

## 4. ESTÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

---

1. Introducción
  2. Condiciones de equilibrio
  3. Reacciones de enlace
  4. Resolución de problemas. Diagrama de sólido libre
  5. Fuerzas interiores en miembros estructurales
- 

### 1. Introducción

La **estática** es la parte de la **mecánica** que se ocupa de los cuerpos sometidos a fuerzas equilibradas, es decir, cuerpos que están en reposo o en movimiento rectilíneo y uniforme. La **estática del sólido rígido** constituye una parte importante de la **mecánica del sólido rígido** porque proporciona métodos para la determinación de las reacciones en los enlaces, y de las relaciones entre las distribuciones de fuerzas interiores y las cargas exteriores en las estructuras estacionarias. Muchos problemas prácticos de ingeniería que comportan cargas soportadas por componentes estructurales se pueden resolver utilizando las relaciones que se desarrollan en estática.

Cuando se aplican en estática del sólido rígido las condiciones de equilibrio, se supone que el cuerpo permanece rígido. Sin embargo, todos los cuerpos se deforman cuando están sometidos a cargas. Esto último se estudiará en la asignatura “**Resistencia de Materiales**”, mientras que nosotros supondremos que el cuerpo permanecerá rígido y no se deformará.

En este tema se desarrollarán las ecuaciones de equilibrio para un sólido rígido, se presentará el concepto de diagrama de sólido libre y se mostrará cómo resolver problemas de equilibrio de sólidos rígidos.

### 2. Condiciones de equilibrio

En el caso de una partícula o **punto material**, como todo sistema de fuerzas que actúen sobre la partícula es un sistema de fuerzas concurrentes, la partícula estará en equilibrio cuando sea nula la resultante del sistema de fuerzas concurrentes, la partícula estará en equilibrio cuando sea nula la resultante del sistema de fuerzas que se ejercen sobre la partícula, es decir:

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i = 0 \quad (1)$$

Según la **primera ley de Newton**, si la resultante  $\vec{\mathbf{R}}$  de las fuerzas exteriores que actúan sobre una partícula es nula, entonces la partícula está en reposo o se desplaza con movimiento rectilíneo y uniforme. Así pues, la ecuación  $\sum_i \vec{\mathbf{F}}_i = 0$  es condición necesaria para el equilibrio

de un punto. Por otra parte, un punto material en equilibrio deberá también satisfacer la **segunda ley de Newton**:

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i = m \vec{\mathbf{a}} \quad (2)$$

Donde  $m$  es la masa del punto material y  $\vec{\mathbf{a}}$  es su aceleración. Para que se cumplan simultáneamente las ecuaciones (1) y (2), deberá satisfacerse:

$$\vec{\mathbf{a}} = 0 \quad (3)$$

ya que la masa  $m$  de un punto material no es nula. Como  $\vec{\mathbf{a}} = 0$ , un punto material en equilibrio que inicialmente estuviera en reposo seguirá en reposo y un punto material en equilibrio que se moviera con velocidad  $\vec{\mathbf{v}}$  constante mantendría dicha velocidad y, por tanto, su movimiento rectilíneo y uniforme. Según esto, la ecuación:

$$\sum_i \vec{\mathbf{F}}_i = 0 \quad (4)$$

será condición necesaria y suficiente para el **equilibrio de un punto material**.

En el caso de un **sólido rígido**, éste se encontrará en equilibrio cuando lo están todos y cada uno de sus puntos, es decir, cuando la aceleración de todos y cada uno de ellos sea nula,  $\vec{\mathbf{a}}_i = 0$ . El equilibrio será estático si todos los puntos del sistema están en reposo y, por tanto,  $\vec{\mathbf{v}}_i = 0$ . El **equilibrio estático** es el que se estudiará en este tema.

En el caso de un **sólido rígido** el sistema de fuerzas más general posible se puede expresar mediante una fuerza resultante  $\vec{\mathbf{R}}$  y un momento resultante  $\vec{\mathbf{M}}$ . Por tanto, para que un sólido rígido esté en equilibrio deben anularse la fuerza resultante  $\vec{\mathbf{R}}$  y el momento resultante  $\vec{\mathbf{M}}$ . Luego las ecuaciones de equilibrio para un sólido rígido quedan:

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i = 0 \quad \text{Resultante del sistema de fuerzas exteriores} \quad (5)$$

$$\vec{\mathbf{M}} = \sum_i \vec{\mathbf{M}}_i(\vec{\mathbf{F}}_i) = 0 \quad \text{Momento resultante, en cualquier punto, del sistema de fuerzas } \vec{\mathbf{F}}_i \text{ exteriores} \quad (6)$$

“Un sólido rígido está en equilibrio cuando la resultante y el momento resultante del sistema de fuerzas exteriores son nulos”.

### **Condiciones de equilibrio de un sólido rígido**

Las dos condiciones de equilibrio de un sólido rígido, (5) y (6), pueden expresarse mediante las ecuaciones vectoriales:

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum F_x \vec{\mathbf{i}} + \sum F_y \vec{\mathbf{j}} + \sum F_z \vec{\mathbf{k}} = 0 \quad (7)$$

$$\vec{M} = \sum M_x \vec{i} + \sum M_y \vec{j} + \sum M_z \vec{k} = 0 \quad (8)$$

de modo que proporcionan seis ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & & \sum M_x = 0 \\ \sum F_y = 0 & & \sum M_y = 0 \\ \sum F_z = 0 & & \sum M_z = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Estas ecuaciones son condiciones necesarias para el equilibrio de un sólido rígido. Cuando a partir de estas ecuaciones se puedan determinar todas las fuerzas que se ejercen sobre el sólido, serán también condiciones suficientes para el equilibrio.

Estas seis ecuaciones nos permiten calcular, conocidas las fuerzas que actúan sobre un sistema indeformable, las posiciones de equilibrio. Si la posición de equilibrio se conoce, estas ecuaciones nos permiten determinar hasta seis incógnitas de las fuerzas y momentos que sobre él actúan.

Si el sólido rígido se encuentra en un **plano** (por ejemplo  $z = 0$ ) y las fuerzas están también contenidas en dicho plano, simplemente serán necesarias tres variables para definir su posición, las coordenadas de un punto y la dirección de una recta que pasa por él (Figura 1).

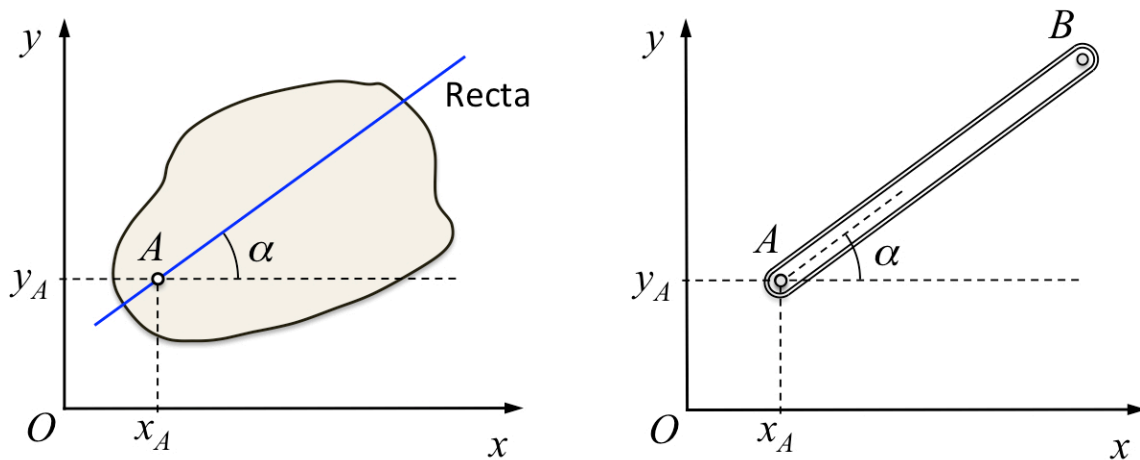


Figura 1

En este caso la posición de equilibrio quedará definida sólo con tres ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Las fuerzas y momentos que se ejercen sobre un sólido rígido pueden ser exteriores o interiores. Las fuerzas que un sólido ejerce sobre otro son fuerzas exteriores. El peso de un

cuerpo también es una fuerza exterior. Las fuerzas interiores mantienen unidas las partículas que forman el sólido rígido. Si el cuerpo de interés está formado por varias partes, las fuerzas que mantienen unidas dichas partes también se considerarán interiores.

Las **fuerzas exteriores** pueden dividirse en:

- Fuerzas aplicadas.
- Fuerzas de reacción.

Las **fuerzas aplicadas** son las que sobre un cuerpo ejercen agentes exteriores.

Las **fuerzas de reacción** o **reacciones vinculares** son las fuerzas que sobre un cuerpo ejercen los apoyos y conexiones.

En este tema consideraremos las fuerzas exteriores y los momentos que éstas originan. Como las fuerzas interiores son, dos a dos, de igual módulo y recta soporte pero de distinto sentido, no tendrán efecto sobre el equilibrio del cuerpo rígido en su conjunto. En este tema veremos algunos ejemplos de cómo determinar las fuerzas interiores, aunque éstas se estudiarán con más detalle en la asignatura “Resistencia de materiales”.

### **3. Reacciones de enlace**

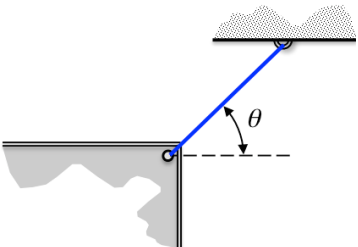
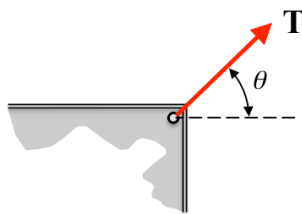
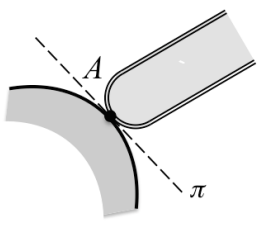
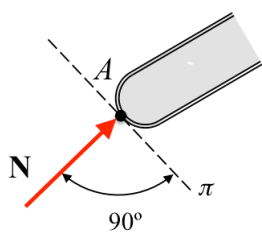
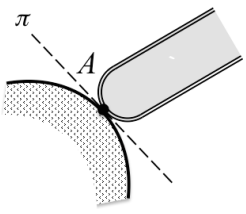
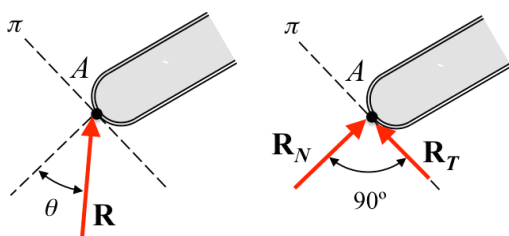
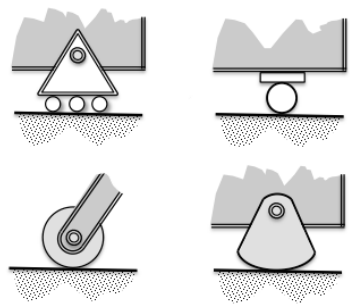
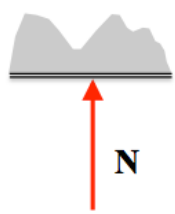
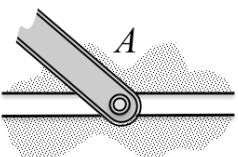
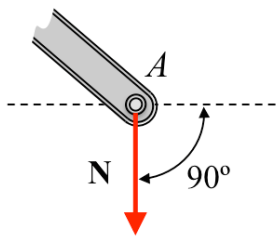
Las condiciones de equilibrio de un sólido rígido en el plano se definen con tres variables independientes (las coordenadas de un punto  $A$  y el ángulo que forma un segmento del sólido con uno de los ejes coordenados).

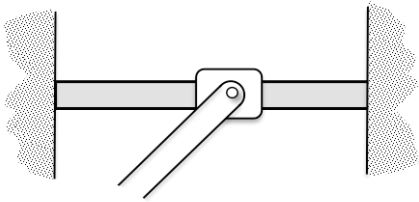
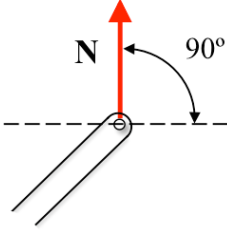
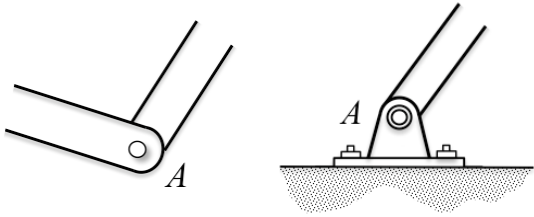
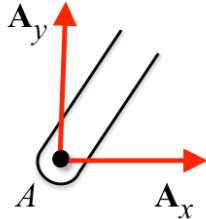
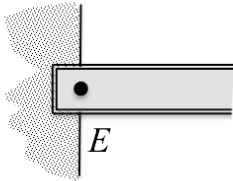
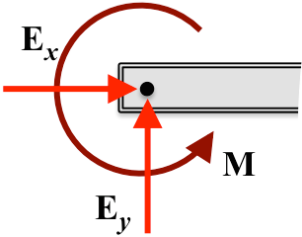
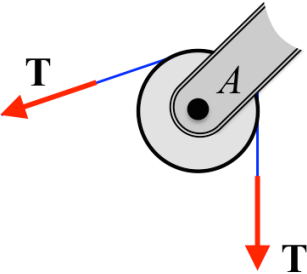
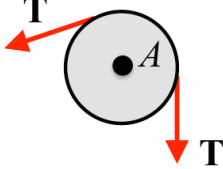
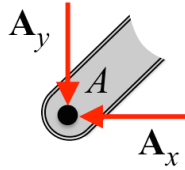
Si pretendemos obligar al sistema a determinadas posiciones de equilibrio, lo haremos mediante enlaces que se materializan en rótulas, rodillos, pivotes, articulaciones, empotramientos, etc.

#### **Enlaces utilizados en sólidos rígidos sometidos a sistemas bidimensionales y tridimensionales de fuerzas, junto con las reacciones de enlace (fuerzas y momentos) que ejercen**

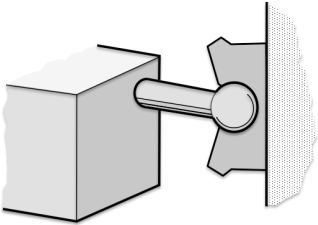
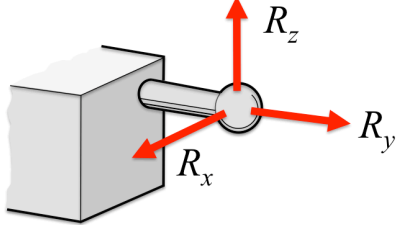
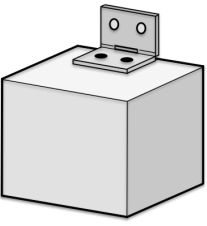
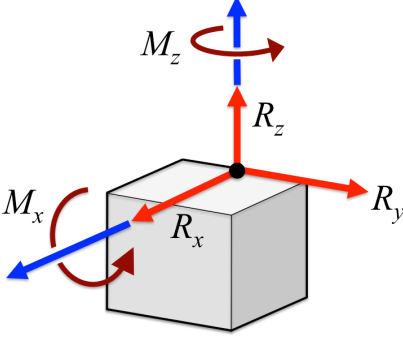
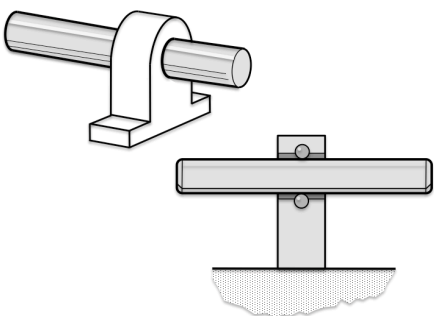
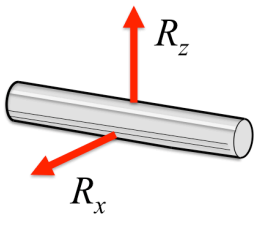
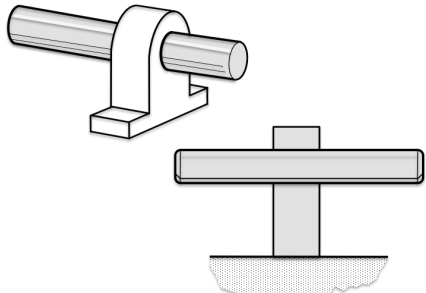
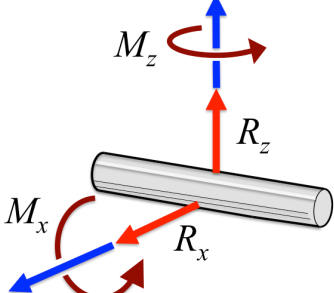
En las dos tablas siguientes se incluyen tipos de apoyos de apoyos y enlaces utilizados en sólidos rígidos sometidos tanto a sistemas bidimensionales como tridimensionales, junto con las fuerzas y momentos que se utilizan para representar las acciones sobre el sólido rígido de estos apoyos y enlaces.

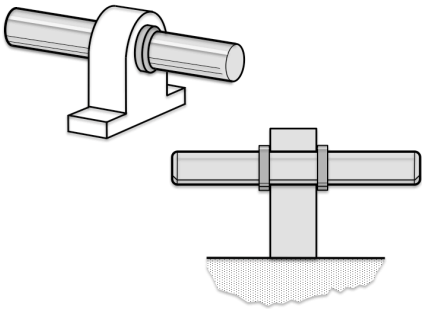
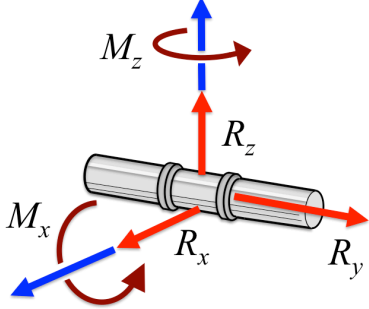
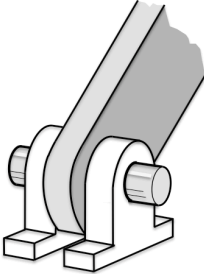
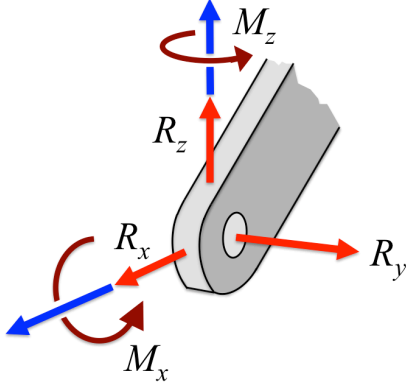
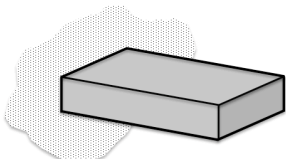
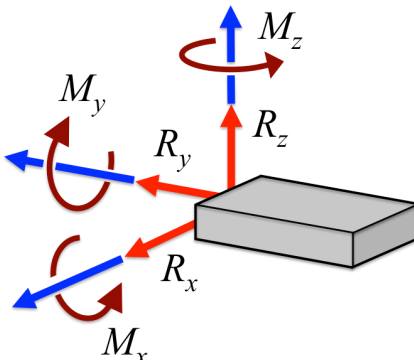
## REACCIONES BIDIMENSIONALES EN APOYOS Y ENLACES

| TIPO DE ENLACE   | ACCIÓN SOBRE EL CUERPO AISLADO  |
|--|---|
| <p>1. Cable tenso inextensible y sin peso</p>             | <p>Fuerza <b>T</b> dirigida según la línea de acción del cable y sentido de tracción</p>    |
| <p>2. Superficie lisa</p>                                 | <p>Fuerza normal <b>N</b> (fuerza de compresión sobre el cuerpo) el plano <math>\pi</math> tangente al punto de contacto <i>A</i></p>   |
| <p>3. Superficie rugosa</p>                             | <p>Componente tangencial <b>R<sub>T</sub></b> (fuerza de rozamiento) a la superficie y otra componente normal <b>R<sub>N</sub></b> (fuerza de compresión sobre el cuerpo) al plano <math>\pi</math> tangente en <i>A</i></p>  |
| <p>4. Soporte en rodillo sobre plano, bola, zapata</p>  | <p>Fuerza <b>N</b> de compresión normal al plano</p>   |
| <p>5. Pasador en guía lisa</p>                          | <p>Fuerza <b>N</b> perpendicular a las superficies de la guía</p>    |

| TIPO DE ENLACE   | ACCIÓN SOBRE EL CUERPO AISLADO   |
|--|--|
| <p>6. Deslizadera, collar sobre árbol liso</p>  | <p>Fuerza <math>N</math> perpendicular al eje del árbol</p>   |
| <p>7. Articulación</p>                          | <p>Fuerza <math>A</math> en cualquier dirección que puede ser descompuesta en sus dos componentes <math>A_x</math> y <math>A_y</math></p>   |
| <p>8. Empotramiento</p>                       | <p>Fuerza <math>E</math> en cualquier dirección que puede descomponerse en sus dos direcciones <math>E_x</math> y <math>E_y</math> en el plano más un par de momento <math>M</math></p>    |
| <p>9. Polea ideal</p>                         | <p>Polea: La tensión del cable <math>T</math> se mantiene constante. Fuerza dirigida según la línea de acción del cable y sentido de tracción</p>  <p>Articulación de la polea: Reacción <math>A</math> de módulo y dirección desconocidos que descomponemos en sus componentes <math>A_x</math> y <math>A_y</math></p>  |

## REACCIONES TRIDIMENSIONALES EN APOYOS Y ENLACES

| TIPO DE ENLACE   | ACCIÓN SOBRE EL CUERPO AISLADO   |
|--|--|
| <p>1. Rótula</p>    | <p>Puede transmitir una fuerza <math>\mathbf{R}</math> pero no momentos. La fuerza <math>\mathbf{R}</math> se representa mediante sus tres componentes rectangulares <math>R_x</math>, <math>R_y</math> y <math>R_z</math></p>   |
| <p>2. Gozne (bisagra)</p>                                  | <p>Fuerza <math>\mathbf{R}</math> de componentes <math>R_x</math>, <math>R_y</math> y <math>R_z</math> y un momento <math>\mathbf{M}</math> de componentes <math>M_x</math> y <math>M_z</math> cuando el eje del pasador tiene la dirección del eje <math>y</math></p>  |
| <p>3. Cojinete de bolas ideal (liso, sin rozamiento)</p>  | <p>Fuerza <math>\mathbf{R}</math> de componentes <math>R_x</math> y <math>R_z</math> cuando el eje del cojinete tiene la dirección del eje <math>y</math></p>   |
| <p>4. Chumacera</p>                                       | <p>Fuerza <math>\mathbf{R}</math> de componentes <math>R_x</math> y <math>R_z</math> y un momento <math>\mathbf{M}</math> de componentes <math>M_x</math> y <math>M_z</math> cuando el eje de la chumacera tiene la dirección del eje <math>y</math></p>               |

| TIPO DE ENLACE   | ACCIÓN SOBRE EL CUERPO AISLADO   |
|--|--|
| <p data-bbox="124 264 391 297">5. Cojinete de empuje</p>              | <p data-bbox="810 264 1476 365">Fuerza <math>\mathbf{R}</math> de componentes <math>R_x</math>, <math>R_y</math> y <math>R_z</math> y un momento <math>\mathbf{M}</math> de componentes <math>M_x</math> y <math>M_z</math> cuando el eje del cojinete tiene la dirección del eje <math>y</math></p>             |
| <p data-bbox="124 757 491 790">6. Articulación lisa de pasador</p>   | <p data-bbox="810 757 1476 857">Fuerza <math>\mathbf{R}</math> de componentes <math>R_x</math>, <math>R_y</math> y <math>R_z</math> y un momento <math>\mathbf{M}</math> de componentes <math>M_x</math> y <math>M_z</math> cuando el eje de la articulación coincide con el eje <math>y</math></p>             |
| <p data-bbox="124 1332 491 1366">7. Empotramiento (apoyo fijo)</p>  | <p data-bbox="810 1332 1476 1433">Fuerza <math>\mathbf{R}</math> en cualquier dirección que puede descomponerse en sus componentes <math>R_x</math>, <math>R_y</math> y <math>R_z</math> y un par de momento <math>\mathbf{M}</math> de componentes <math>M_x</math>, <math>M_y</math> y <math>M_z</math></p>  |



#### 4. Resolución de problemas. Diagrama de sólido libre

Se llama **diagrama de sólido libre** a un esquema o dibujo preparado cuidadosamente en el que figure el “cuerpo de interés” separado de todos los cuerpos que interactúan con él. Una vez seleccionado el cuerpo de interés, habrá que determinar y representar en el diagrama las fuerzas que sobre el cuerpo considerado ejercen los demás cuerpos.

La palabra “libre” en el nombre “diagrama de sólido libre” resalta la idea de que se han suprimido todos los cuerpos que ejercen fuerzas sobre el cuerpo de interés y se han sustituido por las fuerzas y momentos que ejercen. En el diagrama de sólido libre no se han de dibujar los cuerpos suprimidos junto con las fuerzas que ejercen, sino sólo estas últimas.

Para la **resolución de problemas de estática del sólido rígido** mediante el diagrama del sólido libre se siguen los siguientes pasos:

- 1º.- Decidir qué cuerpo o combinación de cuerpos se quiere aislar o separar de lo que le rodea.
- 2º.- Dibujar el sistema aislado mediante un esquema que represente su contorno, suprimiendo todos los demás cuerpos en contacto con el sistema aislado y los enlaces.
- 3º.- Seguir con cuidado el contorno del cuerpo libre e identificar todas las fuerzas que ejercen los cuerpos en contacto o interacción que han sido suprimidos en el proceso de aislamiento. Incluir los pesos cuando éstos no sean despreciables y las reacciones de enlace. Si el sentido de un vector es desconocido, se le supone uno arbitrariamente. Si luego se obtiene un valor negativo significa que el sentido es el contrario al inicialmente supuesto. Incluir distancia y ángulos si fuera necesario.  
  
Si se separan varios cuerpos enlazados hay que tener en cuenta que éstos se ejercen fuerzas iguales y de sentido contrario según el principio de acción y reacción (tercera ley de Newton).
- 4º.- Es importante indicar el sistema de ejes coordenados elegido, expresando las componentes de los distintos vectores en ese sistema.
- 5º.- A partir del diagrama del sólido libre se aplican las condiciones de equilibrio:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \sum_i \vec{M}_i = 0 \quad (11)$$

que en el caso del plano suponen únicamente tres ecuaciones escalares, dos de fuerza y una de momentos respecto a un punto, aunque se puede sustituir una de fuerzas por otra de momentos respecto a otro punto distinto. En el caso más general tridimensional las condiciones de equilibrio dan lugar a seis ecuaciones: tres de fuerza y tres de momento.

**EJEMPLO:** En la estructura articulada de la Figura 2, calcular las reacciones en el empotramiento  $A$ , en la articulación  $B$  y en el apoyo  $C$ .

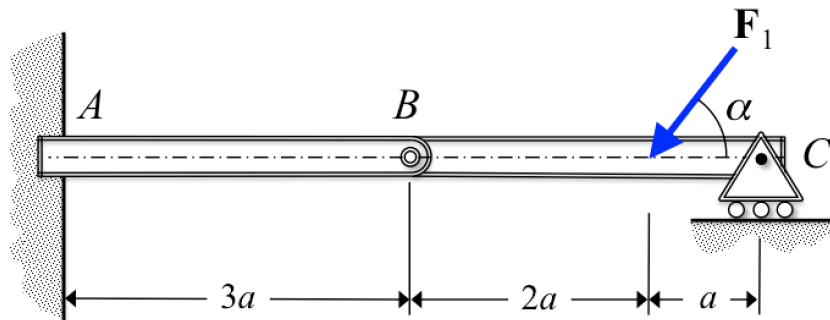
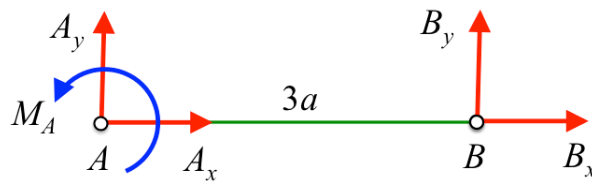


Figura 2

Dividimos la estructura en dos partes:  $AB$  y  $BC$ .

BARRA  $AB$



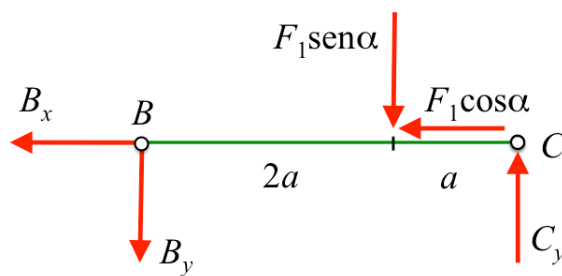
$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x + B_x = 0 \rightarrow A_x = -B_x \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + B_y = 0 \rightarrow A_y = -B_y \quad (2)$$

$$\sum \vec{M}_A = 0 \rightarrow M_A + 3B_y a = 0 \rightarrow M_A = -3B_y a \quad (3)$$



BARRA  $BC$



$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad -B_x - F_1 \cos \alpha = 0 \quad \rightarrow \quad B_x = -F_1 \cos \alpha \quad (4)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad -B_y - F_1 \sin \alpha + C_y = 0 \quad (5)$$

$$\sum \vec{M}_B = 0 \quad \rightarrow \quad -F_1 2a \sin \alpha + C_y 3a = 0 \quad (6)$$



De las ecuaciones (5) y (6):

$$(5) \quad -B_y - F_1 \sin \alpha + C_y = 0 \quad \rightarrow \quad C_y = B_y + F_1 \sin \alpha$$

$$(6) \quad -2aF_1 \sin \alpha + 3aC_y = 0 \quad \rightarrow \quad -2aF_1 \sin \alpha + 3a(B_y + F_1 \sin \alpha) = 0$$

Operando y despejando  $B_y$ :

$$-2F_1 a \sin \alpha + 3B_y a + 3F_1 a \sin \alpha = 0 \quad \rightarrow \quad F_1 a \sin \alpha + 3B_y a = 0 \quad \rightarrow \quad B_y = -\frac{1}{3} F_1 \sin \alpha$$

$C_y$  será:

$$C_y = B_y + F_1 \sin \alpha \quad \rightarrow \quad C_y = -\frac{1}{3} F_1 \sin \alpha + F_1 \sin \alpha = \frac{2}{3} F_1 \sin \alpha \quad \rightarrow \quad C_y = \frac{2}{3} F_1 \sin \alpha$$

Sustituyen el valor obtenido de  $B_y$  en la ecuación (2):

$$A_y = -B_y = \frac{1}{3} F_1 \sin \alpha \quad \rightarrow \quad A_y = \frac{1}{3} F_1 \sin \alpha$$

Sustituyendo  $B_x$  de la ecuación (4) en la ecuación (1):

$$A_x = -B_x = F_1 \cos \alpha \quad \rightarrow \quad A_x = F_1 \cos \alpha$$

Por último, sustituyendo  $B_y$  en la ecuación (3) calculamos  $M_A$ :

$$M_A = -3B_y a = -3 \left( -\frac{1}{3} F_1 \sin \alpha \right) a = F_1 a \sin \alpha \quad \rightarrow \quad M_A = F_1 a \sin \alpha$$

## 5. Fuerzas interiores en miembros estructurales

Cuando un **miembro estructural** o un **componente de máquina** (cable, barra, árbol, viga o columna) se halla sometido a un sistema de cargas exteriores (cargas aplicadas y reacciones en los apoyos), se desarrolla un sistema de fuerzas resistentes interiores al miembro que equilibran a las fuerzas exteriores.

Consideremos un conjunto de fuerzas exteriores equilibradas  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$  aplicadas a un cuerpo (Figura 3). Estas fuerzas tienden a aplastar el cuerpo (compresión) o a hacerlo estallar (tracción). En uno y otro caso, se desarrollan fuerzas interiores (resistentes) que o se oponen al aplastamiento o mantienen unido el cuerpo. Dividimos el cuerpo en dos partes mediante el plano  $aa$  (Figura 4) y cada parte está en equilibrio gracias a las **fuerzas interiores** (Figura 5).

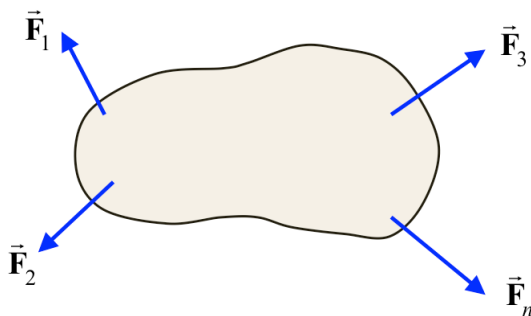


Figura 3

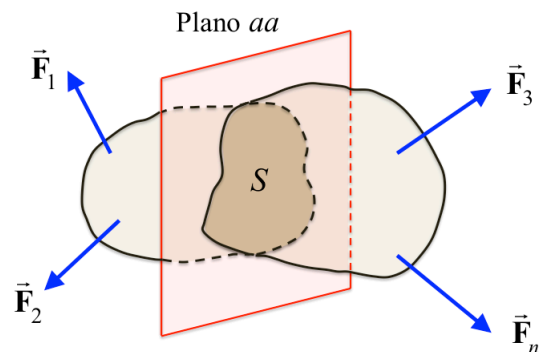


Figura 4

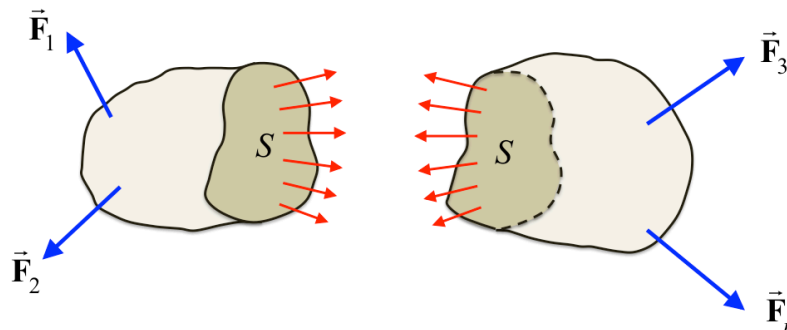


Figura 5

En general, las fuerzas distribuidas que se ejercen sobre los elementos de superficie  $dS$  que constituyen la sección  $S$  no estarán distribuidas uniformemente. Las intensidades de estas fuerzas internas (fuerzas por unidad de superficie) se conocen con el nombre de esfuerzos.

Consideremos el diagrama de sólido libre de la parte izquierda del cuerpo. La distribución de fuerzas sobre el plano  $aa$  se puede sustituir por (Figura 6):

- Fuerza resultante  $\vec{R}$  que pasa por un punto del plano  $aa$ .
- Momento resultante  $\vec{M}$ .

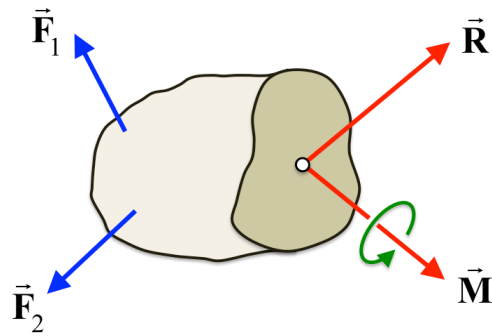


Figura 6

**Fuerza resultante  $\vec{R}$** : Se puede descomponer en una **fuerza normal  $\vec{R}_n$**  y en una **fuerza cortante  $\vec{R}_t$** . De modo que  $\vec{R}_n$  es normal al plano *aa* mientras que  $\vec{R}_t$  es tangente a dicho plano *aa* (Figura 7).

**Momento resultante  $\vec{M}$** : Se puede descomponer en una componente  $\vec{M}_n$  (**momento torsor**) respecto al eje normal al plano *aa* y una componente  $\vec{M}_t$  (**momento flector**) respecto a un eje tangente al plano *aa* (Figura 8).

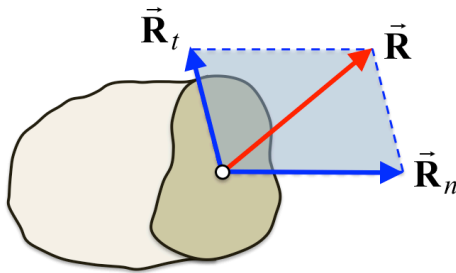


Figura 7

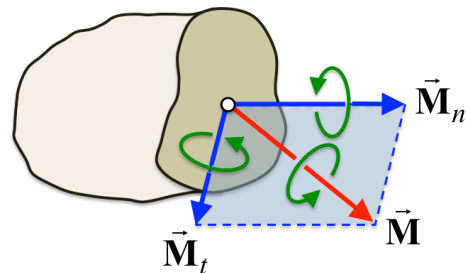


Figura 8

Para determinar las fuerzas interiores en un lugar concreto de un miembro estructural hay que seguir el siguiente procedimiento:

- 1°.- Determinar las reacciones en los apoyos.
- 2°.- Dibujar un diagrama de sólido libre considerando una porción del cuerpo.
- 3°.- Aplicar las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \quad (12)$$

$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0 \quad (13)$$

## Fuerzas cortantes y momentos flectores en vigas

Una **viga** es un miembro estructural o un componente de máquina destinado principalmente a soportar fuerzas que se ejercen perpendicularmente al eje del miembro estructural. En general la longitud de la viga es grande frente a las dimensiones de su sección recta.

La línea que une los centroides de las secciones rectas de una viga se conoce con el nombre de **directriz**. La principal deformación que sufre una viga es por flexión. Aunque algunas vigas están cargadas puramente por flexión, otras se hallan sometidas a cargas flectoras en combinación con cargas axiales, cortantes y torsoras.

En la Figura 9 se han representado el esfuerzo normal (axil),  $N$ , el esfuerzo cortante,  $V$ , y el momento flector,  $M$ , en una sección  $aa$  de una viga.

Si el **esfuerzo normal** estira la sección es de **tracción** y si empuja a la sección es de **compresión**. El esfuerzo cortante produce el efecto de **cortadura** en la sección. El **momento flector** es perpendicular al plano de simetría de la viga y es equivalente a un par de fuerzas situado en dicho plano, cuyo efecto es deformar la viga, haciendo girar las secciones verticales al comprimir las fibras en la parte cóncava y traccionar las fibras de la parte convexa, de modo que:

“Toda sección plana perpendicular a la directriz de la viga permanece plana y perpendicular a la misma después de la deformación” (**hipótesis de Navier**).

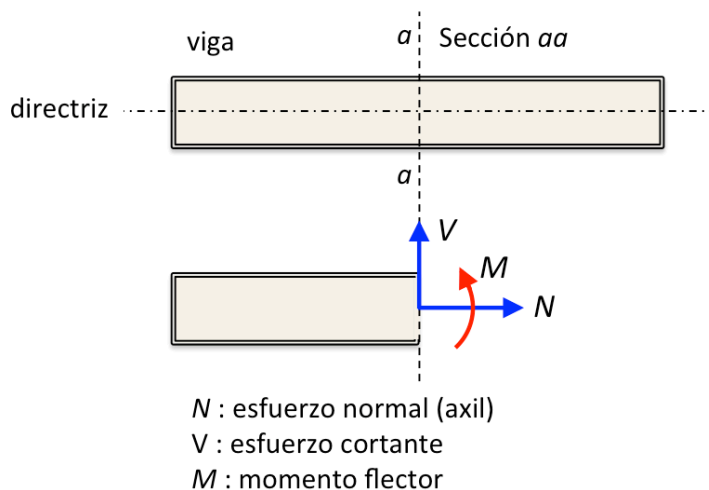


Figura 9

La Figura 10 muestra el efecto del momento flector en la viga. La curva que adopta la directriz de la viga después de la deformación se denomina **elástica** de la viga.

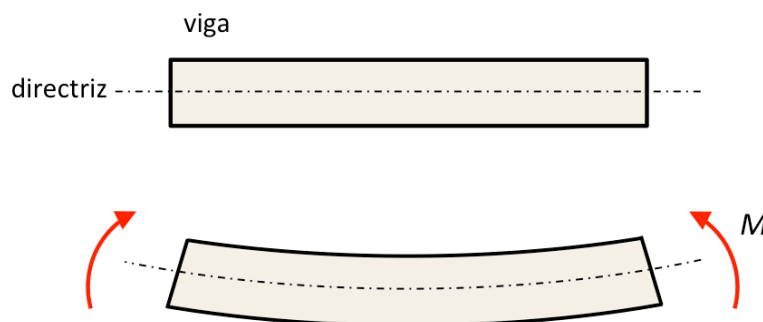


Figura 10

### Criterio de signos para esfuerzos internos en vigas

Aislamos un elemento diferencial de la viga. La Figura 11 muestra el criterio de signos para el esfuerzo normal (axil), el esfuerzo cortante y el momento flector.

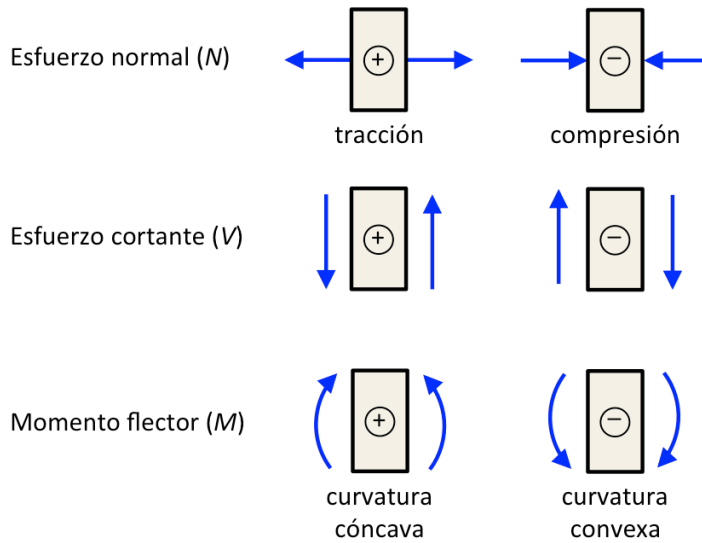


Figura 11

### Diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores

Para proporcionar una representación gráfica de la variación de la fuerza cortante  $V$  y el momento flector  $M$  a lo largo de la viga se utiliza lo que se denomina diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores. Para ello se consideran distintas porciones de la viga y se analiza su equilibrio como sólido libre teniendo en cuenta las cargas exteriores, las reacciones de enlace y los esfuerzos internos.

### Relación entre el momento flector y el esfuerzo cortante

Para encontrar la relación entre el momento flector y el esfuerzo cortante vamos a considerar una porción de viga de longitud elemental  $dx$ , de modo que representaremos su diagrama de sólido libre y estableceremos las ecuaciones de equilibrio. Consideraremos que la viga está sometida a una carga uniformemente distribuida por unidad de longitud,  $q$  (carga continua). Los esfuerzos internos que actúan sobre las caras del elemento son los que se muestran en la Figura 12, en la que  $G$  es el centro de gravedad del elemento

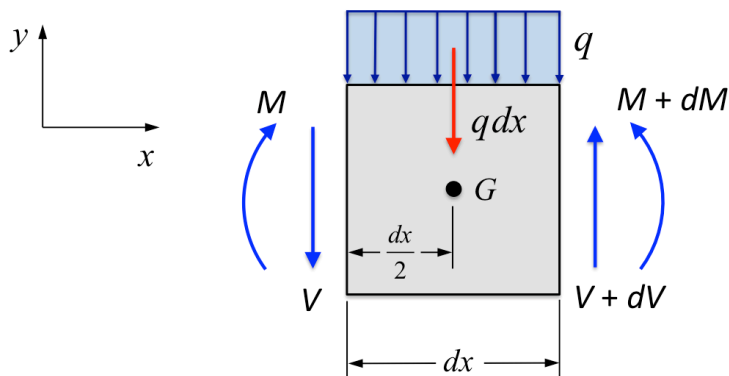


Figura 12

Aplicando las condiciones de equilibrio y teniendo en cuenta que sólo hay fuerzas verticales, se obtiene:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V - qdx + V + dV = 0 \quad (14)$$

es decir:

$$-qdx + dV = 0 \quad (15)$$

de donde la relación entre el esfuerzo cortante  $V$  y la carga continua  $q$  viene dada por la ecuación:

$$\frac{dV}{dx} = q \quad (16)$$

Calculamos ahora la suma de momentos respecto al centro de gravedad  $G$ :

$$\sum M_{Gz} = 0 \Rightarrow V \frac{dx}{2} + V \frac{dx}{2} + dV \frac{dx}{2} - M + M + dM = 0 \quad (17)$$

Despreciando infinitésimos de segundo orden queda:

$$V dx + dM = 0 \quad (18)$$

por lo que la relación entre el momento flector  $M$  y el esfuerzo cortante  $V$  viene dada por la expresión:

$$\frac{dM}{dx} = -V \quad (19)$$

### Vigas isostáticas e hiperestáticas

Una viga se dice que está apoyada **isostáticamente** cuando al considerarla como sólido libre sometido a las fuerzas aplicadas y a las reacciones de enlace, las condiciones de equilibrio estático permiten determinar dichas reacciones de enlace. En el caso plano, el número de reacciones debe ser menor o igual a tres, pues son tres las condiciones de equilibrio estático:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_z = 0 \quad (20)$$

En caso contrario, la viga está apoyada **hiperestáticamente** y el número de incógnitas es superior a tres.

### Ecuación de la elástica de una viga

Consideremos la viga deformada de la Figura 12. En el plano de simetría siempre existe una fibra que no sufre deformación y mantiene constante su longitud. Esta fibra se denomina **línea neutra** o **fibra neutra**. Consideraremos que la fibra neutra coincide con la directriz de la viga (flexión simple).



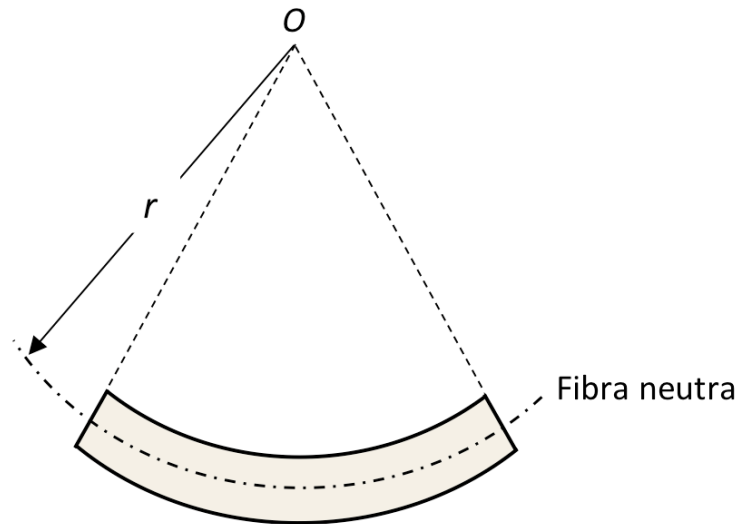


Figura 12

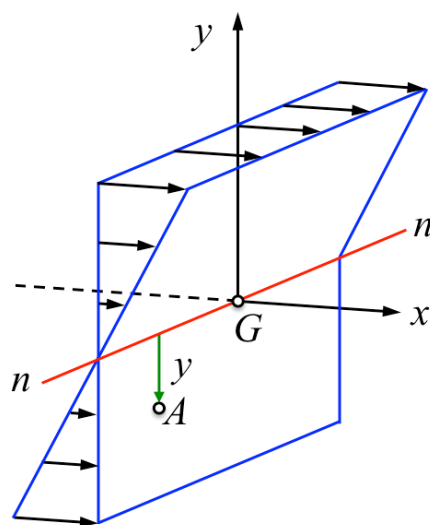
La **elástica** es la curva que adopta la directriz de la viga tras la deformación. Admitiendo que los alargamientos sufridos por las fibras verifican la **ley de Hooke** es decir:

“El alargamiento de una fibra longitudinal cualquiera es proporcional a su longitud inicial  $l_0$  y a la fuerza extensora  $F$  e inversamente proporcional a la sección recta  $S$ ”.

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \varepsilon = \frac{1}{E} \frac{F}{S} = \frac{1}{E} \sigma \quad (21)$$

donde  $E$  es el módulo de Young del material del que está hecha la viga.

Fijémonos en una sección transversal de la viga (Figura 13). La línea neutra pasa por el centro de gravedad  $G$  de la sección y es perpendicular a ésta.



Sección transversal de la viga

$nn$  pasa por el centro de gravedad  $G$

Figura 13

Se puede demostrar que se cumple la relación:

$$\frac{y}{r} = \frac{1}{E} \sigma \rightarrow \sigma = \frac{E}{r} y \quad (22)$$

de modo que la tensión  $\sigma = F / S$  sobre cada fibra de la viga es proporcional a su distancia  $y$  a la línea neutra, siendo  $r$  el radio de curvatura de la elástica.

El radio de curvatura para deformaciones pequeñas ( $y' \approx 0$ ) toma la forma:

$$\frac{1}{r} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \approx y'' \quad (23)$$

de modo que la ecuación diferencial de la elástica es:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{EI} M \quad (24)$$

donde  $I$  es el momento de inercia de la sección respecto a la línea  $nn$  que pasa por el centro de gravedad  $G$ , y  $M$  es el momento de las fuerzas internas respecto a  $nn$ .

**EJEMPLO:** Para la viga biapoyada de la figura cuyo peso se considera despreciable frente a la fuerza  $F$  aplicada, determinar:

- Las reacciones en los apoyos.
- Las leyes de esfuerzos cortantes y momentos flectores.
- Los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores.

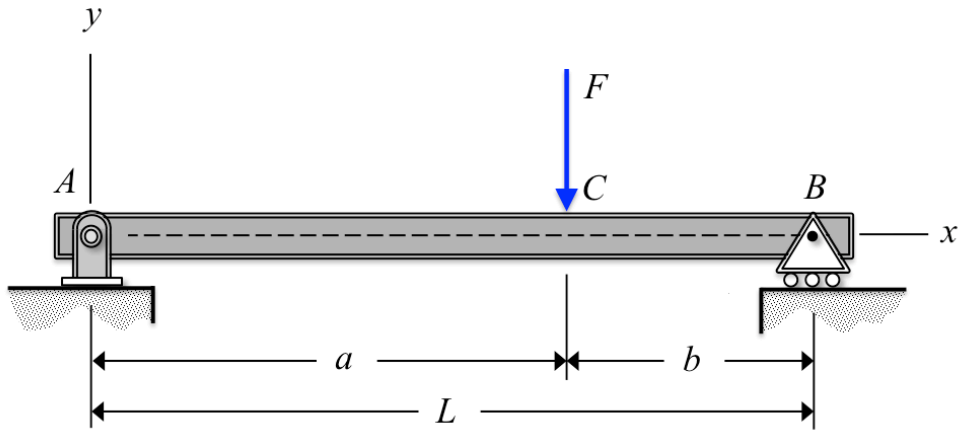


Figura 13

(a) Cálculo de las reacciones en los apoyos

Diagrama de sólido libre:

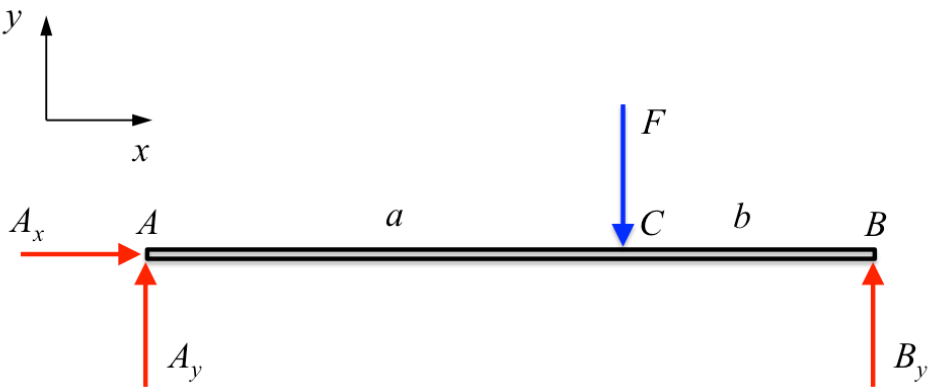


Figura 14

Ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\rightarrow A_x = 0 \\ \sum F_y = 0 &\rightarrow A_y - F + B_y = 0 \\ \sum M_A = 0 &\rightarrow Fa - B_y L = 0 \end{aligned}$$

de donde:

$$A_x = 0 \quad A_y = \frac{Fb}{L} \quad B_y = \frac{Fa}{L}$$

(b) Leyes de esfuerzos cortantes y momentos flectores

TRAMO AC:  $0 \leq x \leq a$

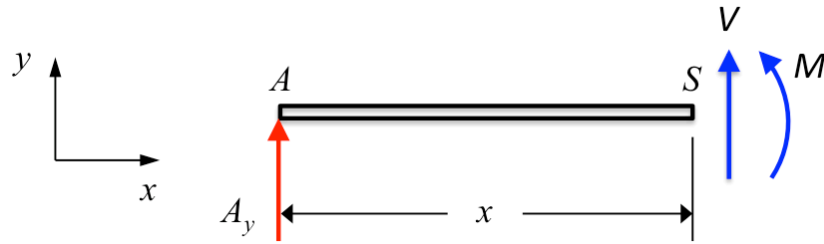


Figura 15

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad A_y + V = 0 \quad \rightarrow \quad V = -A_y = -\frac{Fb}{L}$$

Esfuerzo cortante:

$$V = -\frac{Fb}{L} \quad (0 \leq x \leq a)$$

Tomando momentos respecto a la sección S:

$$\sum M_S = 0 \quad \rightarrow \quad M - A_y x = 0 \quad \rightarrow \quad M = A_y x = \frac{Fb}{L} x$$

Momento flector:

$$M = \frac{Fb}{L} x \quad (0 \leq x \leq a)$$

TRAMO CB:  $a \leq x \leq L$

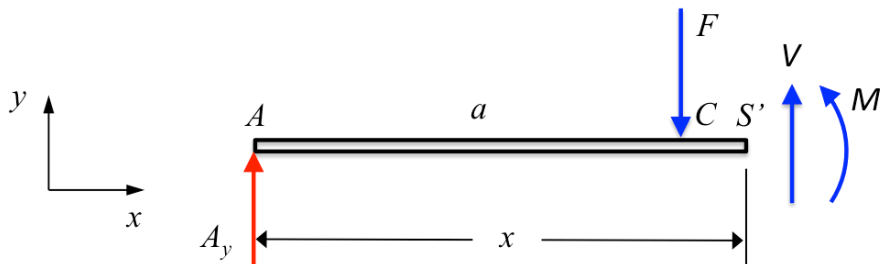


Figura 16

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad A_y - F + V = 0 \quad \rightarrow \quad V = F - A_y = F - \frac{Fb}{L} = \frac{F(L-b)}{L} = \frac{Fa}{L}$$

Esfuerzo cortante:

$$V = \frac{Fa}{L} \quad (a \leq x \leq L)$$

Tomando momentos respecto a la sección S':

$$\sum M_{S'} = 0 \rightarrow M - A_y x + F(x-a) = 0 \rightarrow M = A_y x - F(x-a) = -\frac{Fb}{L}x - F(x-a) = -\frac{Fa}{L}x + Fa$$

Momento flector:

$$M = -\frac{Fa}{L}x + Fa \quad (a \leq x \leq L)$$

(c) Diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{Fb}{L} & (0 \leq x \leq a) \\ \frac{Fa}{L} & (a \leq x \leq L) \end{cases} \quad M(x) = \begin{cases} \frac{Fb}{L}x & (0 \leq x \leq a) \\ -\frac{Fa}{L}x + Fa & (a \leq x \leq L) \end{cases}$$

Puede comprobarse que se cumple la relación  $\frac{dM}{dx} = -V$  (ecuación (19)):

$$0 \leq x \leq a: \quad \frac{dM}{dx} = \frac{Fb}{L} = -V$$

$$a \leq x \leq L: \quad \frac{dM}{dx} = -\frac{Fa}{L} = -V$$

Diagrama de esfuerzos cortantes:

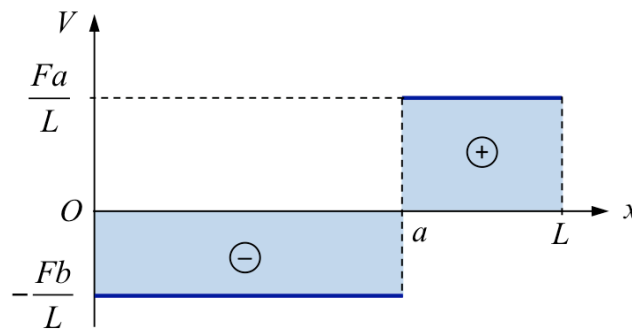


Figura 17

Hay una discontinuidad en el esfuerzo cortante  $V$  en  $x = a$  de valor la carga puntual  $F$ .

Diagrama de momentos flectores:

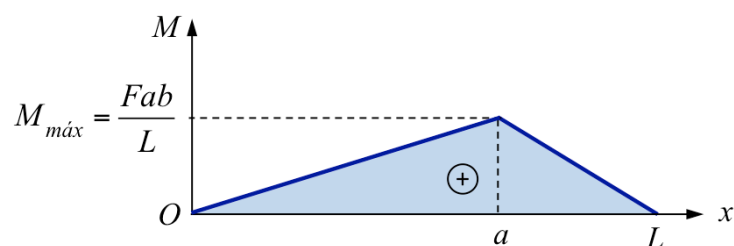


Figura 18

## **BIBLIOGRAFÍA**

W. F. Riley y L. D. Sturges, *Ingeniería Mecánica: Estática* (Reverté, 1996).

R. C. Hibbeler, *Ingeniería Mecánica: Estática* (Prentice Hall, 2010).

F. Belmar, A. Garmendia y J. Llinares, *Curso de Física Aplicada: Estática* (Universidad Politécnica de Valencia, 1998)