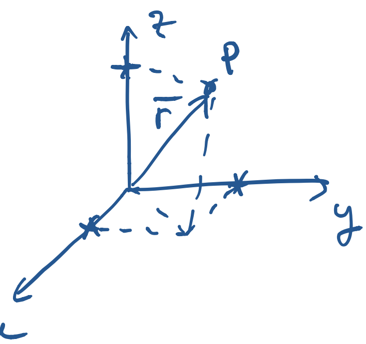
FORMALISMO LAGRANGIANO

Formalismo lagr. emerge naturalmente in due tipi di problemi:

1) espressione delle eq. di Newton in un <u>sist. di coordinate</u> arbitrario;
2) descrivere sistemi vincolati.

Nota una forza $\bar{F}$, eq. di Newton ci fornisce un'eq. diff. per il moto $\bar{r}(t)$.



coordinate

$$\bar{r} \sim \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

funz. (moto)

$x(t)$
$y(t)$
$z(t)$

sono tre funz. del tempo che individuano il moto del pto.

Un set di coordinate in $\mathbb{R}^3$ è un insieme di tre numeri che individuano <u>univocamente</u> un pto di $\mathbb{R}^3$

↳ ci sono infiniti set di coordinate

In $\mathbb{R}^3$ per es. ci sono anche le coord sferiche.

$$\bar{r} \sim \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$$

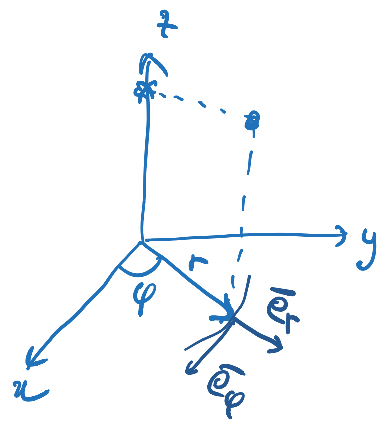
Punto materiale

Punto P di massa m e soggetto a una forza
$$\bar{F} = \bar{F}(\bar{r}, \bar{v}, t)$$ (in un sist. di rif. inerziale)

$$\rightarrow \quad m\vec{a} = \bar{F}$$

eq. vettoriale in $\mathbb{R}^3$ $\rightsquigarrow$ 3 equazioni scalari

Sist. di rif. cartesiano:
$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}$$



Sist. di coord cilindriche
$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = F_\varphi \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}$$

Cambio di coordinate

$\{x, y, z\}$ $\qquad$ $\{q_1, q_2, q_3\}$

$$x = x(q_1, q_2, q_3)$$
$$y = y(q_1, q_2, q_3)$$
$$z = z(q_1, q_2, q_3)$$

" trasf. di coordinate "

$\Downarrow$

deve essere trasf. INVERTIBILE, cioè la matrice jacobiana sia invertibile ($\det \neq 0$)

$\downarrow$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \bar{r}(q_1, q_2, q_3)$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_3}$$

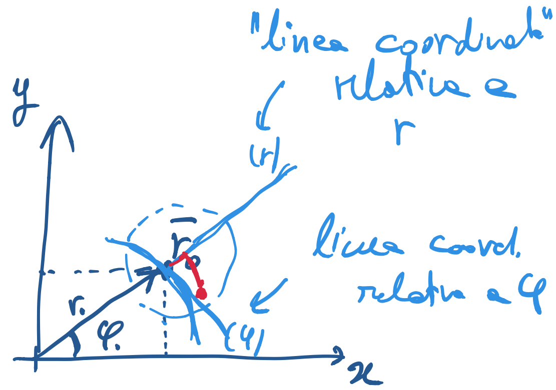
vett. tg alle linee coordinate

sono LIN. INDIPENDENTI

$\Rightarrow$ formano una BASE per $\mathbb{R}^3$

ES) $\mathbb{R}^2$ $\qquad \{x, y\} \qquad \{r, \varphi\}$

Trasf coord: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r \operatorname{sen}\varphi \end{cases}$



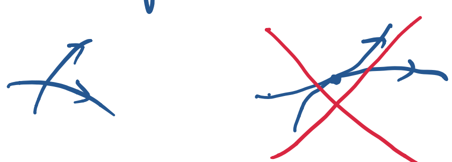
$\{r, \varphi\}$ è un buon sist. di coord.
se dati r e φ posso descrivere ogni pto nel piano.
In particolare se parto da un pto $\bar{r}_0$ individuato da r_0, φ_0, variando r, φ in un intorno di r_0, φ_0, devo essere in grado di toccare tutti i pti dell'intorno di $\bar{r}_0$.

linea coord r: $\begin{matrix} x(r, \varphi_0) \\ y(r, \varphi_0) \end{matrix}$ tenendo fisso $\varphi = \varphi_0$ e variando solo r

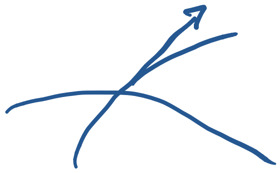
$\Rightarrow (x(r, \varphi_0), y(r, \varphi_0))$ traccia una curva sul piano al variare di r

linea coord φ: $\begin{matrix} x(r_0, \varphi) \\ y(r_0, \varphi) \end{matrix}$ traccia una circonf. di raggio r_0

r, φ sono un buon sist. di rif. se le linee coord si intersecano sempre trasversalmente.



→ vettori tangenti alle linee coord. devono essere lin. INDIP.



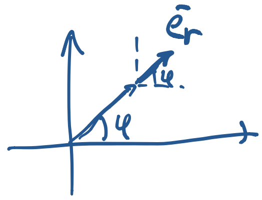
[Nel caso $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ ↘ $\frac{d\bar{x}(t)}{dt}$

]

Vett. tang. alla linea coord r

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial r} \end{pmatrix}$$

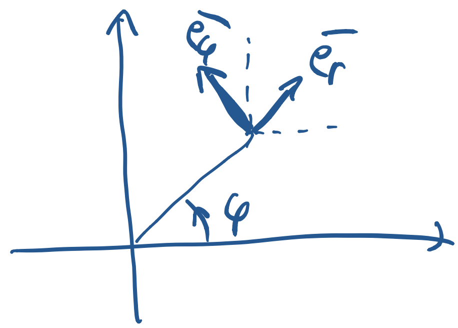
$$\bar{e}_r = \frac{\partial \bar{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$



Vett. tg alla lin. coord. φ

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi}$$

$$\bar{e}_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$



Punto materiale VINCOLATO a stare su una superficie Q in $\mathbb{R}^3$

↑ "SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI"

Come descriviamo la sup. Q in $\mathbb{R}^3$

1) $f(x, y, z) = 0$ f regolare etc. $\bar{\nabla} f \neq 0$ su Q

2) In forma parametrica:

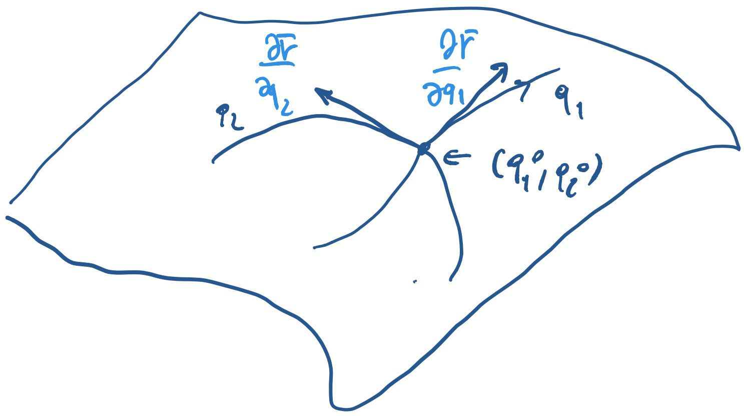
$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2) \\ y = y(q_1, q_2) \\ z = z(q_1, q_2) \end{cases} \qquad \bar{r} = \bar{r}(q_1, q_2)$$

ES. SFERA in $\mathbb{R}^3$

1) $x^2+y^2+z^2=R^2$ $\qquad$ R cost.

2) $\begin{cases} x = R\cos\varphi \,\mathrm{sen}\,\theta \\ y = R\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = R\cos\theta \end{cases}$ $\leftarrow$ funz. di due parametri φ, θ

$\bar r(q_1, q_2)$



$\dfrac{\partial \bar r}{\partial q_1}$ $\dfrac{\partial \bar r}{\partial q_2}$ sono due vett. indip. tangenti alla superficie

Tutti i vettori tangenti alla superficie, nel pto $q_1^{(0)}, q_2^{(0)}$, sono esprimibili come comb. lin. di

$\dfrac{\partial \bar r}{\partial q_1}$ e $\dfrac{\partial \bar r}{\partial q_2}$ nel pto p indiv. da $(q_1^{(0)}, q_2^{(0)})$

Insieme dei vett. tangenti è chiamato SPAZIO TANGENTE T_pQ, una cui base è $\left\langle \dfrac{\partial \bar r}{\partial q_1}(q_1^{(0)}, q_2^{(0)}), \dfrac{\partial \bar r}{\partial q_2}(q_1^{(0)}, q_2^{(0)}) \right\rangle$

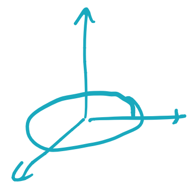
$\delta \bar r \in T_pQ$ $\qquad$ $\delta \bar r = \sum_{h=1}^{2} \dfrac{\partial \bar r}{\partial q_h}\delta q_h$ $\qquad$ $\delta q_h \in \mathbb{R}$ coeff.

"SPOSTAM. VIRTUALE"

Le coord. q_1, q_2 sono dette COORD. LIBERE.

Punto materiale vincolato a stare su una curva Q:

1) $\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$



$\begin{cases} z = 0 \\ x^2+y^2-R^2 = 0 \end{cases}$

2) $\bar{r} = \bar{r}(q)$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

Formalmente la descriz. è analoga al pto sulla superf.

PTO: $\bar{r} = \bar{r}(q_1, \dots, q_n)$ $n = 1, 2, 3$

- 1: pto vinc. su una curva
- 2: pto vinc. su una superf.
- 3: diverso sist. di coord.

n viene chiamato NUMERO DI GRADI DI LIBERTA'

q_h sono le COORD. LIBERE

Dinamica

Vincolo è fisicamente realizzato da una FORZA (REAZIONE VINCOLARE) che in genere non è nota a priori.

La reaz. vincolare si adatta alle sollecitaz. esterne, ma è tale da soddisfare una data condizione.

In presenza di un vincolo, l'eq. di Newton può essere scritta

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{\Phi}$$

$\bar{F}$: forza esterna attiva

$\bar{\Phi}$: reaz. vincolare (ulteriore incognita del problema)

Def. VINCOLI IDEALI se la superficie o curva sono lisce, cioè se la reaz. vincolare in P è sempre $\perp$ alla superf. o curva in P:

$$\bar{\Phi} \cdot \delta \bar{r} = 0 \qquad \forall \delta \bar{r} \in T_P Q$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad (*)$$

$$\bar{\Phi} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_h} = 0 \qquad \forall h = 1, \dots, n$$

$(*) \Rightarrow \bar{\Phi}$ compie lavoro nullo per tutti gli spostam. virtuali

$(*) \Rightarrow$ permette di ottenere n eq. pure (eliminando le reaz. vincolari):

proiettiamo l'eq. di Newton (vett.) sulla superf. (su $T_P Q$)

$$m\bar{a} - \bar{F} = \bar{\Phi} \xrightarrow[\text{proiettiamo sui vettori di base di } T_PQ]{} (m\bar{a} - \bar{F}) \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_h} = 0 \quad h = 1, \dots, n \quad (\star)$$

Il moto su Q è descritto dalle funzioni

$$t \mapsto (q_1(t), \dots, q_n(t)) \leftarrow n \text{ funzioni } : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

$$\bar{r}(q_1(t), \dots, q_n(t))$$

Per determinare le n funz. $q_h(t)$, mi bastano le n eq. diff. $(\star)$.

Generalizzazioni.

$\hookrightarrow$ Vincoli mobili, descritti da (moti relativi $n=3$)

$$\bar{r}(q_1, \dots, q_n, t)$$

SISTEMI VINCOLATI DI N PTI MATERIALI

N pti materiali individuati da $\vec{r}_1, \dots, \bar{r}_N$

Notazione: $\bar{w} = (w_1, \dots, w_{3N}) = (\underbrace{x_1, y_1, z_1}_{\bar{r}_1}, \underbrace{x_2, y_2}_{\bar{r}_2}, \dots, \underbrace{x_N, y_N, z_N}_{\bar{r}_N})$

$w_j \quad j = 1, \dots, 3N$

$\bar{w} \in \mathbb{R}^{3N} \rightsquigarrow$ configurazione del sist. di N pti
(cioè la posizione di ognuno degli N pti)

Def. Si dice che un sist. di N pti $\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N$ è soggetto a r vincoli OLONOMI $(0 < r < 3N)$, se l'insieme delle configurazioni accessibili soddisfa r equazioni della forma

$$f^{(s)}(\bar{w}, t) = 0 \qquad s = 1, \dots, r \qquad (\#)$$

ove $f^{(1)}, \dots, f^{(r)}$ sono funz. regolari e indip., cioè t.c.

$$\mathrm{rk}\left(\frac{\partial f^{(s)}}{\partial w_j}\right) = r \qquad \forall \text{ config. accessibili (cioè che soddisfa } (\#))$$

$$\Updownarrow$$

$\bar{\nabla} f^{(1)}, \dots, \bar{\nabla} f^{(r)}$ sono lin. indip.

$\Rightarrow$ $\forall$ tempo t, resta definita una varietà $Q \subset \mathbb{R}^{3N}$ di dimensione

$$n = 3N - r$$

Q è chiamato SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI

n è detto NUMERO DI GRADI DI LIBERTA'

Possiamo introdurre (almeno localmente) una parametrizzazione di Q, cioè esprimere le w_i in funz. di n parametri q_h detti COORDINATE LIBERE

(Teorema funz. implicita → possiamo usare $f^1=0, \dots, f^r=0$ per esplicitare r variabili w in funz. delle rimanenti $n = 3N - r$)

$$w_j = w_j(q_1, \dots, q_n, t) \qquad j = 1, \dots, 3N$$

t.c. $\quad rk\left(\frac{\partial w_j}{\partial q_h}\right) = n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \underline{w}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \underline{w}}{\partial q_n}$ sono lin. indip.

sono vett. tg alle linee coordinate relative a $q_1, \dots, q_n$.

(Questa parametrizzazione NON è UNICA, potete cambiare le coord. $q_1, \dots, q_n$ in altre $\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n$).