Ujian Akhir Semester
Metode Numeris I

Dr. Istiarto | Kamis, 31 Mei 2018 | Open Book | 150 menit

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id/ • istiarto@ugm.ac.id

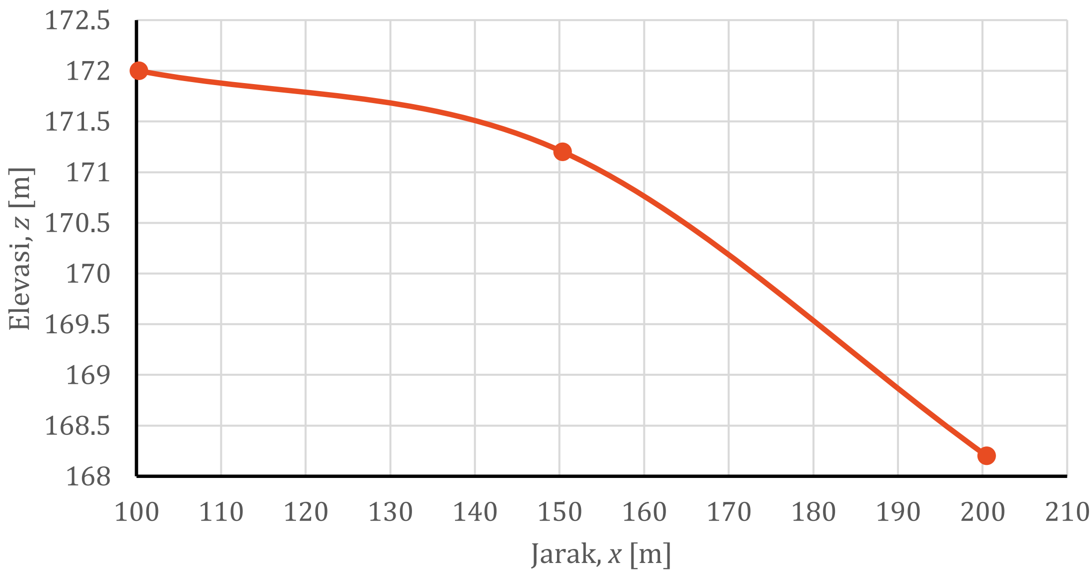
Petunjuk

1. Saudara tidak boleh menggunakan komputer untuk mengerjakan soal ujian ini.
2. Tuliskan urutan/cara/formula yang Saudara pakai untuk mendapatkan jawaban. Jangan hanya menuliskan tabel angka jawaban.

Soal 1 [CP: a.1, a.2, a.3, k.1; Bobot Nilai: 25%]

Tabel dan gambar di bawah ini adalah elevasi muka tanah di suatu tebing.

Jarak, *x* [m]	100.3	150.4	200.5
Elevasi, *z* [m]	172.0	171.2	168.2



Cari dan temukan kurva polinomial kuadratik (*second-order polynomial*) melewati ketiga titik data tersebut dengan metode (a) interpolasi Newton dan (b) interpolasi Lagrange. Buat tabel seperti di bawah ini berdasarkan kurva polinomial tersebut.

Jarak, *x* [m]	Elevasi, *z* [m] (Metode Newton)	Elevasi, *z* [m] (Metode Lagrange)
100.3	172.0	172.0
130.0	...	...
150.4	171.2	171.2
160.0	...	...
180.0	...	...
200.5	168.2	168.2

Penyelesaian

Polinomial kuadratik yang merupakan kurva parabolik melewati ketiga titik data pada soal ini, dengan memakai metode Newton, dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$z = f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$b_0 = f(x_0)$

$b_1 = f[x_1, x_0] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

$b_2 = f[x_2, x_1, x_0] = \dfrac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = \dfrac{1}{(x_2 - x_0)}\left[\left\{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right\} - \left\{\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right\}\right]$

Koefisien b_0, b_1, dan b_2 dapat diperoleh dengan hitungan tabulasi di bawah ini.

i	x	$z = f(x_i)$	Langkah hitungan ke-1	Langkah hitungan ke-2	
0	100.3	172	-0.0160	-0.0004	$\rightarrow b_0, b_1, b_2$
1	150.4	171.2	-0.0599		
2	200.5	168.2			

Dengan demikian, persamaan kuadratik yang melewati ketiga titik data adalah:

$z = f_2(x) = 172 - 0.0160(x - 100.3) - 0.0004(x - 100.3)(x - 150.4)$

Jika memakai metode Lagrange, maka persamaan kuadratik yang melewati ketiga titik data pada soal ini adalah:

$z = f_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$

$z = f_2(x) = \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1}\dfrac{x - x_2}{x_0 - x_2}f(x_0) + \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}\dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2}f(x_1) + \dfrac{x - x_0}{x_2 - x_0}\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2)$

$$z = f_2(x) = \left(\frac{x - 150.4}{100.3 - 150.4}\right)\left(\frac{x - 200.5}{100.3 - 200.5}\right)(172)$$
$$+ \left(\frac{x - 100.3}{150.4 - 100.3}\right)\left(\frac{x - 200.5}{150.4 - 200.5}\right)(171.2)$$
$$+ \left(\frac{x - 100.3}{200.5 - 100.3}\right)\left(\frac{x - 150.4}{200.5 - 150.4}\right)(168.2)$$

Dengan dua persamaan polinomial kuadratik tersebut, maka tabel pada soal dapat dilengkapi menjadi sebagai berikut:

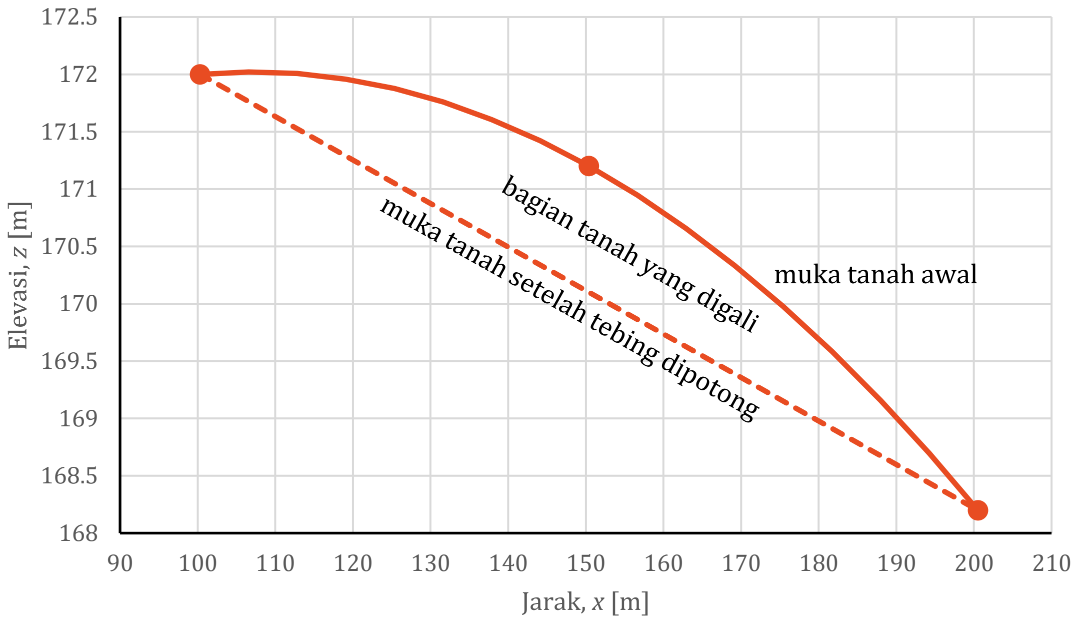
Jarak, x [m]	Elevasi, z [m] (Metode Newton)	Elevasi, z [m] (Metode Lagrange)
100.3	172.0	172.0
130	171.791	171.791
150.4	171.2	171.2
160	170.796	170.796
180	169.693	169.693
200.5	168.2	168.2

Soal 2 [CP: a.1, a.2, a.3, k.1; Bobot Nilai: 25%]

Tebing pada Soal 1 akan dipotong mengikuti garis lurus horizontal pada elevasi +168 m selebar 7 m sepanjang ruas tersebut dari x = 100.3 m s.d. x = 200.5 m. Hitung volume galian tanah dengan metode trapesium dan metode Kuadratur Gauss.

Penyelesaian

Profil muka tanah di tebing pada Soal 1 dapat digambar dengan memakai persamaan polinomial yang merupakan kurva interpolasi ketiga titik data muka tanah. Gambar berikut ini adalah hasil plot kurva interpolasi melewati ketiga titik data. Garis putus-putus pada gambar adalah profil muka tanah setelah tebing dipotong. Volume galian tanah adalah volume tanah di antara profil muka tanah awal dan profil muka tanah setelah tebing dipotong. Jika lebar tebing tegak lurus bidang gambar adalah 7 meter, maka volume tanah galian dapat diketahui dengan menghitung selisih luas di bawah profil muka tanah awal dan luas di bawah profil muka tanah setelah pemotongan tebing. Luas di bawah profil muka tanah dihitung dengan cara integrasi numeris.



Integrasi Numeris Metode Trapesium. Menurut metode trapesium, luas atau integral di bawah kurva adalah:

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\{f(a)+f(b)\} = \frac{\Delta x}{2}\{f(a)+f(b)\}$$

Hitungan disajikan pada tabel di bawah ini.

i	*x*	*f*(*x*)	Δ*x*	*I*
0	100.3	172		
1	130	171.8	29.7	5105.30
2	150.4	171.2	20.4	3498.51
3	160	170.8	9.6	1641.58
4	180	169.7	20	3404.89
5	200.5	168.2	20.5	3463.41
				17113.69

Luas tanah di bawah profil muka tanah setelah dipotong dapat dihitung dengan mudah karena bentuk bangun profil tanah tersebut adalah trapesium.

Luas trapesium $= (200.5 - 100.3)(172 + 168.2)/2 = 17044.02\ \mathrm{m}^2$

Dengan demikian, volume galian tanah adalah:

$\text{Vol.} = (17113.69 - 17044.02) \times 7 = 487.68\ \mathrm{m}^3$

Integrasi Numeris Metode Kuadratur Gauss. Dalam metode ini, variabel x diubah menjadi variabel x_d. Hubungan kedua variabel adalah sebagai berikut:

$$x = \frac{(b+a)+(b-a)x_d}{2}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{(b-a)}{2}\mathrm{d}x_d$$

Dalam hubungan di atas, a dan b adalah batas integrasi, yaitu a = 100.3 dan b = 200.5. Dengan memakai persamaan kuadratik yang diperoleh dari interpolasi metode Newton, maka luas di bawah profil muka tanah tebing dihitung dengan integrasi numeris berikut:

$$x = \frac{(200.5 + 100.3) + (200.5 - 100.3)x_d}{2} = 150.4 + 50.1x_d$$

$$\mathrm{d}x = \frac{(b-a)}{2}\mathrm{d}x_d = 50.1\mathrm{d}x_d$$

$$\int_{100.3}^{200.5} \{172 - 0.0160(x - 100.3) - 0.0004(x - 100.3)(x - 150.4)\}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{1} \{172 - 0.0160(150.4 + 50.1x_d - 100.3)$$

$$- 0.0004(150.4 + 50.1x_d - 100.3)(150.4 + 50.1x_d - 150.4)\}\,50.1\mathrm{d}x_d$$

$$= f\left(x_d = -1/\sqrt{3}\right) + f\left(x_d = 1/\sqrt{3}\right) = 8613.708 + 8503.792$$

$$= 17117.5\ \mathrm{m}^2$$

Dengan demikian, volume galian tanah adalah:

$$\mathrm{Vol.} = (17117.5 - 17044.02) \times 7 = 514.36\ \mathrm{m}^3$$

SOAL 3 [CP: A.1, A.2, A.3, K.1; BOBOT NILAI: 25%]

Sebuah tangki silinder tegak bocor di bagian dasar dengan lubang seluas, o = 0.0025 m^2. Bagian atas tangki mempunyai lubang yang berhubungan dengan udara luar. Ukuran tangki: diameter dasar 1.5 m dan tinggi 5 m. Pada saat mulai bocor, t = 0 detik, kedalaman air dalam tangki, $h(t = 0)$ = 4.5 m. Berapa lama kedalamann air di tangki turun menjadi $h(t)$ = 0.5 m? Dekati jawaban soal ini dengan Metode Euler dan Metode Runge-Kutta orde 2. Diketahui koefisien kontraksi pada lubang bocor, c = 0.6, dan percepatan gravitasi, g = 9.78 m/s^2. Gunakan Δt = 120 detik. Persamaan diferensial penurunan muka air dalam tangki dituliskan di bawah ini.

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{oc}{A}\sqrt{gh}$$

Dalam persamaan tersebut, A adalah luas tampang melintang tangki.

PENYELESAIAN

Kedalaman air dalam tangki berubah sesuai waktu yang dinyatakan dalam sebuah persamaan diferensial biasa (ODE):

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{oc}{A}\sqrt{gh}$$

Kedalaman air dalam tangki pada waktu t dapat dihitung dengan Metode Euler.

$$h_{i+1} = h_i - \phi_i \Delta t = h_i - \left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right|_i \Delta t$$

Tanda negatif pada kemiringan (*slope*) karena kemiringan ini merupakan pengurangan (penurunan) kedalaman air. Hitungan dilakukan secara bertahap dengan selang langkah $\Delta t = 120$ detik.

$$\phi_i = \left.\frac{dh}{dt}\right|_i = \frac{0.0025(0.6)}{0.25\pi 1.5^2}\sqrt{9.81 h_i}$$

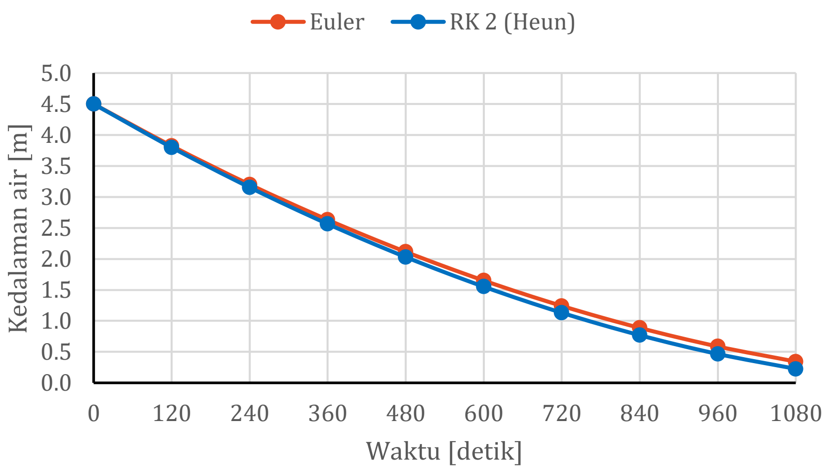
i	t_i	h_i	ϕ_i	h_{i+1}
0	0	4.50	0.0056	3.8243
1	120	3.82	0.0052	3.2013
2	240	3.20	0.0047	2.6314
3	360	2.63	0.0043	2.1147
4	480	2.11	0.0039	1.6514
5	600	1.65	0.0034	1.2421
6	720	1.24	0.0030	0.8871
7	840	0.89	0.0025	0.5870
8	960	0.59	0.0020	0.3430
9	1080	0.34	0.0016	0.1564

Metode Runge-Kutta orde 2 berbeda dengan Metode Euler dalam menghitung kemiringan ϕ. Ada beberapa varian Metode Runge-Kutta orde 2. Di bawah ini adalah salah satu Metode Runge-Kutta orde 2, yang sama dengan Metode Heun.

$$h_{i+1} = h_i - \phi\Delta t = h_{i+1} = h_i - \left(\tfrac{1}{2}k_1 + \tfrac{1}{2}k_2\right)\Delta t$$

$$k_1 = f(t_i, h_i) = \left.\frac{dh}{dt}\right|_i = \frac{0.0025(0.6)}{0.25\pi 1.5^2}\sqrt{9.81 h_i} \text{ dan } k_2 = f(t_i + \Delta t, h_i + k_1\Delta t)$$

i	t_i	h_i	k_1	$t_i + \Delta t$	$h_i + k_1\Delta t$	k_2	ϕ_i	h_{i+1}
0	0	4.5000	0.0056	120	5.1757	0.0060	0.0058	3.7998
1	120	3.7998	0.0052	240	4.4207	0.0056	0.0054	3.1544
2	240	3.1544	0.0047	360	3.7202	0.0051	0.0049	2.5644
3	360	2.5644	0.0043	480	3.0745	0.0047	0.0045	2.0300
4	480	2.0300	0.0038	600	2.4839	0.0042	0.0040	1.5521
5	600	1.5521	0.0033	720	1.9489	0.0037	0.0035	1.1313
6	720	1.1313	0.0028	840	1.4701	0.0032	0.0030	0.7688
7	840	0.7688	0.0023	960	1.0481	0.0027	0.0025	0.4661
8	960	0.4661	0.0018	1080	0.6836	0.0022	0.0020	0.2257



Kedalaman air dalam tangki mencapai 0.5 meter dalam waktu sekitar 950 s.d. 1000 detik.

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id/ • istiarto@ugm.ac.id

SOAL 4 [CP: A.1, A.2, A.3, K.1; BOBOT NILAI: 25%]

Di bawah ini adalah persamaan diferensial parsial parabolik.

$$2n\frac{\partial h}{\partial t} = k\frac{\partial^2 (h^2)}{\partial x^2} + q_r - Q_p$$

Domain hitungan adalah pada $x[0,20]$ dan $t[0,100]$. Gunakan Δt = 2 detik dan Δx = 1 m. Diketahui, n = 0.4, k = 0.0018, q_r = 0.0004 berlaku pada $t \geq 0$ detik, dan Q_p = 0.001 di x = 8 m, berlaku pada $t \geq 32$ detik. Syarat batas: $h(0,t) = h(20,t)$ = 15 m. Syarat awal: $h(x,0)$ = 15 m.

Tuliskan persamaan diskrit (persamaan kerja) dengan pendekatan beda hingga skema eksplisit dan skema implisit.

Apabila waktu memungkinkan, tuliskan hasil hitungan $h(t_n,x_i)$ untuk t = 2 dan 4 detik.

PENYELESAIAN

Untuk memudahkan penulisan, dikenalkan variabel baru, $u = h^2$, dan indeks m untuk langkah waktu dari t ke $t + \Delta t$, serta indeks i untuk langkah jarak dari x ke $x + \Delta x$.

$$2n\frac{\partial h}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q_r - Q_p$$

Persamaan diskrit beda hingga skema eksplisit:

$$2n\frac{h_i^{m+1} - h_i^m}{\Delta t} = k\frac{u_{i-1}^m - 2u_i^m + u_{i+1}^m}{\Delta x^2} + q_r - Q_p$$

$$h_i^{m+1} = h_i^m + \frac{k\Delta t}{2n\Delta x^2}u_{i-1}^m - \frac{k\Delta t}{2n\Delta x^2}2u_i^m + \frac{k\Delta t}{2n\Delta x^2}u_{i+1}^m + \frac{\Delta t}{2n}\left(q_r - Q_p\right)$$

Persamaan diskrit beda hingga skema implisit:

$$2n\frac{h_i^{m+1} - h_i^m}{\Delta t} = k\frac{u_{i-1}^{m+1} - 2u_i^{m+1} + u_{i+1}^{m+1}}{\Delta x^2} + q_r - Q_p$$

Skema implisit di atas sulit untuk diselesaikan karena variabel yang tidak diketahui dinyatakan dalam h dan h^2.

Untuk $t = 2$ dan 4 detik (skema eksplisit):

n = 0.4, k = 0.0018, q_r = 0.0004, Q_p = 0

$$\frac{k\Delta t}{2n\Delta x^2} = \frac{0.0018 \times 2}{2 \times 0.4 \times 1^2} = 0.0045$$

$$\frac{\Delta t}{2n} = \frac{2}{2 \times 0.4} = 2.5$$

$$t = 2: h_i^1 = h_i^0 + \frac{k\Delta t}{2n\Delta x^2}u_{i-1}^0 - \frac{k\Delta t}{2n\Delta x^2}2u_i^0 + \frac{k\Delta t}{2n\Delta x^2}u_{i+1}^0 + \frac{\Delta t}{2n}\left(q_r - Q_p\right); i = 0,1,\ldots,20$$

$$t = 4: h_i^2 = h_i^1 + \frac{k\Delta t}{2n\Delta x^2}u_{i-1}^1 - \frac{k\Delta t}{2n\Delta x^2}2u_i^1 + \frac{k\Delta t}{2n\Delta x^2}u_{i+1}^1 + \frac{\Delta t}{2n}\left(q_r - Q_p\right); i = 0,1,\ldots,20$$

Hitungan disajikan pada tabel di bawah ini.

Istiarto • https://istiarto.staff.ugm.ac.id/ • istiarto@ugm.ac.id

	t [s] =	0		2		4	
	m =	0		1		2	
x [m]	i	h_i^m	u_i^m	h_i^m	u_i^m	h_i^m	u_i^m
0	0	20	400	20	400	20	400
1	1	15	225	15.79	249.28	16.36	267.61
2	2	15	225	15.00	225.03	15.11	228.35
3	3	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
4	4	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
5	5	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
6	6	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
7	7	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
8	8	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
9	9	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
10	10	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
11	11	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
12	12	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
13	13	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
14	14	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
15	15	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
16	16	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
17	17	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
18	18	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
19	19	15	225	15.00	225.03	15.00	225.06
20	20	15	225	15	225	15	225

-o0o-