

9 Funciones

ACTIVIDADES INICIALES

- 9.I. Busca en internet cuáles son los precios que reciben los agricultores y ganaderos por cinco alimentos básicos, por ejemplo, leche, arroz, huevos, patatas y plátanos. Después compáralos con los que tú pagas en tu tienda habitual. ¿Cuáles son las diferencias absolutas y relativas? ¿Qué concluyes?

Respuesta personal

- 9.II. Los productos del comercio justo suelen ser un poco más caros que los habituales. ¿Por qué crees que ocurre esto?

Respuesta personal

- 9.III. Pon en común con tus compañeros tus respuestas a las preguntas anteriores y debatid los resultados en clase.

Respuesta personal

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- 9.1. Señala cuáles son los conjuntos inicial y final en las siguientes correspondencias, indicando además con cuántos elementos del conjunto final se relaciona cada elemento del inicial y viceversa.

- A cada automóvil, su número de matrícula.
- A cada alumno de 3.º, sus compañeros de clase.
- A cada número racional, su fracción irreducible.
- A cada hora del día, su temperatura.
- A cada persona, su nombre.

a) Conjunto inicial: automóviles; conjunto final: números de matrícula.

Cada elemento del conjunto inicial se relaciona con un solo elemento del conjunto final.

b) Conjunto inicial y conjunto final: alumnos de 3.º. Cada elemento del conjunto inicial se relaciona con todos los elementos del conjunto final excepto él mismo.

c) Conjunto inicial: números racionales; conjunto final: fracciones.

Cada elemento del conjunto inicial se relaciona con un elemento del conjunto final. Distintos números racionales pueden tener la misma fracción irreducible.

d) Conjunto inicial: horas del día; conjunto final: temperatura.

Cada hora del día se relaciona con su temperatura. En varios momentos del día se puede haber alcanzado la misma temperatura.

e) Conjunto inicial: personas; conjunto final: nombres.

Cada persona se relaciona con su nombre. Puede haber varias personas que se llamen igual.

9.2. Un kilogramo de azúcar cuesta 1,10 euros. Completa la siguiente tabla que relaciona las magnitudes número de kilogramos y precio.

N.º de kilogramos	2	5	10	20
Precio €	2,20	5,50	11	22

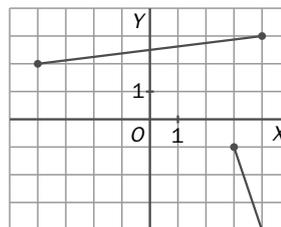
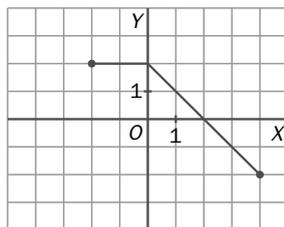
9.3. Expresa el volumen de un cubo en función de su arista.

$$V = a^3$$

9.4. Actividad resuelta.

9.5. Actividad resuelta.

9.6. Indica si estas gráficas son funciones y, en caso afirmativo, halla su dominio y recorrido.



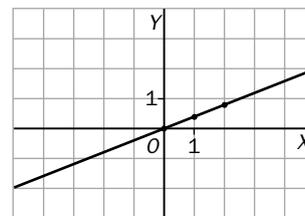
- a) Sí es función. Dominio: $[-2, 4]$. Recorrido: $[-2, 2]$.
- b) No es función porque en $(3, 4)$ toma más de un valor.

9.7. En algunos países se utilizan las pulgadas para expresar longitudes. Para pasar de centímetros a pulgadas se multiplica por 2 y se divide por 5.

- a) ¿Es una función la relación entre los centímetros y las pulgadas?
- b) Forma una tabla, representa la gráfica y expresa la fórmula.

- a) Sí, porque para un valor en pulgadas existe un único valor en centímetros.
- b)

x (cm)	0	1	2	5
$f(x)$ (pulgadas)	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	2

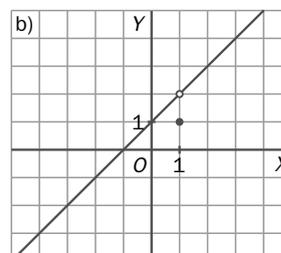
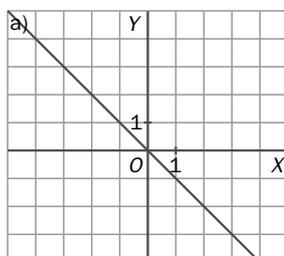


La fórmula que expresa la función es: $f(x) = \frac{2}{5}x$

9.8. Actividad interactiva

9.9. Actividad resuelta

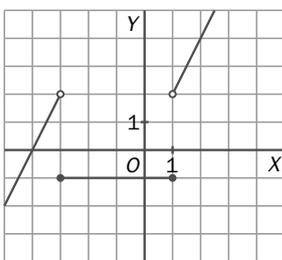
9.10. Estudia si son continuas estas funciones y, en caso negativo, indica sus puntos de discontinuidad.



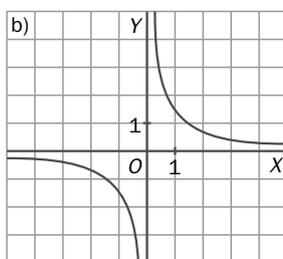
a) Sí

b) No. Punto de discontinuidad $x = 1$

9.11. Señala los puntos de discontinuidad.



a) $x = -3, x = 1$



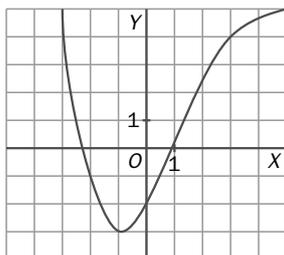
b) $x = 0$

9.12. Actividad interactiva

9.13. Actividad resuelta

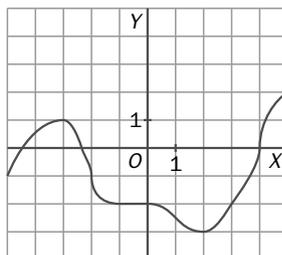
9.14. Halla la tasa de variación de estas funciones en el intervalo $[-2, 3]$.

a)



a) $TV[-2, 3] = f(3) - f(-2) = 4 - (-1) = 5$

b)



b) $TV[-2, 3] = f(3) - f(-2) = -2 - (-1) = -1$

9.15. (TIC) Para las funciones siguientes, halla la tasa de variación en los intervalos $[0, 1]$ y $[3, 4]$.

a) $f(x) = 5$

b) $f(x) = 2x + 3$

c) $f(x) = x^3$

a) $TV[0, 1] = f(1) - f(0) = 5 - 5 = 0$, $TV[3, 4] = f(4) - f(3) = 5 - 5 = 0$

b) $TV[0, 1] = f(1) - f(0) = 5 - 3 = 2$, $TV[3, 4] = f(4) - f(3) = 11 - 9 = 2$

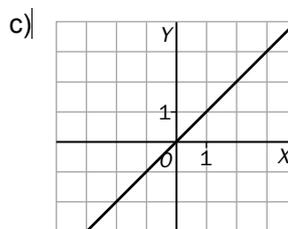
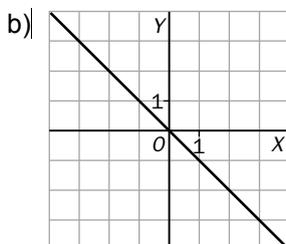
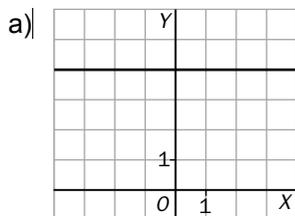
c) $TV[0, 1] = f(1) - f(0) = 1 - 0 = 1$, $TV[3, 4] = f(4) - f(3) = 64 - 27 = 37$

9.16. Pon un ejemplo de una función:

a) Con tasa de variación nula en cualquier intervalo.

b) Con tasa de variación constante y negativa.

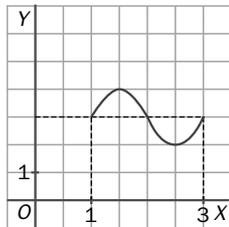
c) Con tasa de variación constante y positiva.



9.17. Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y justifica tus respuestas con ejemplos.

- a) Una función no puede tener una tasa de variación no constante y siempre negativa.
- b) Una función puede tener tasa de variación nula en un intervalo y no ser constante.

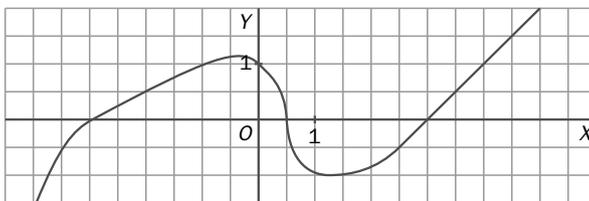
- a) Falsa. Por ejemplo, $-x^3$ tiene una tasa de variación no constante y siempre negativa.
- b) Verdadera. Por ejemplo, la siguiente función en el intervalo $[1, 3]$.



9.18. Actividad interactiva

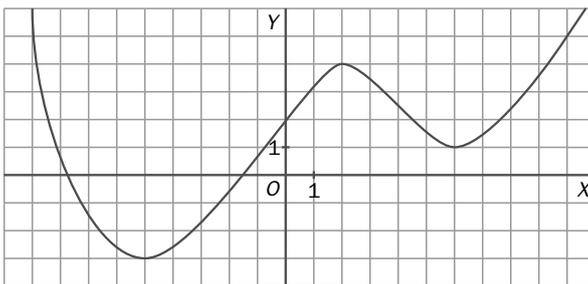
9.19. Actividad resuelta

9.20. Analiza el crecimiento o decrecimiento de esta función en el intervalo $[-3, -1]$ y $[0, 1]$



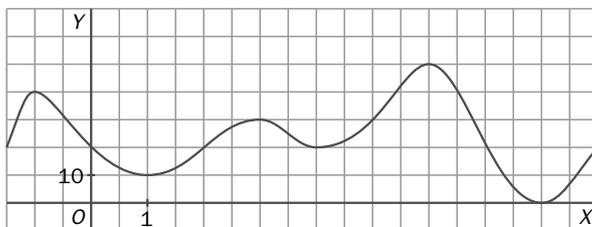
En el intervalo $[-3, -1]$ es creciente y en $[0, 1]$ es decreciente.

9.21. Indica dónde crece o decrece la siguiente función y la posición de sus máximos y mínimos.



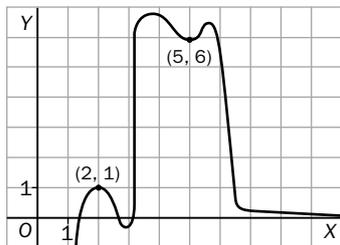
- Crece: $(-5, 2) \cup (6, \infty)$.
- Decrece: $(-\infty, -5) \cup (2, 6)$.
- Máximo: $(2, 4)$
- Mínimos: $(6, 1), (-5, -3)$

9.22. Halla los máximos y mínimos de la función.



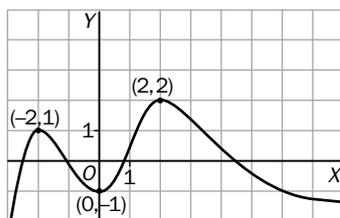
Máximos relativos: $(-1, 40), (3, 30), (6, 50)$. Máximo absoluto: $(6, 50)$
 Mínimos relativos: $(1, 10), (4, 20), (8, 0)$. Mínimo absoluto: $(8, 0)$

9.23. Dibuja una función continua con un máximo en el punto $(2, 1)$ y un mínimo en $(5, 6)$.



9.24. Representa una función continua que tenga:

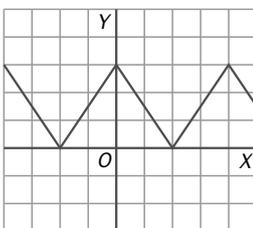
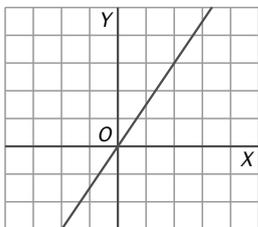
- Un máximo en el punto $(-2, 1)$.
- Un mínimo en el punto de abscisa $x = 0$.
- Un máximo absoluto en el punto $x = 2$.
- Sin mínimo absoluto.



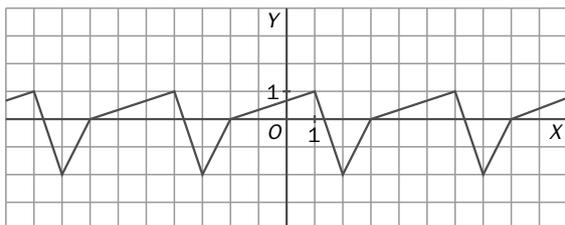
9.25. Actividad interactiva

9.26. Indica si estas funciones son simétricas. Razona tu respuesta.

- a) Sí, es simétrica respecto al origen. b) Sí, es simétrica respecto al eje de ordenadas.



9.27. Estudia si esta función es periódica y, en su caso, halla su período.



Es periódica, con período 5.

EJERCICIOS

Correspondencias

9.28. En las siguientes correspondencias, señala los conjuntos inicial y final e indica con cuántos elementos del conjunto inicial se relaciona cada elemento del conjunto final y viceversa.

- a) A cada montaña, su altitud.
- b) A cada nombre, su primer apellido.
- c) A cada número positivo, su doble más tres.
- d) A cada número real, su número inverso.

a) Conjunto inicial: montañas; conjunto final: altitudes. Cada elemento del conjunto inicial se relaciona con uno solo del conjunto final. Distintas montañas pueden tener la misma altitud.

b) Conjunto inicial: nombres; conjunto final: apellidos. Cada elemento del conjunto inicial puede relacionarse con varios elementos del conjunto final y viceversa. Al mismo nombre le pueden corresponder distinto primer apellido.

c) Conjunto inicial: números positivos; conjunto final: números positivos. Cada elemento del conjunto inicial se relaciona con uno solo del conjunto final.

d) Conjunto inicial: números reales; conjunto final: números reales. Cada elemento del conjunto inicial se relaciona con uno solo del conjunto final.

9.29. ¿Qué dos magnitudes están relacionadas en cada una de estas fórmulas?

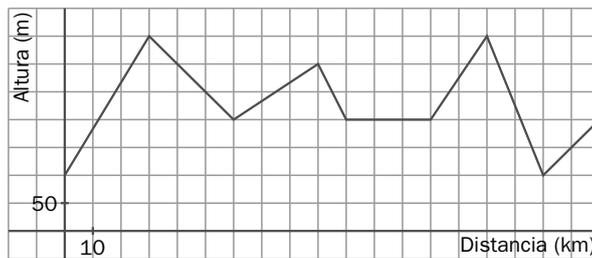
- a) $L = 2\pi \cdot r$
- b) $A = \pi \cdot r^2$
- c) $A = l^2$

a) La longitud de la circunferencia y su radio.

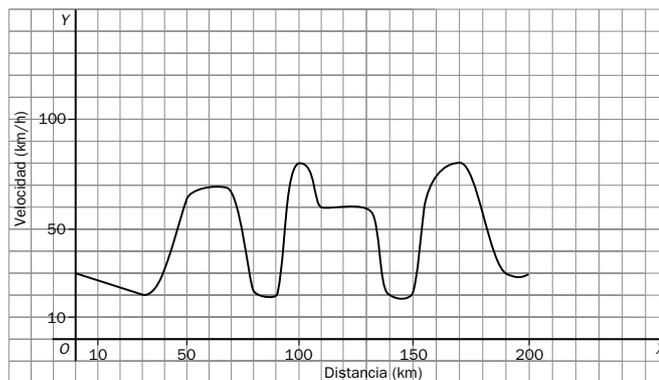
b) El área del círculo y su radio.

c) El área del cuadrado y su lado.

9.30. La gráfica muestra el perfil de una etapa de una vuelta ciclista.



Razona cómo sería la gráfica de la velocidad en función del espacio.



9.31. Escribe la fórmula que convierte hectómetros en decámetros y a la inversa. Indica en cada caso cuáles son las variables dependiente e independiente.

Paso de hm a dam: $1 \text{ hm} = 10 \text{ dam}$

Variable independiente: hm; variable dependiente: dam

Paso de dam a hm: $1 \text{ dam} = \frac{1}{10} \text{ hm}$

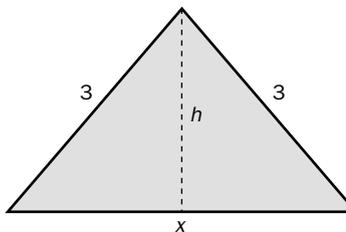
Variable independiente: dam; variable dependiente: hm

9.32. Halla la fórmula que permite obtener el área de un triángulo isósceles de lados 3, 3 y x , en función del lado desigual.

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{\text{Base} \times \text{Altura}}{2} = \frac{x \cdot h}{2}$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras a cualquiera de los dos triángulos rectángulos que se obtienen al trazar la altura desde el vértice que une los lados iguales:

$$3^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow 9 = h^2 + \frac{x^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{36 - x^2}}{2}$$



Con lo que el área buscada es: $A_{\text{triángulo}} = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{36 - x^2}}{2}}{2} = \frac{x \cdot \sqrt{36 - x^2}}{4}$.

Funciones. Dominio y recorrido

9.33. ¿Cuáles de estas relaciones correspondencias son funciones?

- a) A cada número sus divisores.
- b) A cada persona, el día de su nacimiento.
- c) A cada persona, el nombre de sus hijos.
- d) A cada hijo, el nombre de su padre.
- e) A cada número, su raíz cúbica.

Son funciones b, d y e.

9.34. Analiza si estas tablas corresponden a funciones. Justifica tu respuesta.

a)

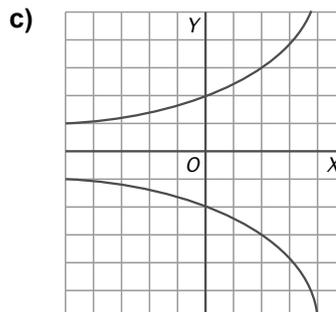
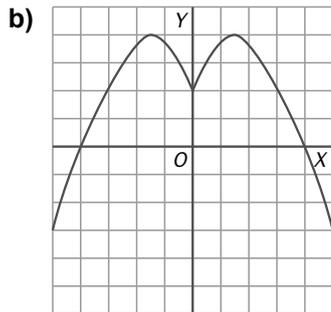
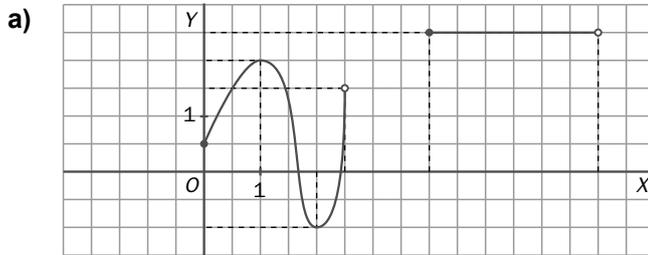
x	y
1	3
2	-1
3	3
$-\frac{1}{2}$	0
$\sqrt{2}$	3

b)

x	y
$-\frac{1}{4}$	5
6	-2
4	3
$-\frac{2}{8}$	5

- a) Sí es una función porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y .
- b) Sí es una función porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y (al valor $-\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$ le corresponde el valor 5).

9.35. Di si las siguientes gráficas son funciones y, en su caso, indica su dominio y su recorrido.



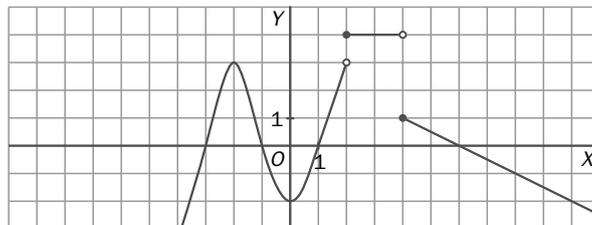
a) Sí es una función. Dominio = $\left[0, \frac{5}{2}\right) \cup [4, 7]$; recorrido = $\left[-1, \frac{5}{2}\right] \cup \{3\}$.

b) Sí es una función. Dominio = $(-\infty, \infty)$; recorrido = $(-\infty, 4]$.

c) No es una función porque, por ejemplo, al valor $x = 0$ le corresponden dos valores de y : 2 y -2 .

Continuidad y variación de una función

9.36. Estudia la continuidad de la siguiente función.



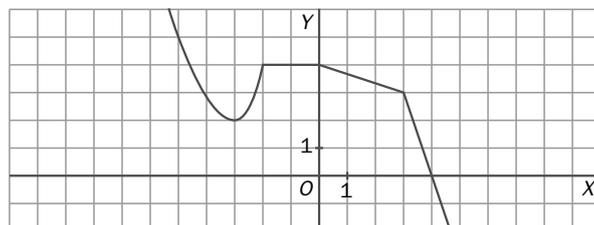
Continua en $(-\infty, 2) \cup (2, 4) \cup (4, +\infty)$;
discontinua en $\{2, 4\}$

9.37. Calcula la tasa de variación de la función en estos intervalos.

a) $[-3, -2]$

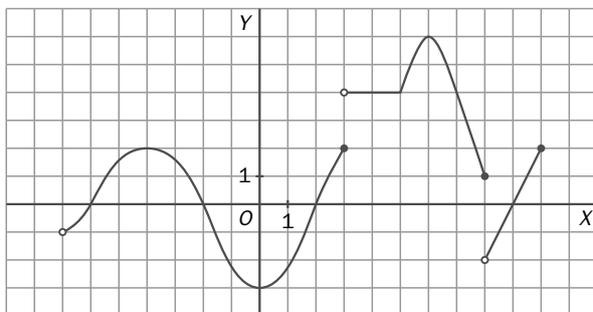
b) $[-2, 0]$

c) $[3, 4]$



- a) $TV[-3, -2] = f(-2) - f(-3) = 4 - 2 = 2$
- b) $TV[-2, 0] = f(0) - f(-2) = 4 - 4 = 0$
- c) $TV[3, 4] = f(4) - f(3) = 0 - 3 = -3$

9.38. Observa esta función y contesta.



- a) Dominio y recorrido.
- b) Calcula $f(-4)$, $f(4)$ y $f(8)$.
- c) Intervalos de continuidad y discontinuidad.
- d) Tasa de variación en $[-4, -2]$, $[0, 3]$ y $[6, 8]$.

- a) Dominio: $(-7, 10]$; recorrido: $[-3, 6]$
- b) $f(-4) = 2$; $f(4) = 4$, y $f(8) = 1$
- c) Intervalos de continuidad: $(-7, 3) \cup (3, 8) \cup (8, 10)$. Las discontinuidades están en $x = 3$ y $x = 8$.
- d) $TV [-4, -2] = 0 - 2 = -2$; $TV [0, 3] = 2 - (-3) = 5$; $TV [6, 8] = 1 - 6 = -5$

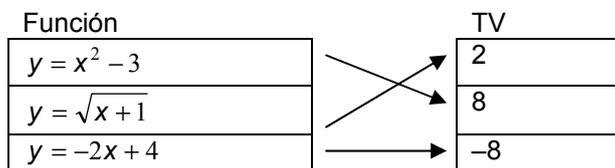
9.39. ¿Cuál de las siguientes funciones tiene la tasa de variación mayor en el intervalo $[0, \frac{1}{4}]$?

- a) $y = x^2$
- b) $y = 2x$
- c) $y = 2^x$

	$y = x^2$	$y = 2x$	$y = 2^x$
$f(0)$	0	0	1
$f(\frac{1}{4})$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt[4]{2}$
Tasa	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$	0,189
En decimales	0,0625	0,5	0,189

La mayor tasa la tiene la función $y = 2x$.

9.40. Une cada función con su tasa de variación en el intervalo $[-1, 3]$.

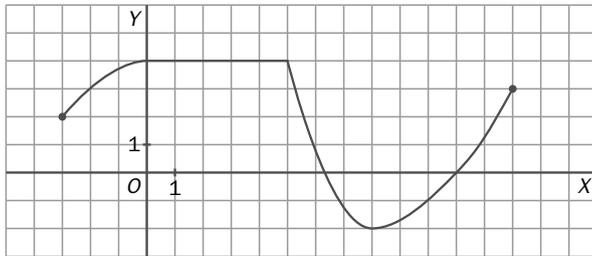


9.41. Si se establece la relación “A cada número le corresponden sus factores primos”, ¿cuál ha de ser su dominio para que sea una función?

El dominio de la función tendría que ser el conjunto de los números primos.

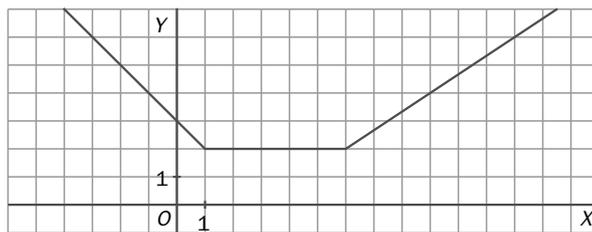
Crecimiento. Máximos y mínimos

9.42. Indica los intervalos donde la función es creciente, constante y decreciente.



Creciente: $[-3, 0) \cup (8, 13)$
 Constante: $(0, 5)$
 Decreciente: $(5, 8)$

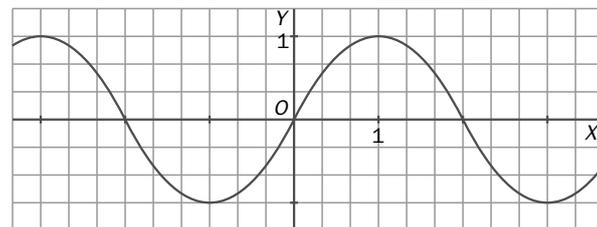
9.43. Una función viene dada por esta gráfica.



a) Indica los intervalos donde la función es creciente, constante o decreciente.
 b) ¿Qué signo tiene la tasa de variación en los intervalos $[2, 3]$, $[6, 10]$ y $[-4, -1]$?

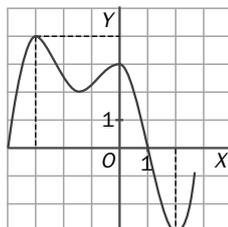
a) Crece en $(6, +\infty)$; decrece en $(-\infty, 1)$; es constante en $(1, 6)$.
 b) La tasa en $[2, 3]$ es igual a 0; en $[6, 10]$ es positiva, y en $[-4, -1]$ es negativa.

9.44. Observa esta función e indica cuáles son sus máximos y mínimos en el intervalo $[-2, 2]$.
 ¿Son absolutos o relativos?



Máximo en $(1, 1)$ y mínimo en $(-1, -1)$. Son absolutos y relativos.

9.45. Representa la gráfica de una función continua con un máximo absoluto en $(-3, 4)$, un máximo relativo en $(0, 3)$, un mínimo absoluto en $(2, -3)$ y un mínimo relativo en $(2, -3)$.

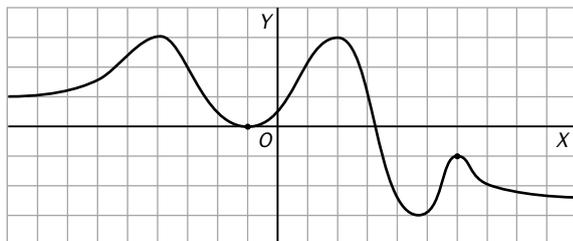


9.46. ¿Dónde alcanzará los máximos y los mínimos una función continua que crece en los intervalos $(-\infty, -5)$ y $(-2, 4)$, y decrece en los intervalos $(-5, -2)$ y $(4, \infty)$?

Alcanza un máximo en $x = -5$ y otro en $x = 4$.
Alcanza un mínimo en $x = -2$.

9.47. ¿Puede existir un mínimo con ordenada mayor que la ordenada en un máximo? ¿Y un máximo con ordenada menor que la ordenada en un mínimo? Dibuja las situaciones anteriores con gráficas de funciones.

Sí, ambas situaciones son posibles, como se ve en la gráfica de esta función.

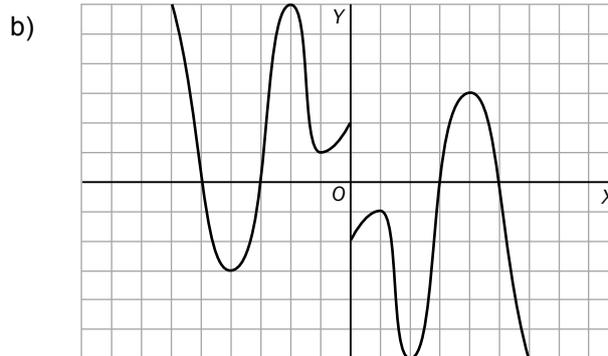
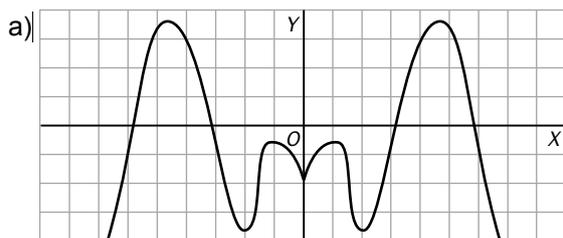
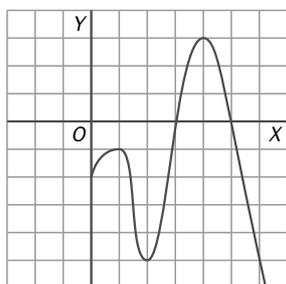


Simetría y periodicidad

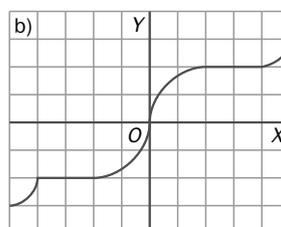
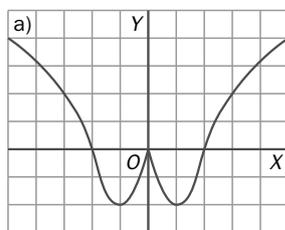
9.48. (TIC) Copia y completa la gráfica de la siguiente función para que tenga simetría:

a) Par

b) Impar



9.49. Indica la simetría de estas funciones.



a) Simétrica respecto al eje Y.

b) Simétrica respecto al origen

9.50. (TIC) Indica si estas funciones son pares o impares.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ b) $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ c) $h(x) = \frac{x^2}{x^4+1}$

a) Impar. $f(-x) = \frac{1}{-x} = -f(x)$

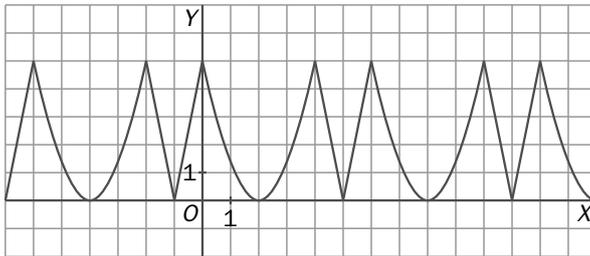
b) Impar. $g(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1} = -\frac{x}{x^2+1} = -g(x)$

c) Par. $h(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^4+1} = \frac{x^2}{x^4+1} = h(x)$

9.51. *Completa la tabla de esta función, sabiendo que tiene simetría impar.

x	-3	2	0	-2	3	5	$-\sqrt{25}$
y	$\frac{1}{2}$	-5	0	5	$-\frac{1}{2}$	-7	7

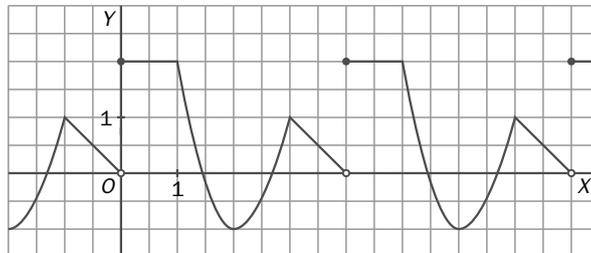
9.52. Analiza la siguiente gráfica de una función y señala si es periódica o no. En caso afirmativo, halla su período.



Es periódica, con período 6.

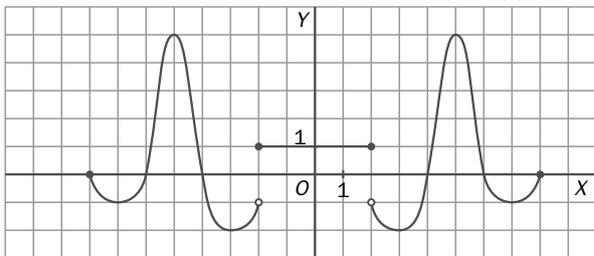
9.53. Halla el valor de la siguiente función periódica en estos puntos.

- a) 17 b) -6 c) -34 d) 121



- a) $f(17) = 2$ b) $f(-6) = -1$ c) $f(-34) = -1$ d) $f(121) = 2$

9.54. Observa la gráfica y estudia las siguientes propiedades.

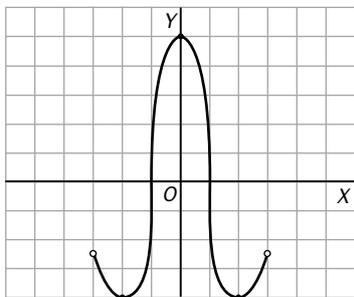


- a) Dominio y recorrido.
- b) Intervalos de continuidad y discontinuidades.
- c) Tasa de variación en $[-5, -3]$, $[-2, 0]$ y $[4, 5]$.
- d) Crecimiento y decrecimiento.
- e) Máximos y mínimos absolutos y relativos.
- f) Simetría.

- a) Dom = $[-8, 8]$. Rec = $[-2, 5]$
- b) Es continua en $[-8, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, 8]$ y discontinua en $\{-2, 2\}$.
- c) $TV [-5, -3] = -2 - 5 = -7$, $TV [-2, 0] = 1 - 1 = 0$, $TV [4, 5] = 5 - 0 = 5$
- d) Crece en $(-7, -5) \cup (-3, -2) \cup (3, 5) \cup (7, 8)$.
 Decrece en $(-8, -7) \cup (-5, -3) \cup (2, 3) \cup (5, 7)$.
 Es constante en $(-2, 2)$.
- e) Máximos absolutos y relativos: $(-5, 5)$ y $(5, 5)$
 Mínimos absolutos y relativos: $(-3, -2)$ y $(3, -2)$
- f) Simetría par

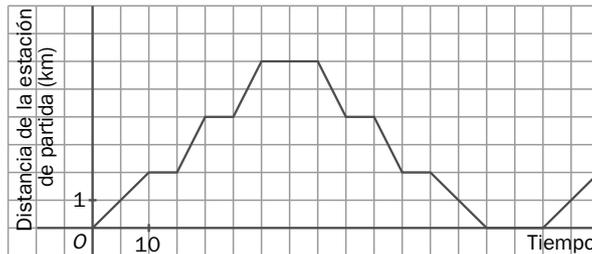
9.55. Dibuja la gráfica de una función que se ajusta a las siguientes características.

- Dominio: $(-3, 3)$
- Recorrido: $[-4, 5]$
- Mínimos: en $(-2, -4)$ y $(2, -4)$
- Máximo: en $(0, 5)$
- Simetría: par



PROBLEMAS

9.56. Un autobús universitario realiza cada día dos paradas, además de la inicial, para recoger estudiantes. La gráfica da su recorrido diario.



- a) ¿Es periódica la función? Halla su período.
- b) ¿A cuántos kilómetros está la universidad?
- c) ¿Cuánto tarda en llegar a la universidad?
- d) ¿Cuánto tiempo está parado en total?
- e) Interpreta el decrecimiento de la gráfica.

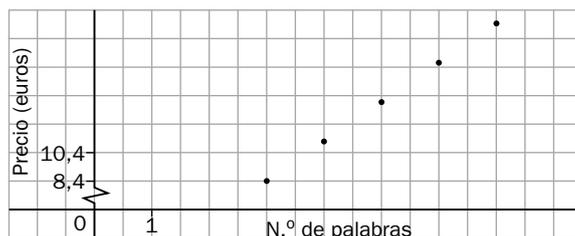
- a) Sí. El período es de 80 minutos.
- b) A 6
- c) 30 minutos
- d) 40 minutos
- e) Significa que vuelve a la estación.

9.57. (TIC) Un anuncio por palabras en un diario cuesta 2,80 euros por palabra y se establece un mínimo de tres palabras para poder ser admitido.

- a) Elabora una tabla y una gráfica de la función que relaciona el número de palabras con el precio del anuncio.
- b) ¿Es continua la función?
- c) ¿Dónde se producen discontinuidades?
- d) ¿Es continua la función en algún intervalo?

a)

N.º de palabras	3	4	5	...
Precio (€)	8,4	11,2	14	...



- b) No
- c) En todos los puntos
- d) No

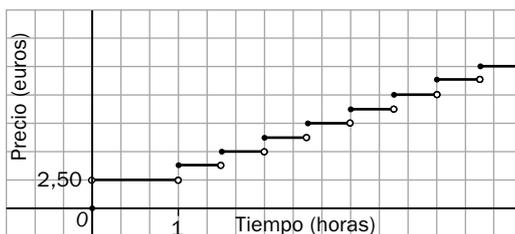
9.58. Un parking público tiene las siguientes tarifas.

- a) Haz una tabla y una gráfica de la situación.
- b) ¿Es continua la función? ¿Dónde no lo es?



a)

N.º de horas	Precio (€)
0	0
$\frac{1}{2}$	2,5
1	2,5
1,5	3,75
2	5
2,5	6,25
3	7,5
...	...
19	47,5
20	50



b) No es continua. Las discontinuidades se producen en $\{1; 1,5; 2; 2,5; 3; \dots\}$

9.59. Actividad interactiva

9.60. (TIC) Con un solo litro de gasolina se contaminan 750 000 litros de agua. Considera una inmensa piscina de 0,5 kilómetros de ancho, 2 kilómetros de largo y 10 metros de profundidad.

- a) ¿Cuántos litros de gasolina contaminan toda el agua de la piscina?
- b) Un petrolero contiene unos 80 millones de litros de gasolina. ¿Cuántas piscinas contaminaría si sus tanques se rompiesen?
- c) Representa la función que relaciona los litros de gasolina y los de agua contaminada.

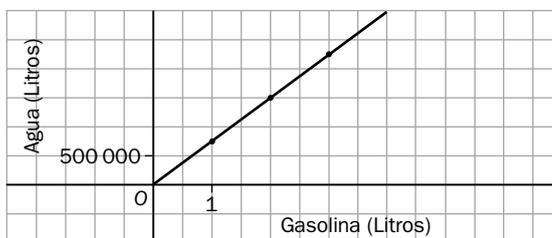
a) Capacidad de la piscina = $2000 \cdot 500 \cdot 10 \text{ m} = 10^7 \text{ m}^3 = 10^{10} \text{ L}$

N.º de litros = $\frac{10000000000}{750000} = 13333,33 \approx 13333$ litros hacen falta para contaminar toda la piscina.

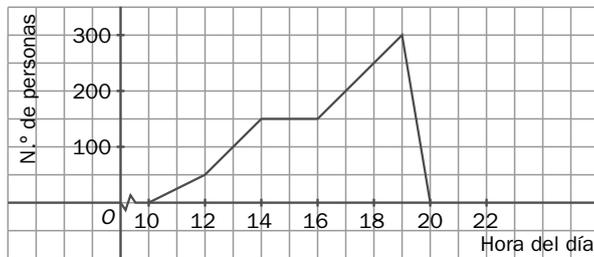
b) Con 80 millones de litros de gasolina \Rightarrow N.º de piscinas = $\frac{80000000}{13333} \approx 6000$ piscinas

c)

x	y
1	750 000
2	1 500 000
3	2 250 000
...	...



9.61. La afluencia a una piscina pública, a lo largo de un día veraniego está dada en la gráfica. Obsévala y contesta a las preguntas siguientes.



- a) El horario de la piscina.
- b) El máximo número de personas en la piscina y la hora en que se produce.
- c) Los períodos de decrecimiento de afluencia de personas.

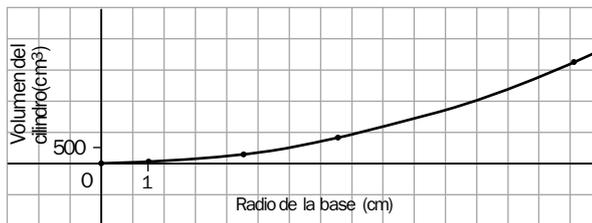
- a) De 10.00 a 20.00
- b) 300 personas a las 19.00
- c) De 14.00 a 16.00, porque la gente está comiendo, y de 19.00 a 20.00, porque se van marchando.

9.62. (TIC) La tabla relaciona el volumen, V , de los cilindros de 10 metros de altura con el radio de su base.

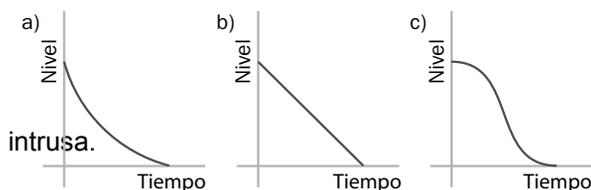
x (radio base)	1	3	5	10
y (volumen cilindro)	10π	90π	250π	1000π

- a) Halla la ecuación de la relación.
- b) Haz la gráfica de la función que relaciona el volumen de los cilindros con su radio.

- a) $y = \pi \cdot x^2 \cdot 10 = 10\pi x^2$
- b)



9.63. Los depósitos de la figura contienen la misma cantidad de agua y se vacían por su base a un ritmo constante de 5 litros por minuto. Las siguientes gráficas representan la altura del nivel del agua en los envases en función del tiempo transcurrido desde que comienzan a vaciarse. Identifica cada gráfica con su depósito.



La gráfica a corresponde al recipiente 2.
 La gráfica b corresponde al recipiente 1.
 La gráfica c corresponde al recipiente 3.

9.64. Actividad interactiva

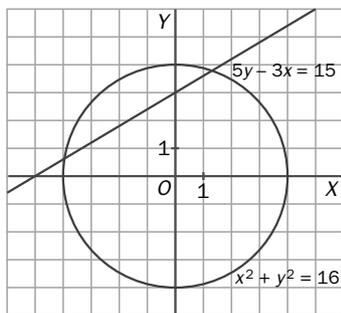
AMPLIACIÓN

9.65. Sea n el número de puntos (x, y) del plano que satisfacen las relaciones $5y - 3x = 15$ y $x^2 + y^2 \leq 16$. El valor de n es:

- a) 0 b) 1 c) 2 d) Infinito

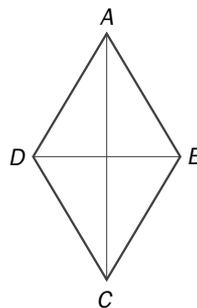
Representamos dichos puntos sobre unos ejes.

La primera relación, $5y - 3x = 15$, corresponde a una recta, y la segunda, $x^2 + y^2 \leq 16$, a un círculo. La intersección de ambos, una cuerda del círculo, está formada por infinitos puntos.



9.66. En un rombo $ABCD$ trazamos segmentos paralelos a la diagonal BD y cuyos extremos están en lados del rombo. Entonces, la gráfica que da la longitud de estos segmentos en función de su distancia al vértice A es:

- a) Una recta que pasa por el origen.
 b) Dos segmentos formando una V.
 c) Dos segmentos formando una V invertida (\wedge).



Si la distancia a A es cero, la longitud del segmento es también cero; por tanto, la gráfica comienza en el origen de coordenadas. A medida que nos separamos de A , la longitud crece hasta llegar a la diagonal BD , donde alcanza el máximo. Después, el segmento va acortándose hasta llegar al vértice C , donde de nuevo la longitud es cero. Por tanto, la gráfica es una \wedge que comienza en el origen $(0, 0)$.

9.67. La tabla adjunta da la distancia s recorrida por una bola en un plano inclinado en un tiempo t .

t (segundos)	0	1	2	3	4	5
s (metros)	0	10	40	90	160	250

La distancia recorrida para $t = 2,5$ segundos es:

- a) 45 b) 62,5 c) 70 d) 75

La función que relaciona la distancia y el tiempo es $s(t) = 10 \cdot t^2$, por lo que $s(2,5) = 10 \cdot 2,5^2 = 62,5$ metros.

9.68. El mayor valor del producto de las coordenadas x e y de los puntos que cumplen la relación $x + y = 1$ es:

- a) 1 b) 0,5 c) 0 d) 0,25

El producto es $xy = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4} = \frac{1 - (x-y)^2}{4}$, que es máximo cuando $x = y$, es decir,

$x = y = 0,5$, cuyo producto es $0,25$.

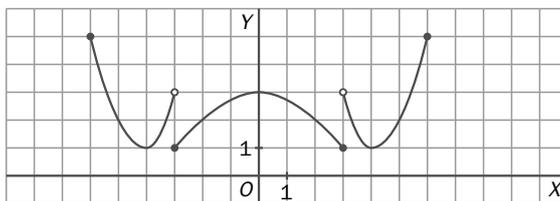
9.69. Los puntos $A(2, -3)$, $B(4, 3)$ y $C\left(5, \frac{k}{2}\right)$ están alineados. El valor (o valores) de k es:

- a) 12 b) -12 c) ± 12 d) 12 y 6

La recta que pasa por los puntos A y B es $y = 3x - 9$. La primera coordenada del punto C es 5; entonces, su segunda coordenada será $\frac{k}{2} = 3 \cdot 5 - 9$, de donde concluimos que $k = 12$.

AUTOEVALUACIÓN

9.1. Halla el dominio, el recorrido, los máximos y mínimos, las discontinuidades, el crecimiento y decrecimiento, y la simetría de la función.



- Dominio: $[-6, 6]$
 Recorrido: $[1, 5]$
 Mínimos: $(-4, 1)$, $(4, 1)$, $(-3, 1)$ y $(3, 1)$,
 Máximo: $(0, 3)$, $(-6, 5)$ y $(6, 5)$,
 Discontinuidades: $\{-3, 3\}$
 Creciente: $(-4, -3) \cup (-3, 0) \cup (4, 6)$
 Decreciente: $(-6, -4) \cup (0, 3) \cup (3, 4)$
 Simetría: par

9.2. La empresa de seguros A paga a sus agentes un fijo de 400 euros al mes más 12 euros por cada seguro vendido. La empresa B paga 20 euros por seguro, pero no da fijo mensual.

- a) ¿Qué fórmulas dan el sueldo que pagan A y B en función del número de seguros?
 b) Dibuja sus gráficas.

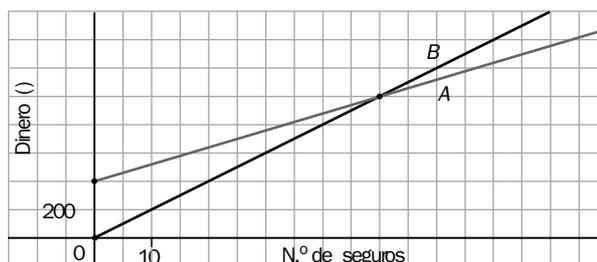
a) Llamaremos x al número de seguros vendidos.

La función $f(x)$ representa el sueldo de un empleado de la aseguradora A , y $g(x)$, el sueldo de un empleado de la aseguradora B .

$$f(x) = 400 + 12x$$

$$g(x) = 20x$$

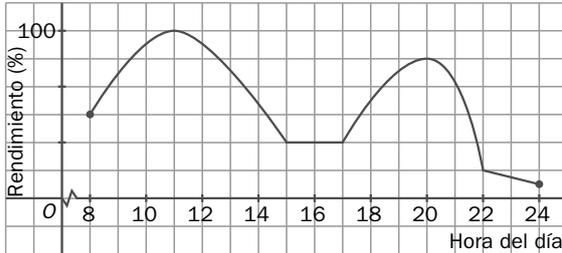
b)



9.3. Si una función continua, sin ser constante en ningún intervalo, tiene un solo máximo en $(-2, 5)$ y un solo mínimo en $(1, -3)$, ¿en qué intervalos crece y en cuáles decrece?

Crece en $(-\infty, -2)$ y en $(1, \infty)$.
 Decrece en $(-2, 1)$.

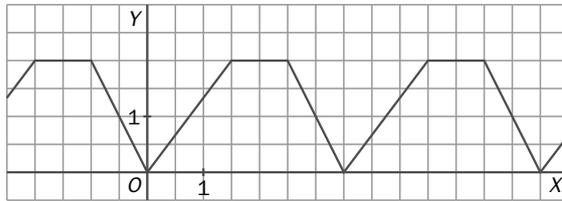
9.4. Esta gráfica estudia el rendimiento de los escolares en función de la hora del día.



a) ¿Cuándo se produce el máximo rendimiento? ¿Y el mínimo?
 b) ¿En qué momento de la tarde consideras que se deben hacer los deberes?

a) El máximo se produce a las 11.00, y el mínimo, a las 24.00.
 b) Entre las 19.00 y las 21.00

9.5. ¿Es periódica la función? Si es así, indica el período.

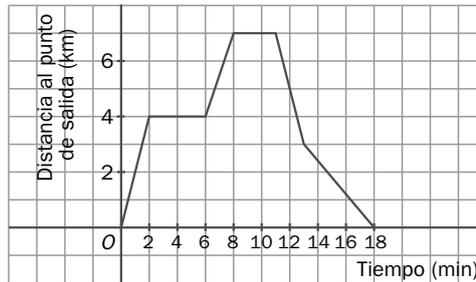
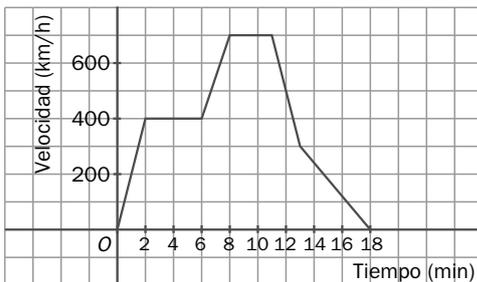


Sí, es periódica, y su período es 3,5.

PON A PRUEBA TUS COMPETENCIAS

Interpreta gráficas > Espacio y velocidad

1. Las dos tienen la misma forma, pero reflejan situaciones muy distintas. ¿Por qué? Justifica tu respuesta.



La gráfica A muestra cómo varía la velocidad del objeto en función del tiempo transcurrido. La gráfica B muestra cómo varía la distancia al punto de partida del objeto en función del tiempo transcurrido

En la gráfica a:

2. Indica cuándo se mueve con velocidad constante y cuándo acelera o frena.

La velocidad es constante en los tramos horizontales. Acelera en los tramos ascendentes y frena en los descendentes.

3. ¿Cuándo alcanza su máxima velocidad y cuál es esta?

La velocidad máxima son 700 km/h, y la alcanza desde el minuto 8 hasta el 11.

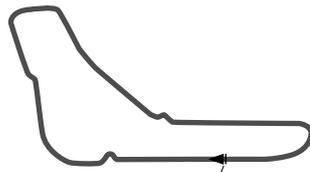
En la gráfica b:

4. Interpreta qué representan los tramos horizontales y señala cuándo inicia la vuelta

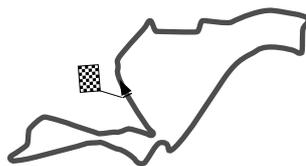
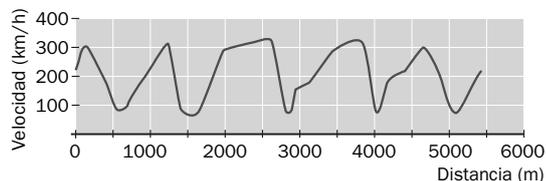
Los tramos horizontales indican que el objeto está parado, ya que se mantiene a la misma distancia del origen (es importante resaltar que el objeto se mueve a lo largo de una línea recta). El regreso comienza en el minuto 11.

5. ¿En qué tramo de la gráfica la velocidad es mayor?

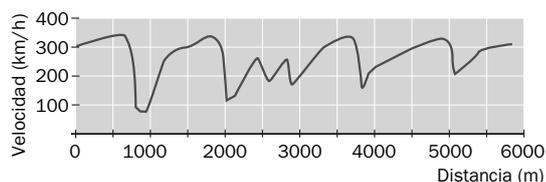
En el tramo $[0,2)$ y en el $[11,13)$, aunque en este último el coche está dando marcha atrás.



Valencia (España)



Monza (Italia)



6. Describe brevemente cuándo crees que un piloto frenará o acelerará al recorrer uno de estos circuitos.

El piloto debe frenar al entrar en las curvas, y cuanto más cerradas sean, más deberá frenar. Acelera al salir de las curvas y pisando hasta el fondo en las rectas.

7. Compara las gráficas con el trazado de los circuitos y averigua qué gráfica le corresponde a cada uno.

La primera gráfica corresponde a Valencia, y la segunda, a Monza.

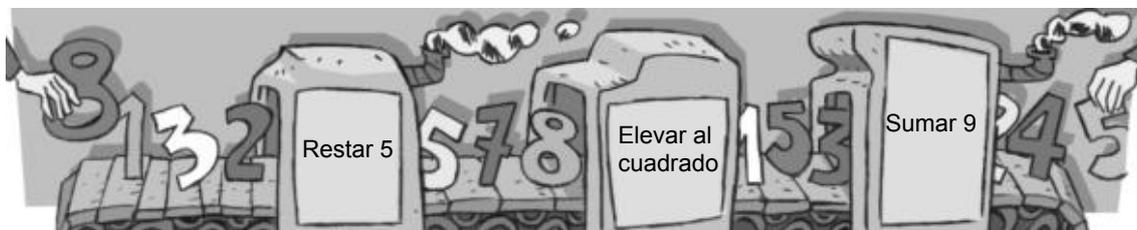
8. Si en la prueba hay que dar 70 vueltas al circuito. ¿Será periódica la gráfica velocidad/distancia? Señala qué factores pueden influir para que se rompa la periodicidad.

La gráfica no puede ser periódica, ya que en una carrera es prácticamente imposible que un piloto reproduzca dos vueltas con exactitud, pues intervienen el tráfico, las inclemencias del tiempo, los posibles accidentes, el desgaste de los neumáticos, etc.

9. ¿Piensas que este análisis se puede aplicar también a la conducción en una carretera normal?

Sí, considerando que en una carretera normal intervienen aún más factores: limitaciones de velocidad, semáforos, atascos, cansancio del conductor, tráfico, etc.

Observa y reflexiona > La cadena de montaje



1. **¿Qué número sale si entra un 2?**
 $2 \rightarrow 2 - 5 = -3 \rightarrow (-3)^2 = 9 \rightarrow 9 + 9 = 18$. Sale el número 18.
2. **¿Qué número entró si salió un 9?**
Entró el número 5: $5 - 5 = 0 \rightarrow 0^2 = 0 \rightarrow 0 + 9 = 9$.
3. **Si salió un 13, ¿puedes decidir con seguridad qué número entró?**
No se puede decidir porque hay dos números que se transforman en 13 al final del proceso:
Si entra el número 7: $7 - 5 = 2 \rightarrow 2^2 = 4 \rightarrow 4 + 9 = 13$.
Si entra el número 3: $3 - 5 = -2 \rightarrow (-2)^2 = 4 \rightarrow 4 + 9 = 13$.
Esto se debe a que hay dos números cuyo cuadrado es 4.
4. **¿Es posible que salga el 8?**
Un 8 no puede salir como resultado final porque esto implicaría que en la penúltima etapa habría un -1 , que no es el cuadrado de ningún número real.
5. **Escribe la expresión de la función de esta cadena de montaje.**
 $f(x) = (x - 5)^2 + 9$
6. **Inventa una cadena de montaje en la que siempre salgan números negativos.**
 $f(x) = 2x - (x + 1)^2$
7. **¿Qué cadena de montaje se asocia a la función $f(x) = 2x^2 - 1$?**
(Elevar al cuadrado) \rightarrow (Multiplicar por 2) \rightarrow (Restar 1)
8. **¿Qué cadena de montaje se asocia a la función $f(x) = x^2 + 6x + 5$?**
Ayuda: completa cuadrados.
 $f(x) = x^2 + 6x + 5 = (x + 3)^2 - 4$. La cadena de montaje sería:
(Sumar 3) \rightarrow (Elevar al cuadrado) \rightarrow (Restar 4)

Aprende a pensar > La caída del precio del café

- Suponiendo que el precio de coste en origen del producto es de 0,40 euros por kilo, calcula cuál es el beneficio por kilo que va para el productor y para el resto de intermediarios en cada uno de los dos casos.

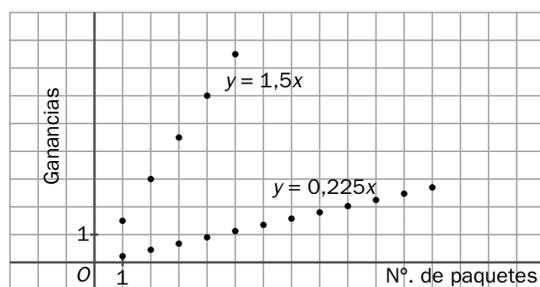
En las tiendas normales, el productor obtiene un beneficio de $0,15 \cdot 1,50 = 0,225$ euros, y los intermediarios se llevan $1,5 - 0,4 - 0,225 = 0,875$ euros.

En las tiendas de comercio justo, el productor obtiene un beneficio de $0,75 \cdot 2 = 1,50$ euros, y los intermediarios se llevan $2 - 0,4 - 1,5 = 0,10$ euros.

- Representa las gráficas que relacionan el número de paquetes vendidos con las ganancias para el productor. ¿Son continuas las funciones asociadas?

En las tiendas normales, las ganancias, y , del productor vienen dadas por la función $y = 0,225x$.

En las tiendas de comercio justo, las ganancias, y , del productor vienen dadas por la función $y = 1,5x$. Ambas funciones están definidas solamente para valores enteros de x (número de paquetes) y no tiene sentido plantearse su continuidad.



- Al vender 100 paquetes en cada una de las redes de distribución, ¿cuánto gana el productor en cada caso?

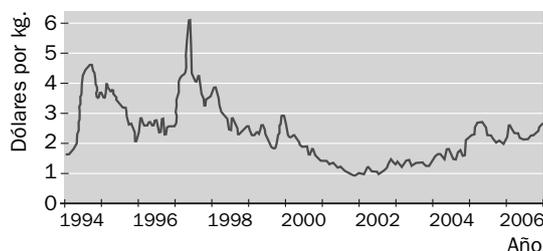
En las tiendas normales, las ganancias son $0,225 \cdot 100 = 22,50$ euros.

En las tiendas de comercio justo, las ganancias son $1,5 \cdot 100 = 150$ euros.

- ¿Cuáles fueron los precios máximo y mínimo del café y en qué momentos de este periodo se alcanzaron?

El precio máximo fue de 6 dólares el kilo y se alcanzó a mediados de 1997.

El precio mínimo fue de 1 dólar el kilo y se alcanzó en 2002.



- El comercio justo está promovido por ONG que ofrecen a los productores condiciones económicas mejores. ¿Qué opinas acerca del comercio justo? ¿Crees que realmente propone un sistema de compra-venta más equitativo? ¿Consumirías productos de comercio justo? ¿Por qué?

Entra en <http://matematicas20.aprenderapensar.net> y participa en el debate.

Respuesta abierta

Proyecto editorial: **Equipo de Educación Secundaria del Grupo SM**

Autoría: **Rafaela Arévalo, José Luis González, Juan Alberto Torresano**

Edición: **Elena Calvo, Miguel Ángel Ingelmo, Yolanda Zárate**

Corrección: **Ricardo Ramírez**

Ilustración: **Félix Anaya, Modesto Arregui, Juan Francisco Cobos, Domingo Duque, Félix Moreno,**

Diseño: **Pablo Canelas, Alfonso Ruano**

Maquetación: **SAFEKAT S. L.**

Coordinación de diseño: **José Luis Rodríguez**

Coordinación editorial: **Josefina Arévalo**

Dirección del proyecto: **Aída Moya**

(*) Una pequeña cantidad de ejercicios o apartados de ejercicios han sido marcados porque contienen alguna corrección en su enunciado respecto del que aparece en el libro del alumno.

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra solo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra, a excepción de las páginas que incluyen la leyenda de "Página fotocopiable".

© Ediciones SM

Impreso en España – *Printed in Spain*