51 LEÇONS
POUR LA PREMIÈRE ÉPREUVE
ORALE D'EXPOSÉ

Coécrit par JAMAL KARMATI et SÉVAN POLTEAU

51 LEÇONS POUR LA PREMIÈRE ÉPREUVE ORALE D'EXPOSÉ

AGRÉGATION INTERNE/CAERPA
MATHÉMATIQUES

DUNOD

Création graphique de la couverture : Hokus Pokus Création

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-080455-9

Table des matières

Leçons d'algèbre et de géométrie

Leçons d'analyse et de probabilités

Développements

Avant-propos

Nous avons souhaité par cet ouvrage partager notre travail et notre réflexion sur le premier oral de ce concours exigeant qu'est l'Agrégation interne de mathématiques. Toutes ces leçons ont été travaillées pendant notre année de préparation au concours. Nous avons pu, pour beaucoup d'entre elles, les présenter devant les autres agrégatifs ainsi que les professeurs qui nous ont préparés au concours en nous apportant de nombreux conseils avisés. Nous avons, jusqu'aux derniers moments avant le jour J, corrigé, peaufiné, amélioré celles-ci et ce travail discipliné nous a permis à tous les deux de réussir ce concours.
Dernièrement, nous les avons nourries, corrigées et agrémentées de commentaires que nous jugeons utiles à la compréhension des sujets.

Déroulé de l'épreuve d'oral de leçon
- Tirage au sort (dans la bibliothèque du concours) d'un couple de sujets, il faudra en choisir un seul à présenter. Le jury découvrira votre choix lors de votre passage 3 heures plus tard.
- A partir de ce moment, vous pouvez prendre avec vous vos livres ou emprunter des livres de la bibliothèque qui sont en libre service.
- Dès que vous serez prêts, vous serez placés dans une salle avec un ordinateur par candidat et des feuilles de brouillon.
- Quelques minutes avant la fin des 3 heures, quelqu'un vous amènera devant la salle de votre jury. Votre oral commencera exactement 3 heures après avoir tiré votre sujet.
- Quand le jury vous l'indiquera, vous aurez 15 minutes pour présenter votre plan au tableau (avec vos brouillons) puis 15 minutes pour présenter votre développement (sans vos brouillons). Le jury n'interviendra pas, sinon en comptable du temps (à l'Agrégation interne, c'est vous qui choisissez le développement que vous présentez au jury). Vous n'aurez pas le droit d'effacer votre tableau pendant ces 30 minutes.

- La présentation du développement commence tout de suite après la présentation du plan, pour une durée de 15 minutes.
- La fin de l'épreuve sera dédiée aux questions du jury, selon le temps qui reste (environ 25 minutes). C'est l'occasion pour le jury de vérifier la bonne compréhension de votre plan, des résultats énoncés, de votre développement et parfois de vous laisser la possibilité de corriger les coquilles. Le jury pourra ensuite vous proposer des petits exercices sur le thème du sujet choisi.

Choix des auteurs

Lors de cet oral, l'objectif est d'organiser les notions du vaste programme qui sont en lien avec le sujet tiré pour les présenter dans un plan cohérent. Sans recul, le risque est de ne proposer qu'une succession de résultats sans réel projet. Ainsi, un travail de préparation approfondi permettra de mieux comprendre ces notions et surtout de saisir les connexions qu'il peut y avoir entre elles. C'est pour cela que les leçons que nous proposons seront souvent d'un niveau exigent. Il est important de préciser qu'un jour d'oral, il est très rare de réussir à refaire exactement ce qui a été préparé durant l'année. Lors du passage, il est possible d'oublier des exemples ou une application qui a été préparée mais si la leçon a été travaillée minutieusement, l'ensemble restera solide et gardera tout son sens.

A quel niveau se placer ?

C'est une question très importante que nous nous sommes souvent posée. Les rapports de jury des dernières années sont disponibles sur internet et donnent de nombreux conseils. Et sur cette question, ils sont unanimes : il faut présenter un contenu qui est maîtrisé (sans toutefois se placer à un niveau trop élémentaire pour pouvoir prétendre à la moyenne). Il est dangereux d'énoncer des résultats sans bien comprendre leur sens car si certains de leurs points clés ne sont pas identifiés, le jury pourra alors facilement relever les incohérences.

Comment utiliser cet ouvrage ?

Nous proposons ici des plans de leçons que nous avons fait évoluer petit à petit lors de notre année de préparation. Nous avons souhaité partager notre réflexion à l'aide de commentaires en introduction et à l'intérieur du plan de chaque leçon, ceci afin que chaque lecteur puisse comprendre au mieux nos choix. En effet, le temps de présentation à l'oral (3h) est trop court pour pouvoir être exhaustif. Il faut emmener votre leçon vers des objectifs clairs et parfois éliminer des théorèmes intéressants mais non indispensables à votre propos.

Nous pensons qu'il faut mener une vraie réflexion sur le plan : vers quel(s) résultat(s) important(s) va-t-il nous mener ? Quelles sont les applications de cette notion ? Pourquoi une leçon sur ce thème là ? Quelles sont les raisons d'être de ces notions ? Ainsi, on peut parfois construire des plans en rapport avec l'histoire de la notion étudiée, ou bien, la penser pour mettre en avant la puissance d'un outil central (comme la réduction de matrices).

Nous vous conseillons de comprendre la construction de ces leçons, leur logique, afin de les adapter à vos connaissances et ainsi construire vos propres leçons que vous défendrez bien mieux devant un jury. Il faudra en général éliminer des exemples, des remarques ou des applications quand ils sont trop nombreux. En effet, nous avons parfois souhaité enrichir le plus possible certaines leçons pour que le lecteur puisse avoir le choix de l'illustration de son propos.

Conseils pour le temps de préparation à l'oral (3h).

- Une fois le sujet choisi ébauchez un plan très rapidement en vous basant sur vos souvenirs et vos connaissances.
- Choisissez votre développement.
- Utilisez ensuite les livres dont vous avez besoin pour reconstruire votre plan plus précisément mais sans forcément détailler les énoncés.
- Écrivez votre leçon détaillée et travaillez votre développement.
- Répétez votre développement autant que nécessaire.
- Entrainez-vous à écrire la leçon sur feuille comme si vous étiez au tableau (cela vous aidera à savoir ce qu'il faut garder ou éliminer).
- Réservez 15 min en fin de préparation pour réviser votre passage.

Bien sûr, tout ceci implique d'avoir travaillé un bon nombre de leçons au préalable. Il est très difficile de faire des choix rapidement quand on n'y est pas habitué. Dans l'idéal, vous n'aurez qu'à réécrire un plan déjà travaillé durant l'année !

Conseils pour le passage au tableau à l'oral (55 minutes)

- Il est indispensable de diviser son tableau en colonnes afin de maximiser l'espace d'écriture. Présenter vos brouillons avec un format paysage trois colonnes vous permettra de vous y adapter.
- La présentation du plan doit contenir les résultats importants, les exemples significatifs et les titres de vos parties. Les énoncés importants devront être rigoureux, précis et complets. Ne soyez pas trop exhaustif au tableau. Nous conseillons d'utiliser quelques abréviations et il est par exemple possible d'écrire un nom de théorème sans en détailler le contenu s'il n'est pas central dans la leçon. Seuls de nombreux entraînements en conditions réelles vous permettront de trouver le juste milieu sur les choses à écrire et sur celles à annoncer à l'oral.
- Bien sûr, il faut s'exprimer clairement et essayer d'écrire proprement au tableau malgré le temps limité. Le jury appréciera certainement que vous sachiez expliquer simplement votre plan et son articulation et que vous sachiez insister sur les résultats importants et abréger les résultats secondaires.

De manière générale, nous évitons d'utiliser des abréviations dans cet ouvrage pour éviter les confusions mais cela améliore parfois la lisibilité du texte. Ainsi, la liste des abréviations et notations utilisées dans cet ouvrage est présentée page XIV.

En revanche, nous pensons qu'en présentant une leçon à l'oral, il faut, lorsque c'est nécessaire, utiliser des abréviations en précisant oralement leurs signification.

Trame d'une leçon

Rapports de jury

Vous trouverez dans cette section tous les extraits de rapports disponibles qui évoquent cette leçon à l'Agrégation interne.
Nous avons parfois inséré des extraits de rapports du concours externe lorsque cela paraissait pertinent. Ils donnent souvent de précieuses informations sur les attentes du jury concernant la leçon.

Nos commentaires sur la leçon

Dans cette section, nous avons partagé nos réflexions sur la leçon, son plan, ses enjeux, ses écueils éventuels et parfois l'historique des notions considérées.
Il peut être intéressant de les consulter pour comprendre certains de nos choix.

Prérequis

Cette section n'a pas vocation à être exhaustive bien sûr car il est impossible de l'être. Il n'est pas obligatoire de donner les prérequis lors de la présentation orale. Nous avons tout de même souhaité signaler certaines notions ou résultats utilisés.

Plan de la leçon

Ci-dessous, voici l'explication de la structure physique des éléments que contient chacune de nos leçons.

- Références

Dans la grande majorité des énoncés, nous indiquons la référence du (ou des) ouvrage(s) dont ils sont issus ou inspirés. La liste des références utilisées est disponible dans la bibliographie. Lorsque la référence commence par un tilde ([~REF]), nous indiquons que l'énoncé proposé peut être différent de la référence.

- Théorèmes, propositions, définitions, lemmes, corollaires

Ils sont mis en valeur avec une bordure grise et un titre encadré.

> **Théorème** [REFERENCE n°1]&[~REFERENCE n°2]
>
> L'énoncé du théorème est très proche de la référence n°1.
> Le résultat est proche de la référence n°2 mais le contenu et l'énoncé peuvent être différents.

- Exemples, contre-exemples et exercices

Ils ne sont pas mis en valeur par une bordure grise. Les exemples et contre-exemples permettent d'illustrer directement un résultat ou peuvent notamment expliquer l'importance de certaines hypothèses dans un théorème. Les exercices peuvent être donnés à des étudiants pour s'entraîner sur la notion, pour la manipuler. Il faut savoir résoudre les exercices et expliquer ou prouver les exemples que vous proposez.

À l'Agrégation interne, il est attendu des candidats une certaine culture mathématique. Les exemples et exercices seront là pour montrer que vous connaissez, maîtrisez et savez insérer intelligemment des résultats classiques dans vos plans.

- Applications

Une application est un résultat intéressant qui découle d'un théorème ou d'une suite de résultats du plan. De manière générale, les applications seront présentées comme un aboutissement possible des notions présentées (notamment lorsque cela est précisé dans le titre). Il ne faut pas les confondre avec les exemples qui ne font qu'illustrer un résultat et n'apportent « rien de plus ». Celles-ci sont mises en valeur au même titre que les théorèmes, propositions...

- Remarques et commentaires dans le plan

Ceux-ci apportent des précisions sur les résultats qui viennent d'être donnés. Les remarques peuvent être écrites lors de la présentation car elles sont souvent là pour ajouter du sens et de la cohérence au plan. Les commentaires, eux, n'ont pas vocation à être écrits au tableau. Ils sont notés dans une autre police, plus petite et ils sont très souvent entre parenthèses. Nous les avons utilisés pour donner des précisions sur un résultat, expliquer l'articulation du plan ou ajouter quelques informations qu'il peut-être utile d'évoquer à l'oral ou d'en avoir connaissance.

> **Remarque** [REF]
>
> Une remarque peut être écrite si elle est jugée essentielle.
>
> *(mais un commentaire n'est là que pour donner quelques précisions)*

- Développements

À l'Agrégation interne, c'est le candidat qui choisit quel développement présenter au jury. Nous proposons dans chaque leçon un développement à présenter et souvent nous proposons des développements alternatifs possibles. Nous détaillons la résolution de certains développements dans la troisième partie de ce livre en indiquant les leçons dans lesquelles ils peuvent s'intégrer (leur numéro est souligné si le résultat peut être développé face au jury). Leur numéro est indiqué à côté de la référence de l'ouvrage.

> **Développement** [REFERENCE]&D1
>
> C'est le développement que nous pensons être le plus adapté à la leçon. Il est sur fond gris foncé. C'est le développement 1 qui a pour référence D1.

> **Développement alternatif** [REFERENCE]&D5
>
> Ce développement peut aussi être présenté dans cette leçon. Il est sur fond gris clair. C'est le développement 5 qui a pour référence D5.

Si, malgré le soin apporté à la rédaction de cet ouvrage, vous remarquez des erreurs, vous pouvez nous en faire part par mail : agreg.lecons@gmail.com

Liste des abréviations et notation

$\lhd$	Sous-groupe distingué
χ_u (resp. μ_u)	Polynôme caractéristique (resp. minimal) de u
$c(\lambda)$ (resp. $m(\lambda)$)	Multiplicité de λ dans χ_u (resp. μ_u)
$C(I, \mathbb{R})$	Espace des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$
$C_{pm}(I, \mathbb{R})$	Espace des fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{R}$
card	Cardinal
CV	Converge
CVN	Converge normalement
CVS	Converge simplement
CVA	Converge absolument
$\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$	Matrice diagonale (éventuellement par blocs) dont les éléments diagonaux sont les $a_1, \ldots, a_n$
df	Différentielle de la fonction f
ev	Espace vectoriel
evn	Espace vectoriel normé
id_E (I_n)	Application identité sur E (Matrice identité d'ordre n)
Jf_a	Jacobien de f au point a
$K_n[\mathrm{X}]$	Ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients dans K
$\mathbb{K}$	Corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou des nombres complexes $\mathbb{C}$
$L(E, F)$	Ensemble des applications linéaires de E dans F
$\mathrm{Sp}(A)$	Spectre de la matrice A
Sp_K	Spectre considéré dans K (en général $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
ssi	Si, et seulement si,
vp	Valeur propre
$\overrightarrow{vp}$	Vecteur propre
sec	Sous-espace caractéristique
sep	Sous-espace-propre
sev	Sous-espace vectoriel
v.a.r.	Variable aléatoire réelle

Dans cet ouvrage, tous les corps sont supposés commutatifs (sauf pour le théorème de Wedderburn afin d' éviter d'avoir à utiliser la notion d'anneau à division).

Première partie

Leçons d'algèbre et de géométrie

Leçon 101
Groupes monogènes, groupes cycliques. Exemples.

Rapports de jury

RJ 2012 : Ce sujet amène inévitablement la question de savoir si les sous-groupes d'un groupe monogène sont monogènes ; l'étude des sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ peut éventuellement amener à considérer l'indicateur d'Euler.

RJ 2011 : Cette leçon nécessite quelques exemples, notamment dans un contexte géométrique qui permet de faire quelques dessins.

RJ 2010 : Il convient de donner des exemples autres que dans $\mathbb{Z}$ (sous-groupes de $(K[\mathrm{X}], +)$, de $(\mathbb{R}, +)$, etc.). On apprécierait des exemples de groupes non monogènes à la fois dans le cas commutatif et non commutatif. Il faut ici maîtriser les techniques de calcul telles que le calcul de $\varphi(n)$ et éviter les développements sans grand rapport avec le sujet tels que le théorème de Wilson. On peut aussi évoquer une condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe soit cyclique, les sous-groupes d'un groupe cyclique, etc. Enfin, les sous-groupes de $\mathbb{R}$, trop souvent évoqués et d'un intérêt limité par rapport à la situation, ont maintes fois donné lieu à des démonstrations peu rigoureuses.

Nos commentaires sur la leçon

L'étude des groupes cycliques est importante pour l'étude des groupes abéliens finis : le théorème de Kronecker affirme notamment que tout groupe abélien fini est isomorphe à un produit de groupes cycliques.

Nous conseillons de proposer de nombreux exemples et contre-exemples.

Il faudra faire attention de bien choisir la notation de la loi du groupe : parfois notée multiplicativement (comme dans les groupes des racines de l'unité), ou additivement (comme dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).

Prérequis

Groupes, ordre d'un groupe et d'un élément, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, indicatrice d'Euler.

Plan de la leçon

I] Groupes monogènes, groupes cycliques

1) Introduction

Définitions [KIEF p23]

Soit $(G, .)$ un groupe.
On dit que $(G, .)$ est monogène s'il existe $x \in G$ tel que $G = \{x^k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
On note $G = < x >$ et on dit que G est engendré par x.
Si de plus $(G, .)$ est d'ordre fini, on dit que $(G, .)$ est cyclique.

Exemples [DES2 p26]

(*i*) $(\mathbb{Z}, +)$ monogène infini engendré par 1 ou -1.
(*ii*) $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ cyclique d'ordre n engendré par 1.
(*iii*) $(U_n, \times)$ cyclique d'ordre n (à isomorphisme près c'est le seul d'ordre n).
(*iv*) $(\mathbb{Z}^2, +)$ n'est pas monogène.
(*v*) Le groupe diédral d'ordre $2n$ pour $n = 3$ n'est pas monogène.

Exercice [KIEF p323]&[ROM p38]

Déterminer tous les sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*, .)$.

Théorème de Kronecker [COM p66]

Soit G un groupe abélien fini d'ordre $n \geq 2$. Il existe une unique famille $(q_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'entiers naturels avec $q_1 \geq 2$, $q_1 \mid q_2 \mid \ldots \mid q_k$ tels que $G \simeq (\mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/q_k\mathbb{Z})$.

(C'est l'existence qui justifie l'importance des groupes monogènes.)

2) Description des groupes monogènes

Proposition [GDX p19]

Tout groupe monogène est abélien. La réciproque est fausse.

Contre-exemple

Le groupe de Klein $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ est abélien mais non monogène.

Théorème [ROM p14]

Si $G =< g >$ est un groupe cyclique d'ordre n.
Alors ses générateurs sont les g^k pour $0 < k < n$ et $k \wedge n = 1$.
Il y en a donc $\varphi(n)$.

Théorème [ROM p14]

Soit $(G, .)$ un groupe.
$(G, .)$ est monogène infini si, et seulement si, $(G, .) \simeq (\mathbb{Z}, +)$.
$(G, .)$ est cyclique d'ordre n si, et seulement si, $(G, .) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

Exemple [ROM p94]

Les sous-groupes finis d'ordre n de $SO_2(\mathbb{R})$ sont cycliques donc isomorphes à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

Remarque

Si G et H sont des groupes isomorphes, G monogène $\Longleftrightarrow$ H monogène.

II] Sous-groupes de groupes monogènes

1) Groupe monogène infini

Proposition [DES2 p8]

Tous les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont monogènes (de la forme $a\mathbb{Z}$).

2) Groupes cycliques

Soient $n \geq 2$ et $G =< a >$ cyclique d'ordre n.

Théorème [ROM p16]&[DES2 p27]

- Les sous-groupes de G sont tous cycliques d'ordre divisant n.
- Pour tout diviseur positif d de n, il existe un unique sous-groupe d'ordre d de G. Ce groupe est le groupe cyclique $H =< a^{\frac{n}{d}} >$.

On a aussi $H = \{x \in G,\ o(x) \mid d\}$ et les générateurs de H sont tous les éléments d'ordre d de G.

Remarque

G possède $\mathrm{card}\{d > 0,\ d \mid n\}$ sous-groupes, qui sont tous cycliques.