3. Kinematika satu dimensi

Gerak benda sepanjang garis lurus disebut gerak satu dimensi. Kinematika satu dimensi memiliki asumsi benda dipandang sebagai partikel atau benda titik artinya bentuk dan ukuran benda diabaikan dibandingkan panjang lintasan tempuh, massa benda dikosentrasikan pada satu titik dan benda tidak berotasi. Jadi, gerak partikel sebagai titik dalam ruang. Kita akan mengaikan gaya sebagai penyebab gerak pada bab kinematika ini. Kinematika menjelaskan hubungan antara besaran posisi, kecepatan, percepatan dan waktu.

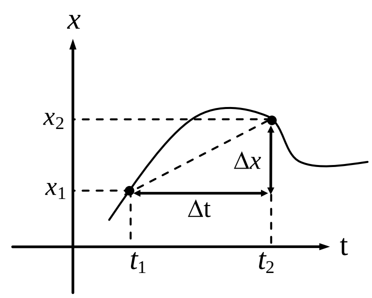
3.1 Besaran kinematika

3.1.1 Posisi, perpindahan dan jarak

Kedudukan benda relatif terhadap suatu titik acuan disebut *posisi*. Posisi benda biasanya dinyatakan dalam sistem koordinat kartesian. Posisi benda bergerak sepanjang sumbu *x* sebagai fungsi waktu dituliskan x(t). Posisi x=0 disebut titik pusat koordinat atau titik asal koordinat. Posisi adalah besaran vektor. *Perpindahan* adalah besaran vektor, yang menunjukkan panjang dan arah garis lurus yang menghubungkan posisi awal dan akhir benda. Perpindahan menunjukkan perubahan posisi benda. Perpindahan tidak bergantung pada bentuk lintasan, tetapi bergantung posisi awal dan akhir benda. Perpindahan benda dari posisi awal x_1 ke posisi akhir x_2 ditunjukkan oleh:

$$\Delta x(t) = x_2(t) - x_1(t) \tag{3.1}$$

Simbol Yunani Δ dibaca delta. Tanda positif dan negatif dari Δx menunjukkan arah perpindahan benda ke kanan atau ke kiri. Jika sumbu x positif ke kanan, maka $\Delta x > 0$ menunjukkan benda berpindah searah sumbu x positif. Sebalinya, $\Delta x < 0$ menunjukkan benda berpindah searah sumbu x negatif. *Jarak* adalah panjang lintasan total yang ditempuh oleh benda, artinya jarak bergantung pada bentuk lintasan yang dilalui oleh benda. Jarak biasanya disimbolkan oleh *s*. Jarak adalah besaran skalar dan selalu bernilai positif.



Gambar 3.1 : Kurva posisi terhadap waktu

4.2 Kecepatan dan kelajuan

Kecepatan rata-rata adalah perbandingan perpindahan terhadap selang waktu benda telah bergerak.

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \tag{3.2}$$

dimana $\bar{v}$ adalah simbol kecepatan rata-rata. Kecepatan rata-rata sama dengan gradien garis yang menghubungkan titik (x_1,t_1) dan (x_2,t_2). ***Kelajuan rata-rata*** adalah perbandingan jarak tempuh terhadap selang waktu benda bergerak.

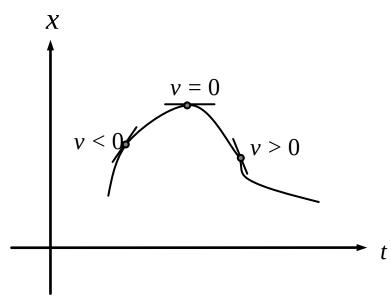
$$\bar{v}_{\text{laju}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \qquad (3.3)$$

Satuan kecepatan adalah *m/s* . Kecepatan adalah besaran vektor, sedangkan kelajuan adalah besaran skalar. Benda dikatakan diam terhadap titik acuan ketika kecepatan benda itu sama dengan nol terhadap titik acuan tersebut.

Kecepatan sesaat adalah kecepatan rata-rata benda ketika Δt mendekati nol.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad (3.4)$$

Simbol kecepatan sesaat adalah v. Besar kecepatan disebut kelajuan. Kecepatan adalah turunan pertama posisi terhadap waktu. Arah kecepatan benda menunjukkan arah gerak benda. Misalkan sumbu x positif ke kanan, $v > 0$ menunjukkan benda bergerak ke kanan, $v < 0$ menunjukkan benda bergerak ke kiri. Kecepatan sesaat sama dengan gradien kurva posisi pada satu titik.



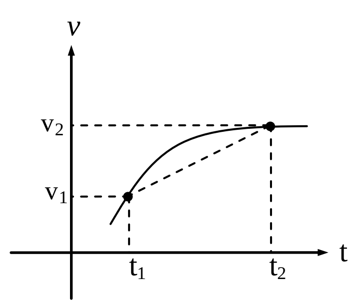
Gambar 3.2 : Gradien kurva posisi terhadap waktu menunjukkan kecepatan sesaat

3.3 Percepatan dan perlajuan

Partikel dikatakan mengalami percepatan ketika kecepatannya berubah. Percepatan adalah besaran vektor. ***Percepatan rata-rata*** adalah perubahan kecepatan benda dalam selang waktu benda bergerak.

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (3.5)$$

Percepatan rata-rata sama dengan gradien garis penghubung titik (v_1,t_1) dan titik (v_2,t_2).



Gambar 3.3 : Kurva kecepatan terhadap

Jika kelajuan benda bertambah, maka benda dikatakan mengalami perlajuan. Ketika kelajuan benda berkurang, maka benda dikatakan mengalami perlambatan. ***Perlajuan rata-rata*** adalah perubahan kelajuan benda dalam selang waktu tertentu. Pecepatan sesaat adalah percepatan rata-rata benda ketika Δt mendekati nol.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \tag{3.6}$$

Percepatan sesaat sama dengan turunan pertama kecepatan terhadap waktu. Percepatan dapat dituliskan dalam bentuk:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = v\frac{dv}{dx} \tag{3.7 }$$

Dalam kurva kecepatan sebagai fungsi waktu, *v(t)*, percepatan benda pada setiap titik sama dengan kemiringan kurva *v(t)* pada titik itu. Satuan dari percepatan adalah m/s^2. Percepatan adalah besaran vektor, sedangkan perlajuan adalah besaran skalar. Percepatan gravitasi di dekat permukaann bumi sekitar g = 9,8 m/s^2. Jika arah vektor kecepatan dan percepatan partikel sama, maka kecepatan partikel bertambah atau partikel dipercepat. Syarat benda dipercepat adalah $a > 0$ dan $v > 0$, atau $a < 0$ dan $v < 0$. Jika arah vektor percepatan berlawanan dengan kecepatan, maka kecepatan partikel akan berkurang atau partikel diperlambat. Syarat benda diperlambat adalah $a < 0$ dan $v > 0$, atau $a > 0$ dan $v < 0$.

Contoh 3.1 : Gerak maju-mundur

Posisi dari sebuah partikel begerak lurus sepanjang sumbu x diberikan oleh: $x(t) = t^2 - 8t + 12$, di mana x dalam meter dan t dalam sekon. Partikel bergerak maju-mundur sepanjang sumbu-x. Partikel dikatakan bergerak maju ketika partikel bergerak ke arah sumbu x positif.

a. Tentukan posisi mula-mula partikel!
b. Tentukan perpindahan partikel dari t=0 sampai t=5 sekon!
c. Berapa kali partikel melewati titik asal?
d. Gambarkan kurva posisi partikel sebagai fungsi waktu!
e. Kapan partikel bergerak maju, diam sesaat, dan mundur!

Pembahasan:

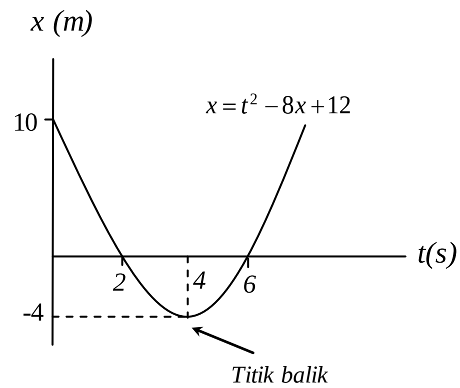
a. Posisi mula-mula partikel adalah $x(0) = 0^2 - 8\cdot 0 + 12 = 12\,\text{m}$. Partikel berada 12 m di kanan titik asal.
b. Posisi partikel untuk t = 0 dan t=5sekon berturut-turut adalah $x(0) = 5^2 - 8\cdot 5 + 12 = 12\text{m}$ dan $x(5) = 5^2 - 8\cdot 5 + 12 = -3\,\text{m}$ Perpindahan partikel dari t=0 sampai t=5 sekon :

   $\Delta x = x(5) - x(0) = -3\text{m} - 12\,\text{m}$= -15 m

   Partikel berpindah sejauh 15 m searah sumbu x negatif.
c. Partikel melewati titik asal ketika x(t)=0.

   $x(t) = t^2 - 8t + 12 = (t-2)(t-6) = 0$

   Partikel melewati titik asal sebanyak dua kali, yaitu pada t = 2 sekon dan t = 6 sekon.
d. Bentuk persamaan posisi partikel adalah parabola. Kurva posisi partikel:



e. Partikel bergerak mundur dalam rentang waktu $0 < t < 4\text{s}$, diam sesaat ketika t = 4, dan bergerak maju dalam rentang waktu t > 4s.

Contoh 3.2 :

Sebuah partikel begerak lurus dengan persamaan posisi : $x(t) = t^3 - 2t^2 + t$, dimana x dalam meter dan t dalam sekon.Gunakan sumbu x positif di kanan titik asal.

a. Tentukan kecepatan rata-rata partikel setelah bergerak dari t = 0 sampai t= 2 detik !
b. Tentukan kecepatan partikel saat t = 2 sekon!
c. Kapan partikel berhenti sesaat atau berbalik arah?
d. Kapan partikel bergerak ke kanan, dan ke kiri?
e. Gambarkan lintasan yang dilalui oleh partikel!

Pembahasan:

a. Perpindahan partikel setelah bergerak 2 sekon adalah

$\Delta x = x(2) - x(0) = 2\,\text{m}$, arah perpindahan ke kanan.

Kecepatan rata-rata partikel setelah bergerak 2 sekon adalah

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(2) - x(0)}{t_2 - t_1} = \frac{2}{2}\,\text{m/s} = 1\ \text{m/s}$$

b. Kecepatan sesaat partikel :

$$v = \frac{dx(t)}{dt} = 3t^2 - 4t + 1$$

Kecepatan partikel saat t = 2 sekon:

$$v(2) == 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 5\,\text{m/s}$$

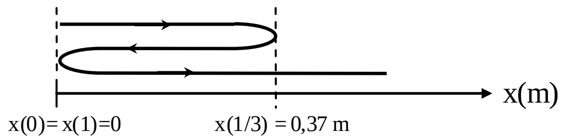
c. Partikel berbalik arah ketika kecepatan sesaatnya sama dengan nol.

$$v = \frac{dx(t)}{dt} = 3t^2 - 4t + 1 = (3t - 1)(t - 1) = 0$$

Partikel berbalik arah saat t = 1/3 sekon dan t =1 sekon.

d. Partikel bergerak ke kanan ketika v > 0, yaitu dalam rentang waktu $0 < t < \frac{1}{3}\text{s}$ dan $t > 1\text{s}$. Partikel bergerak ke kiri ketika $v < 0$, yaitu dalam rentang waktu $\frac{1}{3}\text{s} < t < 1\text{s}$.

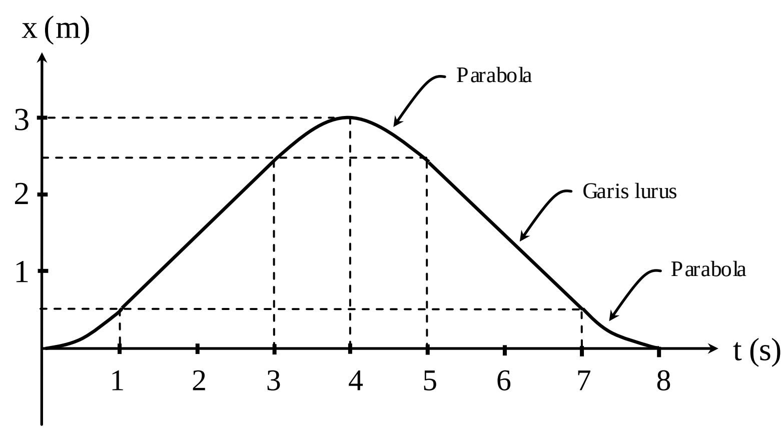
e. Pertama, mari kita temukan posisi benda saat t = 0 sekon, t = 1/3 sekon, dan t = 1 sekon berturut-turut adalah $x(0) = 0$, $x(\frac{1}{3}) = 0{,}37\,\text{m}$, dan $x(1) = 0$. Lintasan gerak maju-mundur partikel :



Contoh 3.3 :
Posisi sebuah partikel mengikuti persamaan $x = 8t\text{-}3t^2$, dimana x dalam meter dan t dalam sekon.
a. Tentukanlah percepatan partikel setiap waktu!
b. Kapam partikel bergerak searah sumbu x positif , dan searah sumbu x negatif!
c. Kapan partikel dipercepat searah sumbu x positif?
d. Kapan kecepatan partikel berkurang?

Pembahasan:
a. Percepatan partikel adalah $a = d^2x/dt^2 = -3\ \mathrm{m/s^2}$. Partikel mengalami percepatan konstan 3 m/s^2 dalam arah sumbu x negatif.
b. Pertikel bergerak searah sumbu x positif ketika kecepatan bernilai positif,
$v = \dfrac{dx}{dt} = 8 - 6t > 0$ atau $0 < t < \frac{4}{3}s$.
Pertikel bergerak searah sumbu x negatif ketika kecepatan bernilai negatif,
$v = \dfrac{dx}{dt} = 8 - 6t < 0$ atau $t > \frac{4}{3}s$.
c. Partikel dipercepat searah sumbu x positif : $v > 0$ dan $a > 0$. Karena a selalu searah sumbu x negatif , maka partikel tidak pernah dipercepat searah sumbu x positif.
d. Kecepatan benda berkurang ketika $a < 0$ dan $v > 0$, atau $a > 0$ dan $v < 0$, yaitu dalam rentang waktu $0 < t < \frac{4}{3}s$.

Contoh 3.3 : Analisis kurva posisi terhadap waktu
Sebuah benda mulai bergerak dari keadaan diam. Kurva posisi benda terhadap waktu ditunjukkan oleh gambar bawah ini.

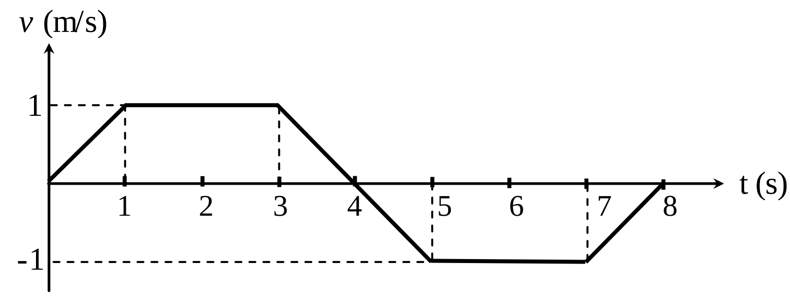


a. Gambarkan kurva kecepatan dan percepatan benda sebagai fungsi waktu!

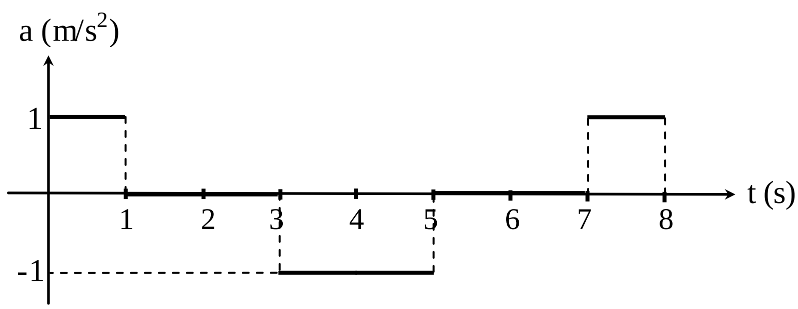
b. Hitung besar kecepatan maksimum benda!
c. Hitung kecepatan sesaat benda ketika t=4 s!
d. Hitung perpindahan benda pada t = 1 sekon dan t = 4 sekon!

Pembahasan :

a. Kurva kecepatan sebagai fungsi waktu:



Grafik percepatan sebagai fungsi waktu :



b. Besar kecepatan maksimum benda adalah 1 m/s.
c. Kecepatan sesaat benda ketika perpindahannya maksimum (t=4s) adalah nol.

$$v = \frac{dx}{dt} = 0$$

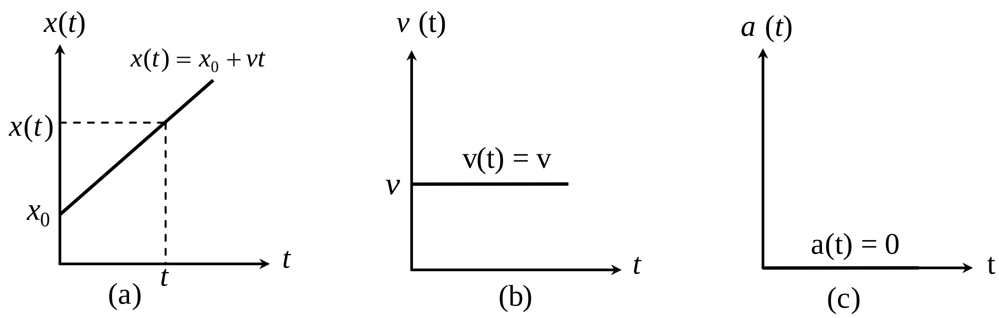
d. Perpindahan benda sama dengan luas dibawah grafik kecepatan terhadap waktu.
Perpindahan benda pada t=1 sekon : x(1) = ½ m.
Perpindahan benda pada t=4 sekon : x(4) = 2,5 m.

3.2 Gerak lurus beraturan (GLB)

Gerak lurus beraturan adalah gerak benda dengan kecepatan konstan, artinya jarak yang ditempuh benda sama untuk tiap rentang waktu yang sama. Jika benda bergerak lurus beraturan, maka percepatan benda nol dan kecepatan rata-rata benda selalu sama dengan kecepatan sesaatnya. Seandainya pada waktu t=0 posisi benda adalah $x = x_0$. Posisi benda setiap waktu t adalah x(t). Kecepatan rata-rata benda :

$$\bar{v} = v = \frac{x(t) - x_0}{t - 0}$$

$$x(t) = x_0 + vt \qquad (3.8)$$



Gambar 3.4 : Kurva x(t),v(t) dan a(t) dalam GLB

Contoh 3.4 :

Seorang pelari berlari dengan kelajuan konstan v_p = 10 km/jam ke kanan. Seorang pejalan berjalan dengan kelajuan konstan v_k = 5 km/jam ke kiri, menuju pelari. Ketika pelari dan pejalan berjarak d = 3 km satu sama lain, seekor burung terbang dengan kelajuan konstan v_b = 30 km/jam ke kanan melewati pelari. Ketika burung mencapai pejalan, burung berbalik arah dan terbang kembali menuju pelari dengan kelajuan yang sama. Ketika burung mencapai pelari, burung berbalik arah lagi dan terbang kembali menuju pelari. Burung terus terbang ke kanan dan ke kiri antara pelari dan pejalan. Ketika pelari dan pejalan bertemu, berapa jarak total yang ditempuh oleh burung?

Pembahasan :

Pelari mula-mula berada di titik asal, $x_{0,p} = 0$, maka pejalan mula-mula berada di titik $x_{0,k}$ = 30 km. Ambil arah ke kanan sebagai sumbu x positif. Kecepatan pelari dan pejalan berturut-turut adalah v_p = 10 km/jam dan v_k = - 5 km/jam. Kecepatan pejalan bernilai negatif karena arahnya ke kiri. Persamaan posisi gerak pejalan dan pelari:

$$x_p = x_{0,p} + v_p t = 15t$$

$$x_k = x_{0,k} + v_k t = 30 - 5t$$

Pelari dan pejalan bertemu ketika posisi mereka sama.

$$x_p = x_k$$

$$10t_b = 30 - 5t_b$$

$$t_b = 2 \text{ jam}$$

Mereka bertemu saat t = 2 jam. Kecepatan burung adalah v_b = 10 km/jam. Jarak total yang ditempuh oleh burung adalah

$$s = v_b t_b = 30 \text{ km/ jam} \cdot 2 \text{ jam} = 60 \text{ km}$$

3.3 Gerak lurus berubah beraturan (GLBB)

Gerak lurus berubah beraturan adalah gerak benda dengan percepatan konstan atau perubahan kecepatan benda setiap selang waktu yang sama selalu sama. Perhatikan sebuah benda bergerak sepanjang sumbu x dengan percepatan konstan a. Benda memiliki kecepatan v = v_0 pada t=0. Setelah benda bergerak selama waktu t kecepatan benda v. Percepatan rata-rata benda sama dengan percepatan sesaatnya.

$$\bar{a} = a = \frac{v - v_0}{t - 0} \tag{3.9}$$

Dari pers.(3.9), kita peroleh kecepatan benda :

$$v = v_0 + at \tag{3.10}$$

Jika posisi benda x_0 pada waktu t=0. Posisi benda setelah bergerak dalam waktu t :

$$x = x_0 + \bar{v}\,t \tag{3.11}$$

Kecepatan benda linear terhadap waktu. Kecepatan rata-rata benda:

$$\bar{v} = \tfrac{1}{2}(v_0 + v) = \tfrac{1}{2}(v_0 + v_0 + at) = v_0 + \tfrac{1}{2}at \tag{3.12}$$

Substitusikan pers.(3.12) ke pers. (3.11), kita peroleh

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \tag{3.13}$$

Pers.(3.10) dan per.(3.14) memberikan v(t) dan x(t). Dari pers. (3.10), kita peroleh

$$t = \frac{v - v_0}{a} \tag{3.14}$$

Substitusi pers.(3.14) ke pers.(3.13) :

$$x = x_0 + v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \tfrac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \tag{3.15}$$

Empat persamaan penting gerak lurus berubah beraturan :

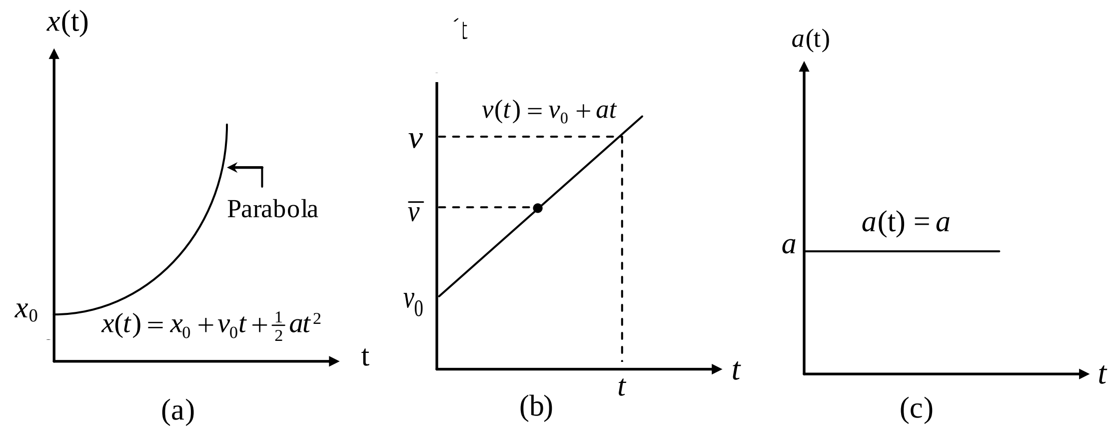
$$v = v_0 + at$$

$$\bar{v} = \tfrac{1}{2}(v_0 + v)$$

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Pers.(3.10) menunjukkan bahwa luas kurva percepatan terhadap waktu sama dengan perubahan kecepatan benda. Selanjutnya, pers.(3.12) menunjukkan bahwa luas kurva percepatan terhadap sama dengan perubahan kecepatan benda



Gambar 3.5: Kurva x(t),v(t) dan a(t) dalam GLBB

Contoh 3.5 :
Seekor burung terbang sepajang lintasan garis lurus, mula-mula kecepatannya 36 km/jam, kemudian kecepatan burung bertambah menjadi 54 km/jam dalam waktu 5 detik. Hitunglah percepatan dan jarak yang ditempuh burung selama 5 detik sejak mulai bergerak !

Pembahasan :
Kecepatan awal burung adalah v_0 = 10 m/s, kecepatan akhir burung adalah v_t =15 m/s, waktu tempuh t= 5 sekon. Percepatan burung:

$$a = \frac{v_t - v_0}{t} = \frac{20-10}{5} = 2\,\mathrm{m/s^2}$$

Jarak yang ditempuh oleh burung:

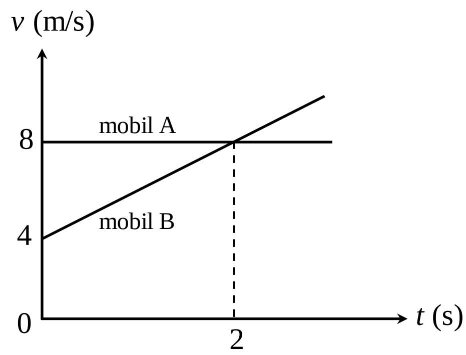
$$s = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 = 10\cdot 5 + \tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 5^2 = 75\mathrm{m}$$

Contoh 3.6 :
Sebuah mobil mula-mula bergerak dengan kecepatan 15 m/s sepanjang lintasan lurus. Sopir kemudian mengurangi kecepatan mobil dengan perlambatan konstan 2,5 m/s^2. Hitung jarak yang ditempuh oleh mobil selama mengalami perlambatan hingga akhirnya berhenti!

Pembahasan :
Kecepatan awal mobil adalah v_0 = 15 m/s dan kecepatan akhir mobil adalah v_t =0 m/s. Perlambatan mobil adalah a = -2,5 m/s^2. Kita gunakan rumus $v^2 = v_0^2 + 2as$, jarak yang ditempuh oleh mobil adalah

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0^2 - 15^2}{2(-2,5)} = 45\mathrm{m}$$

Contoh 3.7 :
Mobil A dan mobil B bergerak dengan kelajuan seperti ditunjukkan pada grafik ini. Pada $t = 0$, mobil A dan mobil B mula-mula pada posisi sama. Hitung jarak yang ditempuh mobil B sesaat berhasil menyusul mobil A!



Pembahasan :

Mobil A bergerak dengan kecepatan konstan $v_A = 8\,\text{m/s}$, sedangkan mobil B bergerak dengan percepatan konstan a_B . Percepatan mobil B:

$$a_B = \frac{v_{t,B} - v_{0,B}}{t} = \frac{8-4}{2} = 2\,\text{m/s}^2$$

Anggap kedua mobil mulai bergerak dari titik asal x = 0.

Jarak tempuh mobil A :

$$x_A = v_A t = 4t$$

Jarak tempuh mobil B:

$$x_B = v_{0,B} t + \tfrac{1}{2} a_B t^2 = 4t + t^2$$

Mobil B berhasil menyusul mobil A saat jarak tempuh kedua mobil sama.

$$x_A = x_B$$

$$8t = 4t + t^2$$

Mobil A berhasil menyusul mobil B dalam waktu t=4 sekon dan jarak tempuh mobil adalah B

$$x_B = 32\,\text{m}$$

Metode integral menurunkan persamaan GLBB :

Percepatan benda :

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = a \int_0^t dt$$

$$v - v_0 = at$$

Kecepatan benda setiap waktu :

$$v = v_0 + at$$

Kecepatan partikel :

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v dt$$

$$x - x_0 = \int_0^t (v_0 + at) dt$$

Posisi partikel setiap waktu :

$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

Percepatan benda sebagai fungsi posisi :

$a = v \frac{dv}{dx}$

$\int_{v_0}^{v} v dv = a \int_{x_0}^{x} dx$

$\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 = a(x - x_0)$

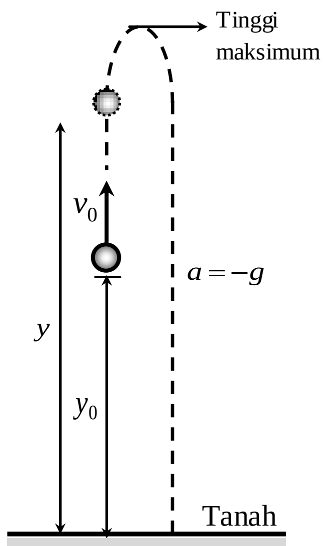
Kecepatan partikel sebagai fungsi posisi:

$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$

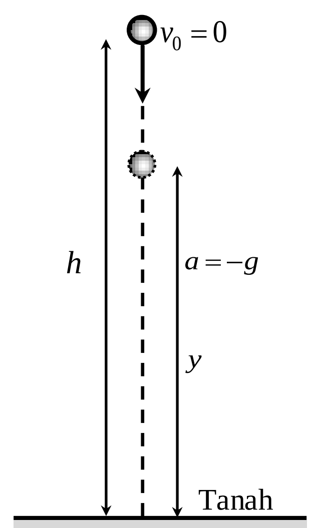
3.4 Gerak jatuh bebas

Setiap benda jatuh di dekat permukaan bumi dipercepat ke bawah karena pengaruh gravitasi bumi. Aristoteles (384-322 BC) menyatakan bahwa benda yang lebih berat jatuh lebih cepat. Pernyataan Aristoteles berdasarkan kesimpulan logika. Galileo Galilei (1642-1564) pertama kali berhasil menjelaskan gerak jatuh bebas dengan melakukan melakukan eksperimen benda jatuh bebas dari menara Pisa. Dia menyatakan bahwa: (1) semua benda jatuh bebas di dekat permukaan Bumi, berat atau ringan, jatuh menempuh jarak yang sama dalam waktu yang sama, (2) jarak tempuh benda sebanding dengan kuadrat waktu. Percepatan gravitasi di dekat permukaan bumi adalah g = 9,8 m/s^2.

Perhatikan bahwa percepatan gravitasi untuk gerak jatuh bebas bernilai negatif dengan mengangap arah vertikal ke atas sebagai sumbu y positif. Percepatan benda jatuh bebas adalah a = -g. Misalkan sebuah benda dilemparkan vertikal ke atas dari posisi mula-mula y_0 dan kecepatan awal v_0 seperti pada Gambar 3.6a .



Gambar 3.6a : Gerak vertikal ke atas



Gbr.3.6b : Benda jatuh bebas

Persamaan kinematika benda dilemparkan vertikal ke atas diperoleh dari pers.(3.10), pers.(3.13) dan pers.(3.15) dengan mensubstitusikan $a=-g$, kita peroleh,

$$v=v_0-gt \tag{3.17}$$

$$y=y_0+v_0t-\tfrac{1}{2}gt^2 \tag{3.18}$$

$$v^2=v_0^2-2g\left(y-y_0\right) \tag{3.19}$$

Sekarang, kita perhatikan kasus benda dilemparkan dari permukaan bumi, $y_0 = 0$. Kecepatan benda akan berkurang 9,8 m/s setiap detik saat bergerak vertikal ke atas. Benda akan berhenti saat mecapai titik tertinggi lintasannya dan kemudian jatuh bebas. Pada titik tertinggi $v=0$ dalam waktu t_{maks}.

$$0=v_0-gt_{maks}$$

Waktu tempuh benda mencapai titik tertinggi lintasannya:

$$t_{maks}=\frac{v_0}{g} \tag{3.20}$$

Ketinggian maksimum benda dari permukaan tanah :

$$y_{maks}=v_0t_{maks}-\tfrac{1}{2}gt_{maks}^2=v_0\frac{v_0}{g}-\tfrac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2=\frac{v_0^2}{2g} \tag{3.21}$$

Benda kembali ke tanah ketika y = 0 dalam waktu t_{tot} sejak dilemparkan.

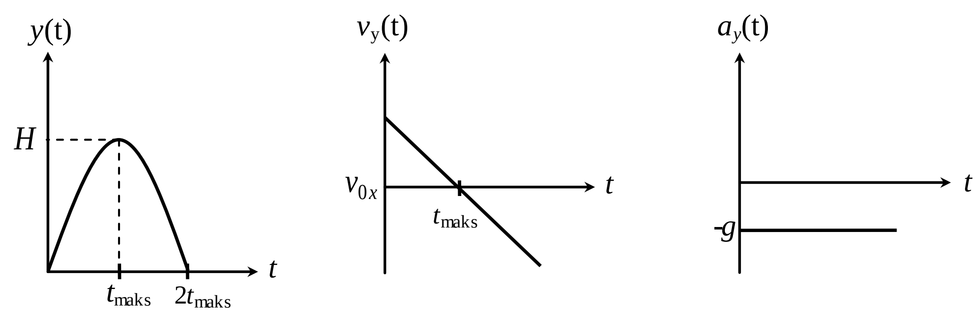
$$y=v_0t_{tot}-\tfrac{1}{2}gt_{tot}^2=0$$

$$t_{tot}=\frac{2v_0}{g}=2t_{maks} \tag{3.22}$$

Dari per.(3.22), kita dapat menyimpulkan bahwa lama benda bergerak naik sama dengan turun. Kecepatan benda saat kembali ke posisi semula:

$$v_{turun}=v_0-gt_{tot}=v_0-g\left(\frac{2v_0}{g}\right)=-v_0 \tag{3.23}$$

Tanda kecepatan negatif menunjukkan benda bergerak turun. Kelajuan awal benda sama dengan kelajuan akhir benda kembali ke titik awal pelemparan.



Gbr. 3.7 : Kurva y(t),v(t) dan a(t) untuk benda dilemparkan vertikal ke atas

Kita perhatikan kasus benda jatuh bebas dari ketinggian y_0 dari atas permukaan tanah, seperti Gbr.3.6b. Percepatan benda adalah $a=g=9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$. Benda jatuh bebas memiliki kecepatan awal sama dengan nol, $v_0 = 0$. Persamaan posisi benda jatuh bebas diperoleh dari pers.(3.10), pers.(3.13) dan pers.(3.15) dengan mensubstitusikan $y_0 = 0$, $a=g$ dan $v_0 = 0$, kita peroleh

$$v=gt \tag{3.24}$$

$$y = h - \tfrac{1}{2} g t^2 \tag{3.25}$$

$$v^2 = 2g\left(y - h\right) \tag{3.26}$$

Bola menumbuk permukaan tanah ketika y = 0. Waktu yang diperlukan bola tiba di tanah adalah :

$$0 = h - \tfrac{1}{2} g t_{turun}^2$$

$$t_{turun} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{3.27}$$

Kecepatan benda saat mecapai tanah adalah :

$$v_{turun} = g t_{turun} = \sqrt{2gh} \tag{3.28}$$

Contoh 3.8 :

Sebuah bola dilemparkan vertikal ke atas dengan kecepatan 30 m/s dari permukaan tanah. Abaikan gesekan udara dan percepatan gravitasi bumi g =10 m/s^2. Hitung :

a. lama bola bergerak naik.
b. ketinggian maksimum bola!
c. lama bola bergerak turun.
d. kecepatan bola membentur tanah.

Pembahasan :

a. Waktu yang diperlukan benda untuk bergerak naik mencapai titik tertinggi adalah

$$t_{naik} = \frac{v_0}{g} = \frac{30}{10} = 3\text{s}$$

b. Ketinggian maksimum bola adalah

$$h_{maks} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{30^2}{2 \cdot 10} = 45\,\text{m}$$

c. Waktu yang diperlukan benda untuk turun adalah

$$t_{turun} = \sqrt{\frac{2h_{maks}}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 45}{10}} = 3\text{s}$$

Kita dapat menyimpulkan bahwa jika tidak ada gesekan udara, maka lama bola bergerak naik dan turun sama.

d. Kecepatan bola saat membentur tanah adalah

$$v_t = \sqrt{2gh_{maks}} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 45} = 30\,\text{m/s}$$

Jika tidak ada gesekan udara maka kecepatan awal bola dan kecepatan akhir bola saat kembali ke titik pelemparan sama besar.

Contoh 3.9 :

Bola A jatuh bebas dari puncak sebuah gedung ketinggiannya H , bersamaan dengan bola B dilemparkan vertikal ke atas dari permukaan tanah. Ketika bola A dan bola B bertumbukan, kelajuan bola A sama dengan dua kali kelajuan bola B. Tentukan ketinggian h titik terjadinya tumbukan di atas permukaan tanah.

Pembahasan :
Mari kita ambil permukaan tanah sebagai titik asal koordinat, $y = 0$.
Posisi dan kecepatan bola A :

$$y_A = H - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$v_A = gt$$

Posisi dan kecepatan bola B:

$$y_B = v_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$v_B = v_0 - gt$$

Ketika terjadi tumbukan,

$y_A = y_B$ dan $v_A = 2v_B$

Tumbukan terjadi dalam waktu t_c. Kita peroleh hubungan :

$$H - \tfrac{1}{2}gt_c^2 = v_0 t_c - \tfrac{1}{2}gt_c^2$$

$$H = v_0 t_c$$

dan

$$gt_c = 2\left(v_0 - gt_c\right)$$

$$v_0 = \frac{3gt_c}{2}$$

Dari hubungan $H = v_0 t_c$ dan $v_0 = \dfrac{3gt_c}{2}$, kita peroleh :

$$t_c = \sqrt{\frac{2H}{3g}}$$

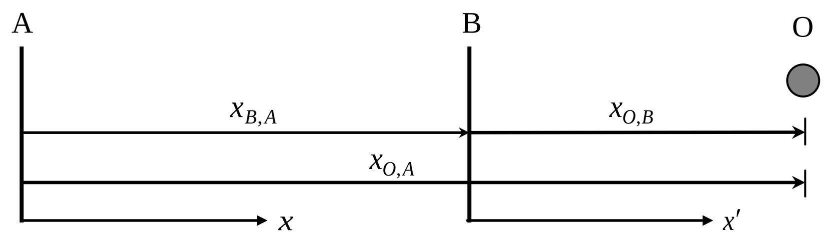
Ketinggian titik terjadinya tumbukan :

$$h = H - \tfrac{1}{2}gt_c^2 = H - \tfrac{1}{3}H = \tfrac{2}{3}H$$

3.5 Gerak relatif satu dimensi

Posisi sebuah benda selalu diukur relatif terhadap sebuah kerangka acuan. Kerangka acuan yang biasa digunakan adalah bumi atau tanah. Sebuah objek O bergerak bergerak relatif terhadap kerangka acuan A dan kerangka acuan B (lihat Gambar 3.8). Posisi objek relatif terhadap kerangka acuan A adalah $x_{O,A}$. Pengamat A berada dalam kerangka acuan A, sedangkan pengamat B berada dalam kerangka acauan B. Posisi objek relatif terhadap pengamat B adalah $x_{O,B}$. Posisi pengamat B relatif terhadap pengamat A adalah $x_{B,A}$. Persamaan posisi objek:

$$x_{O,A} = x_{B,A} + x_{O,B} \qquad (3.29)$$



Gambar 3.8 : Gerak objek O diamati oleh pengamat A dan pengamat B

Persamaan kecepatan objek diperoleh dari turunan pertama posisi terhadap waktu.

$$\frac{dx_{O,A}}{dt} = \frac{dx_{B,A}}{dt} + \frac{dx_{O,B}}{dt}$$

$$v_{O,A} = v_{B,A} + v_{O,B} \tag{3.30}$$

Kecepatan objek relatif terhadap pengamat A adalah $v_{O,A}$. Kecepatan pengamat B relatif terhadap pengamat A adalah $v_{B,A}$. Kecepatan objek relatif terhadap pengamat B adalah

$$v_{O,B} = v_{O,A} - v_{B,A} \tag{3.31}$$

Percepatan objek diperoleh dari turunan pertama pers.(3.30) terhadap waktu.

$$\frac{dv_{O,A}}{dt} = \frac{dv_{B,A}}{dt} + \frac{dv_{O,B}}{dt}$$

$$a_{O,A} = a_{B,A} + a_{O,B} \tag{3.32}$$

Percepatan objek relatif terhadap pengamat A adalah $a_{O,A}$. Percepatan pengamat B relatif terhadap pengamat A adalah $a_{B,A}$. Percepatan objek relatif terhadap pengamat B adalah

$$a_{O,B} = a_{O,A} - a_{B,A} \tag{3.33}$$

Perhatikan contoh kasus gerak sebuah benda diamati oleh pengamat A berapada di tanah(bumi) dan pengamat B berada dalam pesawat. Kita dapat menuliskan:

$$v_{benda,pesawat} = v_{benda,\text{tanah}} - v_{pesawat,\text{tanah}} \tag{3.34}$$

atau disingkat menjadi

$$v_{benda,pesawat} = v_{benda} - v_{pesawat} \tag{3.35}$$

dengan asumsi bahwa v_{benda} dan v_{pesawat} diukur dalam kerangka acuan yang sama.

Contoh 3.10 :

Mobil A dan B bergerak beriringan, mobil B berada di belakang mobil A. Kecepatan mobil A relatif terhadap tanah adalah 30 m/s dan kecepatan mobil A relatif terhadap mobil B adalah 10 m/s. Hitung kecepatan mobil B relatif terhadap tanah.

Pembahasan :

Kecepatan mobil A relatif terhadap tanah adalah $v_{A,Tanah} = 30\,\text{m/s}$. Kecepatan mobil A relatif terhadap mobil B adalah $v_{A,B} = 10\ \text{m/s}$. Kecepatan mobil B relatif terhadap tanah adalah $v_{B,Tanah}$.

$$v_{A,B} = v_{A,Tanah} - v_{B,Tanah}$$

$$10\ \text{m/s} = 30\ \text{m/s} - v_{B,Tanah}$$

Jadi, kecepatan mobil B relatif terhadap tanah adalah $v_{B,Tanah} = 10 \text{ m/s}$.

Contoh 3.11 :

Seoarang anak mencapai lantai atas dari lantai bawah menggunakan sebuah eskalator. Jika dia berjalan di atas sebuah tangga eskalator yang sedang bergerak , maka dia memerlukan waktu 1 menit . Jika dia hanya berdiri di atas tangga eskalator, maka dia membutuhkan waktu 2 menit. Jika tangga eskalator diam, berapa lama anak tersebut berjalan? Asumsikan kecepatan gerak eskalator dan anak itu selalu tetap.

Pembahasan :

Misalkan panjang eskalator yang menghubungkan lantai bawah dan lantai atas adalah *L*. Kecepatan eskalator relatif terhadap lantai bawah adalah v_{eb} , sedangkan kecepatan orang relatif terhadap eskalator adalah v_{oe} . Kita akan meninjau gerak sistem ini dalam tiga kasus.

Kasus pertama, eskalator bergerak dan anak bergerak membutuhkan waktu t_1 = 1 menit = 60 detik.

$$\left(v_{oe} + v_{eb}\right)t_1 = L$$

$$60v_{oe} + 60v_{eb} = L$$

Kasus kedua, eskalator bergerak dan anak diam (v_{oe} =0) di atas di atas eskalator membutuhkan waktu t_1 = 2 menit = 120 detik.

$$\left(v_{oe} + v_{eb}\right)t_2 = L$$

$$120v_{eb} = L$$

Kasus ketiga, eskalator diam (v_{oe} =0) dan anak berjalan di atas eskalator membutuhkan waktu t_3.

$$\left(v_{oe} + v_{eb}\right)t_2 = L$$

$$v_{oe}\ t_3 = L$$

Dari kasus pertama dan kedua kita peroleh bahwa $v_{oe} = v_{eb}$, sehingga $L = 120v_{oe}$. Lama waktu t_3 adalah 120 detik atau 2 menit.

3.6 Gerak lurus tidak beraturan

Gerak lurus tidak beraturan merupakan gerak benda dengan percepatan tidak konstan. Perpindahan atau kecepatan benda tidak sama tiap selang waktu yang sama. Percepatan benda dapat bergantung waktu, kecepatan atau posisi. Secara umum, luas kurva percepatan benda a(t) dalam selang waktu t_1 sampai t_2 menunjukkan perubahan kecepatan benda.

$$v - v_0 = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt \qquad (3.36)$$

Luas kurva kecepatan benda v(t) dalam selang waktu t_1 sampai t_2 menunjukkan perubahan posisi benda.

$$x - x_0 = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt \qquad (3.37)$$

Percepatan diperoleh dari posisi dan kecepatan menggunakan metode turunan, sedangkan posisi dan kecepatan diperoleh dari percepatan menggunakan metode integral.

Contoh 3.12 : *Percepatan benda bergantung waktu, a(t).*

Sebuah benda mula-mula diam di posisi titik asal. Partikel bergerak sepanjang sumbu x dengan perubahan percepatannya konstan diberikan oleh persamaan $a = 6t \text{ m/s}^2$. Tentukan posisi dan kecepatan benda setiap waktu.

Pembahasan :
Bentuk turunan percepatan benda :

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t$$

$$dv = 6t\, dt$$

Kecepatan diperoleh dengan mengintegralkan masing-masing ruas :

$$\int dv = \int 6t\, dt$$

$$v = 3t^2 + c$$

Kecepatan $v = v_0 = 0$ saat t=0, maka c = 0. Kecepatan partikel sebagai fungsi waktu:

$$v(t) = 3t^2 \text{ m/s}$$

Bentuk turunan kecepatan benda :

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2$$

$$\int dx = \int 3t^2\, dt$$

$$x = t^3 + c'$$

Posisi $x = x_0 = 0$ saat t=0 , maka $c' = 0$. Posisi partikel setiap waktu adalah

$$x(t) = t^3 \text{ m/s}$$

Contoh 3.13 : ***Percepatan benda bergantung kecepatan, a(v).***
Sebuah partikel bergerak sepanjang sumbu x memiliki kecepatan awal v_0 di titik asal (x=0) . Partikel kemudian mengalami percepatan sebagai fungsi percepatan diberikan oleh persamaan $a = -kv^2$ dimana k adalah suatu konstanta positif. Tentukan persamaan percepatan, kecepatan dan posisi partikel sebagai fungsi waktu.

Pembahasan :
Bentuk turunan percepatan:

$$\frac{dv}{dt} = -kv^2$$

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int -dt$$

$$-\frac{1}{v} = -t + c$$

Keepatan $v = v_0$ saat t=0, maka $c' = -1/v_0$.

$$\frac{1}{v} = t + \frac{1}{v_0}$$

Kecepatan benda sebagai fungsi waktu :

$$v(t) = \frac{v_0}{1+v_0 t}$$

Posisi partikel setiap waktu diperoleh dengan mengintegralkan $v(t)$ terhadap waktu.

$$\int dx = \int \left(\frac{v_0}{1+v_0 t} \right) dt$$

Kita dapat menyelesaikan integral di atas menggunakan metode integral substitusi. Misalkan, $u = 1 + v_0 t$, maka $du = v_0 dt$. Karena itu,

$$\int dx = \int \frac{du}{u}$$

$$x = \ln u + c = \ln(1+v_0 t) + c$$

Posisi $x = 0$ saat t = 0, maka $c = -\ln(1) = 0$. Posisi benda sebagai fungsi waktu:

$$x(t) = \ln(1+v_0 t)$$

Percepatan partikel dalam fungsi waktu :

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_0}{1+v_0 t} \right) = -\frac{v_0^2}{(1+v_0 t)^2}$$

Contoh 3.14 : *Percepatan benda bergantung posisi, a(x).*

Sebuah partikel bergerak sepanjang sumbu x dengan percepatan sebagai fungsi posisi diberikan oleh persamaan $a = -\omega^2 x$, dimana ω adalah konstanta positif. Benda mula-mula memiliki kecepatan awal v_0 = 0 dan posisi mula-mula $x_0 = A$. Tentukan persamaan posisi x(t) partikel ini.

Pembahasan:

Persamaan percepatan partikel :

$$a = v\frac{dv}{dx} = -\omega^2 x$$

$$\int v dv = -\omega^2 \int x\, dx$$

$$\tfrac{1}{2} v^2 = -\tfrac{1}{2}\omega^2 x^2 + c$$

Kecepatan $v_0 = 0$ saat posisi $x = A$, maka $c = \tfrac{1}{2}\omega^2 A$. Kecepatan partikel dalam fungsi posisi adalah :

$$v(x) = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

Kecepatan benda dalam bentuk turunan :

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega\, dt$$

$$\int_A^x \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \int_0^t \omega\, dt$$

Gunakan hasil integral bahwa $\int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{A}\right)$. Jadi,

$$\sin^{-1}\left(\frac{x}{A}\right)\Big|_A^x = \omega t$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{x}{A}\right) - \frac{\pi}{2} = \omega t$$

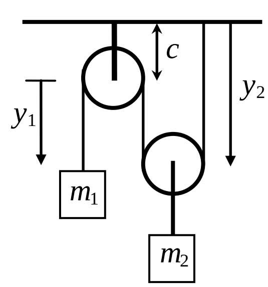
Persamaan posisi partikel sebagai fungsi waktu adalah

$$x = A\sin\left(\omega t + \tfrac{\pi}{2}\right)$$

3.7 Gerak saling bergantung

Gerak benda biasanya saling bergantung dengan benda lainnya. Gerak saling bergantung diselesaikan menggunakan fungsi kendala (*constrain function*). Fungsi kendala menyatakan hubungan posisi benda dengan benda lainnya selama proses gerak dalam sistem. Kita akan mendapatkan hubungan kecepatan dan percepatan masing-masing benda dari fungsi kendala dengan menemukan turunan fungsi kendala terhadap waktu. Kita memerlukan kemampuan geometri untuk menggambarkan diagram perpindahan masing-masing benda. Fungsi kendala diperoleh dari geometri gerak benda atau tali yang membatasi gerak benda. Fungsi kendala sering diperlukan dalam menyelesaikan dinamika gerak benda.

Dua buah benda bermassa m_1 dan m_2 disusun menggunakan tali ringan dan dua katrol licin, lihat Gambar 3.9. Katrol pertama posisinya selalu tetap, sedangkan katrol kedua dapat bergerak vertikal. Ujung tali diikatkan pada benda m_1 dan atap. Sekarang kita akan mencari hubungan kecepatan dan percepatan antara benda m_1 dan m_2. Misalkan panjang tali panjang adalah l. Jari-jari silinder pertama dan kedua berturut-turut adalah R_1 dan R_2. Posisi benda m_1 dari pusat katrol pertama adalah y_1 dan posisi katrol kedua dari atap adalah y_2. Kecepatan dan percepatan katrol kedua dan benda m_2 selalu tetap. Jarak antara pusat katrol pertama dan atap adalah c.



Gambar 3.9 :Koordinat fungsi kendala sistem benda-katrol

Fungsi kendala sistem ini adalah

$$l = y_1 + \pi R_1 + y_2 - c + \pi R_1 + y_2$$

Panjang tali l selalu tetap sehingga turunan l terhadap waktu sama dengan nol.

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dy_1}{dt} + 2\frac{dy_2}{dt} = 0$$

Kita peroleh hubungan kecepatan m_1 dan m_2 adalah $v_1 = -2\,v_2$. Tanda negatif menunjukkan arah gerak m_1 berlawanan dengan m_2 . Hubungan perepatan m_1 dan m_2 :

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + 2\frac{d^2y_2}{dt^2} \Rightarrow \frac{dv_1}{dt} = -2\frac{dv_2}{dt} \text{ atau } a_1 = -2a_2 .$$

3.8 Soal dan pembahasan

1. Persamaan posisi sebuah partikel ditunjukkan oleh

$$x(t) = At^2 + Bt + C$$

dimana *x* dalam meter dan *t* dalam sekon.

a. Tentukanlah satuan dari koefisien A, B dan C!

b. Tentukan kecepatan partikel, v(t), dalam fungsi waktu!

c. Tentukan percepatan partikel, a(t), dalam fungsi waktu!

d. Saat t =0 posisi x = 6 m, kecepatan v = - 5 m/s dan percepatan a = 2 m/s^2 .
Hitung nilai A, B dan C!

2. Sebuah benda bergerak dengan persamaan posisi diberikan oleh

$$x(t) = 5 + 12t^2 - 2t^3$$

dimana *x* dalam meter dan *t* dalam sekon.

a. Tentukan posisi benda saat t = 1 detik.

b. Berapa kecepatan benda saat t = 2 detik?

c. Hitung jarak tempuh benda sampai sesaat berbalik arah.

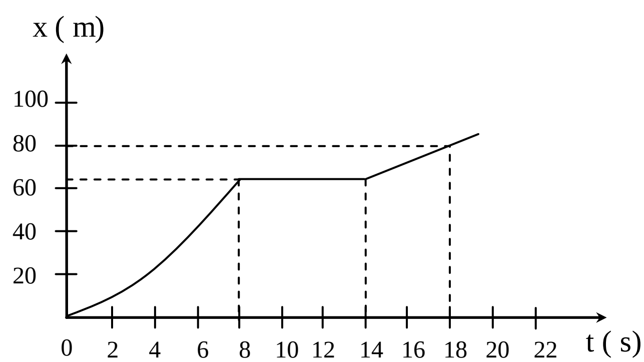
d. Kapan percepatan benda nol?

3. Kurva di bawah ini menunjukkan posisi partikel mulai bergerak dari keadaan diam pada t = 0, bergerak sepanjang sumbu x. Antara t = 0 dan t = 8 s, persamaan posisi partikel dinyatakan oleh $x = t^2$, dimana x dalam meter dan t dalam sekon.

a. Berapa jarak total yang ditempuh oleh partikel setelah bergerak 12 s?

b. Berapa kecepatan partikel ketika t = 4 s, t = 10 s dan t = 16s?

c. Gambarkan grafik kecepatan partikel terhadap waktu!



4. Sebuah partikel bergerak sepanjang sumbu x menurut persamaan

$$x = At + Bt^2$$

dimana A dan B adalah konstanta numerik.

a. Tentukan dimensi konstanta A dan B!

b. Hitung (dalam A dan B) kecepatan rata-rata partikel setelah 3 detik bergerak (t=0 sampai t= 3s)!

c. Hitung kecepatan sesaat partikel saat t = 3 s!

d. Sekarang gunakan nilai konstanta A = 50 m/s dan B = 10 m/s^2 . Gambarkan grafik v(t) untuk gerak benda 3 detik pertama!

5. Sebuah benda titik mulai bergerak sepanjang garis lurus dengan percepatan konstan a. Pada waktu t_1 setelah benda bergerak, arah percepatan mobil diubah , nilainya tetap sama. Hitung waktu T dari mulai bergerak sampai partikel kembali ke posisi semula.

6. Dua mobil mulai bergerak bersama-sama saling mendekati sepanjang lintasan lurus. Mobil 1 mulai bergerak dari titik A dengan kecepatan v_1; Mobil 2 mulai bergerak dari titik B dengan kecepatan v_2. Percepatan mobil 1 adalah a_1; percepatannya menuju titik A. Percepatan mobil 2 adalah a_2; percepatannya menuju titik B. Dalam proses geraknya,mobil A dan mobil B bertemu dua kali; selang waktu pertemuan mereka adalah T. Hitung jarak antara A dan B!

7. Sebuah benda dilemparkan secara vertikal ke atas dengan kelajuan 30 m/s, dan ketinggiannya s m setelah t s diberikan oleh $h = 30t - 5t^2$.
   a. Tentukan kecepatan sesaat benda setiap waktu t.
   b. Kapan benda mencapai titik tertingginya?
   c. Hitung ketinggian maksimum benda!