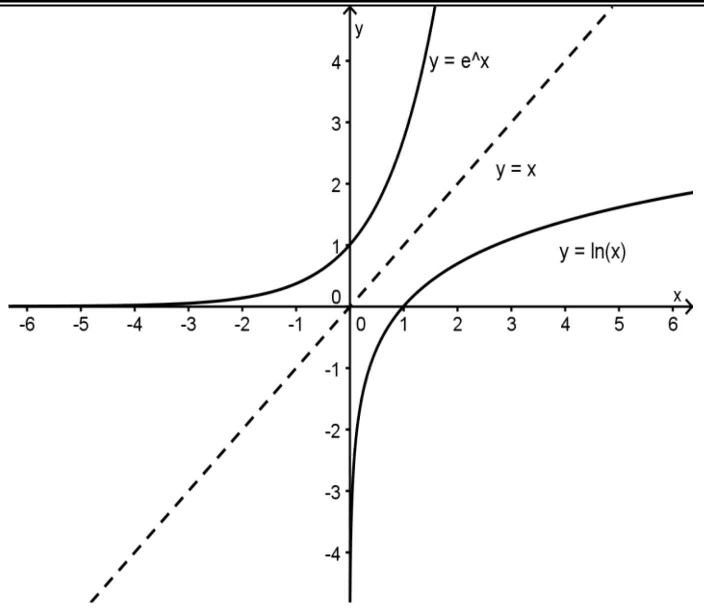
UNIDAD 4

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

Al término de la unidad, el alumno:

- **Habrá avanzado en el estudio de las funciones trascendentes.**
- **Conocerá la noción de función inversa.**
- **Conocerá y aplicará los conceptos de dominio y rango.**
- **Comprenderá las relaciones entre la función logarítmica y la función exponencial, el comportamiento, aspecto y características principales de sus gráficas.**
- **Reforzará la relación que existe entre los parámetros y la gráfica.**
- **Aplicará los conocimientos adquiridos respecto a funciones exponenciales, para modelar algunas situaciones en diversos contextos.**
- **Aplicará los conocimientos adquiridos respecto a funciones logarítmicas, para modelar situaciones en diversos contextos.**



Contenido

4.1. Introducción a funciones exponenciales y logarítmicas.

Las funciones exponenciales y logarítmicas tienen aplicaciones en todos los campos del quehacer humano. Son particularmente útiles en el estudio de la química, la física, la biología y la ingeniería para describir la forma en que varían las cantidades. En esta unidad se examinarán las propiedades de estas funciones y se considerarán muchas de sus aplicaciones en la vida diaria.
Empezaremos con algunos problemas que nos conducen a modelos de funciones exponenciales para su solución.

La reproducción de las amibas.

Las amibas se reproducen dividiéndose en dos. Así, una amiba da origen, al dividirse, a dos amibas iguales; las cuales a su vez, cuando alcanzan cierto tamaño, se dividen y originan a cuatro amibas. En teoría, este proceso puede continuar indefinidamente si el medio es adecuado, supón que el tiempo de división de las amibas es de un día, ¿cuántas amibas habrá al cabo de 15 días, sí inicialmente había una sola amiba?
Antes de leer lo siguiente, imagina una manera de resolver el problema. Discútelo con tus compañeros y con tu profesor.

1. Haz una primera estimación de tu resultado, ¿habrá menos de 100 amibas?, ¿entre 100 y 1000?, ¿más de 1000?

2. En cada etapa, ¿cómo es el número de amibas respecto a la etapa anterior? ¿respecto a la siguiente?

3. ¿Qué operación debes hacer en cada etapa para obtener el número de amibas en la siguiente?

4. ¿Cuántas veces has repetido la misma operación en la tercera etapa?, ¿y en la octava?

5. Copia en tu cuaderno el cuadro siguiente y complétalo. Utiliza tu calculadora si es necesario.

$\boldsymbol{Tiempo\ (d\grave{\imath}as)}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{5}$	$\mathbf{6}$	$\mathbf{7}$	$\mathbf{8}$	$\mathbf{9}$	$\mathbf{10}$
$\boldsymbol{No. de\ amibas}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$									

6. Si llamamos t al número de días transcurridos, ¿puedes proponer una fórmula que exprese el número de amibas en ese tiempo? Pon a prueba tu fórmula usando los valores del cuadro anterior.

7. Calcula, ¿cuántas amibas habrá después de 15 días?

La tabla anterior empleada para resolver el problema es una tabla de potencias de dos. Esto quiere decir que cada casilla en el renglón se obtiene multiplicando el valor anterior (de la izquierda) por dos. Decimos que 2 es la base y el número de veces que se ha tomado como factor esa base es el exponente; el resultado se llama potencia. Se escribe de la siguiente forma:

$$2^0 = 1 \ (por\ definiciòn)$$
$$2^1 = 2$$
$$2^2 = 2 \times 2 = 4$$
$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$
$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

En general, la potencia enésima de un número cualquiera se obtiene tomando n veces como factor ese número.

Cada vez menos.

La vida media de un material radiactivo se define como el tiempo necesario para que una cierta cantidad de ese material se reduzca, por radiación, a la mitad. La vida media del polonio (material radiactivo) es de 138 días.

Si hoy hubiera 1 kg.de polonio en un laboratorio, ¿qué parte de esa cantidad quedaría dentro de cinco años?

1. Copia en tu cuaderno el cuadro siguiente y complétalo. Recuerda que cada vez que transcurren 138 días, la cantidad de polonio se reduce a la mitad, entonces, calcula el valor en cada casilla del primer renglón sumando 138 al valor de la casilla anterior.

Dìas transcurridos	**0**	**138**	**276**	**414**	**552**
Cantidad restante	**1**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

2. ¿Cómo se obtienen los valores del segundo renglón?, ¿Cómo se encuentra la mitad de una cantidad?

3. ¿Es posible hablar del valor del cuadrado de un número fraccionario?, ¿Qué significaría?, ¿Cómo obtendrías el cuadrado de $\frac{1}{2}$?, ¿y el de $\frac{1}{3}$?

4. ¿Cómo se calcularía $\left(\frac{1}{2}\right)^2$? y $\left(\frac{1}{2}\right)^3$?

5. Si la base es una fracción, ¿cómo varía la potencia al aumentar el exponente?

Virus y computadoras.

Un virus computacional no es una enfermedad, sino un programa de computadora.

Algunos son programas muy cortos que se copian así mismos una y otra vez hasta llenar completamente la memoria de la computadora. Esto significa que la computadora no responderá ante ningún otro programa a menos que “limpiemos“ por completo la memoria eliminando el virus.

El virus demonio 10 es un programa que hace diez copias de sí mismo en un segundo y se detiene. Después, cada una de esas 10 copias produce otras 10 copias; de esta manera, al cabo de dos segundos ya habrá 10×10 copias del virus ¿Si cada copia de demonio 10 ocupa 1kb (kilobyte) de memoria, ¿cuánto tiempo tardará en saturarse una computadora cuya memoria es de 8000 kb?

Antes de leer lo siguiente, imagina una manera de resolver el problema. Discútelo con tus compañeros y con tu profesor.

1. Haz una primera estimación de tu resultado, ¿será más de una hora?, ¿entre $10\ y\ 20$ minutos?, ¿menos de un minuto?

2. En cada etapa, ¿cómo es el número de copias respecto a la etapa anterior?, ¿respecto a la siguiente?

3. ¿Puedes encontrar una relación entre el número de segundos transcurridos y los ceros del número de copias? ¿cuál es?

4. Copia en tu cuaderno el cuadro siguiente y complétalo.

$\boldsymbol{Tiempo\ transcurrido(segundos)}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$\boldsymbol{N\grave{u}mero\ de\ copias}$	**1**	**10**	**100**								

5. Si llamamos t al número de segundos transcurridos, ¿puedes proporcionar una fórmula que exprese el número de copias al término de ese tiempo? Pon a prueba tu fórmula usando los valores del cuadro.

6. Calcula cuántas copias habrá después de 15 segundos.

7. Si el virus ocupará 8 kb de memoria, ¿en cuánto tiempo se saturará la máquina?

4.2. La función exponencial como modelo matemático.

Necesitamos encontrar la solución del siguiente problema financiero.
Una institución de ahorro paga 4% de interés compuesto capitalizable anualmente.
Si se depositan $\$25000$ ¿Qué cantidad se obtiene al cabo de $1,2,3,4,5,6,\ldots,10\ años$?
¿Y en cuánto tiempo se duplicará el capital invertido?
Intentemos establecer un modelo matemático de la situación.
Llamemos:
M_n al monto en pesos (capital más intereses) al cabo de n años.

C al capital invertido, en pesos.

t a la tasa de interés, expresada como fracción decimal.

I al interés al cabo de n años.

Al cabo del primer año ($n = 1$) el monto será:

$$M_1 = C + Ct = C(1 + t)$$

Al cabo del segundo año ($n = 2$) el interés calculado sobre el monto será:

$$I_2 = M_1 t = C(1 + t)t.$$

Y el monto M_2 al cabo de este segundo año será:

$$M_2 = M_1 + C(1+t)t = C(1+t) + C(1+t)t$$
$$M_2 = C(1+t)(1+t) = C(1+t)^2$$
Organicemos en una tabla los resultados obtenidos.
Llenar los casilleros que se indican:

$\boldsymbol{Al\ cabo\ de\ un\ año}$	$\boldsymbol{Interès}$ $\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{Monto(Capital + interès)}$ $\boldsymbol{M}$
$\boldsymbol{1}$	$\boldsymbol{Ct}$	$\boldsymbol{C + Ct = C(1+t)}$
$\boldsymbol{2}$	$\boldsymbol{C(1+t)t}$	$\boldsymbol{C(1+t) + C(1+t)t = C(1+t)^2}$
$\boldsymbol{3}$		
$\boldsymbol{4}$		
$\boldsymbol{5}$		
.		
.		
.		
$\boldsymbol{N}$		

Hemos obtenido la expresión:
$$M_n = C(1+t)^n$$
De la cual podemos derivar esta otra.
$$R = \frac{M_n}{C}$$
que nos da la relación entre el monto al cabo de n años y el capital inicialmente invertido.
$$M_n = C(1+t)^n$$
$$R = (1+t)^n$$
Para nuestro caso.
$$C = 25000$$
$$t = 0.04$$
Por lo tanto:
$$M_n = 25000 \times 1.04^n$$
$$R = \frac{25000 \times 1.04^n}{25000}$$

La expresión:
$$M_n = 25000 \times 1.04^n$$

Nos permite calcular el monto al cabo de cualquier número de años.
Por ejemplo:
Al cabo del quinto año, el monto será:
$$M_5 = 25000 \times 1.04^5 = 25000 \times 1.217 = 30416.32$$
Al cabo del décimo año, el monto será:
$$M_{10} = 25000 \times 1.04^{10} = 25000 \times 1.48 = 37006.11$$

Al cabo de 15 años, la relación entre el monto y el capital invertido será:
$$R_{15} = 1.04^{15} = 1.80$$

Dejaremos pendiente la respuesta a la pregunta ¿En cuánto tiempo se duplicará el capital invertido?, hasta una etapa posterior en que hallamos realizado el estudio de las ecuaciones exponenciales.
Por el momento nos interesa especialmente la expresión como ésta:

$$R = 1.04^n$$

Que podemos representar en forma general, así:

$$y = a^x$$

y que llamaremos, expresiones exponenciales.
Sí $y = f(x)$ entonces adopta la forma:

$$y = a^x$$

La expresión:

$$F = \{(x, y) | x \in R \wedge y = f(x)\}$$

Con las restricciones que luego estableceremos, representará una función que llamaremos: $FUNCIÒN\ EPONENCIAL$.

4.3. Funciones exponenciales.

Para cualquier número irracional x , a^x puede definirse, pero una definición más precisa va más allá del alcance de este texto. Sin embargo, podemos insinuar un procedimiento posible para definir un número como $3^{\sqrt{2}}$. Ya que:

$$\sqrt{2} = 1.414213562 \ldots$$

Los números racionales $1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1{,}41421, \ldots$, dan en orden sucesivo mejores aproximaciones a $\sqrt{2}$. Esto indica que los números $3^1, 3^{1.4}, 3^{1.41}, 3^{1.414}, 3^{1.4142}, 3^{1.41421}, \ldots$, dan en orden sucesivo mejores aproximaciones al valor de $3^{\sqrt{2}}$. De hecho esto puede demostrarse con una definición precisa de a^x para una x irracional. Pero por ahora aceptaremos la siguiente formulación como un hecho.

Para $a > 0$ y cualquier número real x, la expresión a^x representa un único número real, para la cual, las leyes de los exponentes son válidas para toda x real.

4.3.1. Función exponencial.

Ahora podemos dar una definición de una función exponencial.

Definición.

Si $a > 0\ y\ a \neq 0$, la función exponencial con base a es:

$$\boldsymbol{f(x) = a^x}$$

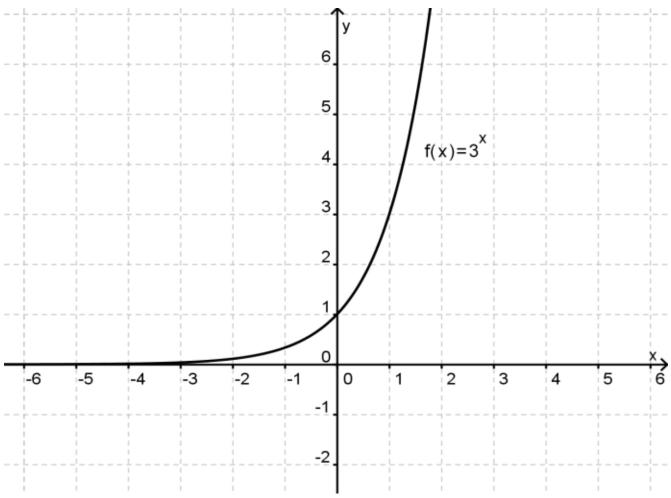
En la definición anterior la base a se limita a los números positivos así que a^xsiempre será un número real positivo. Con esta restricción una expresión como $(-4)^{\frac{1}{2}}$ no es posible. Cuando $a = 11$, simplemente obtenemos la función constante $f(x) = 1^x = 1$.

4.3.2. Ahora grafiquemos algunas funciones exponenciales.

Grafique la función $\boldsymbol{f(x) = 3^x}$

Solución. Primero obtenemos una tabla de valores para $f(x) = 3^x$, marcamos los puntos que se obtienen de la tabla y los unimos con una curva uniforme.

x	$f(x)$
-3	$\frac{1}{27}$
-2	$\frac{1}{9}$
-1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9
3	27



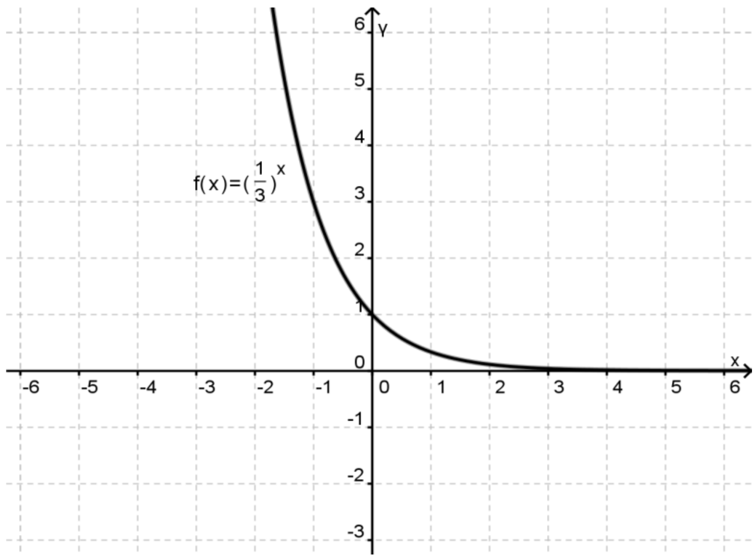
Nótese que la gráfica de $f(x) = 3^x$ es una función creciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Grafique la función $\boldsymbol{f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x}$

Solución. Obtenemos la gráfica de esta función uniendo los puntos cuyas coordenadas se enumeran en la tabla anexa.

x	$f(x)$
-3	27
-2	9

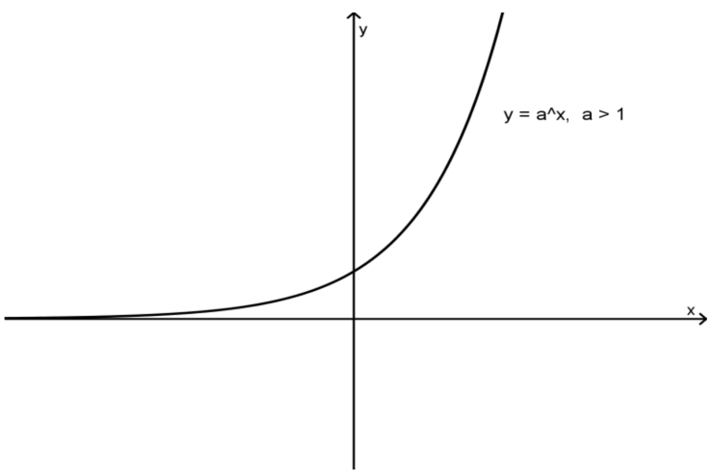
-1	3
0	1
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$
3	$\frac{1}{27}$



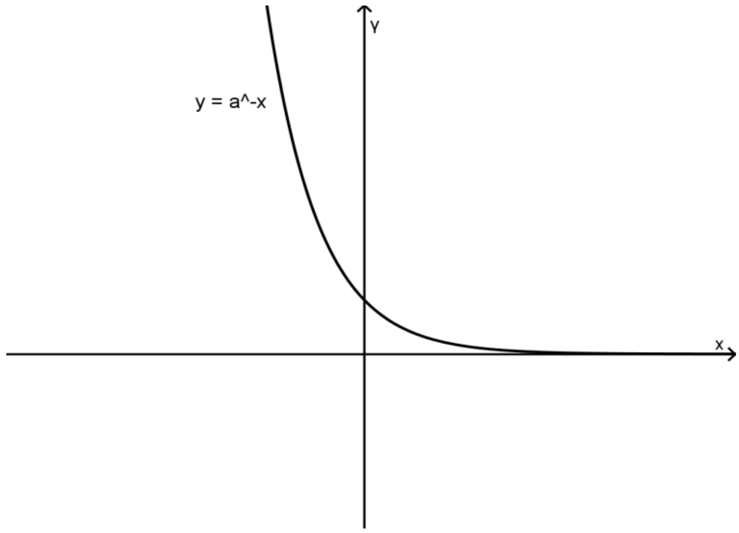
Nótese que la gráfica de la función $f(x) = 3^{-x}$ es exactamente la misma gráfica anterior ya que $3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Como los dos ejemplos anteriores indican, la gráfica de una función exponencial $f(x) = a^x$ puede tener dos formas, dependiendo de si $0 < x < 1$ o $a > 0$. En la figura siguiente vemos el bosquejo de las gráficas para cada uno de estos casos:

$$\boldsymbol{y = a^x, a} > 1$$



$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{a} > 1$$



4.4. Propiedades de la función exponencial.

En los bocetos de la figura anterior observamos las siguientes propiedades de la función exponencial f con base a.

a) El dominio de la función f es el conjunto de los números reales.

b) El rango o recorrido de la función f es el conjunto de los números reales positivos.

c) La intersección con el eje y para la gráfica de la función f es 1. La gráfica de la función f no tiene intersección con el eje x.

d) El eje x es una asíntota horizontal para la gráfica de la función f.

e) La función f es creciente si $a > 1$ y decreciente si $0 < x < 1$.

f) La función f es inyectiva (uno a uno)

4.5. Destrezas con transformaciones.

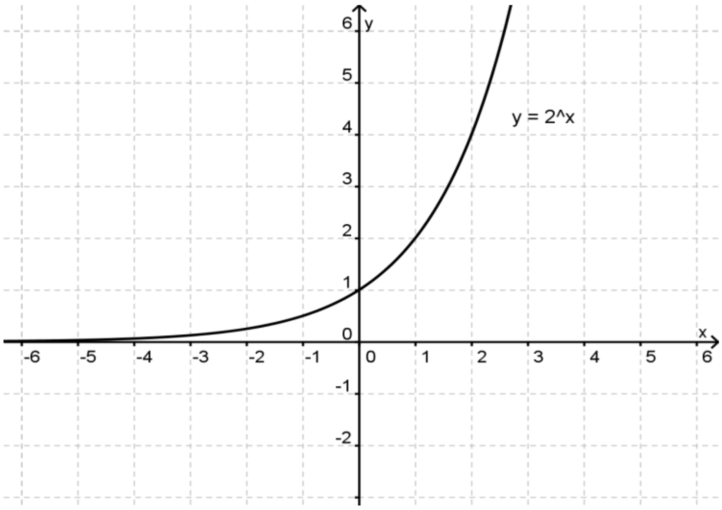
Las destrezas para bosquejar funciones, que se aprendieron en anteriores unidades, pueden ser aplicadas para bosquejar las gráficas de funciones exponenciales y logarítmicas.

La función exponencial tiene la forma general$y = f(x) = P_0 a^{bx+c} + d$, donde $a \neq 1, 0 < x \leq 1 \;\; y \; a > 1$.

Empecemos graficando la función exponencial cuando $P_0 = 1$, $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$ y $d = 0$. Esto es, $y = f(x) = 2^x$.

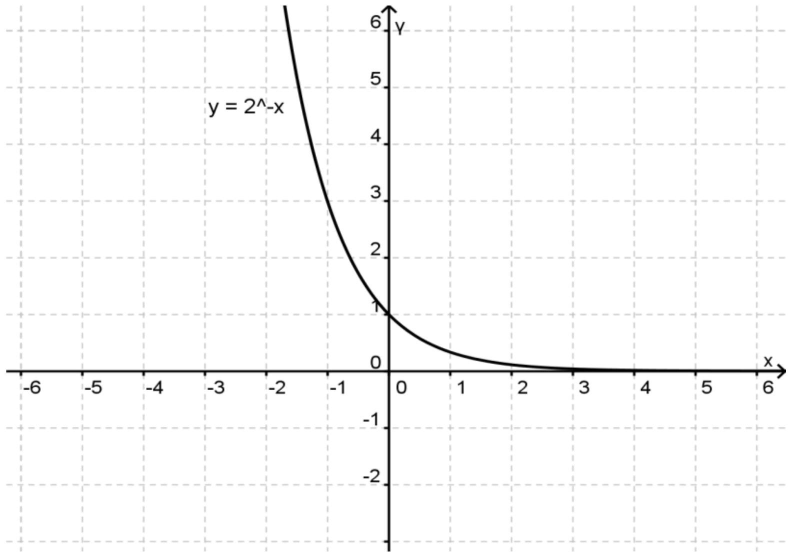
Elaboramos una tabla de parejas ordenadas y trasladamos estas parejas ordenadas al plano cartesiano y unamos los puntos que representan las parejas ordenadas con una línea continua como lo indica la gráfica a la derecha de la tabla.

x	$f(x)$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



¿Qué pasa ahora si $P_0 = 1$, $a = 2$, $b = -1$, $c = 0$ y $d = 0$?.
Esto es; $y = f(x) = 2^{-x}$.
Sí elaboramos la tabla para esta función nos queda.

x	$f(x)$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

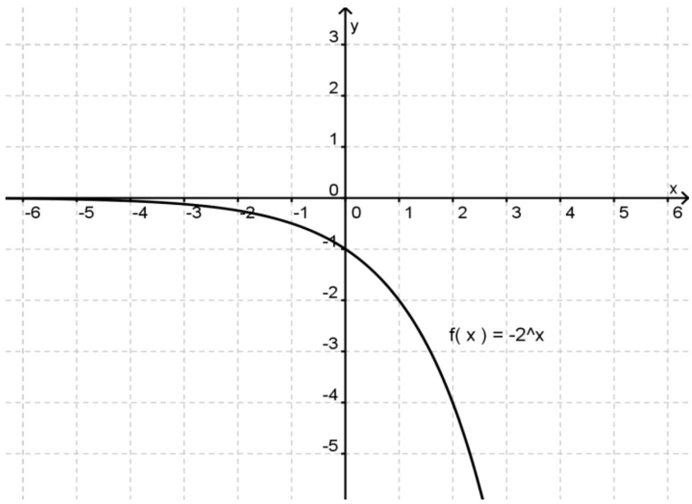


Obsérvese que cuando ocurre esto, hay una reflexión de la gráfica sobre el eje “ y “.

¿Qué pasa ahora si $P_0 = -1$, $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$ y $d = 0$?
Esto es; $y = f(x) = -(2^x)$

Construimos nuevamente la tabla para contestar a la pregunta.

x	$f(x)$
-3	$-\frac{1}{8}$
-2	$-\frac{1}{4}$
-1	$-\frac{1}{2}$
0	-1
1	-2
2	-4
3	-8



Ahora vemos que ocurre una reflexión, pero ahora sobre el eje “ x “.

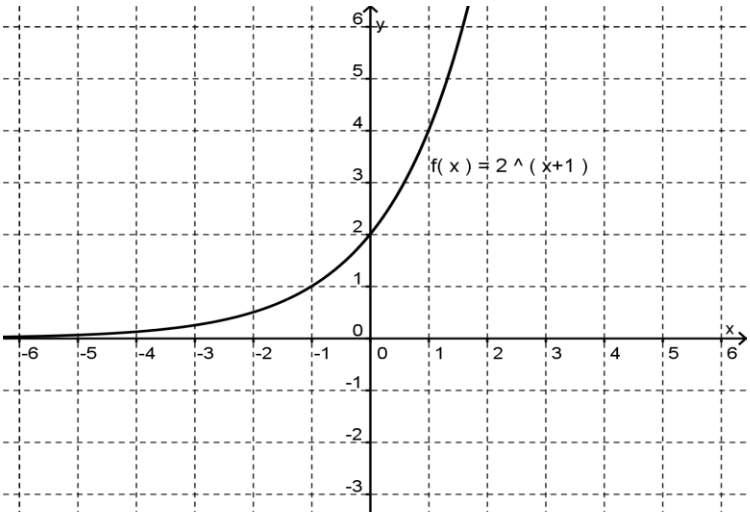
Sigamos jugando con la variación de los parámetros.

Ahora consideremos. $P_0 = 1,\ a = 2,\ b = 1,\ c = 1\ \ y\ \ d = 0$.

Por lo que tenemos la función $y = f(x) = 2^{x+1}$

Hagamos nuestra tabla y luego su representación gráfica.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
$\mathbf{-3}$	$\mathbf{\frac{1}{4}}$
$\mathbf{-2}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$
$\mathbf{-1}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{2}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{4}$
$\mathbf{2}$	$\mathbf{8}$
$\mathbf{3}$	$\mathbf{16}$



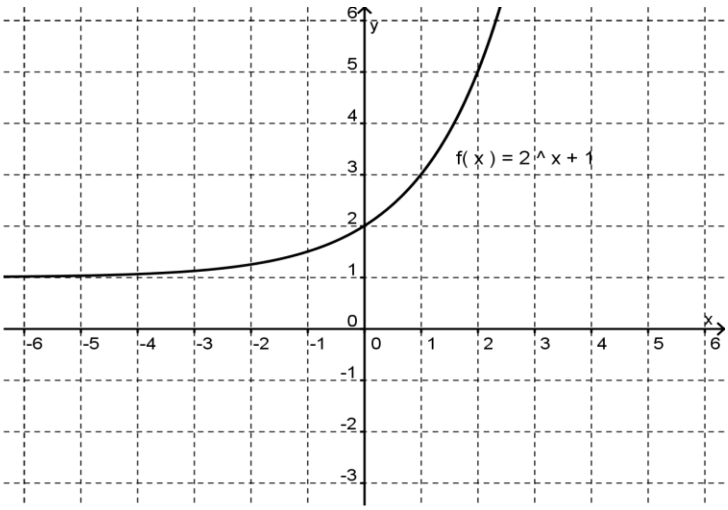
Obsérvese que la gráfica de $y = f(x) = 2^x$, se traslada a la izquierda una unidad y tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

Ahora analicemos el caso en el cual. $P_0 = 1,\ a = 2,\ b = 1,\ c = 0\ \ y\ \ d = 1$.

Por lo que tenemos. $\boldsymbol{y = f(x) = 2^x + 1}$

Hagamos nuestra tabla y luego su representación gráfica.

x	$f(x)$
-3	$\frac{9}{8}$
-2	$\frac{5}{4}$
-1	$\frac{3}{2}$
0	2
1	3
2	5
3	9



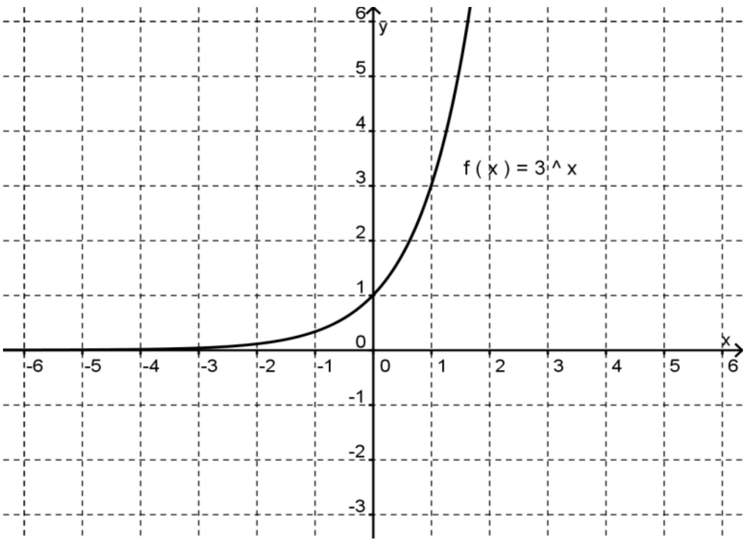
Observamos que ahora la gráfica $y = f(x) = 2^x$ se desplaza hacia arriba una unidad y es asintótica a la recta $y = 1$ (asíntota horizontal)

No se va a analizar cuando P_0 varía, pero sí podemos decir que cuando $P_0 > 1$ la gráfica crece más rápidamente ya que se ve multiplicada por P_0, cuando $0 < P_0 < 1$, la gráfica crece más lentamente ya que se ve multiplicada por ese factor.

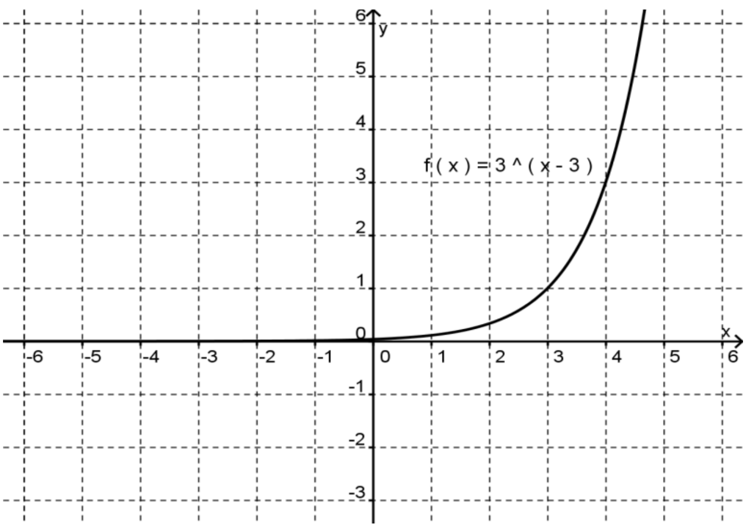
Ya que analizamos como modificar los parámetros a la gráfica, estamos en la posibilidad de graficar (bosquejar) una función exponencial con todos y cada uno de los parámetros.

Ejemplo.
Bosquejar la gráfica de la función exponencial $y = f(x) = -\frac{1}{2}3^{x-3} + 2$
Si lo hacemos paso a paso. Esto se ilustra como sigue:

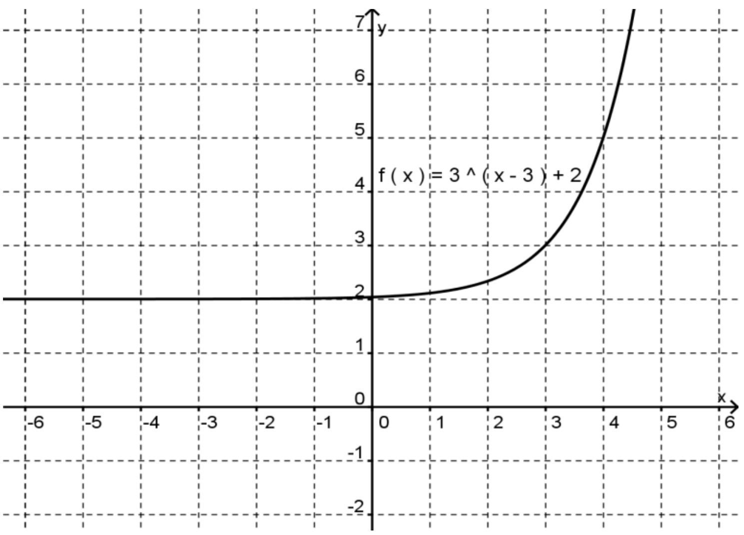
Paso 1.



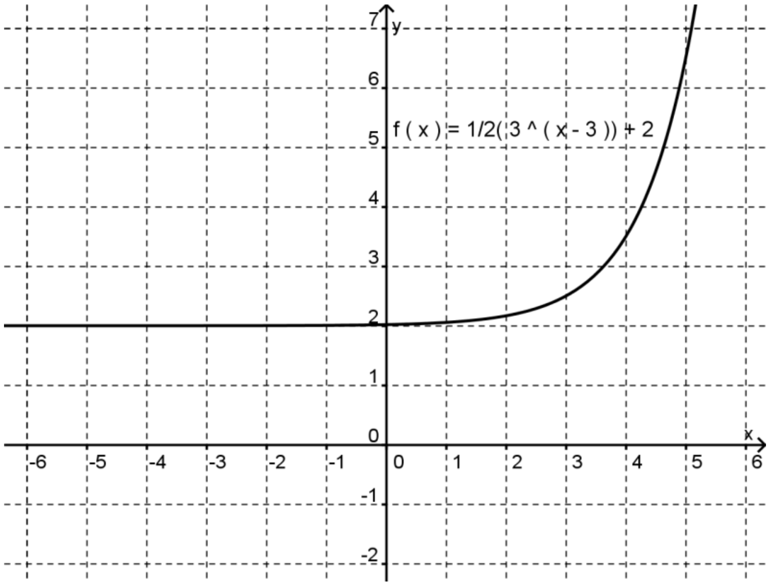
Paso 2.



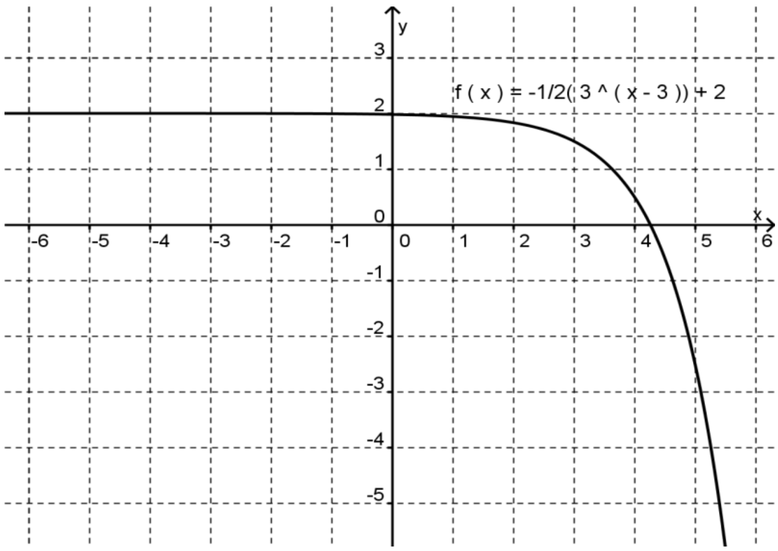
Paso 3.



Paso 4.



Paso 5.



Al dar Ctrl (Control) + clic en las siguiente etiquetas puede explorar los ejemplo anteriores y los que consideres pertinentes para reforzar los aprendizajes anteriores.

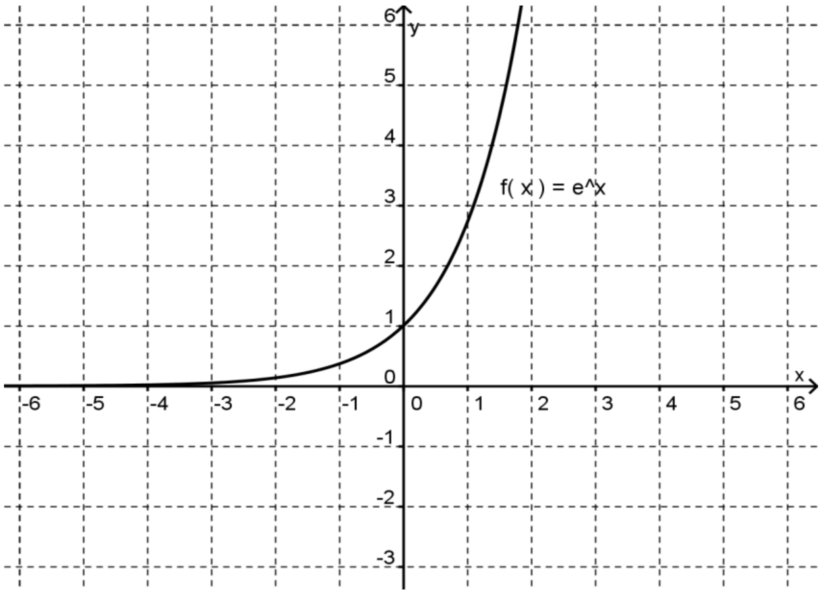
expgeneral1.ggb Actividades complementarias.docx

4.6. El número e.

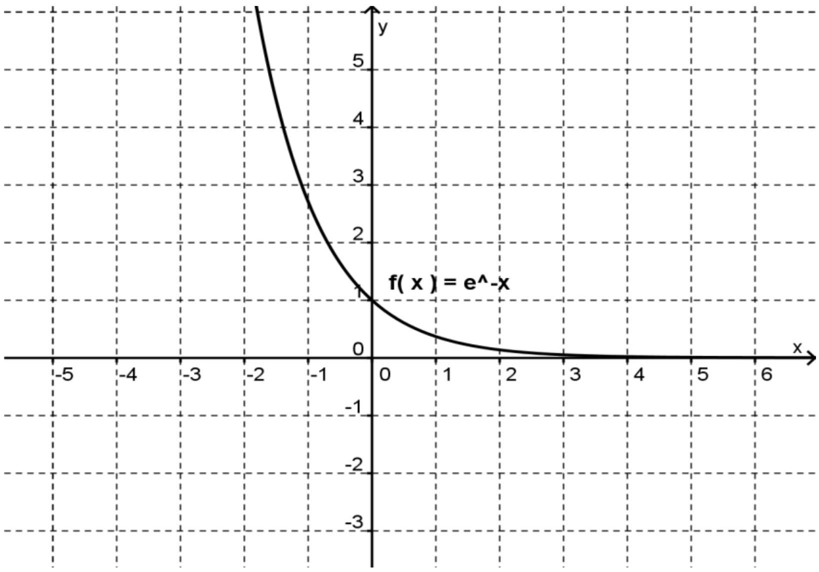
Aunque no podemos probarlo, la base a más importante en la función $f(x) = a^x$ es el número irracional $e = 2718281828459$ ...

Debido a su importancia muchas calculadoras con funciones científicas tienen una tecla e^x directamente en lugar de utilizar y^x para cualquier número real x. Las gráficas de $f(x) = e^x$ y $f(x) = e^{-x}$son similares a las que se muestran en la siguiente figura.

$$y = f(x) = e^x$$



$$y = f(x) = e^{-x}$$



Al dar Ctrl (Control) + clic en las siguiente etiquetas puede explorar los ejemplo anteriores y los que consideres pertinentes para reforzar los aprendizajes anteriores.

Expgeneral.ggb

El cálculo del número $\boldsymbol{e}$ surge del estudio de la función f definida por:

$$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ para } n \text{ entero positivo.}$$

Puede probarse que los valores funcionales $f(n)$ se acercan al número e, a medida que n aumenta sin límite, es decir:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e, cuando\ n \rightarrow \infty$$

Esto lo puede comprobar de la siguiente manera:
Sea f la función definida por, $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ donde n es un número entero positivo. Llenando la siguiente tabla, verifique que $f(n) \rightarrow e, cuando\ n \rightarrow \infty$

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{f(n)}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{2.0000000}$
$\mathbf{10}$	$\mathbf{2.5937425}$
$\mathbf{100}$	
$\mathbf{1000}$	
$\mathbf{10000}$	
$\mathbf{100000}$	
$\mathbf{1000000}$	
$\mathbf{10000000}$	

4.7. Funciones logarítmicas.

Antes de entrar al estudio de las funciones logarítmicas es necesario discutir lo que es una función inversa.

4.7.1. Función inversa.

En esta parte trataremos la inversa de una función. Esta será una regla de correspondencia que "invierte" la función original. Por ejemplo, considérese la función f determinada por la tabla siguiente:

x	y
1	3
2	5
3	2

Invirtiendo las columnas, obtenemos la nueva regla de correspondencia dada por la siguiente tabla:

x	y
3	1
5	2
2	3

Esta última regla, es también una función, y se denota por f^{-1}.
El símbolo f^{-1} se lee "inversa de f". Es importante señalar que -1 en f^{-1} no es un exponente; esto es: $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$, sino que denota la inversa de f.

Ahora considere otra función f determinada por la siguiente tabla.

x	y
1	4
2	6
3	6

Si invertimos los papeles de x y de y en esta tabla, obtenemos la correspondencia dada en la tabla siguiente:

x	y
4	**1**
6	**2**
6	**3**

Vemos que esta correspondencia no es una función, puesto que hay dos valores de y a saber, los números 2 y 3 asociados con $x = 6$.

4. 7. 2. Funciones uno a uno (funciones biyectivas)

Deseamos determinar que propiedad debe tener una función para que la "regla de inversión" sea también una función. Observe las tablas:

x	y
1	**3**
2	**5**
3	**2**

x	y
3	**1**
5	**2**
2	**3**

Nótese que cada elemento del rango está asociado con sólo un elemento del dominio, mientras que en las tablas:

x	y
1	**4**
2	**6**
3	**6**

x	y
4	1
6	2
6	3

Uno de los elementos del rango (a saber,6) le corresponde a más de un elemento del dominio.

De lo anterior podemos concluir la siguiente:

Una función f es una función uno a uno si y solo si cada elemento del rango de f está asociado con exactamente un elemento de su dominio x.

Es precisamente esta propiedad la que se requiere para que la "regla de inversión" sea una función.

De la definición anterior se deduce que una función f no es uno a uno si se pueden encontrar diferentes elementos $x_1 \neq x_2$ en el dominio de f tales que $f(x_1) = f(x_2)$.

Ejemplo.

La función $f(x) = x^2$ no es uno a uno, ya que $-3 \neq 3$ y $f(-3) = f(3) = 9$. En otras palabras, la función f no es uno a uno porque al número 9 en su rango le corresponden dos números -3 y 3 en su dominio.

Antes de tratar de hallar la inversa de una función, debe determinar si la función dada es uno a uno. A pesar de que hay una serie de técnicas para hacerlo, trataremos a continuación sólo uno de tales métodos.

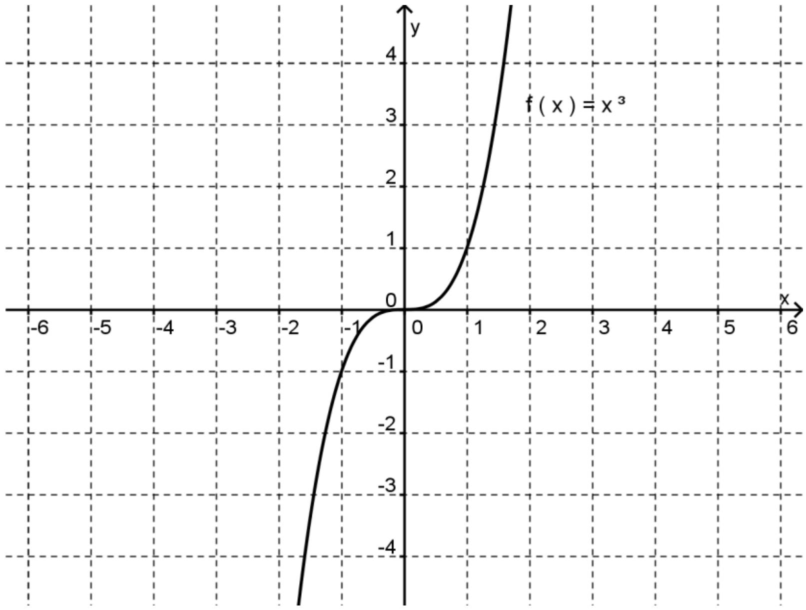
4.7.3. Prueba de la recta horizontal.

Una forma de probar que una función dada tiene inversa es aplicarle la prueba de la recta horizontal. Que consiste en trazarle a la gráfica una recta horizontal, si esta intersecta a la curva en un solo punto se dice que la función es uno a uno y por lo tanto existe su inversa; si por el contrario dicha recta corta a la gráfica de una función en más de un punto, entonces se dice que la función no es uno a uno y por lo tanto se puede concluir que no tiene inversa esta función.

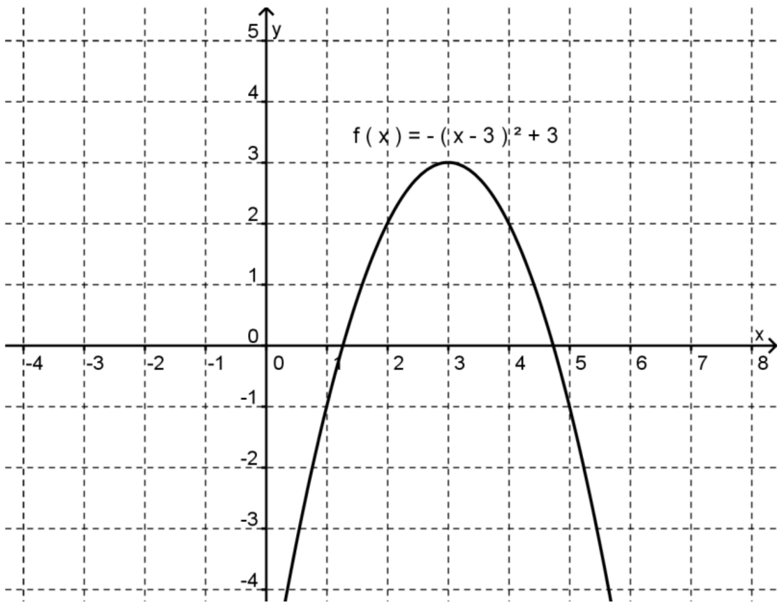
Ejemplo.

Decir ¿Cuáles de las funciones tienen inversa?

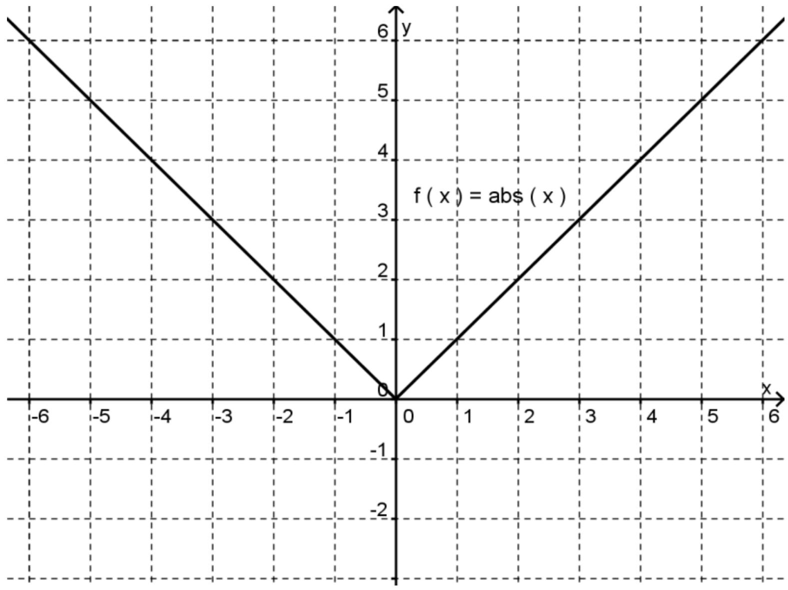
a)


y
x
f (x) = x ³
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6

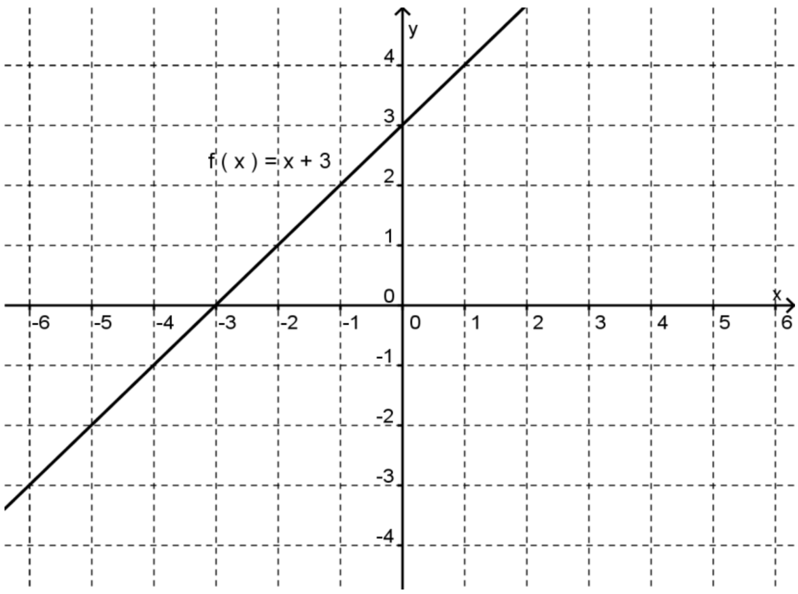
b)


y
x
f (x) = - (x - 3) ² + 3
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8

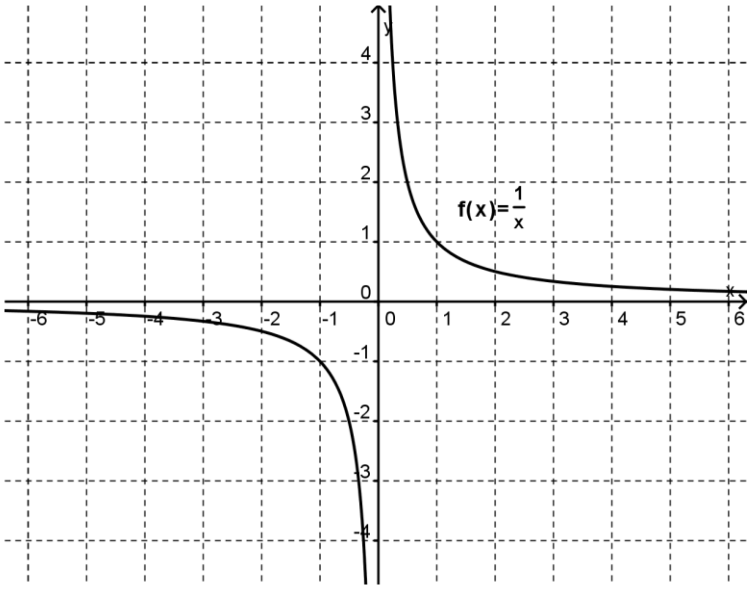
c)


y
x
f (x) = abs (x)
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6

d)


y
x
f (x) = x + 3
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6

$\boldsymbol{e})$



Solución.

Si les aplicamos a cada una de ellas la prueba de la recta horizontal vemos que las gráficas $a)$, $d)$ y $e)$ son uno a uno y por lo tanto tienen inversa, pero las gráficas $b)$ y $c)$ no cumplen con ser uno a uno y por lo tanto no tienen inversa.

Para encontrar la regla de correspondencia de la función inversa se siguen los siguientes pasos:

$a)$ Se despeja la variable x.

$b)$ Se sustituye x por $f^{-1}(x)$ y $f(x)$ por x.

Ejemplo.

Hallar la inversa de la función $f(x) = 5x - 7$

Solución.

$$f(x) = 5x - 7$$

$$5x = f(x) + 7$$

$$x = \frac{f(x)+7}{5}$$

$$f(x) = \frac{x+7}{5}$$

4.7.4. Método alternativo para hallar f^{-1}.

Para hallar para una función uno a uno $\boldsymbol{f^{-1}}$.

a) Intercambie las variables x y y en la ecuación $y = f(x)$
b) Resuelva la ecuación resultante $x = f(y)$ para y.

Ejemplo.
Hallar la función inversa de la función $fx) = \frac{2}{x^3+1}$

Solución.

$$fx) = \frac{2}{x^3+1}$$

$$x = \frac{2}{y^3+3}$$

$$y^3 + 1 = \frac{2}{x}$$

$$y^3 = \frac{2}{x} - 1$$

$$\sqrt[3]{y^3} = \sqrt[3]{\frac{2-x}{x}}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{2-x}{x}}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{2-x}{x}}$$

Ahora que ya sabemos cómo encontrar tanto gráfica como analíticamente la inversa de una función, regresaremos a la función exponencial.

$$y = f(x) = 2^x$$

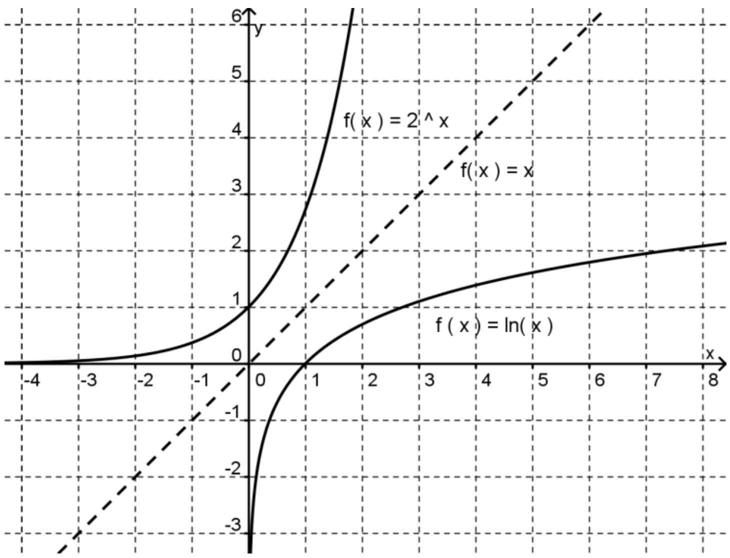
Nuestra tabla de valores para esta función son:

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$
$\boldsymbol{-3}$	$\boldsymbol{\frac{1}{8}}$
$\boldsymbol{-2}$	$\boldsymbol{\frac{1}{4}}$
$\boldsymbol{-1}$	$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$
$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{1}$
$\boldsymbol{1}$	$\boldsymbol{2}$
$\boldsymbol{2}$	$\boldsymbol{4}$
$\boldsymbol{3}$	$\boldsymbol{8}$

Si invertimos los valores de las parejas ordenadas tendremos la siguiente tabla

x	y
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

Si construimos en el mismo plano cartesiano las parejas ordenadas de las dos tablas tendremos la siguiente gráfica.



La función inversa de $y = 2^x$ es precisamente la función $y = \log_2 x$ que es nuestro objeto de estudio.

Podemos generalizar lo anterior como sigue:
Ya que la función exponencial $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ es uno a uno, tiene en consecuencia una función inversa. Para encontrarla procedemos de la siguiente manera como ya se discutió anteriormente; intercambiamos las variables x y y para obtener:

$$x = a^y$$

Esta fórmula define a y como función de x, y es el exponente al que se eleva la base a para obtener x.

Reemplazando la palabra “exponente“ por la palabra “logaritmo“ podemos decir, y es el logaritmo en la base a de x y abreviarla utilizando la fórmula $y = \log_a x$. Es decir $y = \log_a x$ es equivalente a $x = a^y$.
De lo anterior tenemos la siguiente definición.

La función logarítmica con base a, $y = \log_a x$ es la inversa de la función exponencial con base a.

4.7.5. Propiedades de la función logarítmica.

Si observamos la gráfica de la función logarítmica podemos concluir las siguientes propiedades.

a) El dominio de la función es el conjunto de los números reales positivos.

b) El rango de la función es el conjunto de los números reales.

c) La intersección con el eje “x“ es 1.

d) La gráfica no interfecta al eje “y“.

e) El eje “y“ es una asíntota vertical.

f) La función es creciente en el intervalo $(0, +\infty)$ si $a > 1$ y decreciente en el intervalo $(0, +\infty)$ si $0 < a < 1$.

g) La función es uno a uno.

Ya que las dos ecuaciones $y = \log_a x$ y $a^y = x$ son equivalentes, podemos utilizar la que sea más conveniente.

La siguiente tabla enumera varios ejemplos de enunciados exponenciales y logarítmicos equivalentes.

Forma logarìtmica.	***Forma exponencial.***
$\log_5 u = 2$	$5^2 = u$
$\log_b 8 = 3$	$b^3 = 8$
$\log_p q = r$	$p^r = q$
$\log_4(2t+3) = w$	$4^w = 2t+3$
$\log_3 x = 5 + 2z$	$3^{5+2z} = x$
$\log_3 9 = 2$	$3^2 = 9$
$\log_{10} 0.0001$	$10^{-4} = 0.0001$
$\log_8 4 = \frac{2}{3}$	$8^{\frac{2}{3}} = 4$

4.7.6. Logaritmos comunes y naturales.

Hoy en día utilizamos una calculadora para evaluar los logaritmos con base 10 (logaritmos comunes) y con base e (logaritmos naturales)

Logaritmo común (base 10)

El logaritmo con base 10 se conoce como logaritmo común y se denota omitiendo la base.

$$log_{10}x = logx$$

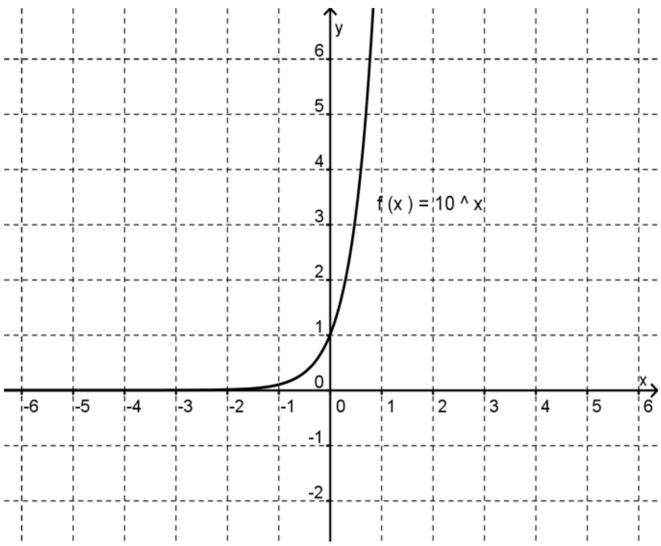
¿Cómo graficamos la función $y = f(x) = \log_{10} x = logx$?

Como $y = f(x) = logx$ es la función inversa de $y = 10^x$ podemos elaborar la tabla para la exponencial y reflejando esta gráfica en la recta $y = f(x) = x$ obtendremos la gráfica correspondiente a $y = f(x) = logx$.

Sea $y = f(x) = 10^x$

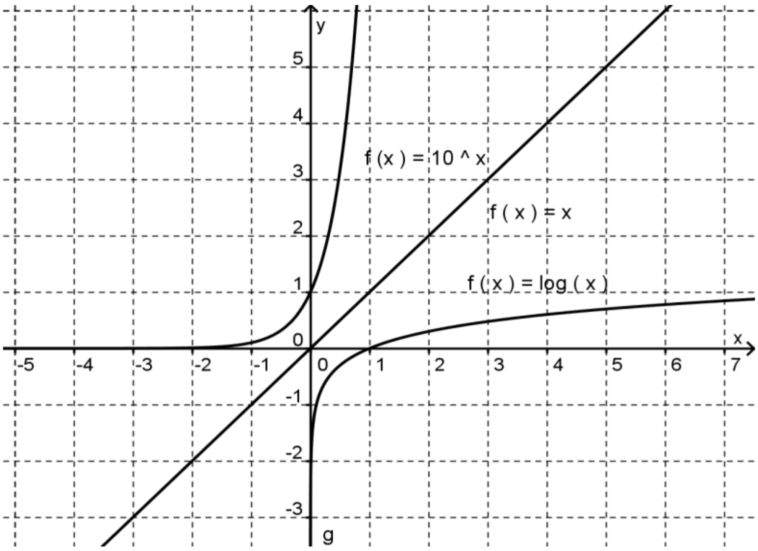
Tabulemos nuestra función como sigue y grafiquemos.

x	y
-3	$\frac{1}{10^3}$
-2	$\frac{1}{10^2}$
-1	$\frac{1}{10}$
0	1
1	10
2	100
3	1000



Como la función $y = f(x) = 10^x$ es uno a uno podemos invertir nuestras parejas ordenadas para graficar $y = \log_{10} x$. Reflejando la gráfica de la función exponencial $y = f(x) = 10^x$) sobre la recta $y = f(x) = x$

x	y
$\frac{1}{1000}$	-3
$\frac{1}{100}$	-2
$\frac{1}{10}$	-1
1	0
10	1
100	2
1000	3



Ahora analicemos lo que pasa a la función logarítmica cuando los parámetros que intervienen en ella varían.

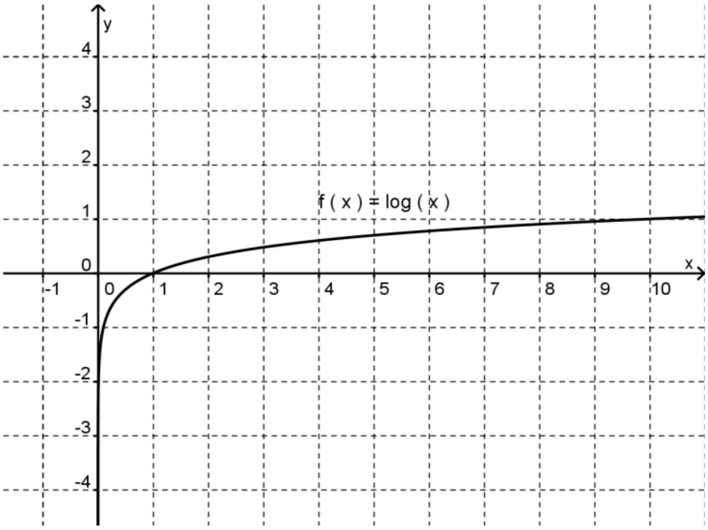
Partiendo de la forma general de la función logarítmica $y = f(x) = P_0 log_a(bx + c) + d$

Le podemos aplicar las mismas transformaciones que a la función exponencial y así poder bosquejar la gráfica sin necesidad de tabular a la función, sino que se parte de la forma básica de esta función.

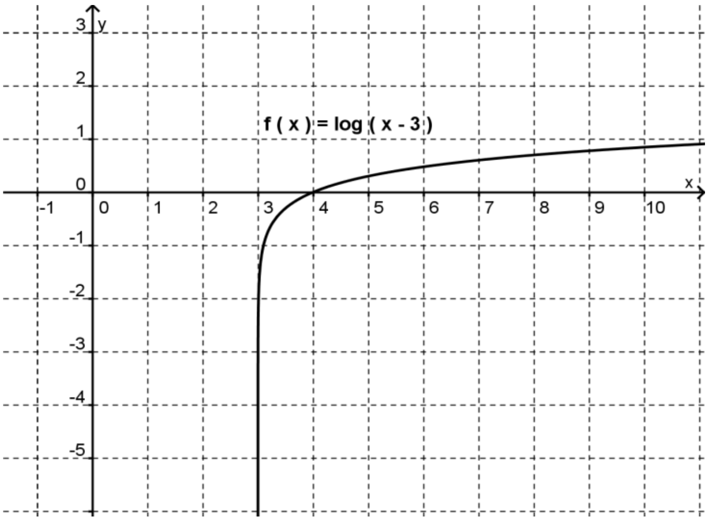
Ejemplo.

Bosqueje la gráfica de la función$\boldsymbol{y = f(x) = -2\log_{10}(x-3) - 2.}$

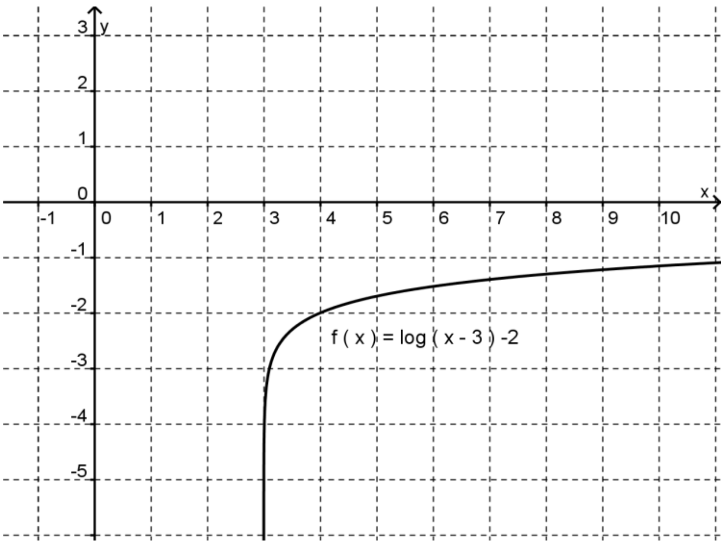
Paso 1.



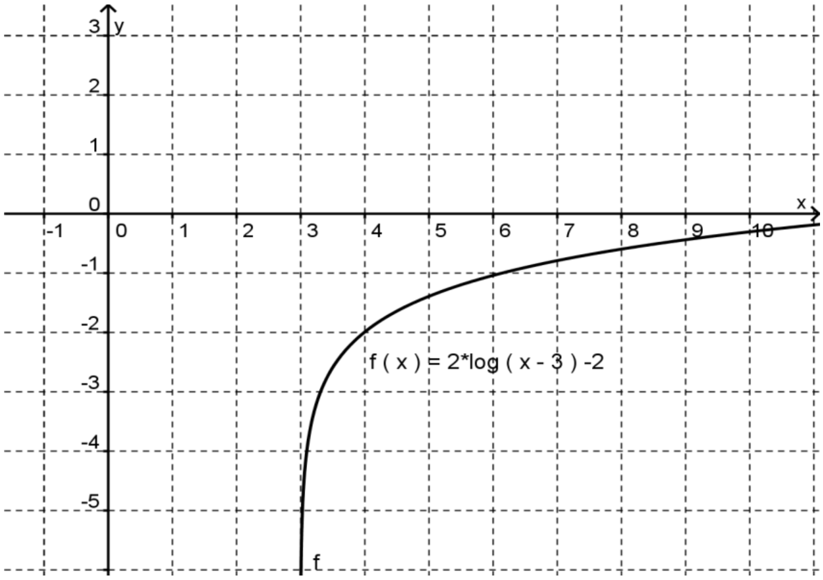
Paso 2.



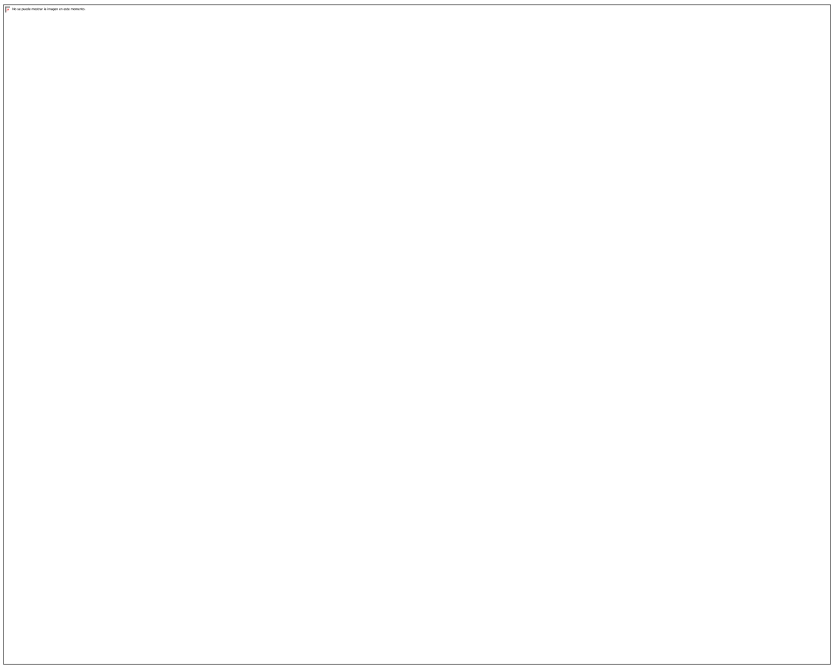
Paso 3.



Paso 4.



Paso 5.



Al dar Ctrl (Control) + clic en las siguiente etiquetas puede explorar los ejemplo anteriores y los que consideres pertinentes para reforzar los aprendizajes anteriores.

Loggeneral1.ggb   Actividades complementarias.docx

4.7.7. Logaritmo natural (base e)

De todas las posibles bases a para logaritmos, resulta que la elección más conveniente para fines del cálculo es el número e, mismo que ya se definió anteriormente.

El logaritmo con base e se conoce como logaritmo natural y se denota por ln.

$$\ln x = log_e x$$

¿Cómo graficamos la función $\ln x$?

Para hacerlo procedemos como lo hicimos para la función $y = f(x) = \log x$, ya que $\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x}) = \ln x$ es la función inversa de $y = f(x) = e^x$.

Entonces partiendo de la gráfica de $y = e^x$ podemos reflejara sobre la recta $y = f(x) = x$ para obtener la gráfica $\mathrm{y} = \ln x$.
El procedimiento es el siguiente.

Graficamos $\boldsymbol{y = f(x) = e^x}$**.**

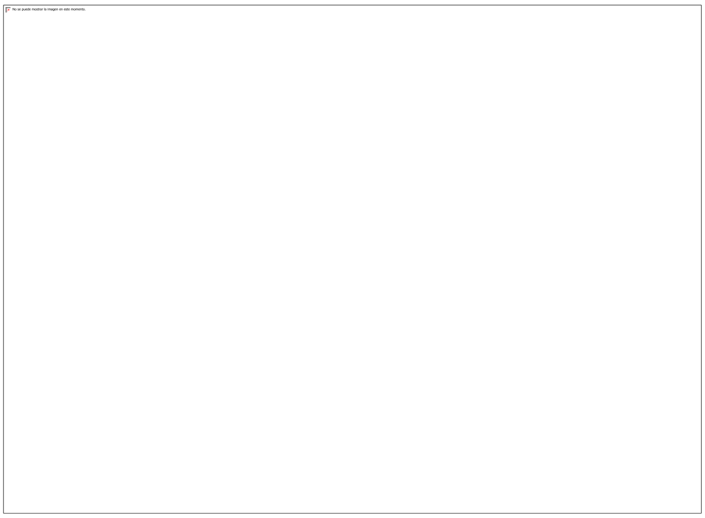
Hacemos nuestra tabla.

x	y
-3	0.04978
-2	0.1353
-1	0.3678
0	1
1	2.7182
2	7.3890
3	20.0855

Invirtiendo los valores de la tabla tenemos.

x	y
0.04978	-3
0.1353	-2
0.3678	-1
1	0
2.7182	1
7.3890	2
20.0855	3

Ahora graficamos las dos funciones en el mismo plano cartesiano.



4.7.8. Propiedades de los logaritmos naturales.

Propiedad. **Justificación.**

a) $\ln 1 = 0$ Debemos elevar e a la potencia 0 para obtener 1.

b) $\ln e = 1$ Debemos elevar e a la potencia 1 para obtener e.

c) $\ln e^x = x$ Debemos elevar e a la potencia x para obtener e^x.

d) $e^{\ln x} = x$ $\ln x$ es la potencia a la cual debe elevarse e para obtener x.

Evaluación de la función logaritmo natural.

1. $\ln e^8 = 8$

2. $e^{\ln 10} = 10$.

3. $\ln e^{3x+1} = 3x + 1$

4. $e^{\ln(5x^2+1)} = 5x^2 + 1$

4.7.9. Leyes de los logaritmos.

Puesto que los logaritmos son exponentes, las leyes de los exponentes son la base de las leyes de los logaritmos. Estas propiedades le dan a las funciones logarítmicas una amplia gama de aplicaciones como se verá después.

4.7.9.1. Leyes de los logaritmos.

Sea a un número positivo, $a \neq 1$. Sean $A > 0$, $B > 0$ y c un número real cualesquiera.

Ley.	Descripción.
1. $\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B$.	El logaritmo de un producto de números es la suma de los logaritmos de los números.
2. $\log_a(\frac{A}{B}) = \log_a A + \log_a B$	El logaritmo de un cociente de números es la diferencia de los logaritmos de los números .
3. $\log_a A^c = c \log_a A$	El logaritmo de una potencia de un número es el exponente multiplicado por el logaritmo del número.

Enseguida haremos una demostración de estas leyes con el propósito de que el alumno vea el porque de éstas.

1. Supongamos que $\log_a A = u$ y $\log_a B = v$

Cuando se escriben en forma exponencial, estas ecuaciones se convierten en:

$$a^u = A \quad \text{y} \quad a^v = B.$$

Por lo tanto:

$$\log_a(AB) = \log_a a^u a^v = \log_a a^u + \log_a a^v$$

$$\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B$$

2. Utilizando la ley 1 tenemos:

$$\log_a(A) = \log_a\left(\left(\frac{A}{B}\right)B\right) = \log_a\left(\frac{A}{B}\right) + \log_a B$$

Por lo que:

$$\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$$

3. Sea $\log_a A = u$. Entonces $a^u = A$, por lo que:

$$\log_a(A^c) = \log_a(a^u)c = uc = \mathrm{c} * \log_a A.$$

4.7.9.2. Uso de las leyes de los logaritmos para expandir expresiones.

Use las leyes de los logaritmos para reescribir cada expresión.

a) $\log_2(AB^2)$ b) $\log\left(\frac{a^2}{b^4\sqrt{c}}\right)$

c) $\log\sqrt{\frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^3-7)^2}}$ d) $\ln\left(\frac{z^4\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y^2+6y+17}}\right)$

Solución.

a) $\log_2(AB^2) = \log_2 A + \log_2 B^2$ ------------ ley 1

$= \log_2 A + 2\log_2 B$ --------------- ley 3

b) $\log\left(\frac{a^2}{b^4\sqrt{c}}\right) = \log\left(\frac{a^2}{b^4 c^{\frac{1}{2}}}\right)$------------------------ $\sqrt{c} = c^{\frac{1}{2}}$

$= \log a^2 - \log\left(b^4 c^{\frac{1}{2}}\right)$ ----------------------- ley 3

$= 2\log a - (\log b^4 + \log c^{\frac{1}{2}})$ --------------- ley 1

$= 2\log a - \left(4\log b + \frac{1}{2}\log c\right)$ ------------- ley 3

$= 2\log a - \left(4\log b + \frac{1}{2}\log c\right)$ ------------ propiedad Distributiva

c) $\log\sqrt{\frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^3-7)^2}} = \log\left(\frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^3-7)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$------------ $\sqrt{c} = c^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^3-7)^2}\right)$ ------------ ley 3

$= \frac{1}{2}((\log(x^2+4) - \log(x^2+1)(x^3-7)^2))$ -------ley 2

$= \frac{1}{2}(\log(x^2+4) - (\log(x^2+1) + \log(x^3-7)^2)$ - ----- ley 1

$= \frac{1}{2}(\log(x^2+4) - \log(x^2+1) - \log(x^3-7)^2)$ -----P. distrib.

$= \frac{1}{2}(\log(x^2+4) - (\log(x^2+1) - 2\log(x^3-7))$ - ------ ley 3

$= \frac{1}{2}\log(x^2+4) - \frac{1}{2}\log(x^2+1) - \log(x^3-7)$------- P. distrib.

d) $\ln\left(\frac{z^4\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y^2+6y+17}}\right) = \ln\left[\frac{z^4x^{\frac{1}{2}}}{(y^2+6y+17)^{\frac{1}{3}}}\right]$ --------------- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$= \ln z^4x^{\frac{1}{2}} - \ln(y^2+6y+17)^{\frac{1}{3}}$ -------------- ley 2

$= \ln z^4 + \ln x^{\frac{1}{2}} - \ln(y^2+6y+17)^{\frac{1}{3}}$ ------- ley 1

$= 4\ln z + \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{3}\ln(y^2+6y+17)$------ ley 3

4.7.9.3. Uso de las leyes de los logaritmos para evaluar expresiones.

Evalúe cada expresión.

a) $\log_5\sqrt{125}$ b) $\log_4 192 - \log_4 3$ c) $10^{2\log 4}$

d) $\log\sqrt{0.1}$ e) $e^{3\ln x}$

Solución.

a) $\log_5\sqrt{125} = \log_5(125)^{-\frac{1}{2}}$ ----------- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$= \frac{1}{2}\log_5(125)$ ---------------- ley 3

$= \frac{1}{2}\log_5(5^3)$

$= \frac{3}{2}\log_5 5$ ---------- ley 3

$= \frac{3}{2}(1) = \frac{3}{2}$ ------------- $\log_5 5 = 1$

b) $\log_4 192 - \log_4 3 = \log_4 \frac{192}{3}$ -------------- ley 2

$= \log_4 64$ --------- cociente $\frac{192}{4}$

$= \log_4 4^3$------ porque $64 = 4^3$

$= 3\log_4 4$ ----- $\log_4 4 = 1$

$= 3(1) = 3$

c) $10^{2\log 4} = 10^{\log 4^2}$-----------ley 3

$= 4^2$ -------- $a^{\log x} = x$

$= 16$

d) $\log\sqrt{0.1} = \log(0.1)^{\frac{1}{2}}$ --------- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$= \frac{1}{2}\log(0.1)$ -------- ley 3

$= \frac{1}{2}\log(10^{-1})$ ------ porque $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$

$= -\frac{1}{2}\log 10$ -------- ley 3

$= -\frac{1}{2}(1)$ ---------- $\log 10 = 1$

$= -\frac{1}{2} = -0.5$

e) $e^{3\ \ln 5} = e^{\ln 5^3}$---------- ley 3

$= 5^3$ ------------ $e^{\ln x} = 1$

$= 125$

4.7.9.4. Escribir una expresión como un solo logaritmo.

a) $\log 12 + \frac{1}{2}\log 7 - \log 2$

b) $\log_2 A + \log_2 B - 2\log_2 C$

c) $\ln(a+b) + \ln(a-b) - 2\ln c$

d) $2(\log_5 x + 2\log_5 y - 3\log_5 z)$

Solución.

a) $\log 12 + \frac{1}{2}\log 7 - \log 2 = \log 12 + \log 7^{\frac{1}{2}} - \log 2$ -------- ley3

$= \log 12 + \log\sqrt{7} - \log 2$ ------- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$= \log\left(12\sqrt{7}\right) - \log 2$ ------------ ley 1

$= \log\frac{12\sqrt{7}}{2}$ ------------------------ ley 2

b) $\log_2 A + \log_2 B - 2\log_2 C = \log_2 A + \log_2 B - \log_2 C^2$ -------- ley 3

$= \log_2(AB) - \log_2 c^2$ ----------------- ley 1

$= \log_2(\frac{AB}{C^2})$ ------------------------------- ley 2

c) $\ln(a+b) + \ln(a-b) - 2\ln c = \ln(a+b)(a-b) - 2\ln c$ -------------- ley 1

$= \ln(a+b)(a-b) - \ln c^2$ -------------- ley 3

$= \ln\frac{(a+b)(a-b)}{c^2}$ ----------------------------- ley 2

d) $2(\log_5 x + 2\log_5 y - 3\log_5 z) = 2\,(\log_5 x + \log_5 y^2 - \log_5 z^3)$ ------- ley 3

$= 2(\log_5 xy^2 - \log_5 z^3)$ ---------------- ley 1

$$= 2(\log_5 \frac{xy^2}{z^3}) \text{ ---------------------------- ley 2}$$

$$= 2\log_5 \frac{xy^2}{z^3}$$

$$= \log_5 \left(\frac{xy^2}{z^3}\right)^2 \text{ ---------------------------- ley 3}$$

4.7.9.5. Cambio de base.

Para algunos fines, resulta útil cambiar de logaritmos con una base a logaritmos con otra. Consideremos que se nos da $\log_a x$ y deseamos determinar $\log_b x$.

Sea:

$$y = \log_b x$$

Escribimos lo anterior en forma exponencial y aplicamos el logaritmo con base a en ambos lados tenemos que:

$b^y = x$ --------------- Forma exponencial.

$\log_a b^y = \log_a x$ --------- se aplica el logaritmo base a en ambos lados de la ecuación.

$y \log_a b = \log_a x$ ---------- ley 3.

$y = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ ------ se divide por $\log_a b$ ambos miembros de la ecuación.

4.7.9.6. Use la fórmula del cambio de base para evaluar logaritmos.

Utilice la fórmula del cambio de base y los logaritmos comunes o naturales para evaluar cada uno de los siguientes logaritmos y exprese la respuesta a cinco decimales.

a) $\log_8 5$ b) $\log_9 20$

a) Utilizamos la fórmula del cambio de base con $b = 8$ y $a = 10$ para hacer la conversión a logaritmos comunes.

$$\log_8 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 8} = \frac{0.69897}{0.90308} = 0.77398$$

b) Utilizamos la fórmula del cambio de base con $b = 9$ y $a = e$ para convertir a logaritmos naturales.

$$\log_9 20 = \frac{\ln 20}{\ln 9} = \frac{2.99573}{0.95324} = 1.36342$$

Si aplicamos logaritmos comunes observaremos que obtendremos el mismo resultado.

$$\log_9 20 = \frac{\log_{10} 20}{\log_{10} 9} = \frac{1.30103}{0.95324} = 1.36342$$

4.8. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

4.8.1. Ecuaciones exponenciales.

Consideremos la función $P(t) = 1000\left(\frac{3}{2}\right)^t$. Cuando $t = 1$, vemos que $P(1) = 1500$. Supongamos que ahora cambiamos el problema: Para un valor dado de P, encontremos el valor correspondiente de t. Por ejemplo si $P = 2250$, debemos resolver la ecuación exponencial.

$$2250 = 1000\left(\frac{3}{2}\right)^t \quad \text{o} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^t = 2.25$$

Para encontrar el valor de la variable t.

Escribimos la última ecuación en una forma logarítmica equivalente, por lo que tenemos:

$$t = \log_{\frac{3}{2}} 2.25$$

$$t = \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{9}{4}\right)$$

$$t = \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$t = 2\log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{2}$$

$$t = 2(1) = 2$$

Podemos comprobar nuestro resultado sustituyendo el valor de t en la ecuación propuesta como sigue:

Comprobación.

$$1000\left(\frac{3}{2}\right)^{t} = 2250$$
$$1000\left(\frac{3}{2}\right)^{2} = 2250$$
$$1000\left(\frac{9}{4}\right) = 2250$$
$$250(9) = 2250$$
$$2250 = 2250$$

Lo cual comprueba que nuestra solución es correcta.

4.8.2. Sugerencias para resolver ecuaciones exponenciales.

a) Aisle la expresión exponencial de un lado de la ecuación.

b) Tome logaritmos de ambos lados, y después utilice las leyes de los logaritmos para "bajar el exponente".

c) Despeje la variable.

Ejemplos.

a) Determine la solución de la ecuación $3^{x+2} = 7$ y exprese la respuesta a seis decimales.

Solución.

$$3^{x+2} = 7$$

$\log(3^{x+2}) = \log 7$---------- tomando el logaritmo de ambos lados de la ecuación.

$(x+2)\log 3 = \log 7$----------- ley 3

$x + 2 = \frac{\log 7}{\log 3}$ ------------ divida por logaritmo de 3.

$x = \frac{\log 7}{\log 3} - 2$ ----------- reste 2 de ambos lados.

$x = -0.228756$------- use una calculadora..

Comprobación.

Nuevamente vemos que se satisface la solución y por lo tanto es correcta.

$$3^{x+2} = 7$$

$$3^{-0.228756+2} = 7$$

$$3^{1.771244} \approx 7$$

b) Resuelve la ecuación $8e^{2x} = 20$

Solución.

$$8e^{2x} = 20$$

$e^{2x} = \frac{20}{8}$ ----------Divida entre 8.

$\ln e^{2x} = \ln 2.5$ ------Tome ln de ambos lados de la ecuación.

$2x = \ln 2.5$ -------- propiedad $\ln e^{x} = x$.

$x = \frac{\ln 2.5}{2}$ --------- divida por 2.

$x \approx \frac{0.91629}{2}$------- use calculadora.

$$x \approx 0.4581$$

Comprobación.

$$8e^{2x} = 20$$

$$8e^{2(0.4581)} = 20$$

$$8e^{0.9162} = 20$$

$$8(2.4997) = 20$$

$$19.9981 \approx 20$$

Se corrobora la solución.

c) Resuelva la ecuación $e^{3-2x} = 4$

Solución.

$$e^{3-2x} = 4$$

$\ln e^{3-2x} = \ln 4$ -------- tome ln de ambos lados de la ecuación.

$3 - 2x = \ln 4$ --------- propiedad $\ln e^{x} = x$.

$-2x = \ln 4 - 3$ ------- se resta 3 en ambos lados.

$2x = 3 - \ln 4$ --------- se multiplican ambos lados por -1.

$x = \frac{3-\ln x}{2}$ ---- divida entre 2 ambos miembros de la ecuación.

$x = \frac{3-1.3862}{2}$ ------- use calculadora.

$x = \frac{1.6137}{2}$ ------------ use calculadora.

$x \approx 0.80685$ ------------ use calculadora.

Comprobación.

$$e^{3-2x} = 4$$

$$e^{3-2(0.80685)} = 4$$

$$e^{3-1.6137} = 4$$

$$e^{1.38629} = 4$$

$$3.99998 \approx 4$$

Se comprueba la solución.

d) Resuelva la ecuación $e^{2x} - e^x - 6 = 0$

Solución.

$e^{2x} - e^x - 6 = 0$

$(e^x)^2 - e^x - 6 = 0$--------- ley de los exponentes.

$(e^x - 3)(e^x + 2) = 0$ --------- factorización de un trinomio cuadrático.

$e^x - 3 = 0$ o $e^x + 2 = 0$ ---------- propiedad del producto cero.
$e^x = 3$ o $e^x = -2$

La ecuación $e^x = 3$ nos lleva a $x = \ln 3$. Pero la ecuación $e^x = -2$ no tiene solución porque $e^x > 0$ para toda x. Por lo tanto, es la única solución.

Comprobación.

$$e^{2x} - e^x - 6 = 0$$

$$e^{2\ln 3} - e^{\ln 3} - 6 = 0$$

$$e^{\ln 3^2} - e^{\ln 3} - 6 = 0$$

$$e^{\ln 9} - e^{\ln 3} - 6 = 0$$

$$9 - 3 - 6 = 0$$

$$0 = 0$$

Lo que queríamos mostrar para comprobar nuestra solución.

e) Resuelve la ecuación: $3x^2e^x + x^3e^x = 0$

Solución.

$$3x^2e^x + x^3e^x = 0$$

$x^2e^x(3 + x) = 0$ -------- factorice x^2e^x.

$x^2 = 0$ o $3 + x = 0$ o $e^x = 0$ ------------ propiedad del producto cero.

La ecuación $e^x = 0$ no tiene solución porque $e^x > 0$ para toda x. Por lo tanto, $x = 0$ o $x = -3$ son las únicas soluciones.

Comprobación.

Para $x = 0$ para $x = -3$

$0 = 0$ $3(-3)^2e^{-3} + (-3)^3e^{-3} = 0$

$$27e^{-3} - 27e^{-3} = 0$$

$$0 = 0$$

Por lo que nuestras soluciones son correctas.

4.8.3. Ecuaciones logarítmicas.

Una ecuación logarítmica es aquella en la cual está presente la variable logaritmo.

Ejemplo.

$$\log_2(x + 2) = 5$$

Para despejar x escribimos la ecuación en forma exponencial.

$x + 2 = 2^5$ -------forma exponencial.

$x = 2^5 - 2$ ------restamos 2 a ambos miembros de la ecuación.

$x = 32 - 2$ ---------------- desarrollamos 2^5.

$x = 30$ -------------------- despejamos x.

Forma alternativa de solución.

$$\log_2(x+2) = 5$$

$2^{\log_2(x+2)} = 2^5$------------ eleve 2 tomando como exponente cada lado.

$\boldsymbol{x + 2 = 2^5}$ --------------- $a^{\log_a x}$

$x = 2^5 - 2$ ------- restamos 2 a ambos miembros de la ecuación.

$x = 32 - 2$ ----------------- desarrollando la potencia de 2.

$x = 30$ ---------- despejamos x.

Comprobación.

$$\boldsymbol{\log_2(x+2) = 5}$$

Para evaluar log_2 es necesario convertir a su forma exponencial.

$$x + 2 = 2^5$$

$$30 + 2 = 2^5$$

$$32 = 32$$

Lo que muestra que nuestra solución es correcta.

Los procedimientos usados para resolver esta ecuación son típicos.

4.8.3.1. Sugerencias para resolver ecuaciones logarítmicas.

a) Aisle el término logarítmico en un lado de la ecuación; quizá sea necesario primero combinar los términos logarítmicos.

b) Escriba la ecuación en forma exponencial (o eleve la base tomando como exponente cada lado de la ecuación)

c) Despeje la variable.

Otros ejemplos.

a) Resuelva la ecuación $\mathbf{ln}\,\boldsymbol{x} = \mathbf{8}$

Solución.

$$\ln x = 8$$

$x = e^8$ --------- forma exponencial.

$x = 2981$ ------- uso de calculadora.

Comprobación.

$$\ln x = 8$$

$$\ln 2981 = 8$$

$$8.000014 \approx 8$$

Otra manera de resolver este problema es como sigue.

$$\ln x = 8$$

$e^{\ln x} = e^8$ ----------Eleve e tomando como exponente cada lado.

$x = e^8$ ------------ $e^{\ln x} = x$

$$x = 2981$$

b) Resuelva la ecuación $\mathbf{log_2(25 - \boldsymbol{x}) = 3}$

Solución.

$$\log_2(25 - x) = 3$$

$2^{\log_2(25-x)} = 2^3$ -------- eleve 2 tomando como exponente cada lado.

$25 - x = 2^3$ ----------- $a^{\log_a x} = x$

$25 - x = 8$ ------------ elevando al cubo 2.

$-x = 8 - 25$ -------- restamos 25 a ambos miembros de la igualdad.

$-x = -17$ -------- Multiplicamos ambos miembros de la ecuación por -1.

$x = 17$ -------- despeje x.

Comprobación.

$$25 - x = 2^3$$

$$25 - 7 = 8$$

$$8 = 8$$

Lo cual muestra que nuestra solución es la adecuada.

c) Resuelva la ecuación $\mathbf{\log_3 x - \log_3 4 = \log_3 12}$

Solución.

$\log_3 x - \log_3 4 = \log_3 12$

$\log_3 x = \log_3 12 + \log_3 4$ ----- sumando en cada lado $\log_3 4$.

$\log_3 x = \log_3 (12)(4)$-----------ley 1.

$\log_3 x = \log_3 48$ ------------- producto $(12)(4)$.

$3^{\log_3 x} = 3^{\log_3 48}$ -------------- eleve 3 tomando como exponente cada lado.

$x = 48$ -------- $a^{\log_a x}$.

d) Resuelva la ecuación $\mathbf{4 + 3\log 2x = 16}$

Solución.

$4 + 3\log 2x = 16$

$3\log 2x = 16 - 4$ --------- restando 4 a ambos miembros de la ecuación.

$3\log 2x = 12$

$\log 2x = \frac{12}{3}$ ---------- dividiendo por 3 ambos miembros de la ecuación.

$\log 2x = 4$

$10^{\log 2x} = 10^4$ --------- eleve 10 tomando como exponente cada lado.

$2x = 10000$ ----------- $a^{\log_a x} = x$.

$x = \frac{10000}{2}$ ------- divida por 2 ambos miembros de la ecuación.

$x = 5000$ --------- despeje x.

Comprobación.

$$4 + 3\log 2x = 16$$

$$4 + 3\log 2(5000) = 16$$

$$4 + 3\log 10000 = 16$$

$$4 + 3(4) = 16$$

$$4 + 12 = 16$$

$$16 = 16$$

e) Resuelva la ecuación $\mathbf{\log(x+2) + \log(x-1) = 1}$

Solución.

$$\log(x+2) + \log(x-1) = 1$$

$\log(x+2)(x-1) = 1$ ----------- ley 1.

$10^{\log(x+2)(x-1)} = 10^1$ ----------- Eleve 10 tomando como exponente cada lado.

$(x+2)(x-1) = 10$ -------- $a^{\log_a x} = x$.

$x^2 + x - 2 = 10$ ------ desarrollando el lado izquierdo de la ecuación.

$x^2 + x - 2 - 10 = 0$ --------- reste 10 de cada miembro de la ecuación.

$x^2 + x - 12 = 0$ -------------sumando $-2 - 10$.

$(x+4)(x-3) = 0$ ---------- factorizando el lado izquierdo.

$x + 4 = 0$ o $x - 3 = 0$ ---------- propiedad del producto 0.

$x_1 = -4$ o $x_2 = 3$ ------- despeje x.

Verificamos estas soluciones posibles en la ecuación original y determinamos que $x = -4$ no es una solución (porque los logaritmos de los números negativos no están definidos), sin embargo $x = 3$ es una solución de la ecuación.

Comprobación.

$$\log(x+2) + \log(x-1) = 1$$

$$\log(3+2) + \log(3-1) = 1$$

$$\log 5 + \log 2 = 1$$

$$\log(5)(2) = 1$$

$$\log 10 = 1$$

$$1 = 1$$

4.9. Aplicaciones de las funciones exponenciales y logarítmicas.

Los logaritmos fueron inventados por John Napier con el fin de eliminar los cálculos tediosos involucrados en la multiplicación, división, potenciación y extracción de raíces de números grandes que se presentan en Astronomía y en otras Ciencias. Con el advenimiento de las computadoras y las calculadoras, los logaritmos ya no tienen importancia para este tipo de cálculos. Sin embargo, los logaritmos se presentan en problemas de crecimiento y decrecimiento exponencial, puesto que son las inversas de las funciones exponenciales. Debido a las leyes de los logaritmos, también resultan ser útiles en la medición de la intensidad de un sonido, la intensidad de los terremotos y muchos otros fenómenos. En esta sección estudiaremos algunas de estas aplicaciones.

4.9.1. Interés compuesto.

Si un capital P esta invertido a una tasa de interés r durante un periodo de t años, entonces el monto A de la inversión está dado por:

$A = P(1 + r)$--------- interés simple (durante un año)

$A = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ ------ interés compuesto n veces por año.

$A = Pe^{rt}$ ------------- interés continuamente compuesto.

Ejemplos.

a) Se invierte una suma de $\$5000$, a una tasa de interés de 9% anual.

Determine el tiempo necesario para que este dinero se duplique si el interés se calcula de acuerdo con el método siguiente.

a) Compuesto semestralmente.

b) Compuesto continuo.

Solución.

a) Utilizamos la fórmula del interés compuesto con $P = \$5000$, $A = \$10000$, $r = 0.09$, $n = 2$ y resolvemos la ecuación exponencial resultante en función de t.

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$10000 = 5000\left(1 + \frac{0.09}{2}\right)^{2t}$$

$$\frac{10000}{5000} = \left(1 + \frac{0.09}{2}\right)^{2t}$$

$$(1.045)^{2t} = 2$$

$$\log(1.045)^{2t} = \log 2$$

$$2t\log(1.045) = \log 2$$

$$t = \frac{\log 2}{2\log(1.045)}$$

$$t = \frac{0.3010}{2(0.0191)}$$

$t \approx 7.9$ años

Por lo tanto, el dinero se duplicará en 7.9 años.

b) Utilizamos la fórmula del interés continuamente compuesto con $P = \$5000$, $A = \$10000$, $r = 0.09$ y resolvemos la ecuación exponencial resultante.

$$A = Pe^{rt}$$

$$5000e^{0.09t} = 10000$$

$$e^{0.09t} = \frac{10000}{5000}$$

$$e^{0.09t} = 2$$

$$\ln e^{0.09t} = \ln 2$$

$$0.09t = \ln 2$$

$$t = \frac{\ln 2}{0.09}$$

$$t = \frac{0.6931}{0.09}$$

$t = 7.701$ años.

$t = 7.7$ años.

Por lo tanto, el dinero se duplicará en 7.7 años.

b) Determine el rendimiento porcentual anual para una inversión que gana interés a una tasa de 6% anual compuesto diariamente.

Solución.

Después de un año el capital P crecerá hasta el monto.

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$A = P\left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{365} = P(1.06183)$$

La fórmula del interés compuesto es:

$$P = (1 + r)$$

Por lo tanto:

$$P(1 + r) = P(1.06183)$$

$$1 + r = 1.06183$$

$$r = 1.06183 - 1$$

$$r = 0.06183$$

$$r = 6.183\%$$

4.9.2. Crecimiento Exponencial.

Si n_0 es el tamaño inicial de la población, entonces la población $n(t)$ en el tiempo t está dada por:

$$n(t) = n_0 e^{rt}$$

Donde r es la tasa de crecimiento relativo expresada como una función de la población.

Ahora que ya conocemos los logaritmos, podemos responder a preguntas relacionadas con el tiempo en el cual una población alcanza un determinado tamaño.

Ejemplos.

a) La población del mundo en 1995 era de 5700 millones, y la tasa de crecimiento relativa estimada es de 2% anual. Sí la población sigue creciendo a esta tasa, ¿Cuándo alcanza 57000 millones de personas?

Solución.

Utilizamos la fórmula para el crecimiento de la población con $n_0 = 5700$ millones, $r = 0.02$ y $n(t) = 57000$ millones. Esto nos lleva a una ecuación exponencial, de la que despejamos a t.

$$n(t) = n_0 e^{rt}$$

$$5700e^{0.02t} = 57000$$

$$e^{0.02t} = \frac{57000}{5700}$$

$$e^{0.02t} = 10$$

$$\ln e^{0.02t} = \ln 10$$

$$0.02t = \ln 10$$

$$t = \frac{\ln 10}{0.02}$$

$$t = 115.125 \text{ años}$$

$$t \approx 115 \text{ años}$$

Por lo tanto, la población alcanzará 57000 millones en aproximadamente 115 años, esto es, el año $1995 + 115 = 3010$.

b) Un cultivo se inicia con 10000 bacterias, y su número se duplica cada 40 minutos.

a) Obtenga una fórmula para el número de bacterias en el tiempo t.

b) Determine el número de bacterias después de una hora.

c) ¿Después de cuántos minutos habrán 50000 bacterias?

Solución.

a) Para determinar la fórmula del crecimiento de la población, necesitamos obtener la tasa r. Para ello utilizamos la fórmula con $n_0 = 1000$, $t = 40$ y $n(t) = 20000$, y después despejamos t.

$$n(t) = n_0 e^{rt}$$

$$10000e^{40r} = 20000$$

$$e^{40r} = \frac{20000}{10000}$$

$$e^{40r} = 2$$

$$\ln e^{40r} = \ln 2$$

$$40r = \ln 2$$

$$r = \frac{\ln 2}{40}$$

$$r = \frac{0.6931}{40}$$

$$r = 0.01733$$

Ahora que ya sabemos que $r = 0.01733$, podemos escribir la fórmula del crecimiento de la población.

$$n(t) = 10000e^{0.01733t}$$

b) Utilizando la fórmula obtenida en el inciso a) con $t = 60$ minutos (1 hora) obtenemos.

$$n(t) = 10000e^{0.01733t}$$

$$n(60) = 10000e^{0.01733(60)}$$

$$n(60) = 100006e^{1.0398}$$

$$n(60) = 10000(2.82865)$$

$$n(60) = 28286.5122$$

$n(60) \approx 28287$ bacterias.

Por lo tanto, el número de bacterias después de una hora es de aproximadamente 28000 bacterias.

c) Utilizamos la fórmula obtenida en el inciso a) con $n(t) = 50000$ y resolvemos la ecuación exponencial resultante para t.

$$10000e^{0.01733t} = 50000$$

$$e^{0.01733t} = \frac{50000}{10000}$$

$$e^{0.01733t} = 5$$

$$\ln e^{0.01733t} = \ln 5$$

$$0.01733t = \ln 5$$

$$t = \frac{\ln 5}{0.01733}$$

$$t = \frac{1.60943}{0.01733}$$

$$t = 92.8695$$

Por lo tanto, el conteo de bacterias alcanzará 50000 en aproximadamente 93 minutos.

4.9.3. Desintegración radiactiva.

El elemento 88 mejor conocido como radio, es radiactivo. Esto significa que los átomos de radio se desintegran espontáneamente, emitiendo una radiación en forma de partículas alfa, beta o rayos gama. Cuando un átomo se desintegra de esta manera, su núcleo se transforma en el núcleo de otro elemento. El núcleo de un átomo de radio en desintegración se transforma en el núcleo de un átomo de radón, la función exponencial $n(t) = n_0 e^{rt}$ también puede servir como modelo matemático para aproximar la cantidad que queda de un elemento en proceso de desintegración mediante la radiactividad.

Ejemplos.

a) Supongamos que hay 20 gramos de radio disponibles inicialmente. Después de t años la cantidad restante está dada por:

$$n(t) = 20e^{-0.000418t}$$

Encuentre la cantidad de radio disponible inicialmente después de 100 años. ¿Qué porcentaje de los 20 gramos se habrá desintegrado después de 100 años?

Solución.

$$n(100) = 20e^{-0.000418(100)}$$

$$n(100) = 20e^{-0.0418}$$

$$n(100) = 20(0.9590)$$

$$n(100) = 19.1812 \text{ gramos}$$

En otras palabras, después de 100 años sólo $\frac{20-19.182}{20} \times 100\% = 4.1\%$ de la cantidad inicial se ha desintegrado.

4.9.4. Vida media.

La vida media de un elemento radiactivo se define por el tiempo que se tarda la mitad de cierta cantidad de ese elemento en desintegrarse y transformarse en un nuevo elemento. La vida media es la medida de la estabilidad del elemento, es decir, cuanto más corta sea la vida media, más inestable es el elemento.

Ejemplo.

Sí hay n_0 gramos de radio inicialmente, entonces el número de gramos que quedan t años después es de:

$$n(t) = n_0 e^{-0.000418t}$$

Determina la vida media del radio.

Solución.

Debemos encontrar el tiempo en que$n = \frac{n_0}{2}$, es decir, debemos resolver la ecuación, $\frac{n_0}{2} = n_0 e^{-0.000418t}$ para t.

Dividiendo por n_0 y reformulándola en términos logarítmicos:

$$e^{-0.000418t} = \frac{1}{2}$$

$$\ln e^{-0.000418t} = \ln \frac{1}{2}$$

$$-0.00041 = \ln \tfrac{1}{2}$$

$$t = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-0.000418}$$

$$t = \frac{-0.693147}{-0.000418}$$

$$t = 1658 \text{ años.}$$

Nótese que la cantidad inicial n_0 de radio no ha intervenido en el cálculo real de la vida media. Así, la vida media de un gramo, 20 gramos o 10000 gramos de radio es la misma. La mitad de cualquier cantidad de radio tarda 1700 años para transformarse en radón.

4.9.5. Carbono 14.

La edad aproximada de los fósiles puede determinarse por un método conocido como carbono 14. Este método, inventado por el químico Willard Lobby en 1950, se basa en el hecho de que los organismos vivos absorben carbono 14 radiactivo, $C - 14$ a través de los procesos de alimentación y respiración, dejando de absorberlo al morir. La vida media del carbono 14 es de 5600 años.

Ejemplo.

Se encontró un fósil con $\frac{1}{1000}$ de la cantidad de $C - 14$ que el organismo contenía mientras vivió.

Determine la edad aproximada del fósil.

Solución.

Sí había una cantidad inicial de n_0 gramos de carbono 14 en el organismo, entonces t años después de su muerte hay $n(t) = n_0 e^{rt}$ gramos restantes. Cuando 5600 años, $n(t) = \frac{n_0}{2}$, y así.

$$\frac{n_0}{2} = n_0 e^{5600r}$$

Resolviendo la última ecuación para r tenemos:

$$e^{560r} = \frac{1}{2}$$

$$\ln e^{560r} = \ln \frac{1}{2}$$

$$560r = \ln \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{\ln \frac{1}{2}}{560}$$

$$r = -0.000124$$

Por lo tanto:

$$n(t) = n_0 e^{-0.000124t}$$

Finalmente, para determinar la edad del fósil, despejando a t en la última ecuación cuando $n(t) = \frac{n_0}{1000}$

$$\frac{n_0}{1000} = n_0 e^{-0.000124t}$$

$$e^{-0.000124t} = \frac{1}{1000}$$

$$\ln e^{-0.00124t} = \ln \frac{1}{1000}$$

$$-0.000124t = \ln \frac{1}{1000}$$

$$t = \frac{\ln \frac{1}{1000}}{-0.000124}$$

$$t = \frac{-6.9077}{-0.000124}$$

$$t = 55707.7 \text{ años}$$

4.9.6. Escala de Richter.

En 1935 el sismólogo norteamericano Charles Richter $(1900 - 1985)$ ideó una escala para comparar la fuerza de los diferentes terremotos. En la escala de Richter la magnitud R de un terremoto se define por:$R = \log_{10} \frac{A}{A_0}$.
Donde A es la magnitud de la onda sísmica mayor del terremoto y A_0 es una amplitud de referencia que corresponde a la magnitud de $r = 0$.

Ejemplo.
La magnitud del famoso terremoto de San Francisco de 1906 se ha calculado en 8.25 en la escala de Richter. En 1979 un terremoto de magnitud 5.95 se dio en esta ciudad. ¿Cuántas veces más intenso fue el de 1906?

Solución.

$$R = \log_{10} \frac{A}{A_0}$$

$$8.25 = \log_{1o} \left(\frac{A}{A_0}\right)_{1906} \quad \text{y} \quad 5.95 = \log_{1o} \left(\frac{A}{A_0}\right)_{1979}$$

Esto significa que:

$$\left(\frac{A}{A_0}\right)_{1906} = 10^{8.25} \quad \text{y} \quad \left(\frac{A}{A_0}\right)_{1979} = 10^{5.95}$$

Ahora, como $8.25 = 2.3 + 5.95$, se deduce de las leyes de los exponentes que:

$$\left(\frac{A}{A_0}\right)_{1900} = 10^{2.3} \times 10^{5.95}$$

$$\left(\frac{A}{A_0}\right)_{1900} = 10^{2.3} \times 10^{5.95}$$

$$\left(\frac{A}{A_0}\right)_{1900} = 10^{2.3} \left(\frac{A}{A_0}\right)_{1979}$$

$$\left(\frac{A}{A_0}\right)_{1900} = 199.526 \left(\frac{A}{A_0}\right)_{1979}$$

$$\left(\frac{A}{A_0}\right)_{1900} \approx 199.526 \left(\frac{A}{A_0}\right)_{1979}$$

Es decir, que el terremoto de 1906 fue aproximadamente 200 veces más intenso que el de 1979.

4.9.7. Escala en decibeles.

El oído es sensible a una gama extremadamente amplia de intensidades de sonido. Tomamos como referencia la intensidad $I_0 = 10^{-12} \frac{watts}{m^2}$ a una frecuencia de 1000 Hertz, lo que mide un sonido que es apenas audible (el umbral de la audición)

La sensación psicológica del volumen sonoro varía según el logaritmo de la intensidad (ley de Weber - Fechner) y por lo tanto el nivel de intensidadβ, medido en decibeles (dB), se define como:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

El nivel de intensidad del sonido de referencia apenas audible es:

$$\beta = \log \frac{I}{I_0} = 10 \log 1 = 0$$

Ejemplo.

Determine el nivel de intensidad en decibeles de un motor jet durante el despegue, si la intensidad que se midió fue de $100 \frac{watts}{m^2}$.

Solución.

De la definición del nivel de intensidad, vemos que:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{10^2}{10^{-12}}$$

$$\beta = 10 \log 10^{14} = 14(10 \log 10)$$

$$\beta = 140(1)$$

$$\beta = 140\ dB$$

Así, el nivel de intensidad es de $140\ dB$.

Problemas propuestos.

1. Grafique la función sin usar el procedimiento de trazar puntos, sino partiendo de la de la gráfica básica de la función exponencial. Determine el dominio, el rango y las asíntotas.

a) $f(x) = -3^{x}$

b) $f(x) = 2^{x} - 3$

c) $f(x) = 10^{x+3}$

d) $f(x) = 2^{x+1} + 1$

e) $f(x) = 10^{-x}$

f) $f(x) = -3^{x} + 6$

g) $f(x) = 5^{x} + 3$

h) $f(x) = e^{x+3}$

i) $f(x) = e^{x-2} + 3$

j) $f(x) = e^{-x} - 2$

2. Grafique la función sin usar el procedimiento de trazar puntos, sino partiendo de la de la gráfica básica de la función logarítmica. Determine el dominio, el rango y las asíntotas.

a) $f(x) = \log_2(x-4)$

b) $f(x) = \log_3 x + 2$

c. $f(x) = -\log x$

d) $f(x) = -\log x + 1$

e) $f(x) = \log_3(x-2) - 2$

f) $f(x) = \ln(x+2)$

g) $f(x) = \ln x + 1$

h) $f(x) = -\ln(x-2) + 3$

i) $f(x) = \ln(1-x) - 2$

j) $f(x) = \ln(1-x) - 3$

3. Use las leyes de los logaritmos para reescribir la expresión dada en una forma sin logaritmos de un producto, cociente o potencia.

a) $\log_5 \sqrt{x^2+1}$

b) $\log_{12}\left(\dfrac{x^3 y^4}{z^6}\right)$

c) $\log_2\left(\dfrac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2-1}}\right)$

d) $\ln\left(x\sqrt{\dfrac{y}{z}}\right)$

e) $\ln \sqrt[4]{x^2+y^2}$

f) $\ln\left(\dfrac{10^x}{x(x^2+1)(x^4+2)}\right)$

4. Reescriba la expresión dada como un solo logaritmo.

a) $\log_3 5 + 5\log_3 2$

b) $\log_2 A + \log_2 B - 2\log_2 C$

c) $4\log x - \dfrac{1}{3}\log(x^2+1) + 2\log(x-1)$

d) $\ln 5 + 2\ln x + 3\ln(x^2+5)$

e) $\frac{1}{3}\log(2x+1)+\frac{1}{2}\left[\log(x-4)-\log(x^4-x^2-1\right]$

5. Evalúe la expresión dada.

a) $\log_2 112 - \log_2 7$ b) $\log 2 + \log 5$ c) $\log_{12} 9 + \log_{12} 16$

d) $\ln 6 - \ln 15 + \ln 20$ e) $\log_2 8^{33}$

6. Use la fórmula del cambio de base y una calculadora para evaluar el logaritmo, y exprese el valor a seis decimales.

a) $\log_2 7$ b) $\log_5 2$ c) $\log_3 11$ d) $\log_6 92$ e) $\log_6 532$

7. Determine la solución de la ecuación exponencial, y exprésela a cuatro decimales.

a) $5^{x^2-3x} = 5^{2x-6}$ f) $e^{2x-5} = 30$

b) $3^{x^2-2x} = 3^{x+4}$ g) $e^{3-5x} = 16$

c) $7^{-x^2+2x} = 7^{-4x^2+5}$ h) $2^{3x+1} = 3^{x-2}$

d) $\left(2^{8x^2}\right)\left(2^{4x}\right)\left(2^{-2}\right) = \left(2^{2x^2}\right)\left(2^{5x}\right)$ i) $7^{\frac{x}{2}} = 5^{1-x}$

e) $4^{2x} - 6\left(4^x\right) + 8 = 0$ j) $e^{2x} - e^x - 6 = 0$

8. Resuelva la ecuación logarítmica para x.

a) $\log(3x+5) = 2$ f) $\ln(3x-10) = 5$

b) $\log_3(2-x) = 3$ g) $\ln(x^2-1) = 2$

c) $\log_2 3 + \log_2 x = \log_2 5 + \log_2(x-2)$ h) $\ln(2x^2+6) = 4$

d) $\log x + \log(x-1) = \log 4x$ i) $\ln\left(\frac{x^2}{3} + 2 = 5\right)$

e) $\log_5(x+1) - \log_5(x-1) = 2$ j) $\ln(x-1) + \ln(x+2) = 1$

9. Una persona invierte $\$10000$ en una cuenta que paga 8.5% anual compuesto trimestralmente.

a) Determine el monto después de 3 años.

b) ¿Cuánto tarda la inversión en duplicarse?

10. Una persona invierte $\$6500$ en una cuenta que paga 6% de interés anual continuamente compuesto.

a) ¿Cuál es el monto después de 2 años?

b) ¿Cuánto tardará para que la inversión alcance $\$8000$?

11. Determine el tiempo necesario para que una inversión de $\$5000$ crezca a $\$8000$ a una tasa de interés de 9.5% anual compuesto trimestralmente.

12. Nancy desea invertir $\$4000$ en certificados de ahorro que tienen una tasa de interés de 9.75% anual, compuesto semestralmente. ¿Qué periodo debe escoger para ahorrar un total $5000?

13. ¿Cuánto tardará una inversión de $\$1000$ en duplicar su valor si la tasa de interés es de 8.5% anual continuamente compuesto?

14. Se invierte una suma de $\$1000$ durante 4 años, y se calcula un interés compuesto semestral. Si esta suma alcanzó $\$1435.77$ en el tiempo dado, ¿Cuál fue la tasa de interés?

15. Determine el rendimiento porcentual anual para una inversión que gana 8% anual compuesto mensualmente.

16. Determine el rendimiento porcentual anual de una inversión $5\frac{1}{2}\%$ anual, continuamente compuesto.

17. El número de bacterias en un cultivo está dado por la fórmula $n(t) = 500e^{0.45t}$ donde t se mide en horas.

a) ¿Cuál es el número inicial de bacteria?

b) ¿Cuál es la tasa de crecimiento relativo de esta población de bacterias? Exprese su respuesta como un porcentaje.

c) ¿Cuántas bacterias hay en el cultivo después de 3 horas?

d) ¿Después de cuántas horas será de 10000 el número de bacterias?

18. El número de una determinada especie de pez está dada por la fórmula$n(t) = 12e^{0.012t}$, donde t se mide en años y $n(t)$ se mide en millones.

a) ¿Cuál es la tasa de crecimiento relativo de la población de peces? Exprese su respuesta en porcentaje.

b) ¿Cuál será la población de peces después de 5años?

c) ¿Dentro de cuántos años alcanzará el número de peces la cifra de 30 millones?

19. La población de una determinada ciudad fue de 112000 en 1994, y la tasa de crecimiento relativo observada es de 4% anual.

a) Determine la fórmula $n(t)$ para la población después de t años.

b) Determine la población proyectada en el año 2000.

c) ¿En qué año alcanzará la población la cifra de 200000?

20. La población de ranas en un pequeño estanque crece exponencialmente. La población actual es de 85 ranas, y la tasa de crecimiento relativo es de 18% anual.

a) Determine una fórmula $n(t)$ para la población después de t años.

b) Determine la población proyectada después de 3 años.

c) Determine el número de años necesarios para que la población de ranas alcance 600.

21. Un cultivo contiene inicialmente 1500 bacterias y se duplica cada 30 minutos.

a) Determine una fórmula $n(t)$ para el número de bacterias después de t minutos.

b) Determine el número de bacterias después de 2 horas.

c) ¿Después de cuántos minutos contendrá el cultivo 4000 bacterias?

22. Un cultivo se inicia con 8600 bacterias. Después de una hora, el conteo alcanza 10000.

a) Determine una fórmula $n(t)$ para el número de bacterias después de t horas.

b) Determine el número de bacterias después de 2 horas.

c) ¿Después de cuántas horas se duplicará el número de bacterias?

23. El conteo en un cultivo de bacterias fue de 400 después de 2 horas y de 25600 después de 6 horas.

a) ¿Cuál es la tasa de crecimiento relativo de la población de bacterias? Exprese su respuesta como un porcentaje.

b) ¿Cuál fue el tamaño inicial del cultivo?

c) Determine una fórmula $n(t)$ para el número de bacterias después de t horas.

d) Determine el número de bacterias después de 4.5 horas.

e) ¿Cuándo llegará a 50000 el número de bacterias?

24. La población del mundo fue de 5700 millones en 1995 y la tasa de crecimiento relativo observada fue de 2% anual.

a) ¿Para qué año se habrá duplicado la población?

b) ¿Para qué año se habrá triplicado la población?

25. La población de California era de 10586223 en 1950 y de 23668562 en 1980. Suponga que la población crece exponencialmente.

a) Determine una fórmula para la población t años después de 1950.

b) Determine el tiempo necesario para que se duplique la población.

c) Utilice la información para predecir la población de California en el año 2000.

26. La vida media del radio 226 es de 1600 años. Suponga que tenemos una muestra de $22\,mg$.

a) Obtenga una fórmula para la masa que queda después de t años.

b) ¿Cuánto quedará de la muestra después de 4000 años?

c) ¿Después de cuánto tiempo solamente quedará $18\,mg$.?

27. La vida media del cesio 137 es 30 años. Suponga que tenemos una muestra de 10 gramos.

a) Determine una fórmula para la masa que queda después de t años.

b) ¿Cuánto quedará de la muestra después de 80 años?

c) ¿Después de cuánto tiempo sólo quedarán 2 gramos de la muestra?

28. La masa $m(t)$ que queda después de t días de una muestra de 40 gramos de torio 234 está dada por: $m(t) = 40e^{-0.0277t}$.

a) ¿Cuánto quedará de la muestra después de 60 días?

b) ¿Después de cuántos días sólo quedarán 10 gramos de la muestra?

c) Determine la vida media del torio 234.

29. La vida media del estroncio 90 es de 25 años. ¿Cuánto tardará una muestra de $50\,mg$. en reducirse por desintegración una masa de $32\,mg$.?

30. El radio 221 tiene una vida media de 30 segundos. ¿Cuánto tardará para que se desintegre 95% de una muestra?

31. Si $250\,mg$. de un elemento radiactivo se desintegra hasta $200\,mg$. en 48 horas, determine la vida media del elemento.

32. Sí un terremoto es 20 veces más intenso que otro, ¿Cuánto es más grande en la escala de Richter?

Examen de la unidad.

1. Grafique las funciones $y = 4^x$y $y = \log_4 x$ sobre los mismos ejes.

2. Trace la gráfica de la función $f(x) = \log(x+2)$ y dé el dominio, rango y las asíntotas.

3. Evalúe cada expresión logarítmica.

a) $\log_3 \sqrt{27}$ b) $\log_2 56 - \log_2 7$

c) $\log_8 4$ d) $\log_6 4 + \log_6 9$

4. Utilice las leyes de los logaritmos para reescribir la expresión $\log \sqrt{\frac{x^2-1}{x^3(y^2+1)^5}}$. sin logaritmos de productos, cocientes, potencias o raíces.

5. Escriba como un solo logaritmo: $\ln x - 2\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln(3-x^4)$

6. Determine la solución de la ecuación, correcta a dos lugares decimales.

a) $2^{x-3} = 10$ b) $5\ln(3-x) = 4$

c)$10^{x+3} = 6^{2x}$ d)$\log_2(x+2) + \log_2(x-1) = 2$

7. El tamaño inicial de un cultivo de bacterias es de 1000. Después de una hora el conteo de bacterias es de 8000.

a) Determine una fórmula para la población después de t horas.

b) Determine la población después de 1.5 horas.

c) ¿Cuándo alcanzará la población la cifra de 15000?

d) Trace la gráfica de la función de la población.

8. ¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse el valor de una inversión si la tasa de interés es de 8.5% anual compuesto semestralmente?

9. Escriba la función dada en forma exponencial.

a) $\log_2 1024 = 10$ b) $\log_6 37 = x$

10. Escriba la ecuación dada en forma logarítmica.

a)$2^6 = 64$ b) $49^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{7}$

c)$10^x = 74$ c) $e^k = m$

Solución a los problemas complementarios.

1.

a) $D_f = \Re \quad R_f = (-\infty, 0)$

No se puede mostrar la imagen en este momento.

b) $D_f = \Re \quad R_f = (-3, +\infty)$

No se puede mostrar la imagen en este momento.

c) $D_f = \Re \quad R_f = (0, +\infty)$

No se puede mostrar la imagen en este momento.

d) $D_f = \Re \quad R_f = (1, +\infty)$

No se puede mostrar la imagen en este momento.

e) $D_f = \Re \quad R_f = (0, +\infty)$

f) $D_f = \Re$ $R_f = (-\infty, 6)$

g) $D_f = \Re$ $R_f = (3, +\infty)$

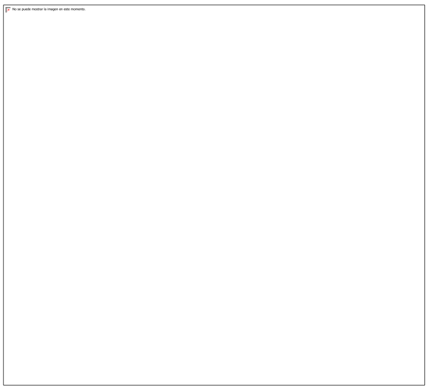
h) $D_f = \Re$ $R_f = (0, +\infty)$

i) $D_f = \Re$ $R_F = (3, +\infty)$

j) $D_F = \Re$ $R_f = (-2, +\infty)$

2.

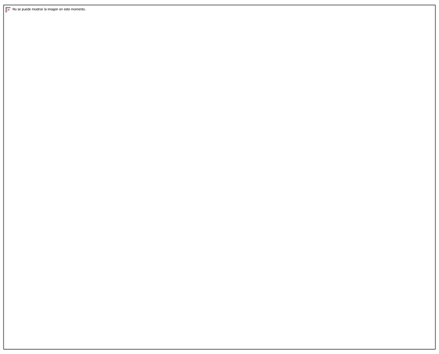
a) $D_f = (4,+\infty)$ $R_f = \Re$



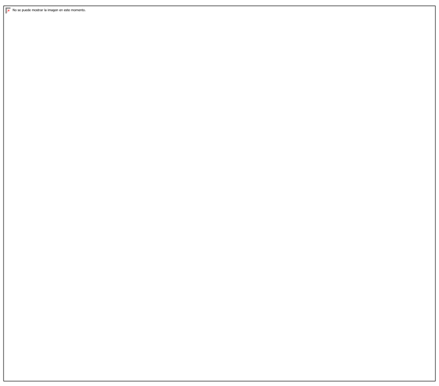
.

b) $D_f = (0,+\infty)$ $R_f = \Re$

c) $D_f = (0,+\infty)$ $R_f = \aleph$

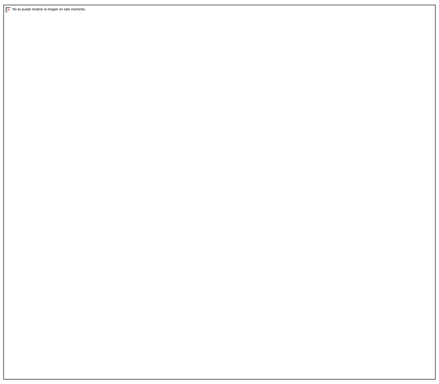


d) $D_f = (0,+\infty)$ $R_f = \Re$

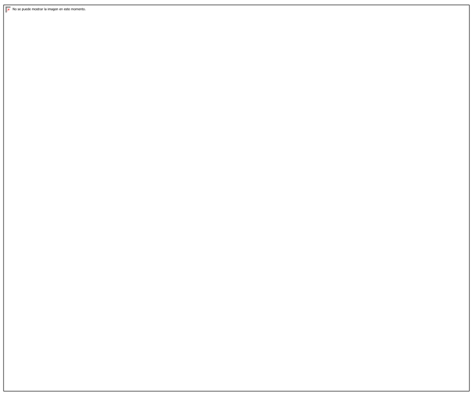


e) $D_f = (2, +\infty)$ $R_f = \Re$

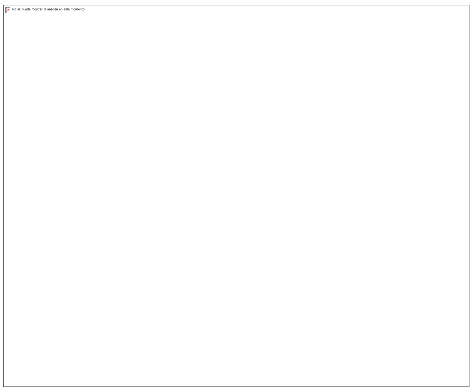
f) $D_f = (-2, +\infty)$ $R_f = \Re$



g) $D_f = (0, +\infty)$ $R_f = \Re$

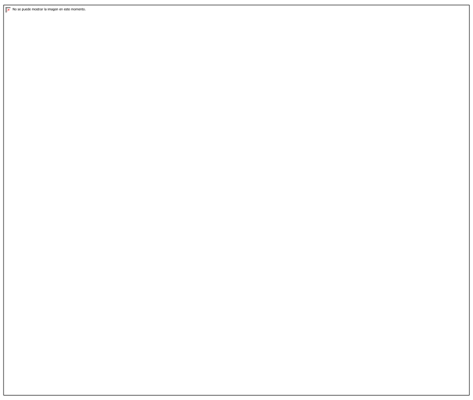


h) $D_f = (2, +\infty)$ $R_f = \Re$



i) $D_f = (-\infty, 1)$ $R_f = \Re$

j) $D_f = (-\infty, 1)$ $R_f = \Re$



3. a) $\frac{1}{2}\log_5(x^2+1)$ b) $3\log_{12} x + 4\log_{12} y - 6\log_{12} z$

c) $\log_2 x + \log_2(x^2+1) - \frac{1}{2}\log_2(x^2-1)$ d) $\ln x + \frac{1}{2}(\ln y - \ln z)$

e) $\frac{1}{4}\log(x^2+y^2)$ f) $x\ln 10 - \ln x - \ln(x^2+1) - \ln(x^4+2)$

4. a) $\log_3 160$ b) $\log_2 \frac{AB}{C^2}$ c) $\log\left[\frac{x^4(x-1)^2}{\sqrt[3]{x^2+1}}\right]$

d) $\ln\left[5x^2(+5)^3\right]$ e) $\log\left[\sqrt[3]{2x+1}\sqrt{\frac{x-4}{x^4-x^2-1}}\right]$

5. a) 4 b) 1 c) 2 d) ln8 e) 99.

6. a) 2.807364 b) 0.430675 c) 2.182658

d) 2.523658 e) 3.503061

7. a) 2, 3 b) 4, -1 c) 1, - 1.6666 d) 0.6666, -0.5 e) 1, ½

f) 4.2 g) 0.0455 h) – 2. 9471 i) 0.6232 j) 1.0986

8. a) 31.6666 b) – 25 c) 5 d) 5 e) 13/12

f) 52.8043 g) 2.8963 h) 4.9294 i) 20.958 j) 1.7289

9. a) $12870 b) 8.25 años.

10. a) $7328 b) 3.46 años.

11. 5 años.

12. 2.345 años.

13. 8.155 años.

14. 9.2%

15. 8.3%.

16. 5.65%

17. a) 500 b) 45% c) 1928.71 bacterias. d) 6.66 horas.

18. a) 1.2% b) 12.742 millones c) 76.36 años.

19. a) $n(t) = 112000 \quad e^{0.04t}$ b) 142379.9040 millones. c) 14.5 años.

20. a) $n(t) = 85\, e^{0.18t}$ b) 145.86 ranas. c) 10.86 años.

21. a) 0.023 b) 23700 bacterias. c) 43.2 minutos.

22. a) $n(t) = 8600 \quad e^{0.1508\, t}$ b) 11627.37 bacterias. c) 4.6 horas.

23. a) 103.9% b) 50 bacterias c) $n(t) = 50\, e^{1.039\, t}$
d) 5364.3 bacterias. e) 6.648 horas.

24. a) 2029 b) 2050.

25. a) $n(t) = 10586223 \quad e^{0.027\, t}$ b) 55 años. c) 40835296 millones.

26. a) $m(t) = 22\, e^{-0.00043\, t}$ b) 11.96 gramos. c) 466.676 años.

27. a) $m(t) = 10\, e^{-0.023\, t}$ b) 0.063 gramos. c) 70 años.

28. a) 7.59 mg. b) 50 años. c) 25 años.

29. 16 años.

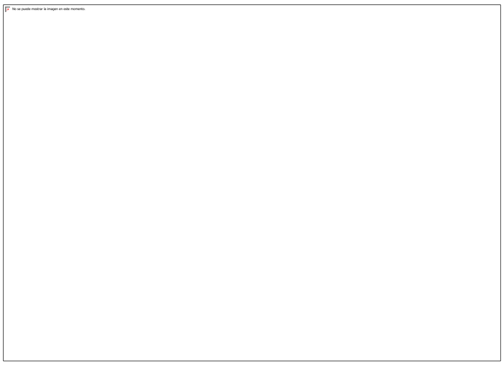
30. 2.22 segundos.

31. 149 años.

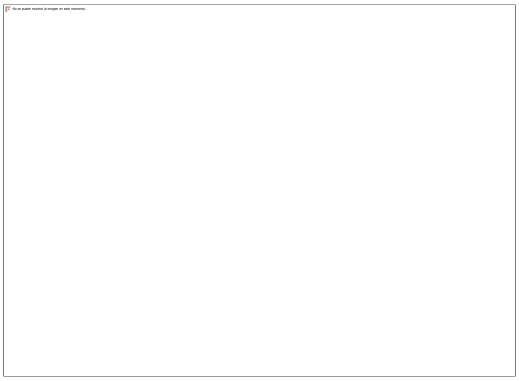
32. 1.3

Solución al examen de la unidad.

1.



2.



$D_f = (-2, +\infty)$ $R_f = \Re$ $x = -2$

3. a) 3/2 b) 3 c) 2/3 d) 2

4. $\frac{1}{2}\left[\log(x^2-1) - 3\log x - 5\log(y^2+1)\right]$

5. $\ln\left[\frac{x\sqrt{3-x^4}}{(x^2+1)^2}\right]$

6. a) 4.32 b) 0.77 c) 5.39 d) 2

7. a) $n(t) = 1000\,e^{2.07944\,t}$ b) 22627 c) 1.3 horas.

8. 8.33 años.

9. a) $2^{10} = 1024$ b) $6^x = 37$

10. a) $\log_2 64 = 6$ b) $\log_{49} = \frac{1}{2}$ c) $\log 74 = x$ d) $\ln m = k$