiente figura se muestran las mallas a utilizar para resolver el sistema. Aquí *Ic* es la única corriente de lazo que pasa por la fuente de corriente.

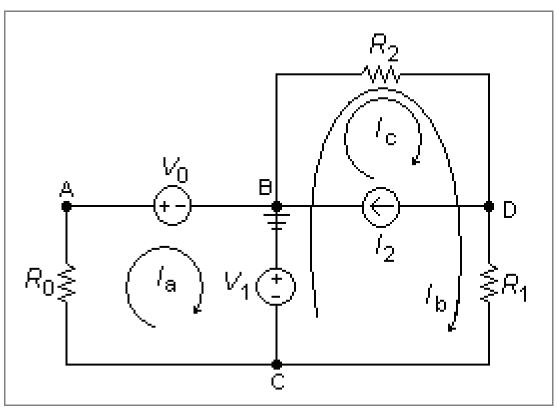



**Figura 3-24**

Ecuaciones de mallas:

| | |
|---|---|
| Malla a: | $R_0 I_a + V_0 + V_1 = 0$ <br> $I_a = -\frac{V_0 + V_1}{R_0}$ |

| | |
|---|---|
| Malla c: | $I_c = I_2$ |
| Malla b: | $-V_1 + R_2(I_b + I_c) + R_1 I_b = 0$<br>$-V_1 + R_2(I_b + I_2) + R_1 I_b = 0$<br>$-V_1 + I_b(R_1 + R_2) + R_2 I_2 = 0$<br>$I_b(R_1 + R_2) = V_1 - R_2 I_2$<br>$I_b = \dfrac{V_1 - R_2 I_2}{R_1 + R_2}$ |

## Ejemplo 3-14. Análisis por Mallas.

Para el circuito de la Figura 3-25 encontrar un sistema matricial de mallas de la forma:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

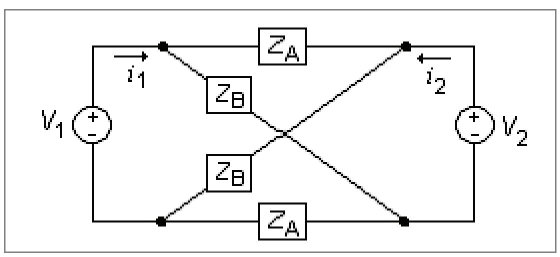



**Figura 3-25**

### Solución

Las corrientes empleadas para plantear las ecuaciones de mallas se presentan en la Figura 3-26

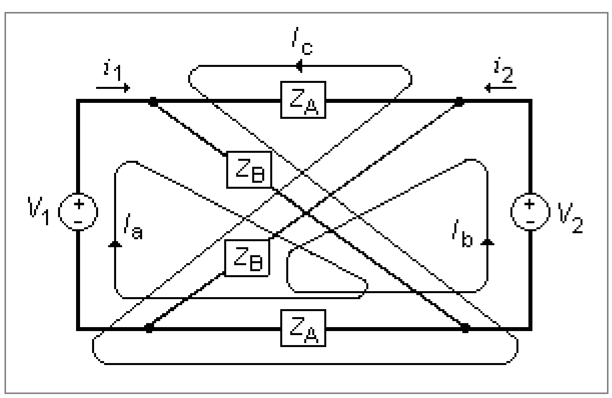



**Figura 3-26**

Ecuaciones de mallas:

$$I_a = I_1$$
$$I_b = I_2$$

| | |
|---|---|
| Malla a: | $-V_1 + Z_B(I_a + I_c) + Z_A(I_a - I_b + I_c) = 0$<br>$I_a(Z_A + Z_B) + I_b(-Z_A) + I_c(Z_A + Z_B) = V_1 \quad (1)$ |
| Malla b: | $-V_2 + Z_B(I_b - I_c) + Z_A(I_b - I_a - I_c) = 0$<br>$I_a(-Z_A) + I_b(Z_A + Z_B) + I_c(-Z_A - Z_B) = V_2 \quad (2)$ |
| Malla c: | $Z_A I_c + Z_B(I_c + I_a) + Z_A(I_c + I_a - I_b) + Z_B(I_c - I_b) = 0$<br>$I_a(Z_A + Z_B) + I_b(-Z_A - Z_B) + I_c(Z_A + Z_B + Z_A + Z_B) = 0$<br>$I_a(Z_A + Z_B) - I_b(Z_A + Z_B) + 2I_c(Z_A + Z_B) = 0$<br>$I_a - I_b + 2I_c = 0$<br>$I_c = \frac{I_b - I_a}{2} \quad (3)$ |

Reemplazando (3) en (1)

$$I_a(Z_A + Z_B) + I_b(-Z_A) + \frac{I_b - I_a}{2}(Z_A + Z_B) = V_1$$
$$I_a\left(Z_A + Z_B - \frac{Z_A}{2} - \frac{Z_B}{2}\right) + I_b\left(-Z_A + \frac{Z_A}{2} + \frac{Z_B}{2}\right) = V_1$$
$$I_a\left(\frac{Z_A + Z_B}{2}\right) + I_b\left(\frac{Z_B - Z_A}{2}\right) = V_1 \quad (4)$$

Reemplazando (3) en (2)

$$I_a(-Z_A) + I_b(Z_A + Z_B) + \frac{I_b - I_a}{2}(-Z_A - Z_B) = V_2$$
$$I_a\left(-Z_A + \frac{Z_A}{2} + \frac{Z_B}{2}\right) + I_b\left(Z_A + Z_B - \frac{Z_A}{2} - \frac{Z_B}{2}\right) = V_2$$
$$I_a\left(\frac{Z_B - Z_A}{2}\right) + I_b\left(\frac{Z_A + Z_B}{2}\right) = V_2 \quad (5)$$

Con las ecuaciones (4) y (5) se obtiene el siguiente sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(Z_A + Z_B) & \frac{1}{2}(Z_B - Z_A) \\ \frac{1}{2}(Z_B - Z_A) & \frac{1}{2}(Z_A + Z_B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

# 3.4. SIMULACIONES

## 3.4.1. ANÁLISIS POR NODOS

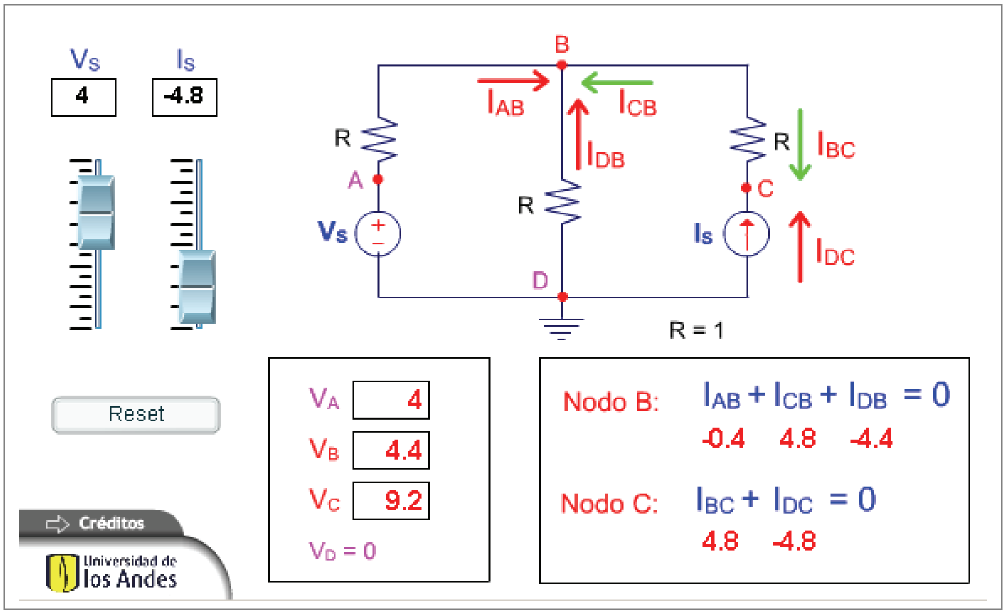



**Figura 3-27**

**Descripción**

Esta simulación ilustra el método de análisis de circuitos por el método de nodos, basado en la aplicación de la Ley de Corrientes de Kirchhoff, para llegar a encontrar los voltajes de nodo. El estudiante podrá ver como cambia la dirección de la corriente real y como las corrientes toman valores positivos a negativos con respecto a la dirección definida inicialmente como positiva y como la suma de tales corrientes siempre es cero. Podrá comprobar también que las corrientes en las resistencias se pueden calcular a partir de los voltajes de los nodos.

**Uso educativo**

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos de nodo, voltaje, corriente y leyes de Kirchhoff, interactúan con el recurso estableciendo los valores de los voltajes y corrientes de las fuentes, para luego visualizar las direcciones reales del flujo de corriente en el circuito y el voltaje que adquiere cada nodo analizado. Se pueden plantear ejercicios en los que el estudiante deba comparar la simulación ante diferentes valores de voltajes, con el fin de comprobar lo enunciado en la Ley de Corrientes de Kirchhoff.

### 3.4.2. ANÁLISIS POR MALLAS

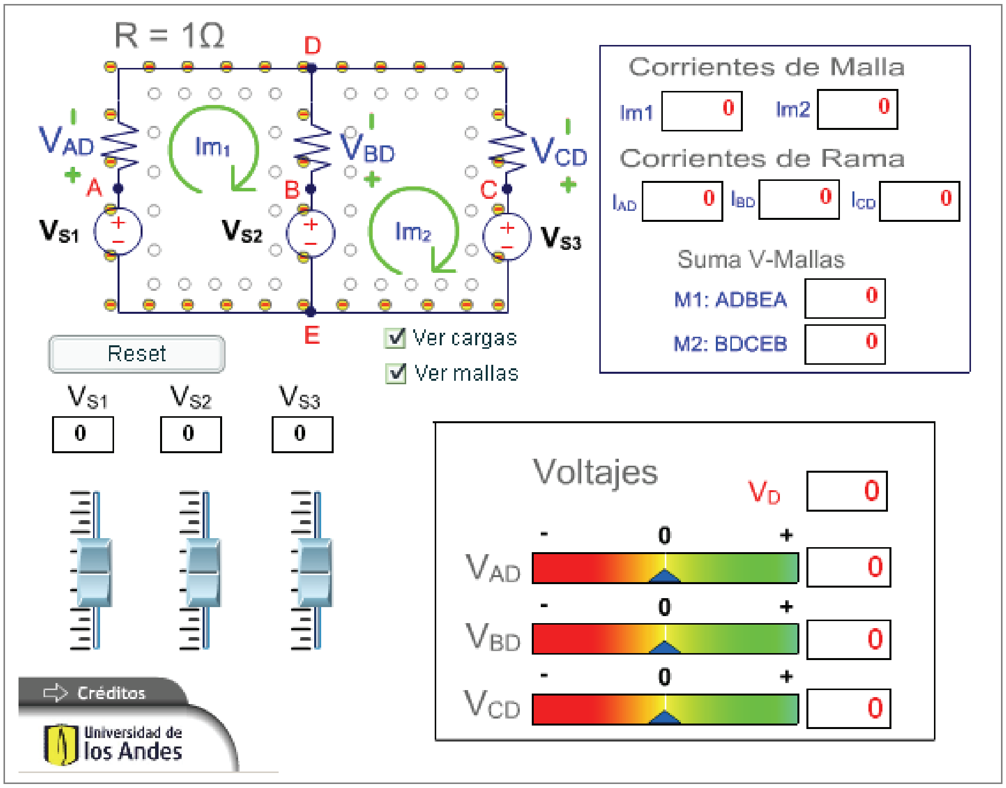



**Figura 3-28**

**Descripción**

Esta simulación pretende mostrar la relación entre corriente de rama y corrientes de malla. A partir de la observación de las corrientes de malla podrá deducir las corrientes de rama y ver cuándo toman estas corrientes valores positivos o negativos. Adicionalmente puede observar como para una malla la suma de caídas de voltaje siempre vale cero. Un análisis de KVL para las dos mallas permite explicar el método de análisis por mallas.

**Uso educativo**

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos de malla, voltaje, corriente de rama y corriente de malla y KVL, interactúan con el recurso estableciendo los valores de los voltajes en un circuito para luego visualizar el valor de las corrientes en las mallas y ramas. Finalmente, como aplicación de la Ley de Voltajes de Kirchhoff, el estudiante puede ver el valor total de las corrientes en las mallas que componen el circuito. Como un ejercicio que acompaña la simulación, se puede proponer al estudiante realizar manualmente el ejercicio resolviendo las ecuaciones de las mallas y la ecuación matricial resultante, para finalmente comparar su resultado con la simulación.