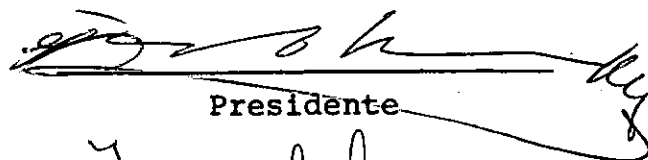


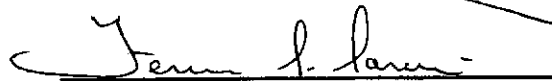
ANÁLISE DE CASCAS DE REVOLUÇÃO
PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS
COM ELEMENTO DE CASCA AXISSIMÉTRICO

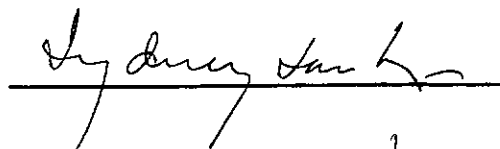
AUGUSTO CESAR N. R. GALEÃO

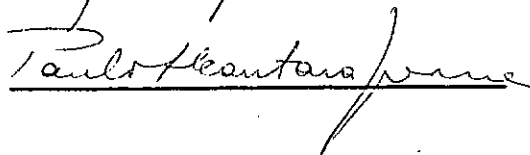
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO
DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por:


Presidente







RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL
JANEIRO DE 1973

a Dida e a minha mãe.

A G R A D E C I M E N T O S

Ao prof. Fernando Venâncio Filho, do I.T.A. ,
pela orientação dada a este trabalho.

Ao prof. Paulo Alcântara Gomes pelas suges -
tões apresentadas.

Ao prof. Fernando Luiz Lobo Carneiro pelo
seu entusiasmo à frente do Departamento de Engenharia Civil da
COPPE, e pelo apoio e dedicação prestados.

Aos professores Antonio Carlos Laranjeiras e
Hernani Sávio Sobral, da E.P.U.F.Ba., pelo incetivo dado.

Aos professores da COPPE, na pessoa do seu co-
ordenador, prof. Alberto Luiz Coimbra.

Aos funcionários da COPPE e em particular a
Heloísa Marques.

À COPPE, ao C.N.Pq. e à Fundação Politécnica
pelo auxílio financeiro prestado.

A Hilma Dreifus e a Gennaro Greco pela con-
fecção deste trabalho.

Aos colegas da COPPE, de cuja discussão, ori-
ginou-se este trabalho.

S I N O P S E

A análise linear, estática de cascas axis-simétricas submetidas a carregamento com simetria axial é efetuada, utilizando-se o método dos elementos finitos.

Desenvolve-se para este fim um elemento finito de casca, de forma tronco-cônica, tirando-se proveito da simetria da estrutura.

A consideração de mais três graus de liberdade, tomados no meio do elemento, possibilita a adoção de funções deslocamento mais refinadas.

A influência dos anéis de rigidez é considerada.

Um elemento de placa circular, com um único nó, é utilizado para contornar as singularidades que aparecem no tratamento de cascas fechadas.

Um programa automático de cálculo, utilizando o elemento desenvolvido, é elaborado.

Alguns exemplos são resolvidos com o uso deste programa, e os resultados obtidos são comparados com as soluções analíticas correspondentes.

A B S T R A C T

The static linear analysis of axi-symmetric shells under axially symmetric loading is done by the finite element method.

For this purpose a truncated cone element is used to take advantage of the symmetry of the structure.

Three interior degrees of freedom are introduced for each element, resulting in improved displacement functions.

The effect of stiffness rings is taken into account.

A circular plate element with one node, is used to handle the singularities which appear when dealing with closed shells.

A computer program based on the cone element was prepared.

Some examples are solved using the program and the results are compared with those of available analytical solutions.

NOTAÇÕES.....	1
INTRODUÇÃO.....	5
CAPÍTULO I - UMA SÍNTESE DA APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS E- ELEMENTOS FINITOS A CASCAS DE REVOLUÇÃO - MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS	7
CAPÍTULO II - UMA FORMULAÇÃO DA TEORIA DA ELASTICIDA - DE VISANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINI - TOS	
2.1 - O Problema Geral da Teoria da Elasticidade...	12
2.2 - Princípio dos Trabalhos Virtuais.....	17
CAPÍTULO III - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS. MODELO DE DESLOCAMENTOS	
3.1 - Introdução.....	27
3.2 - Método dos Elementos Finitos.....	28
3.2.1 - Critérios de Convergência.....	29
3.3 - Método dos Deslocamentos.....	30

CAPÍTULO IV - CASCAS DE REVOLUÇÃO SUJEITAS A CARREGA -
MENTO COM SIMETRIA AXIAL. ELEMENTO FINI
TO DE CASCA AXISSIMÉTICO

4.1	- Introdução.....	38
4.1.1	- Hipóteses Básicas.....	41
4.2	- Cascas de Revolução - Carregamento com Sime- tria Axial.....	46
4.3	- Elemento Finito de Casca Axissimétrico.....	51
4.3.1	- Função Deslocamento.....	53
4.3.2	- Relação Esforços - Deformações.....	66
4.3.3	- Relação Deformações - Deslocamentos.....	68
4.3.4	- Matriz de Rigidez do Elemento.....	71
4.3.5	- Cargas Consistentes.....	74
4.3.5.1	- Cargas Nodais devido às Forças de Superfície.	74
4.3.5.2	- Cargas Nodais devido às Forças de Massa.....	79
4.3.6	- Cargas Concentradas.....	81
4.3.7	- Condensação da Matriz de Rigidez.....	81
4.4	- Placa Circular para Coroamento das Cascas Fe- chadas.....	86
4.5	- Influência do Anel de Reforço.....	96
4.5.1	- Anel de Pequenas Dimensões.....	97
4.5.2	- Anel de Grandes Dimensões.....	102

CAPÍTULO V - APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS. ANÁLISE E
DISCUSSÃO

5.1	- Introdução.....	106
5.2	- Cilindro Engastado Submetido a uma Força Radial.....	107
5.3	- Cilindro com Anéis de Reforço.....	110
5.4	- Casca Esférica - Pressão Uniforme.....	113
5.5	- Precisão dos Resultados.....	120
5.6	- Análise Estrutural da Cúpula do Estádio Olímpico "Salle Omnisport".....	121
5.7	- Figuras.....	123

CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES

.....	142
-------	-----

CAPÍTULO VII - PROGRAMA ELABORADO

7.1	- Introdução.....	147
7.2	- Diagrama de Blocos.....	149
7.3	- Variáveis Lidas e suas Significações.....	151
7.4	- Subrotinas Utilizadas pelo Programa.....	159

APÊNDICE

- Listagem do Programa.....	161
-----------------------------	-----

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	183
---------------------------------	-----

N O T A Ç Õ E S

- $\{ \}$ - matriz coluna
- $| |$ - matriz quadrada ou retangular
- $| |^t$ - matriz transposta
- $| |^{-1}$ - matriz inversa
- \bar{x} - o sinal $\bar{\quad}$ indica que x é uma grandeza prescrita
- $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}$ - componentes das tensões
- $\epsilon_x, \epsilon_y, \dots, \gamma_{xy}$ - componentes das deformações
- u, v, w - componentes dos deslocamentos
- $|E|$ - matriz das constantes elásticas
- S - contorno do corpo

- S_σ - parte de S, onde se prescrevem condições mecânicas de contorno
- S_f - parte de S onde se prescrevem condições geométricas de contorno
- $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ - componentes das forças de massa por unidade de volume
- $\bar{X}_s, \bar{Y}_s, \bar{Z}_s$ - componentes das forças externas por unidade de área
- l, m, n - co-senos diretores
- A - energia específica de deformação
- θ - potencial das forças de massa
- ψ - potencial das forças externas
- $\{\alpha\}$ - coordenadas generalizadas
- $|\phi|$ - matriz das funções de interpolação

- {d} - deslocamentos nodais do elemento

- |B| - matriz que relaciona as deformações com os deslocamentos nodais do elemento

- |k| - matriz de rigidez do elemento

- {q_p} - cargas nodais equivalentes às forças de superfície

- {q_b} - cargas nodais equivalentes às forças de massa

- |K| - matriz de rigidez da estrutura

- {Q} - cargas nodais equivalentes da estrutura

- {P} - cargas aplicadas diretamente nos nós da estrutura

- * - quando for necessário distinguir grandezas no sistema global de grandezas no sistema local , adota-se este símbolo para indicar sistema global de coordenadas

- $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \tau_{2z}$ - tensões atuando na casca
- N_1, N_2, \dots, M_{21} - esforços atuando na casca
- $\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma_{12}$ - deformações da superfície média da casca
- χ_1, χ_2 - variações da curvatura da superfície média da casca
- χ_{12} - torção geodésica da superfície média da casca
- ρ - peso específico
- μ - aceleração centrífuga por unidade de volume
- E - módulo de elasticidade
- E_a - módulo de elasticidade para o anel
- ν - coeficiente de Poisson
- t - espessura da casca ou da placa

I N T R O D U Ç Ã O

A característica básica do funcionamento de uma casca, como estrutura, consiste na capacidade que possui de transmitir as cargas externas, a ela aplicadas, através dos esforços de membrana que atuam paralelamente ao plano tangente em um ponto qualquer da sua superfície média, e que se distribuem uniformemente na espessura da casca. Esta propriedade das cascas (tornando-as estruturas mais rígidas e mais econômicas do que as placas), bem como as muitas possibilidades estéticas provenientes das diversas maneiras de idealização da forma das superfícies das cascas, explicam a crescente utilização delas.

Se por um lado, a possibilidade de variação da forma da estrutura permite aos projetistas concepções cada vez mais arrojadas, por outro, exige deduções de soluções analíticas mais complicadas. Surge de pronto a necessidade do estabelecimento de métodos aproximados, que tornem possível o tratamento destes problemas. Um deles, e provavelmente o de maior generalidade, é o método dos elementos finitos.

Se as cascas são de revolução - um caso particular da teoria geral das cascas - mas que nem por isso perdem a sua importância, pelo contrário, as possibilidades de concepção dentro deste campo ainda são imensas, as vantagens que advêm das simplificações, decorrentes dessa simetria de forma, justificam plenamente a utilização de um elemento finito que aproveite ao máximo estas vantagens. Este é exatamente o objetivo que se pretende alcançar neste trabalho.

C A P Í T U L O I
UMA SÍNTESE DA APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS A CASCAS DE
REVOLUÇÃO - MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS

A possibilidade da aplicação do método dos elementos finitos na análise de cascas, surgiu com a idéia da representação de uma superfície curva de forma qualquer, por uma superfície poliédrica, constituída de elementos planos de forma triangular ou retangular. Seguindo esta concepção são pioneiros os trabalhos de Greene, Strome e Weikel¹ e Adini². A análise das cascas, de acordo com este procedimento, era feita pela montagem da matriz de rigidez de cada elemento tendo em conta a ação combinada dos esforços de membrana e de

flexão.

Com o desenvolvimento de elementos mais refinados para placas em flexão, levando em conta a importância da compatibilidade de deslocamentos entre-elementos, foi possível um desenvolvimento paralelo do M.E.F. na sua aplicação a cascas. Mais recentemente foram desenvolvidos elementos curvos para cascas abatidas*.

Para cascas de revolução, a sua simetria de forma, sugeriu um tipo especial de elemento - o elemento cônico. O primeiro uso deste elemento foi feito por Meyer e Harmon³, que utilizaram para representar o estado de deformação do elemento de casca, a solução analítica das equações diferenciais das cascas cônicas sujeitas a carregamento de bordo, apresentando entretanto um enfoque que afasta-se da idéia do método dos elementos finitos. A primeira concepção real do uso deste elemento com uma formulação dos modelos de deslocamen

*A literatura existente neste campo (elementos planos e curvos, para cascas de formas arbitrárias) é bastante extensa. Mas, deixa-se de mencionar aqui qualquer referência a estes trabalhos, por julgar-se que foge ao contexto do trabalho que aqui será apresentado.

tos do M.E.F., foi feita por Grafton e Strome⁴ em 1963. Neste trabalho é apresentada a análise estática de cascas de revolução com carregamento também de revolução. Os autores utilizaram para representar o campo de deslocamentos, no interior de cada elemento, expansões polinomiais simples - para os deslocamentos meridionais uma função linear, e para os deslocamentos normais uma função cúbica numa abcissa medida segundo o meridiano. Entretanto, na obtenção da matriz de rigidez do elemento, os autores aproximaram a integral da energia de deformação da casca, e os trabalhos subsequentes comprovam uma perda de precisão no método, devido a esta aproximação.

Em 1964, Popov, Penzien e An-Lu⁵, propuseram para este elemento a utilização de funções deslocamentos, que correspondiam à solução analítica da equação diferencial das cascas cônicas, sujeitas a carregamento de bordo. As soluções particulares usadas neste trabalho, foram obtidas para este elemento submetido a forças e momentos diretamente aplicados nos seus nós. Dessa forma, a extensão deste método, proposta por seus autores, a outros tipos de problemas, que não os de cascas submetidas exclusivamente a carregamentos de bordo, leva a uma não consistência nas suas formulações, devido ao fato de não terem utilizado as cargas generalizadas correspondentes às suas funções deslocamentos.

Em 1965, Percy, Pian, Klein e Navaratna⁶, utilizando para definir o campo de deslocamentos as mesmas funções polinomiais usadas na (Ref. 1), e eliminando a aproximação na integral da energia de deformação, estendeu o método para a análise de cascas submetidas a carregamento não de revolução, mediante o uso da série de Fourier, bem como deduziu as matrizes de massa visando a análise dinâmica. Neste mesmo trabalho, os autores estudaram ainda o acréscimo na precisão do método, pela inclusão nas expansões polinomiais, representativas do campo de deslocamentos, de termos de ordem superior. Seguindo esta idéia, Hansteen⁷, em 1966, propôs a inclusão de um ponto nodal interno ao elemento, com o que tornava possível a representação dos deslocamentos segundo o meridiano, por meio de uma função quadrática, e dos deslocamentos normais por uma função do 5º grau na abcissa meridional*.

Concluindo-se esta retrospectiva dos tipos de elementos existentes na literatura e diretamente aplicáveis a cascas de revolução, resta citar o elemento proposto

*Esta foi a linha que se adotou no presente trabalho; embora na obtenção das funções de interpolação, bem como, no desenvolvimento do método, se tenha utilizado uma formulação distinta daquela sugerida na (Ref. 7).

por Clough e Rashid⁸, e posteriormente ampliado por Wilson⁹, a problemas de deformações não simétricas, um anel de seção triangular, mas, cuja aplicação é adequada a cascas espessas ou aos sólidos de revolução.

Por último deve-se mencionar os trabalhos de Jones e Strome¹⁰ e Stricklin, Navaratna e Pian¹¹, que visando contornar o problema da representação de uma superfície de dupla curvatura (cascas esféricas, elípticas, etc) por uma associação de superfícies planas, inerente ao elemento cônico, propuseram a adoção de um elemento curvo, onde a tangente ao meridiano é sempre contínua.

C A P Í T U L O . I I
UMA FORMULAÇÃO DA TEORIA DA ELASTICIDADE
VISANDO
O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

2.1 - O Problema Geral da Teoria da Elasticidade

Neste ítem serão apresentadas as equações que governam o problema geral da teoria linear da elasticidade (linearidade física e geométrica), referidas a um sistema cartesiano tri-ortogonal (x, y, z) e que caracteriza também o espaço onde é definido um certo corpo físico em estudo¹².

O problema geral, do ponto de vista matemático, pode ser encarado como uma pesquisa da solução de três grupos de equações, para certas condições de contorno, relacionando entre si as diversas grandezas que intervêm no problema: tensões, deformações e deslocamentos.

No que se refere às primeiras, o estado de tensões em torno de um ponto pode ser caracterizado por nove componentes que se reduzem a seis pela aplicação das condições de equilíbrio à rotação. Estas seis componentes podem ser grupadas num vetor $\{\sigma\}$, definido por

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{yz} \ \tau_{xz} \ \tau_{xy}\}^T, \quad (2.1)$$

sendo que entre elas existem as relações

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \bar{X} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \bar{Y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \bar{Z} = 0, \quad (2.2 \text{ a-c})$$

onde \bar{X} , \bar{Y} e \bar{Z} são as componentes das forças de massa por unidade de volume.

Quanto às deformações, um raciocínio análogo pode ser feito, e o estado de deformações em torno de um ponto pode ser descrito pelo vetor

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx} \ \gamma_{xy}\}, \quad (2.3)$$

cujas componentes, por sua vez, estão ligadas às componentes do vetor $\{f\}$, definido por

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

que especifica o campo de deslocamentos no interior do corpo, através das relações

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad ; \quad (2.5 \text{ a-f})$$

onde u , v e w são as componentes de $\{f\}$ para os deslocamentos segundo cada uma das direções do triedro de referência.

As equações (2.2 a-c) e (2.5 a-f) fazem parte do conjunto de relações necessárias à definição, do ponto de vista matemático, do problema geral. Entretanto, como não são em número suficiente, há que ser considerado também o grupo de equações que relaciona tensões a deformações, e que define a lei constitutiva do material, podendo ser expressa sob a forma matricial

$$\{\sigma\} = |E| \{\epsilon\} \quad , \quad (2.6)$$

onde $|E|$ é a matriz das constantes elásticas do material.

O conjunto de equações (2.2 a-c), (2.5 a-f) e (2.6), constitui-se fundamentalmente num sistema de equações diferenciais, definido numa região V (interior do corpo), e que acompanhado das condições de contorno definidas na superfície S deste corpo, tem solução única (Kirchoff)¹³.

Para a consideração das condições de contorno, a superfície S pode ser subdividida em duas partes: S_σ

onde as condições são prescritas em termos de forças e S_f onde as mesmas são prescritas em termos de deslocamentos.

Obviamente,

$$S = S_\sigma + S_f \quad (2.7)$$

Na região S_σ , tais condições são dadas por:

$$X_s = \bar{X}_s \quad Y_s = \bar{Y}_s \quad Z_s = \bar{Z}_s \quad , \quad (2.8 \text{ a-c})$$

onde \bar{X}_s , \bar{Y}_s e \bar{Z}_s são as componentes das forças externas prescritas por unidade de área, e X_s , Y_s e Z_s satisfazem às relações:

$$X_s = \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n$$

$$Y_s = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot n$$

$$Z_s = \tau_{zx} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + \sigma_z \cdot n \quad , \quad (2.9 \text{ a-c})$$

sendo l , m e n os co-senos diretores da normal orientada para

fora do contorno.

Na região S_f ter-se-á:

$$u = \bar{u} \quad v = \bar{v} \quad w = \bar{w} \quad , \quad (2.10 \text{ a-c})$$

onde \bar{u} , \bar{v} e \bar{w} são as componentes dos deslocamentos prescritos.

O primeiro grupo de condições é denominado de condições mecânicas de contorno, enquanto que o segundo é usualmente chamado de condições geométricas de contorno.

2.2 - Princípio dos Trabalhos Virtuais

O princípio dos trabalhos virtuais diz que: "O trabalho virtual de um sistema de forças em equilíbrio associado a um deslocamento geometricamente compatível, é nulo".

Aplique-se então este princípio ao pro -

blema definido na seção anterior. Para tanto considere-se um corpo deformável sob a ação de forças de massa e condições de contorno prescritas. Uma vez que está se supondo o corpo em equilíbrio, serão válidas aqui as condições definidas por (2.2 a-c) e por (2.8 a-c), independentemente do comportamento elástico do corpo.

Portanto:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \bar{X} = 0, \dots, \dots \text{ em } V \quad (2.11 \text{ a-c})$$

$$X_s - \bar{X}_s = 0, \dots, Z_s - \bar{Z}_s = 0 \text{ em } S_\sigma. \quad (2.12 \text{ a-c})$$

Submetendo-se agora o corpo a um campo de deslocamentos arbitrários, sob a forma de uma variação $\delta\{f\}$ no seu estado primitivo $\{f\}$, mas geometricamente compatível, isto é, de tal forma que se tenha

$$\delta\{f\} = 0 \text{ em } S_f, \quad (2.13)$$

ou o que é o mesmo:

$$u = \bar{u} \quad v = \bar{v} \quad w = \bar{w} \text{ em } S_f \quad (2.14 \text{ a-c})$$

Aplicando-se o princípio dos trabalhos virtuais, virã

$$\begin{aligned}
 & - \int_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \bar{X} \right) \delta u + (\dots) \delta v + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \bar{Z} \right) \delta w \right] dV + \int_{S_\sigma} [(X_s - \bar{X}_s) \delta u + \\
 & + (Y_s - \bar{Y}_s) \delta v + (Z_s - \bar{Z}_s) \delta w] dS = 0 \quad , \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

onde $dV = dx.dy.dz$ e dS , são respectivamente o volume elementar e a área elementar do corpo. Utilizando-se agora as relações geométricas,

$$dy.dz = l.dS$$

$$dz.dx = m.dS$$

$$dx.dy = n.dS \quad , \quad (2.16 \text{ a-c})$$

integrando-se (2.15) por partes, aplicando-se o teorema de Green, sob a forma:

$$\int_V \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \delta u . dx . dy . dz = \int_S \sigma_x . l . \delta u . dS - \int_V \sigma_x . \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx . dy . dz \quad ,$$

$$(2.17)$$

e observando-se que sendo δu , δv e δw contínuos em V , será válido escrever-se

$$\frac{\partial \delta u}{\partial x} = \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \delta \epsilon_x, \text{ etc.} \quad (2.18)$$

Obter-se-á então:

$$\begin{aligned} & \int_V (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} + \\ & + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) \cdot dV - \int_V (\bar{X} \delta u + \bar{Y} \delta v + \bar{Z} \delta w) dV - \\ & - \int_{S_\sigma} (\bar{X}_s \delta u + \bar{Y}_s \delta v + \bar{Z}_s \delta w) \cdot dS = 0, \end{aligned} \quad (2.19)$$

que corresponde ao princípio dos trabalhos virtuais aplicados aos corpos elásticos.

2.3 - Princípio da Mínima Energia Potencial

No item anterior instituiu-se o princípio dos trabalhos virtuais aplicados aos corpos elásticos. Para tanto, foi suposto que:

- As deformações satisfaziam às condições de compatibilidade , isto é, podiam ser obtidas de u , v e w a partir das relações definidas em (2.5 a-f).
- As componentes u , v e w satisfaziam às condições geométricas de contorno (eqs. 2.10 a-c).

Será obtido agora o princípio da mínima energia potencial a partir do teorema dos trabalhos virtuais. Para isso assumir-se-á que:

- Exista uma função de deformações A (ϵ_x , ϵ_y ...), obtida a partir das relações tensões-deformações, e mais ainda, que esta função seja positiva definida ¹². Chamar-se-á esta função de energia específica de deformação, e ela será definida como:

$$A = \frac{1}{2} [(e_{11} \cdot \epsilon_x + e_{12} \cdot \epsilon_y + \dots + e_{16} \cdot \gamma_{xy}) \cdot \epsilon_x + \dots + (e_{61} \cdot \epsilon_x + \dots + e_{66} \cdot \gamma_{xy}) \cdot \gamma_{xy}] , \quad (2.20)$$

onde os coeficientes e_{ij} correspondem às constantes elásticas presentes na matriz de elasticidade $|E|$;

foi sob forma matricial por:

$$A = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^t \cdot \{\sigma\} . \quad (2.21)$$

Levando (2.6) em (2.21), virá:

$$A = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^t |E| \{\epsilon\} . \quad (2.22)$$

Fazendo-se agora a variação de (2.22), tem-se

$$\delta A = \frac{1}{2} (\delta\{\epsilon\}^t \cdot |E| \cdot \{\epsilon\} + \{\epsilon\}^t \cdot |E| \cdot \delta\{\epsilon\}) . \quad (2.23)$$

Notando que $|E|$ é simétrica, ter-se-á finalmente que

$$\delta A = \delta\{\epsilon\}^t \cdot |E| \cdot \{\epsilon\} = \delta\{\epsilon\}^t \cdot \{\sigma\} , \quad (2.24)$$

que pode ser escrita em termos das componentes como:

$$\delta A = \sigma_x \cdot \delta\epsilon_x + \sigma_y \cdot \delta\epsilon_y + \dots + \tau_{xy} \cdot \delta\gamma_{xy} ; \quad (2.25)$$

e como as deformações podem ser expressas em termos de u , v e w , pode-se escrever a energia de deformação específica como função de u , v e w .

- As forças de massa e as forças aplicadas (forças de superfície) permaneçam constantes durante a variação $\delta\{f\}$ dos deslocamentos. Assim sendo, as mesmas podem ser derivadas de funções potenciais $\Theta(u,v,w)$ e $\Psi(u,v,w)$ a partir de

$$\bar{X} = - \frac{\partial}{\partial u} \Theta \quad \bar{Y} = - \frac{\partial}{\partial v} \Theta \quad \bar{Z} = - \frac{\partial}{\partial w} \Theta \quad (2.26 \text{ a-c})$$

$$\bar{X}_s = - \frac{\partial}{\partial u} \Psi \quad \bar{Y}_s = - \frac{\partial}{\partial v} \Psi \quad \bar{Z}_s = - \frac{\partial}{\partial w} \Psi , \quad (2.27 \text{ a-c})$$

ou seja:

$$- \Theta(u,v,w) = \bar{X}.u + \bar{Y}.v + \bar{Z}.w$$

$$- \Psi(u,v,w) = \bar{X}_s.u + \bar{Y}_s.v + \bar{Z}_s.w \quad (2.28 \text{ a-b})$$

Fazendo-se a variação de (2.28 a-b), ter-se-á:

$$- \delta\theta = \bar{X} \cdot \delta u + \bar{Y} \cdot \delta v + \bar{Z} \cdot \delta w$$

$$- \delta\Psi = \bar{X}_s \cdot \delta u + \bar{Y}_s \cdot \delta v + \bar{Z}_s \cdot \delta w \quad . \quad (2.29 \text{ a-b})$$

E levando-se (2.25) e (2.29 a-b) em (2.19), virá

$$\int_V \delta A \cdot dV + \int_V \delta\theta \cdot dV + \int_{S_\sigma} \delta\Psi \cdot dS = 0 \quad , \quad (2.30)$$

ou seja;

$$\delta\Pi = 0 \quad , \quad (2.31)$$

onde o funcional

$$\Pi = \int_V [A(u,v,w) + \theta(u,v,w)] dV + \int_{S_\sigma} \Psi(u,v,w) \cdot dS \quad (2.32)$$

é denominado energia potencial total.

De acordo com (2.28 a-b)

$$\Pi = \int_V A(u,v,w) dV - \int_V (\bar{X} \cdot u + \bar{Y} \cdot v + \bar{Z} \cdot w) dV - \int_{S_\sigma} (\bar{X}_s \cdot u + \bar{Y}_s \cdot v + \bar{Z}_s \cdot w) dS; \quad (2.33)$$

ou sob forma matricial

$$\Pi = \int_V \frac{1}{2} \{\epsilon\}^t \cdot |E| \cdot \{\epsilon\} \cdot dV - \int_V \{f\}^t \cdot \{b\} \cdot dV - \int_{S_\sigma} \{f\}^t \cdot \{p\} dS \quad , \quad (2.34)$$

onde:

$$\{b\} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{array} \right\} \quad (2.35)$$

é o vetor das componentes das forças de massa

$$\{p\} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{X}_s \\ \bar{Y}_s \\ \bar{Z}_s \end{array} \right\} \quad (2.36)$$

é o vetor das componentes das forças de superfície.

A equação (2.31) diz que de todos os deslocamentos u , v e w possíveis, satisfazendo às condições geométricas de contorno, a solução real do problema será aquela que torna a energia potencial total estacionária. Além do mais, pode-se demonstrar¹² que este campo de deslocamentos torna o funcional, definido em (2.34), não somente um valor estacionário mas também um mínimo absoluto.

Se os deslocamentos reais tornam (2.34) um mínimo absoluto, qualquer campo de deslocamentos aproximados, que não viole as condições geométricas de contorno (definidas em S_f), fornecerá

$$\Pi_{\text{aprox.}} \geq \Pi_{\text{real}} \quad (2.37)$$

C A P Í T U L O I I I
M É T O D O D O S E L E M E N T O S F I N I T O S : M O D E L O
D E D E S L O C A M E N T O S

3.1 - Introdução

No capítulo anterior, mostrou-se como o campo de deslocamentos $\{f\}$, definido em todo o domínio $D \equiv (V \cup S)$ do corpo, poderia ser obtido mediante a minimização de um certo funcional Π , expresso pela eq. (2.34) e definido como uma integral num certo domínio V (interior do corpo) e em parte de sua fronteira S_0 , onde se prescreviam condições mecâni-

cas de contorno. Essas funções $\{f\}$, incógnitas do problema , bem como suas derivadas, estavam presentes neste funcional.

Neste capítulo introduzir-se-á o método dos elementos finitos - uma técnica de determinação dessas incógnitas.

3.2 - Método dos Elementos Finitos

No método dos elementos finitos procede-se a uma discretização do domínio D , em subdomínios que passam a ser designados por "elementos finitos", supondo-se que estes elementos se interconectam em um número finito de pontos nodais. As funções incógnitas do problema, presentes num funcional genérico F a ser minimizado, e que agora serão designadas por um vetor $\{J\}$, passam a ser definidas em cada elemento finito. Essas funções $\{J\}$ serão aproximadas por meio de funções $|\Omega|$, previamente adotadas, e de parâmetros nodais arbitrários (determinados pela minimização do funcional F) , numa relação da forma:

$$\{J\} = |\Omega| \cdot \{\alpha\}^e \quad . \quad (3.1)$$

Para ser possível a minimização do funcional F , supõe-se verdadeiro que:

$$F = \sum_{ne} F^e , \quad (3.2)$$

ou seja, que o funcional total possa ser expresso como uma soma das contribuições de cada elemento. Se for possível escrever-se a equação (3.2), então:

$$\delta F = \sum_{ne} \delta F^e = 0 . \quad (3.3)$$

3.2.1 - Critérios de Convergência

A fim de que seja válido escrever-se a equação (3.2), o funcional F deve obedecer certas regras de completude ¹⁴, de forma a se ter garantida a convergência dos resultados quando o número de elementos, em que foi subdividido o domínio D , cresce. Estes critérios são:

Critério 1 - As funções de aproximação $|\Omega|$ devem ser tais que, mediante uma escolha adequada dos $\{\alpha\}^e$, qualquer valor constante de $\{J\}$ ou de suas derivadas presentes no funcional F , possam ser representadas no limite, quando as dimensões do elemento tendem para zero.

Critério 2 - As funções de aproximação $|\Omega|$ devem ser escolhidas de tal forma que nas fronteiras entre-elementos, a $\{J\}$ e suas derivadas de uma ordem menor do que aquelas que aparecem no funcional F , sejam contínuas.

3.3 - Método dos Deslocamentos

No método dos deslocamentos o funcional a ser minimizado é o da equação (2.34). As funções incógnitas do problema serão as componentes do campo de deslocamentos $\{f\}$, que passam a ser expressas para cada elemento segundo a (3.1), como:

$$\{f\} = |\Phi| \{d\} , \quad (3.4)$$

onde:

$|\Phi|$ - matriz das funções de interpolação

$\{d\}$ - deslocamentos nodais do elemento.

Claro está que as funções deslocamentos $|\Phi|$ devem satisfazer aos critérios de convergência, expressos em sua forma mais geral na seção anterior. Particularizando-se estes dois critérios para o caso das funções deslocamentos, os mesmos poderiam ser escritos como ¹⁴:

Critério 1 - As funções deslocamentos $|\Phi|$ devem ser tais que, se os deslocamentos nodais são compatíveis com uma condição de deformação constante, tal condição seja realmente obtida*.

Critério 2 - As funções deslocamentos $|\Phi|$ devem ser escolhidas de tal forma que nas fronteiras entre elementos as deformações sejam finitas.

Definem-se ainda para o elemento as seguintes relações:

* Observe-se que no caso de se ter deslocamentos de corpo rígido, o estado de deformações constantes será representado por deformações nulas no elemento.

- As relações deformações - deslocamentos obtidas de (2.5 a-f) por derivação conveniente de (3.4).

$$\{\epsilon\} = |B| \{d\} \quad , \quad (3.5)$$

onde a matriz $|B|$ é obtida por derivação da $|\phi|$.

- As relações tensões-deformações que de acordo com (2.6), podem ser expressas por:

$$\{\sigma\} = |E| \{\epsilon\} \quad . \quad (3.6)$$

De (3.5) e (3.6),

$$\{\sigma\} = |E| |B| \{d\} \quad . \quad (3.7)$$

Para materiais elásticos lineares, ter-se-á:

$$A = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^t |E| \{\epsilon\} \quad ; \quad (3.8)$$

e de (3.8) e (3.5), pode-se escrever:

$$A = \frac{1}{2} \{d\}^t |B|^t |E| |B| \{d\} . \quad (3.9)$$

Levando-se (3.4) e (3.9) em (2.34), e observando-se (3.2), virã:

$$\begin{aligned} \Pi = \sum_{ne} \left[\int_V \frac{1}{2} \{d\}^t |B|^t |E| |B| dV - \int_V \{d\}^t |\phi|^t \{b\} dV - \right. \\ \left. - \int_{S_\sigma} \{d\}^t |\phi|^t \{p\} dS \right] . \quad (3.10) \end{aligned}$$

Fazendo-se a variação de (3.10) e tendo-se em mente a validade de (3.3), escreve-se:

$$\begin{aligned} \delta \Pi = \sum_{ne} \left[\delta \{d\}^t \int_V |B|^t |E| |B| dV \{d\} - \right. \\ \left. - \delta \{d\}^t \int_V |\phi|^t \{b\} dV - \right. \\ \left. - \delta \{d\}^t \int_{S_\sigma} |\phi|^t \{p\} dS \right] = 0 , \quad (3.11) \end{aligned}$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ne} \{ \delta \{d\}^t [\int_V |B|^t |E| |B| dV \{d\} - \int_V |\Phi|^t \{b\} dV - \\ - \int_{S_\sigma} |\Phi|^t \{p\} dS] \} = 0 . \end{aligned} \quad (3.12)$$

E como os $\delta \{d\}$ são arbitrários, para que (3.12) seja identicamente nula, deve-se ter que:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ne} [\int_V |B|^t |E| |B| dV \{d\} - \int_V |\Phi|^t \{b\} dV - \\ - \int_{S_\sigma} |\Phi|^t \{p\} dS] = 0 . \end{aligned} \quad (3.13)$$

Chamando-se agora:

$$|k| = \int_V |B|^t |E| |B| dV \quad (3.14)$$

- matriz de rigidez do elemento;

$$\{q_p\} = \int_{S_\sigma} |\Phi|^t \{p\} dS \quad (3.15)$$

- vetor das cargas nodais do elemento, equivalente às forças de superfície;

$$\{q_b\} = \int_{\hat{v}} |\phi|^t \{b\} d\hat{v} \quad (3.16)$$

- vetor das cargas nodais do elemento, equivalentes às forças de massa;

e definindo-se:

$$\{q\} = \{q_b\} + \{q_p\} \quad (3.17)$$

obter-se-á de (3.13) a equação:

$$\sum_{ne} \{ |k| \{d\} - \{q\} \} = \{0\} \quad (3.18)$$

que corresponde a:

$$|K| \{D\} - \{Q\} = \{0\} . \quad (3.19)$$

Uma observação neste ponto deve ser feita.

No caso de existirem cargas concentradas, elas serão introduzidas diretamente no sistema de equações como cargas nodais, razão porque se preferiu excluí-las no desenvolvimento anterior. Assim sendo, tendo-se em conta as cargas concentradas, a eq.

(3.19) passaria a

$$[K] \{D\} = \{P\} + \{Q\} , \quad (3.20)$$

que é a equação fundamental do método dos elementos finitos, e onde:

$$[K] = \sum_{ne} [k] \quad (3.21)$$

é a matriz de rigidez da estrutura, obtida por soma conveniente das contribuições de cada elemento;

$$\{D\} = \left\{ \begin{array}{c} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n \end{array} \right\} \quad (3.22)$$

é o vetor dos deslocamentos nodais da estrutura;

$$\{P\} = \left\{ \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n \end{array} \right\} \quad (3.23)$$

é o vetor das cargas diretamente aplicadas nos nós da estrutura;

$$\{Q\} = \sum_{ne} \{q\} \quad (3.24)$$

é o vetor de cargas nodais, obtido também por soma conveniente das contribuições de cada elemento.

A introdução das condições de contorno no sistema de equações representado por (3.20), torna possível a resolução do mesmo, obtendo-se dessa forma os deslocamentos da estrutura. De posse desses deslocamentos e com o uso das relações (3.5) e (3.7) podem-se obter as deformações e tensões agindo na estrutura, completando-se desta forma a análise estrutural.

C A P Í T U L O I V
CASCAS DE REVOLUÇÃO SUJEITAS A CARREGAMENTO
COM SIMETRIA AXIAL
ELEMENTO FINITO DE CASCA AXISSIMÉTRICO

4.1 - Introdução

Uma maneira de definir os esforços solicitantes que atuam sobre um elemento da casca é adotar um sistema de referência constituído pelas coordenadas ξ_1 , ξ_2 , definidas sobre a superfície média da casca e perpendiculares entre si, e por uma terceira coordenada η , normal à superfície média. Na fig. 4.1 mostra-se um elemento qualquer da casca, a

presentando-se a convenção de sinais adotada.*

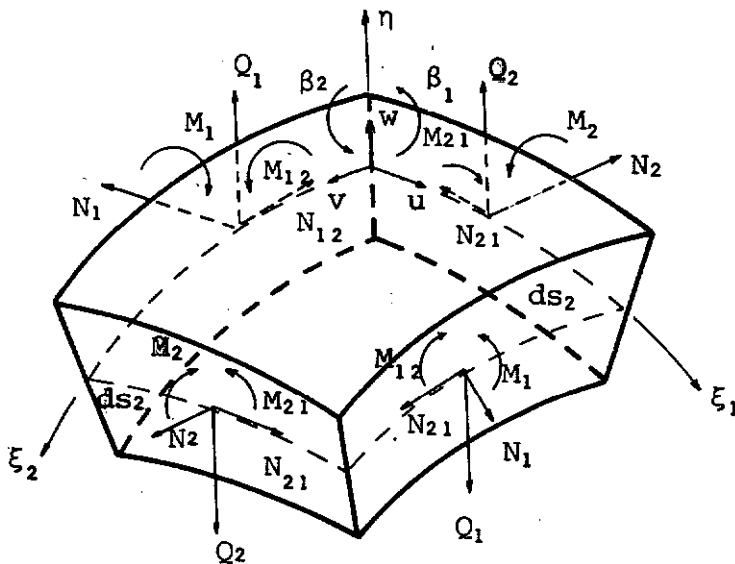


fig.4.1 - Convenção de sinais

*Uma vez que está sendo apresentado apenas um resumo da teoria das cascas, julga-se não ser conveniente fazerem-se considerações sobre a teoria das superfícies, cujos resultados fundamentais podem ser obtidos nas Refs. (15 e 16).

Os esforços solicitantes acima adotados podem ser obtidos a partir das tensões apresentadas na fig. 4.2, por meio das relações:*

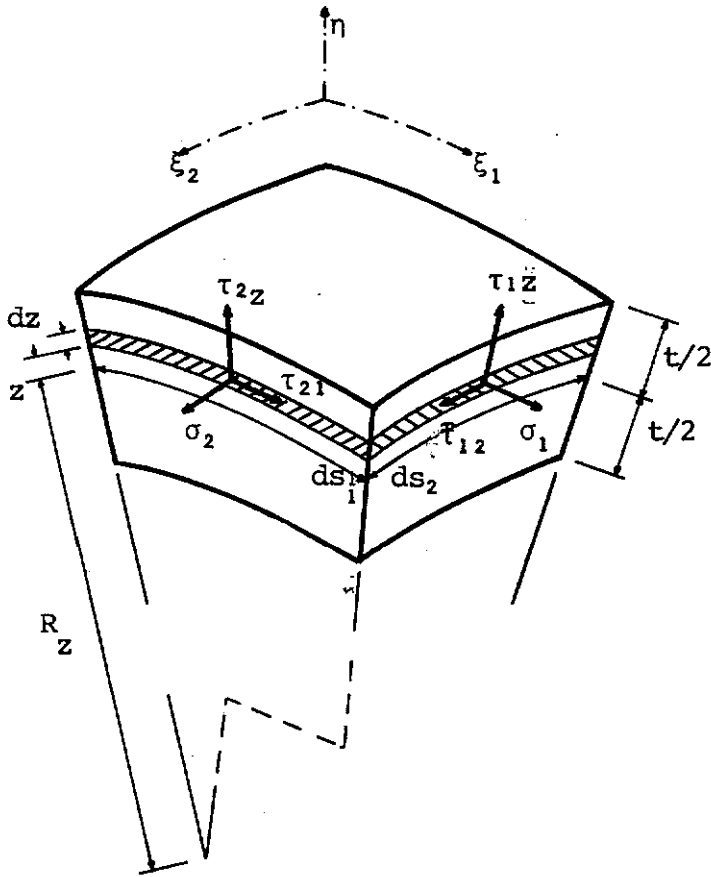


fig. 4.2 - Tensões agindo num elemento da casca

* $\tau_{12} \equiv \tau_{21}$

$$N_1 = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_1 (1 + z/R_2) dz$$

$$N_2 = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_2 (1 + z/R_1) dz$$

$$M_1 = -\int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_1 (1 + z/R_2) z dz$$

$$M_2 = -\int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_2 (1 + z/R_1) z dz$$

$$N_{12} = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{12} (1 + z/R_2) dz$$

$$N_{21} = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{21} (1 + z/R_1) dz$$

$$M_{12} = -\int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{12} (1 + z/R_2) z dz$$

$$M_{21} = -\int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{21} (1 + z/R_1) z dz$$

$$Q_1 = -\int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{1z} (1 + z/R_2) dz$$

$$Q_2 = -\int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{2z} (1 + z/R_1) dz$$

(4.1 a-j)

4.1.1 - Hipóteses Básicas

Para o desenvolvimento que se segue, as

seguintes hipóteses básicas serão adotadas ¹⁷:

- Considerar-se-á que as cascas analisadas são finas.
- As normais à superfície média antes de deformada, permanecem normais a esta depois de deformada.
- Em todas as relações geométricas a distância z de um ponto qualquer da espessura da casca à superfície média desta não é afetada pela deformação da casca; pois as tensões normais σ_z podem ser desprezadas frente às tensões σ_1 e σ_2 .
- Todos os deslocamentos serão bastante pequenos de forma que podem ser desprezados frente aos raios de curvatura da superfície média, e que suas primeiras derivadas podem ser desprezadas se comparadas com 1.

A partir das hipóteses consideradas, assumir-se-á que:

- Não se considerarão as deformações devidas aos esforços cortantes.
- Os deslocamentos u_z e v_z ao longo da seção transversal da casca serão expressos por uma variação linear, ao passo que

o deslocamento w_z será constante ao longo da mesma.

Desta forma pode-se escrever:

$$u_z = u - \beta_1 \cdot z$$

$$v_z = v - \beta_2 \cdot z$$

$$w_z = w \quad , \quad (4.2 \text{ a-c})$$

onde u , v e w , β_1 e β_2 são respectivamente os deslocamentos e as rotações da superfície média. (fig. 4.1)

É comum que alguns autores adotem o sinal positivo na segunda parcela do segundo membro das equações (4.2 a-b). Entretanto, esta escolha depende da convenção adotada para os esforços solicitantes, que no caso foram considerados de modo a que nestas equações, a segunda parcela seja afetada do sinal negativo.

- As deformações ao longo da seção transversal da casca podem ser relacionadas com as "deformações" da superfície média , segundo:

$$\epsilon_1^z = \frac{1}{1 + z/R_1} (\epsilon_1 - z \cdot \chi_1)$$

$$\epsilon_2^z = \frac{1}{1 + z/R_2} (\epsilon_2 - z \cdot \chi_2)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{12}^z = & \frac{1}{(1 + z/R_1)(1 + z/R_2)} \left\{ \left(1 - \frac{z^2}{R_1 R_2}\right) \cdot \gamma_{12} - \right. \\ & \left. - 2 \left[1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \cdot \frac{z}{2} \right] z \cdot \chi_{12} \right\}, \end{aligned} \quad (4.3 \text{ a-c})$$

onde ϵ_1 e ϵ_2 são as extensões, γ_{12} a distorção, χ_1 e χ_2 as variações da curvatura e χ_{12} a torção geodésica da superfície média.

Para futura referência, apresentam-se as seguintes expressões das grandezas usadas nas equações (4.2 a-b) e (4.3 a-c), obtidas na Ref. 15.

$$\epsilon_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} \cdot v + \frac{w}{R_1}$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial \xi_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} \cdot u + \frac{w}{R_2}$$

$$\gamma_{12} = \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{v}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{u}{A_1} \right)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} - \frac{u}{R_1}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} - \frac{v}{R_2}$$

$$\chi_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} - \frac{u}{R_1} \right) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} - \frac{v}{R_2} \right)$$

$$\chi_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} - \frac{v}{R_2} \right) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} - \frac{u}{R_1} \right)$$

$$\chi_{12} = \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right) +$$

$$= \frac{1}{R_1} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} \cdot u \right) + \frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial \xi_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} \cdot v \right) ,$$

(4.4 a-h)

onde A_1 e A_2 são os parâmetros de Lamé.

- As relações tensões-deformações para os materiais linearmente elásticos, passam a ser escritas como:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu} (\epsilon_1^z + \nu \epsilon_2^z)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu} (\epsilon_2^z + \nu \epsilon_1^z)$$

$$\tau_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \gamma_{12}^z, \quad (4.5 \text{ a-c})$$

onde E = módulo de elasticidade e ν = coeficiente de Poisson do material.

4.2 - Cascas de Revolução - Carregamento com Simetria Axial

No caso de uma casca de revolução, a posição de um ponto qualquer da superfície média pode ser dada fornecendo-se o meridiano e o paralelo que passam por este ponto. O meridiano pode ser definido por meio de uma coordenada angular θ , medida em relação a um certo meridiano de referência. O paralelo será expresso pelo ângulo ϕ , formado pela normal à superfície média passando pelo ponto e pelo eixo de revolução z

(fig. 4.3). Dessa forma ter-se-á que: *

$$\xi_1 = \phi \quad \xi_2 = \theta \quad A_1 = R_1 \quad A_2 = R_2 \text{ sen } \phi = R, \quad (4.6 \text{ a-d})$$

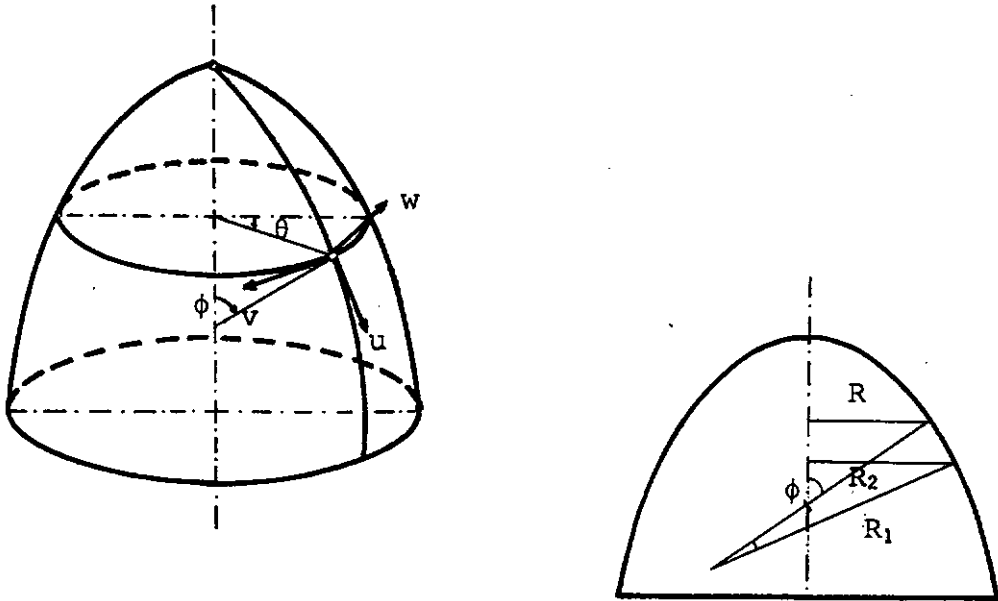


fig. 4.3 - Casca de revolução

Se o carregamento apresenta também simetria axial, o problema a ser analisado, do ponto de vista matemático, torna-se unidimensional. Neste caso, devido à simetria de forma e carregamento, a deformada é também uma superfície de revolução, portanto não haverá a variação de nenhuma grandeza com o ângulo θ , bem como não ocorrerão deslocamentos segundo a direção tangente ao paralelo. Além disso, neste caso os esforços solicitantes $N_{\phi\theta}$, $N_{\theta\phi}$, $M_{\phi\theta}$ e $M_{\theta\phi}$,

* Permutam-se os índices 1 e 2 do item anterior, por ϕ e θ .

e as distorções $\gamma_{\phi\theta}$ e $\gamma_{\theta\phi}$, anulam-se identicamente.

Dessa forma, o estado de deformação da casca será dado apenas pelas deformações ϵ_{ϕ}^z e ϵ_{θ}^z , e os esforços solicitantes restantes estão mostrados na figura 4.4.

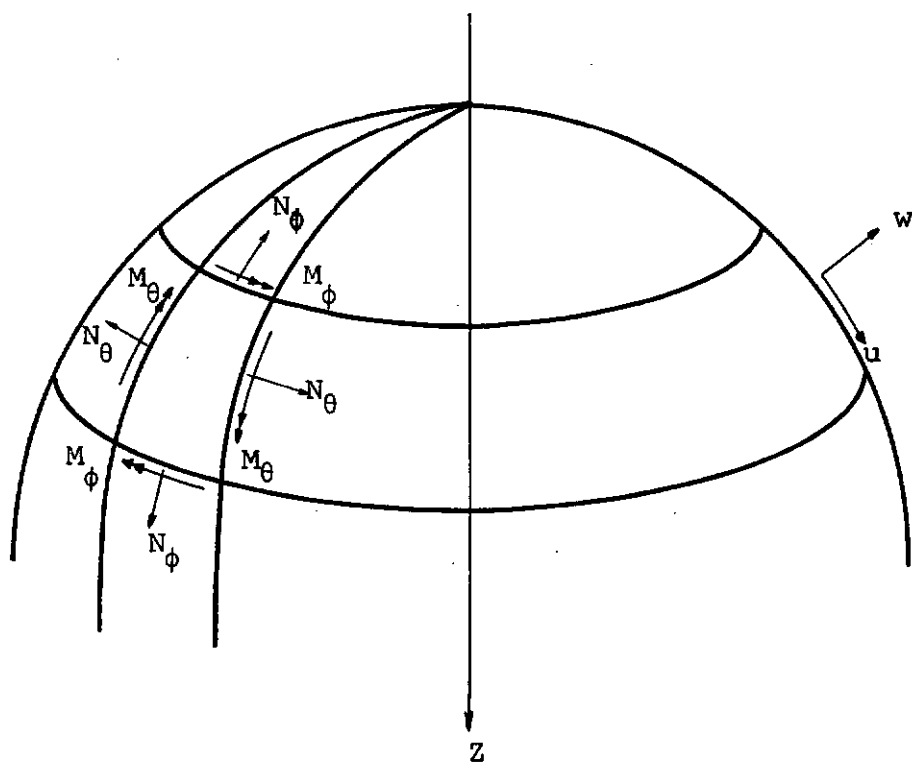


fig. 4.4 - Esforços solicitantes numa casca de revolução submetida a carregamento com simetria axial

Considerando-se que para as cascas finas

é possível escrever que:

$$1 + z/R_1 \approx 1 \qquad 1 + z/R_2 \approx 1 , \qquad (4.7 \text{ a-b})$$

e tomando-se as equações (4.3 a-b), levando-as em (4.5 a-b) e substituindo-se o resultado em (4.1 a-d)*, depois de realizada a integração, obtem-se:

* A simplificação adotada nas equações (4.7 a-b) implica no grupo de equações (4.1 e-h) na igualdade dos esforços solicitantes $N_{12} = N_{21}$ e $M_{12} = M_{21}$. No caso de se ter $R_1 \neq R_2$, isto acarreta na violação da equação de equilíbrio que relaciona estes esforços¹⁶. Entretanto, no caso de cascas de revolução sujeitas a carregamento com simetria axial, que é exatamente o objeto deste trabalho, estes esforços anulam-se identicamente, como já foi visto, de forma que esta equação de equilíbrio ainda é satisfeita.

$$N_{\phi} = \frac{E \cdot t}{1-\nu^2} (\epsilon_{\phi} - \nu \epsilon_{\theta})$$

$$N_{\theta} = \frac{E \cdot t}{1-\nu^2} (\epsilon_{\theta} + \nu \epsilon_{\phi})$$

$$M_{\phi} = \frac{E \cdot t^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_{\phi} + \nu \chi_{\theta})$$

$$M_{\theta} = \frac{E \cdot t^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_{\theta} + \nu \chi_{\phi}) \quad , \quad (4.8 \text{ a-d})$$

onde ϵ_{ϕ} , ϵ_{θ} , χ_{ϕ} e χ_{θ} correspondem às deformações e variações da curvatura da superfície média e podem ser obtidas a partir das equações (4.4 a,b,d,e,f,g) por simples substituição das equações (4.6 a-d). Procedendo-se dessa forma tem-se:

$$\epsilon_{\phi} = \frac{1}{R_1} \frac{du}{d\phi} + \frac{w}{R_1}$$

$$\epsilon_{\theta} = \frac{1}{R} (u \cos \phi + w \sin \phi)$$

$$\chi_{\phi} = \frac{1}{R_1} \frac{dB_{\phi}}{d\phi}$$

$$\chi_{\theta} = \frac{1}{R} \cos \phi \cdot \beta_{\phi}$$

$$\beta_{\phi} = \frac{1}{R_1} \frac{dw}{d\phi} - \frac{u}{R_1} \quad (4.9a-e)$$

4.3 - Elemento Finito de Casca Axissimétrica

Seja a casca, fig. 4.5, dividida por um conjunto de planos normais ao seu eixo de revolução, e de forma que a superfície curva compreendida entre dois destes planos seja aproximada a uma superfície de geratriz retilínea. Cada um destes elementos em que fica subdividida a casca, e que se interconectam aos outros elementos através de círculos nodais, será o elemento finito básico adotado. Observe-se que em cada um destes elementos o ângulo ψ é constante e que o raio de curvatura R_1 é infinito. Adotando-se agora para coordenada a abcissa s , e a partir das relações geométricas:

$$ds = R_1 d\phi$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \psi \quad (4.10 a-b)$$

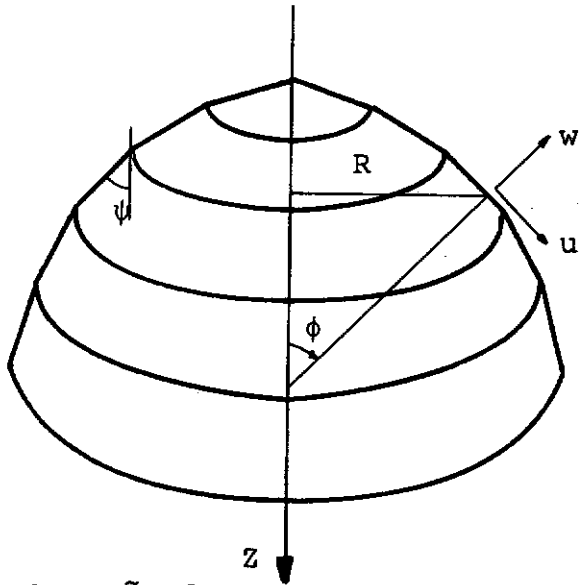


fig. 4.5 - Idealização da casca como um conjunto de elementos cônicos

as equações (4.9 a-e) passam a ser escritas como:*

$$\epsilon_s = \frac{du}{ds}$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{R} (u \operatorname{sen} \psi + w \cdot \cos \psi)$$

$$\chi_s = \frac{d^2 w}{ds^2}$$

$$\chi_\theta = \frac{1}{R} \operatorname{sen} \psi \cdot \frac{dw}{ds}$$

$$\beta_s = \frac{dw}{ds}$$

(4.11 a-e)

* Permuta-se o índice ϕ por s .

4.3.1 - Função Deslocamento

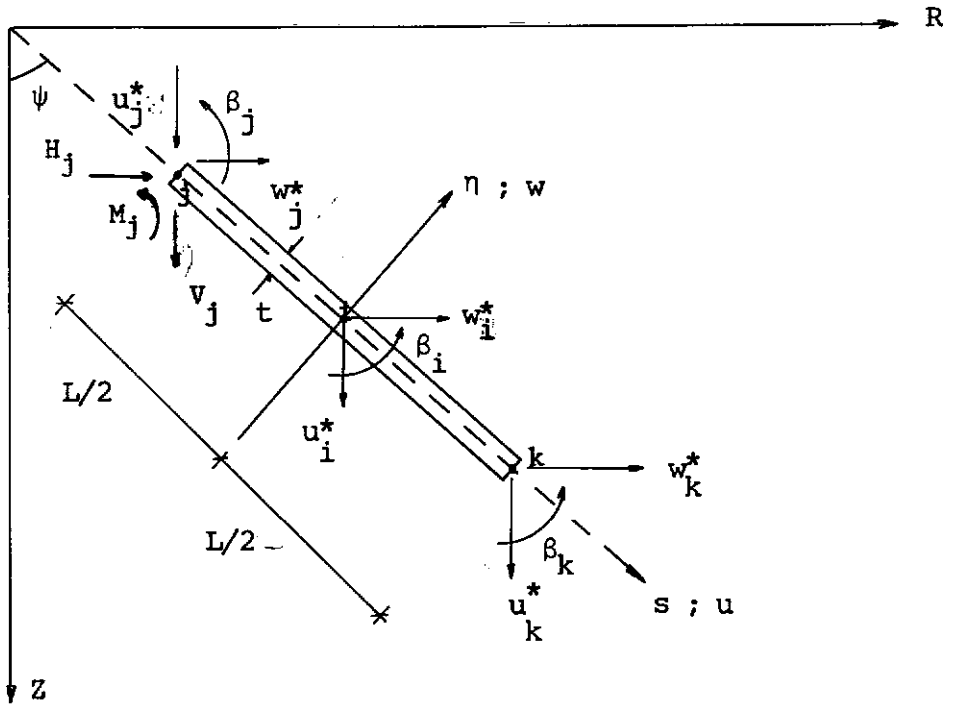


fig. 4.6 - Características do elemento

Na figura 4.6 está representado um elemento isolado. Em cada ponto nodal (j, k) será prescrito um deslocamento axial, um deslocamento radial e uma rotação. Na escolha da função deslocamento, esta deve satisfazer, de acordo com o exposto no item 3.3, aos critérios de convergência. A condição de compatibilidade de deformações nas fronteiras entre elementos, fica automaticamente garantida com a adoção dos parâmetros nodais acima. Resta, portanto, exigir que a condi -

ção de deformação constante seja satisfeita.

Tomando-se para funções deslocamento ,
expansões polinomiais da forma:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 s$$

$$w = \alpha_3 + \alpha_4 s + \alpha_5 s^2 + \alpha_6 s^3 \quad (4.12 \text{ a-b})$$

e substituindo-se u e w conforme (4.12 a-b) nas expressões
(4.11 a-d), tem-se:

$$\epsilon_s = \alpha_2$$

$$\chi_s = 2\alpha_5 + 6\alpha_6 \cdot s$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{R} \operatorname{sen} \psi (\alpha_1 + \alpha_2 s) + \frac{1}{R} \operatorname{cos} \psi (\alpha_3 + \alpha_4 s + \alpha_5 s^2 + \alpha_6 s^3)$$

$$\chi_\theta = \frac{1}{R} \operatorname{sen} \psi (\alpha_4 + 2\alpha_5 + 3\alpha_6 s^2) . \quad (4.13 \text{ a-d})$$

Observando-se agora que nas expressões (4.13 c-d), para um mes-
mo elemento, o ângulo ψ é constante e o raio R pode ser ex-
presso como uma função linear em s, conclui-se que em todas as

equações (4.13 a-d) se tem garantida a existência de termos constantes, representativos dos modos de deformação constante. Desta forma as funções deslocamento a serem adotadas devem ser no mínimo do tipo das (4.12 a-b). Entretanto, de acordo com a referência 6, a inclusão de termos de ordem superior nas expansões polinomiais (4.12 a-b) conduz a uma matriz de rigidez do elemento mais próxima da exata. Assim sendo, adotar-se-ão para as funções deslocamento, polinômios da forma:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 s + \alpha_3 s^2$$

$$w = \alpha_4 + \alpha_5 s + \alpha_6 s^2 + \alpha_7 s^3 + \alpha_8 s^4 + \alpha_9 s^5 . \quad (4.14a-b)$$

A inclusão do termo de segundo grau na expressão de u , procura representar a possibilidade de variação dos esforços de membrana ao longo da geratriz da casca, e o polinômio de 5º grau em s , representativo de w , corresponde à função deslocamento que se obtém para uma viga em flexão, submetida a um carregamento linearmente distribuído sobre esta.

A partir das expressões (4.14 a-b), observa-se a necessidade de se ter nove graus de liberdade para representar os nove parâmetros $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_9$. Desse modo, tor-

na-se necessário a adoção de mais três parâmetros deslocamentos "internos" que serão tomados no meio do elemento. Isto traz inconvenientes, do ponto de vista da resolução do sistema de equações, por aumentar a largura de banda deste sistema. Para se contornar este problema, depois de obtida a matriz de rigidez do elemento, que neste caso é de 9x9, esta será condensada em uma matriz de 6x6, por meio da eliminação destes parâmetros internos, o que pode ser feito, como ver-se-á posteriormente, através da minimização da energia potencial do elemento com relação a estes parâmetros.

O vetor de deslocamentos nodais do elemento será portanto:

$$\{d^*\} = \{u_j^* w_j^* \beta_j \quad u_k^* w_k^* \beta_k \quad u_i^* w_i^* \beta_i\} . \quad (4.15)$$

Uma vez que os deslocamentos u e w estão dados nos eixos locais (s, η) , enquanto que os deslocamentos nodais estão referidos ao sistema de eixos globais (r, z) , deve ser obtida a matriz de transformação (rotação), que relaciona estes dois grupos de deslocamentos. Para o nó genérico j , pode-se escrever:

$$\{d_j\} = |\lambda| \{d_j^*\}, \quad (4.16)$$

onde:

$$\{d_j\} = \begin{Bmatrix} u_j \\ w_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} \quad (4.17a)$$

são os deslocamentos do nó j referidos ao sistema local;

$$\{d_j^*\} = \begin{Bmatrix} u_j^* \\ w_j^* \\ \beta_j \end{Bmatrix} \quad (4.17b)$$

são os deslocamentos do nó j referidos ao sistema global;

$$|\lambda| = \begin{vmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (4.17c)$$

é a matriz de rotação para o nó j .

Para o elemento adotado ter-se-á portan-

to:

$$\{d\} = |T| \{d^*\} \quad (4.18)$$

onde:

$$|T| = \begin{vmatrix} |\lambda| & |0| & |0| \\ |0| & |\lambda| & |0| \\ |0| & |0| & |\lambda| \end{vmatrix} \quad (4.19a)$$

é a matriz de transformação;

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} \{d_j\} \\ \{d_k\} \\ \{d_i\} \end{Bmatrix} \quad (4.19b)$$

são os deslocamentos nodais do elemento referidos ao sistema local;

$$\{d^*\} = \begin{Bmatrix} \{d_j^*\} \\ \{d_k^*\} \\ \{d_i^*\} \end{Bmatrix} \quad (4.19c)$$

são os deslocamentos nodais do elemento referidos ao sistema global.

De conformidade com o expresso no item 3.3, deve-se agora obter a matriz que relaciona as componentes do campo de deslocamentos adotado com os deslocamentos nodais do elemento. Assim, de acordo com (3.4) escreve-se:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = |\phi^*| \cdot \{d^*\} \quad (4.20)$$

Convém lembrar que, neste caso, a matriz $|\phi^*|$ relaciona deslocamentos genéricos (u,w), tomados no sistema local, com deslocamentos nodais referidos ao sistema global.

A matriz $|\phi^*|$ poderia ser obtida a partir das equações (4.14 a-b), particularizando-se as coordenadas para os pontos nodais, onde as funções de deslocamento deveriam reproduzir os deslocamentos nodais, e expressando-se as coordenadas generalizadas $\{\alpha\}$ em função dos deslocamentos nodais $\{d\}$ do elemento. Este procedimento no entanto obrigaria à inversão de uma matriz de 9×9 .

Uma forma mais simples de proceder consiste na utilização das fórmulas de interpolação de Lagrange e de Hermite¹⁸. A primeira é utilizada quando se deseja obter polinômios, sendo dados os valores da função em determinados pontos. Serão portanto utilizados para se obter as funções de interpolação associadas a u . A interpolação de Hermite pode ser utilizada quando além dos valores da função se especificam também os valores das derivadas da função nestes pontos. Este é exatamente o caso das funções de interpolação associadas a w .

As formulas gerais dessas interpolações são:

$$f(x) = \sum_{m=1}^n l_m(x) \cdot f(x_m) \quad \text{- interpolação de Lagrange}$$

$$f(x) = \sum_{m=1}^n h_m(x) \cdot f(x_m) + \sum_{m=1}^n \bar{h}_m(x) \cdot f'(x_m) \quad \text{in}$$

terpolação de Hermite.

onde:

$$l_m(x) = \frac{(x-x_1) \dots (x-x_{m-1})(x-x_{m+1}) \dots (x-x_n)}{(x_m-x_1) \dots (x_m-x_{m-1})(x_m-x_{m+1}) \dots (x_m-x_n)}$$

$$h_m(x) = [1 - 2 l'_m(x_m) (x - x_m)] [l_m(x)]^2$$

$$\bar{h}_m(x) = (x - x_m) [l_m(x)]^2 \quad (4.21 \text{ a-e})$$

$f(x_m)$ - valor da função no ponto $x = x_m$

$f'(x_m)$ - valor da primeira derivada da função no ponto $x = x_m$

$l'(x_m)$ - valor da primeira derivada de $l_m(x)$ em $x = x_m$

Para a utilização das fórmulas de interpolação anteriormente definidas, é mais conveniente o uso dos deslocamentos no sistema local (s, η) . Dessa forma tendo - se em conta as equações (4.21 a-b) pode-se escrever:

$$u = \phi_1 u_j + \phi_2 u_k + \phi_3 u_i$$

$$w = \phi_4 w_j + \phi_5 \beta_j + \phi_6 w_k + \phi_7 \beta_k + \phi_8 w_i + \phi_9 \beta_i ,$$

(4.22 a-b)

ou sob forma matricial

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \phi_3 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_4 & \phi_5 & 0 & \phi_6 & \phi_7 & 0 & \phi_8 & \phi_9 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \\ w_j \\ \beta_j \\ u_k \\ w_k \\ \beta_k \\ u_i \\ w_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} . \quad (4.22=c)$$

Ou seja:

$$\{f\} = |\phi| \cdot \{d\} , \quad (4.22 d)$$

onde ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 são determinados a partir dos coeficientes l_m da interpolação da Lagrange, ϕ_4, ϕ_6 e ϕ_8 são obtidos a partir

dos coeficientes h_m e ϕ_5 , ϕ_7 e ϕ_9 são obtidos a partir dos coeficientes \bar{h}_m da interpolação de Hermite.

É sabido que as funções de interpolação devem assumir valor unitário no ponto nodal que se está considerando e valor nulo nos pontos nodais restantes. Assim, se se quer por exemplo obter a ϕ_4 deve-se tomar $w_j = 1$ e $\beta_j^i, w_k, \dots, \beta_i$ nulos fig. (4.7).

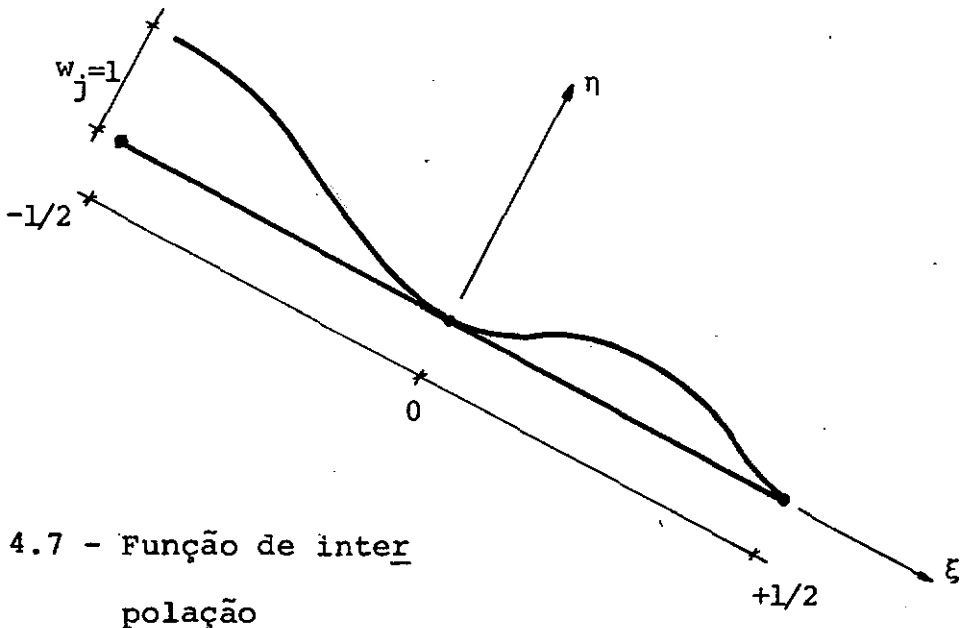


fig. 4.7 - Função de interpolação

Procedendo-se analogamente e definindo-se a coordenada adimensional ξ pela relação:

$$\xi = s/L \quad , \quad (4.23)$$

e com o uso das expressões (4.21 c-e) obtem-se:

para o n \bar{o} j

$$\phi_1 = 2\xi (\xi - 1/2) \quad \phi_4 = 4\xi^2 - 10\xi^3 - 8\xi^4 + 24\xi^5$$

$$\phi_5 = (\xi^2/2 - \xi^3 - 2\xi^4 + 4\xi^5) \cdot L$$

para o n \bar{o} k

$$\phi_2 = 2\xi (\xi + 1/2) \quad \phi_6 = 4\xi^2 + 10\xi^3 - 8\xi^4 - 24\xi^5$$

$$\phi_7 = (-\xi^2/2 - \xi^3 + 2\xi^4 + 4\xi^5) \cdot L$$

para o n \bar{o} i

$$\phi_3 = 1 - 4\xi^2 \quad \phi_8 = (1 - 4\xi^2)^2 \quad \phi_9 = \xi(1 - 4\xi^2)^2 \cdot L$$

(4.24 a-i)

Colocando-se as expressões acima sob forma matricial, tem-se:

$$\begin{array}{l}
 |\phi|^t = \left[\begin{array}{cc}
 2\xi(\xi-1/2) & 0 \\
 0 & 4\xi^2-10\xi^3-8\xi^4+24\xi^5 \\
 0 & (\xi^2/2-\xi^3-2\xi^4+4\xi^5) \cdot L \\
 2\xi(\xi+1/2) & 0 \\
 0 & 4\xi^2+10\xi^3-8\xi^4-24\xi^5 \\
 0 & (-\xi^2/2-\xi^3+2\xi^4+4\xi^5) \cdot L \\
 1 - 4\xi^2 & 0 \\
 0 & (1 - 4\xi^2)^2 \\
 0 & \xi(1 - 4\xi^2)^2 \cdot L
 \end{array} \right] \quad (4.25)
 \end{array}$$

Observe-se que a matriz $|\phi|$ está relacionada com os deslocamentos referidos no sistema local. A partir de (4.22 d) e (4.18) tem-se

$$\{f\} = |\phi| |T| \{d^*\}; \quad (4.26)$$

e de (4.26) e (4.20)

$$|\phi^*| = |\phi| |T|, \quad (4.27)$$

que é a matriz das funções de interpolação procurada.

4.3.2 - Relação Esforços - Deformações

Os esforços solicitantes que agem na casca podem ser agrupados num vetor de "tensões" da forma:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ M_s \\ M_\theta \end{Bmatrix} \cdot \quad (4.28)$$

E esses esforços podem ser relacionados com as "deformações" da superfície média segundo as equações (4.8 a-d), que colocadas sob forma matricial, com troca conveniente do índice ϕ por s , fornecem:

$$\begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ M_s \\ M_\theta \end{Bmatrix} = |E| \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_\theta \\ X_s \\ X_\theta \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

sendo $|E|$ a matriz das constantes elásticas do material, que para os materiais isotrópicos tem a forma:

$$|E| = \frac{E \cdot t}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2/12 & \nu \cdot t^2/12 \\ 0 & 0 & \nu t^2/12 & t^2/12 \end{vmatrix}, \quad (4.30)$$

onde as submatrizes da parte superior esquerda e da parte inferior direita multiplicadas pelo coeficiente $E \cdot t / (1-\nu^2)$ representam respectivamente a matriz de elasticidade para estado plano de tensões e para flexão, em ambas não existindo os termos correspondentes ao cisalhamento.

4.3.3 - Relação Deformações-Deslocamentos

A partir da equação (3.5) pode-se escrever que:

$$\{\epsilon\} = |B^*| \{d^*\} \quad (4.31)$$

sendo a $|B^*|$ obtida por derivação conveniente de $|\phi^*|$, de acordo com as expressões (4.11 a-d). Tendo-se em conta agora a equação (4.27) chega-se a:

$$|B^*| = | \begin{matrix} |B_j| & |\lambda| & |B_k| & |\lambda| & |B_i| & |\lambda| \end{matrix} | \quad (4.32)$$

onde:

$$\begin{array}{l}
 |B_j| = \begin{array}{ccc}
 (4\xi-1) \frac{1}{L} & 0 & 0 \\
 2\xi(\xi-1/2) \cdot \frac{\text{sen}\psi}{R} & (4\xi^2-10\xi^3-8\xi^4+24\xi^5) \cdot \frac{\text{cos}\psi}{R} & (\xi^2/2-\xi^3-2\xi^4+4\xi^5) \cdot \frac{\text{cos}\psi \cdot L}{R} \\
 0 & (2-15\xi-24\xi^2+120\xi^3) \cdot \frac{4}{L^2} & (1-6\xi-24\xi^2+80\xi^3) \cdot \frac{1}{L} \\
 0 & (4\xi-15\xi^2-16\xi^3+60\xi^4) \cdot \frac{2\text{sen}\psi}{L \cdot R} & (\xi-3\xi^2-8\xi^3+20\xi^4) \cdot \frac{\text{sen}\psi}{R}
 \end{array}
 \end{array}$$

(4.33a)

$$(4\xi+1) \cdot \frac{1}{L}$$

0

0

$$2\xi(\xi+1/2) \cdot \frac{\text{sen}\psi}{R}$$

$$(4\xi^2+10\xi^3-8\xi^4-24\xi^5) \cdot \frac{\text{cos}\psi}{R}$$

$$(-\xi^2/2-\xi^3+2\xi^4+4\xi^5) \cdot \frac{\text{cos}\psi \cdot L}{R}$$

 $|B_k| =$

0

$$(2+15\xi-24\xi^2-120\xi^3) \cdot \frac{4}{L^2}$$

$$(-1-6\xi+24\xi^2+80\xi^3) \cdot \frac{1}{L}$$

0

$$(4\xi+15\xi^2-16\xi^3-60\xi^4) \cdot \frac{2\text{sen}\psi}{L \cdot R}$$

$$(-\xi-3\xi^2+8\xi^3+20\xi^4) \cdot \frac{\text{sen}\psi}{R}$$

(4.33 b)

$$|B_i| = \begin{vmatrix} -\frac{8}{L} \cdot \xi & 0 & 0 \\ (1-4\xi^2) \cdot \frac{\text{sen}\psi}{R} & (1-4\xi^2)^2 \cdot \frac{\text{cos}\psi}{R} & \xi(1-4\xi^2)^2 \cdot \frac{\text{cos}\psi}{R} \cdot L \\ 0 & (12\xi^2-1) \cdot \xi^2 \cdot \frac{16}{L^2} & \xi(20\xi^2-3) \cdot \frac{16}{L} \\ 0 & \xi(4\xi^2-1) \cdot \frac{16\text{sen}\psi}{L \cdot R} & (1-24\xi^2+80\xi^4) \cdot \frac{\text{sen}\psi}{R} \end{vmatrix}$$

(4.33 c)

4.3.4 - Matriz de Rigidez do Elemento

Definida que foi a matriz $|B^*|$, a matriz de rigidez do elemento pode ser obtida a partir da equação (3.14). Dessa forma;

$$|k^*| = \int_S |B^*|^t |E| |B^*| \cdot dS, \quad (4.34)$$

notando-se que nesse caso a integração deve ser feita sobre a superfície do elemento, e não sobre o volume deste, conforme expresso na (3.14), uma vez que na obtenção dos esforços solicitantes já se levou em consideração a integração ao longo da espessura do elemento.

Observando-se agora que

$$dS = 2\pi R \, ds$$

$$ds = L \, d\xi \quad (4.35 \text{ a-b})$$

obtem-se:

$$dS = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot L \cdot d\xi \quad . \quad (4.36)$$

Como o raio R é também função da coordenada ξ , antes de se processar a integração o mesmo deve ser expresso em termos desta coordenada. Assim,

$$R(\xi) = \frac{R_j + R_k}{2} + (R_k - R_j)\xi \quad . \quad (4.37)$$

Substituindo-se as equações (4.36) e (4.37) em (4.34) tem-se

$$|k^*| = 2\pi L \int_{-1/2}^{+1/2} (|B^*|^t |E| |B^*| \cdot (\frac{R_j + R_k}{2} + (R_k - R_j)\xi)) d\xi \quad (4.38)$$

que é a equação que nos fornece a matriz de rigidez do elemento referida ao sistema global de coordenadas.

Uma observação neste ponto faz-se necessária: embora fosse possível a obtenção de todas as integrais envolvidas na (4.38) em forma fechada, preferiu-se, seguindo-se a orientação das referências 6 e 19, a utilização da integração numérica; isto porque algumas dessas integrais obtidas em forma explícita são mal condicionadas ^{6,19}. Assim sendo optou-se pela integração numérica de Gauss-Legendre com cinco pontos. Para um número de pontos de integração maior do que cinco foi observado um acréscimo de precisão perfeitamente desprezível, razão porque adotou-se aquele valor como o mais adequado.

A fórmula geral dessa integração numérica é:

$$\int_{-1}^{+1} f(x) \cdot dx = \sum_{m=1}^n w_m f(x_m) \quad , \quad (4.39)$$

as abcissas x_m (zeros do polinômio de Legendre), e os fatores de peso w_m , podendo ser obtidos na Ref. 20.

4.3.5 - Cargas Consistentes

De acôrdo com a equação (3.17), o vetor de cargas nodais equivalentes do elemento, é a soma de duas parcelas : uma devido às forças de superfície e outra devido às forças de massa. Assim

$$\{q^*\} = \{q_p^*\} + \{q_b^*\} \quad , \quad (4.40)$$

sendo que neste caso o vetor $\{q^*\}$ será constituído (fig. 4.6) por

$$\{q^*\} = \{V_j^* \ H_j^* \ M_j^* \quad V_k^* \ H_k^* \ M_k^* \quad V_i^* \ H_i^* \ M_i^*\} \quad . \quad (4.41)$$

4.3.5.1 - Cargas Nodais devido às Forças de Superfície

A partir da eq. (3.15) pode-se escrever que:

$$\{q_p^*\} = \int_S |\phi^*|^t \{p\} ds \quad , \quad (4.42)$$

onde $\{q_p^*\}$ corresponde ao vetor das cargas nodais em relação aos eixos globais, e a função carregamento $\{p\}$, consistentemente com a definição da matriz $|\phi^*|$ - que relaciona o campo de deslocamentos $\{f\}$, dado no sistema local, com os deslocamentos nodais referidos ao sistema global, deve ser expressa no sistema local.

Tendo-se em conta a (4.27), escreve-se a (4.42) como:

$$\{q_p^*\} = \int_S |T|^t |\phi|^t \{p\} ds \quad . \quad (4.43)$$

A etapa seguinte consiste em expressar a função carregamento em termos de valores nodais da mesma. Adotando-se então para representar esta função um polinômio do segundo grau, a mesma pode ser escrita, utilizando-se a interpolação de Lagrange descrita no item 4.3.1, como:

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} p_u \\ p_w \end{Bmatrix} = |\phi_p| \begin{Bmatrix} \{P_j\} \\ \{P_k\} \\ \{P_i\} \end{Bmatrix},$$

onde

$$\{p_j\} = \begin{Bmatrix} p_u \\ p_w \end{Bmatrix}_j \quad (4.44 \text{ a-b})$$

é o vetor das componentes da função $\{p\}$ no ponto nodal j , segundo as direções s e η .

A matriz $|\phi_p|$ pode ser formada a partir dos coeficientes $\lambda_m(\xi)$ definidos nas equações (4.24 a,d,g), obtendo-se então

$$|\phi_p| = \begin{vmatrix} 2\xi(\xi-1/2) & 0 & 2\xi(\xi+1/2) & 0 & 1-4\xi^2 & 0 \\ 0 & 2\xi(\xi-1/2) & 0 & 2\xi(\xi+1/2) & 0 & 1-4\xi^2 \end{vmatrix} \quad (4.45)$$

Levando-se as equações (4.45), (4.44a-b), (4.36), (4.37) e (4.25) em (4.43), efetuando-se as operações e integrando-se obtém-se:

$$\{q_p^*\} = |T|^t |F_p| \begin{Bmatrix} \{P_j\} \\ \{P_k\} \\ \{P_i\} \end{Bmatrix}, \quad (4.46)$$

sendo a matriz $|F_p|$ dada por:

$$|F_p| = \frac{\pi \cdot L}{630}$$

$147R_j + 21R_k$	0	$-21(R_j + R_k)$	0	$84 R_j$	0
0	$156R_j + 15R_k$	0	$-15R_j + 6R_k$	0	$96R_j + 36R_k$
0	$(8R_j + R_k) \cdot L$	0	$(R_k - R_j) \cdot L$	0	$(8R_j + 4R_k) \cdot L$
$-21(R_j + R_k)$	0	$21R_j + 147R_k$	0	$84 R_k$	0
0	$6R_j - 15R_k$	0	$15R_j + 156R_k$	0	$36R_j + 96R_k$
0	$(R_k - R_j) \cdot L$	0	$-(R_j + 8R_k) \cdot L$	0	$-(4R_j + 8R_k) \cdot L$
$84 R_j$	0	$84 R_k$	0	$336(R_j + R_k)$	0
0	$48 R_j$	0	$48 R_k$	0	$288(R_j + R_k)$
0	$-(16R_j + 8R_k) \cdot L$	0	$(8R_j + 16R_k) \cdot L$	0	$16(R_k - R_j) \cdot L$

(4.47)

4.3.5.2 - Cargas Nodais devido às Forças de Massa

De acordo com (3.16)

$$\{q_b^*\} = \int_V |\phi^*|^t \{b\} dV \quad , \quad (4.48)$$

e de (4.27)

$$\{q_b^*\} = \int_V |T|^t |\phi|^t \{b\} dV \quad , \quad (4.49)$$

onde :

$$dV = 2\pi.R.L.t.d\xi \quad (4.50)$$

e $\{b\}$ corresponde ao vetor das componentes das forças de massa segundo as direções s e η . Definindo-se ρ como o peso específico do material, e μ como a força (por unidade de volume) associada à aceleração centrífuga, tem-se:

$$\{b\} = \begin{Bmatrix} b_u \\ b_w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho \cos\psi + \mu \operatorname{sen}\psi \\ -\rho \operatorname{sen}\psi + \mu \cos\psi \end{Bmatrix} \quad . \quad (4.51)$$

Substituindo-se (4.51), (4.50), (4.37) e (4.35) em (4.49), efetuando-se as operações e integrando-se obtem-se:

$$\{q_b^*\} = |T|^t |F_b| \cdot \{b\} \quad (4.52)$$

onde:

$$|F_b| = \frac{\pi \cdot t \cdot L}{210} \begin{vmatrix} 70 R_j & 0 \\ 0 & 79R_j + 19R_k \\ 0 & (5R_j + 2R_k) \cdot L \\ 70 R_k & 0 \\ 0 & 79R_k + 19R_j \\ 0 & -(2R_j + 5R_k) \cdot L \\ 140(R_j + R_k) & 0 \\ 0 & 112(R_j + R_k) \\ 0 & 8(R_k - R_j) \cdot L \end{vmatrix} \quad (4.53)$$

4.3.6 - Cargas Concentradas

Conforme já foi mencionado no capítulo III, as forças concentradas serão consideradas sempre como forças diretamente aplicadas aos nós.

Claro está que, no caso em que a união entre os elementos é feita através de circunferências nodais, as forças diretamente aplicadas aos nós correspondem a forças (axial e radial) e momentos distribuídos ao longo destas circunferências. Assim, se $\{P_c\}$ é o vetor das cargas por unidade de comprimento da circunferência nodal de raio R , o vetor das cargas nodais correspondente será dado por:

$$\{P\} = 2\pi R \{P_c\}. \quad (4.54)$$

4.3.7 - Condensação da Matriz de Rigidez

Já foi referido no ítem 4.3.1, a inconveniência da consideração de deslocamentos nodais no interior do elemento. Naquela ocasião foi proposta como forma de se con-

tornar este problema, a eliminação destes parâmetros internos através da minimização da energia potencial do elemento com relação a estes parâmetros. Ver-se-á, a seguir, como isto será feito.

Escrevendo-se as matrizes e os vetores , de forma particionada, separando-se as grandezas associadas aos nós externos daquelas relacionadas ao nó interno, ter-se-á:

$$\{f\} = \begin{vmatrix} |\phi_e^*| & |\phi_i^*| \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \{d_e^*\} \\ \{d_i^*\} \end{Bmatrix} \quad (4.55)$$

$$\{\epsilon\} = \begin{vmatrix} |B_e^*| & |B_i^*| \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \{d_e^*\} \\ \{d_i^*\} \end{Bmatrix} \quad (4.56)$$

Semelhantemente, a matriz de rigidez e o vetor de cargas consistentes do elemento podem ser escritos como:

$$|k^*| = \begin{vmatrix} |k_{ee}^*| & |k_{ei}^*| \\ |k_{ie}^*| & |k_{ii}^*| \end{vmatrix} \quad (4.57)$$

$$\{q^*\} = \begin{Bmatrix} \{q_e^*\} \\ \{q_i^*\} \end{Bmatrix} \quad (4.58)$$

onde:

$$|k_{ee}^*| = \int_V |B_e^*|^t |E| |B_e^*| dV$$

$$|k_{ei}^*| = \int_V |B_e^*|^t |E| |B_i^*| dV$$

$$|k_{ie}^*| = \int_V |B_i^*|^t |E| |B_e^*| dV$$

$$|k_{ii}^*| = \int_V |B_i^*|^t |E| |B_i^*| dV ; \quad (4.59 \text{ a-d})$$

$$\{q_e^*\} = \int_V |\phi_e^*|^t \{b\} dV + \int_S |\phi_e^*|^t \{p\} dS$$

$$\{q_i^*\} = \int_V |\phi_i^*|^t \{b\} dV + \int_S |\phi_i^*|^t \{p\} dS . \quad (4.60 \text{ a-b})$$

A partir da equação (3.12) e tendo-se em conta as equações (4.55) e (4.56), escreve-se:

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi^e = & \delta \left\{ \begin{matrix} \{d_e^*\} \\ \{d_i^*\} \end{matrix} \right\}^t \int_V |B_e^*| |B_i^*| |{}^t E| |B_e^*| |B_i^*| dV - \\
 & - \delta \left\{ \begin{matrix} \{d_e^*\} \\ \{d_i^*\} \end{matrix} \right\}^t \int_V |\phi_e^*| |\phi_i^*| {}^t \{b\} dV - \\
 & - \delta \left\{ \begin{matrix} \{d_e^*\} \\ \{d_i^*\} \end{matrix} \right\}^t \int_S |\phi_e^*| |\phi_i^*| {}^t \{p\} dS .
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

Desenvolvendo-se e agrupando-se os termos convenientemente, virá:

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi^e = & \delta \{d_e^*\}^t \cdot (\int_V |B_e^*| |{}^t E| |B_e^*| dV \cdot \{d_e^*\} + \\
 & + \int_V |B_e^*| |{}^t E| |B_i^*| dV \cdot \{d_i^*\} - \int_S |\phi_e^*| {}^t \{p\} dS + \\
 & + \int_V |\phi_e^*| {}^t \{b\} dV) + \delta \{d_i^*\}^t \cdot (\int_V |B_i^*| |{}^t E| |B_e^*| dV \cdot \{d_e^*\} + \\
 & + \int_V |B_i^*| |{}^t E| |B_i^*| dV \cdot \{d_i^*\} - \int_S |\phi_i^*| {}^t \{p\} dS - \int_V |\phi_i^*| {}^t \{b\} dV) .
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

E de acordo com as equações (4.59 a-d) e (4.60 a-b), a (4.62) passa a ser escrita como:

$$\begin{aligned} \delta \Pi^e &= \delta \{d_e^*\}^t \cdot (|k_{ee}^*| \{d_e^*\} + |k_{ei}^*| \{d_i^*\} - \{q_e^*\}) + \\ &+ \delta \{d_i^*\}^t \cdot (|k_{ie}^*| \{d_e^*\} + |k_{ii}^*| \{d_i^*\} - \{q_i^*\}) . \end{aligned} \quad (4.63)$$

Pela condição de se ter Π^e mínima em relação aos $\{d_i^*\}$, vem:

$$|k_{ie}^*| \{d_e^*\} + |k_{ii}^*| \{d_i^*\} - \{q_i^*\} = 0 ; \quad (4.64)$$

logo;

$$\{d_i^*\} = - |k_{ii}^*|^{-1} |k_{ie}^*| \{d_e^*\} + |k_{ii}^*|^{-1} \{q_i^*\} = 0 . \quad (4.65)$$

Levando-se a (4.65) em (4.63) obtém-se:

$$\delta \Pi^e = \delta \{d_e^*\}^t \cdot \left((|k_{ee}^*| - |k_{ei}^*| |k_{ii}^*|^{-1} |k_{ie}^*|) \{d_e^*\} - \left(\{q_e^*\} - |k_{ei}^*| |k_{ii}^*|^{-1} \{q_i^*\} \right) \right) . \quad (4.66)$$

Portanto, a matriz de rigidez e o vetor de cargas consistentes do elemento serão:

$$|k^*|_{\text{cond.}} = |k_{ee}^*| - |k_{ei}^*| |k_{ii}^*|^{-1} |k_{ie}^*| ; \quad (4.67)$$

$$\{q^*\}_{\text{cond.}} = \{q_e^*\} - |k_{ei}^*| |k_{ii}^*|^{-1} \{q_i^*\} ; \quad (4.68)$$

4.4 - Placa Circular para Coroamento das Cascas Fechadas

Se as cascas a serem analisadas são fechadas, o uso das expressões (4.11 a-e) para as deformações, leva a que em alguns termos presentes na matriz $|B^*|$, onde o raio R aparece no denominador, uma singularidade ocorra para o ponto da casca situado sobre o eixo de simetria, já que neste caso o

raio R se anula.

Uma forma possível de abordagem deste problema, seria eliminar esta singularidade adotando-se um raio bastante pequeno e forçando-se as condições de simetria - deslocamento radial e rotação nulas para este ponto. Entretanto, este procedimento acarreta na obtenção de valores pouco realísticos para os esforços solicitantes, na região próxima ao eixo de revolução.

Uma outra forma de proceder, que foi a usada neste trabalho, consiste na adoção de uma placa circular, de raio reduzido, para o coroamento das cascas fechadas. Tomando-se a placa com um único ponto nodal, é possível deduzir a matriz de rigidez desta placa a partir da sua solução analítica, obtida supondo-se a mesma, sujeita a força radial e momento distribuídos ao longo do seu bordo. (fig. 4.8)

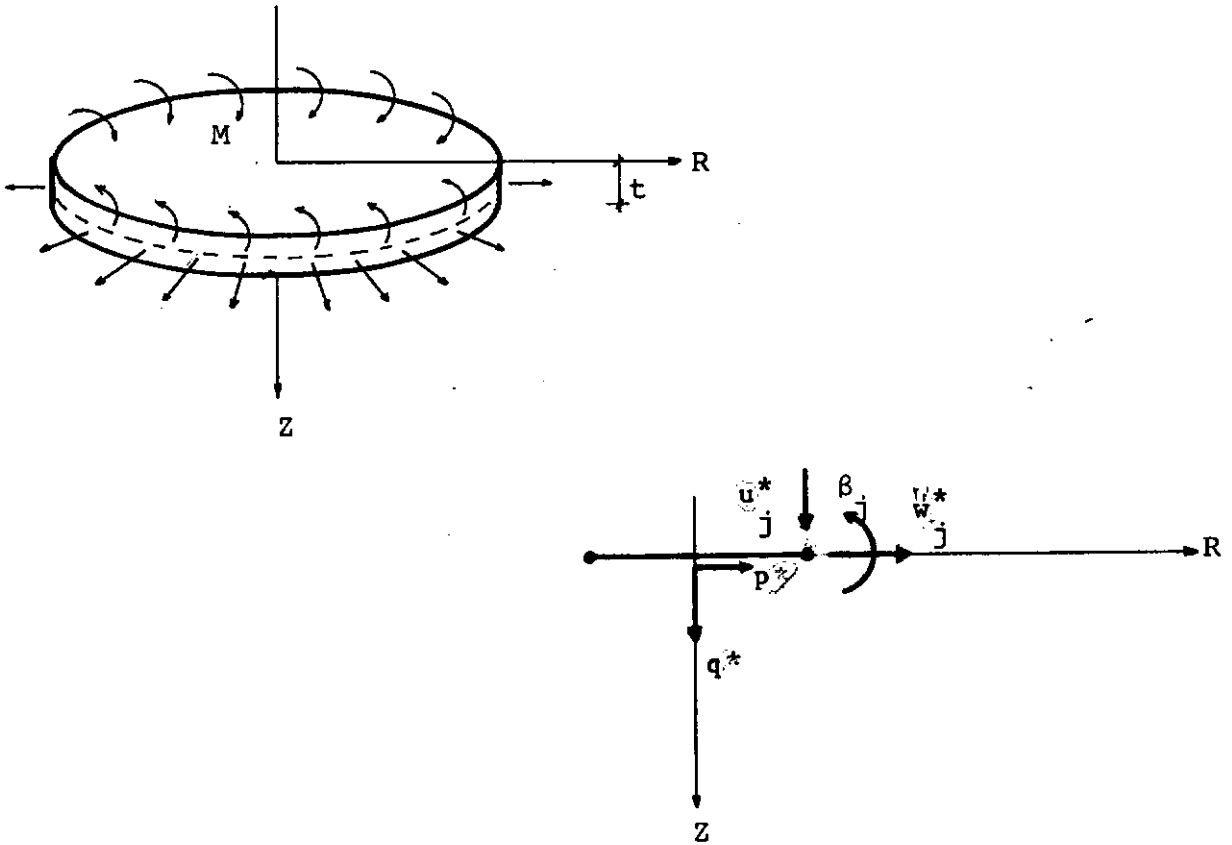


fig. 4.8 - Placa Circular - Elemento adotado

Suponha-se inicialmente a placa submetida à ação de uma pressão radial. Se não se leva em consideração a ação de forças de massa, o único caso possível de distribuição simétrica de tensões com relação ao eixo Z , será aquele em

que ²¹

$$\sigma_r = \sigma_\theta \text{ constante ;} \quad (4.69)$$

e por conclusão:

$$\epsilon_r = \epsilon_\theta . \quad (4.70)$$

A partir de (4.70), tem-se

$$\frac{dP_r}{dR} = \frac{P_r}{R} , \quad (4.71)$$

que integrada fornece:

$$P_r = C_1 \cdot R , \quad (4.72)$$

sendo, a constante C_1 obtida a partir da condição de contorno.

Assim,

para $r = a$

$$P_r = \frac{P_j^*}{w_j} . \quad (4.73)$$

Da (4.73) e (4.72) chega-se a:

$$p^* = \frac{R}{a} w_j^* \quad (4.74)$$

Deve-se agora obter a função que relaciona o campo de deslocamentos q^* com os deslocamentos nodais u_j^* e β_j .

A equação diferencial que rege o fenômeno da deformação de uma placa circular sujeita apenas à ação de um momento M , uniformemente distribuído ao longo do seu bordo, é²²:

$$\frac{d}{dR} \left(\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \cdot \frac{dq^*}{dR} \right) \right) = 0 \quad , \quad (4.75)$$

que integrada duas vezes fornece:

$$-\frac{dq^*}{dR} = \beta = \frac{C_1 \cdot R}{2} + \frac{C_2}{R} \quad ; \quad (4.76)$$

e integrando-se mais uma vez tem-se

$$q = - \frac{C_1 \cdot R^2}{4} - C_2 \ln \frac{R}{a} + C_3 \quad . \quad (4.77)$$

As constantes C_1 , C_2 e C_3 são determinadas a partir das condições de bordo e de simetria. Assim:

- para $R = 0$ tem-se $\beta=0$; logo

$$C_2 = 0 \quad . \quad (4.77 \text{ a})$$

- para $R = a$ tem-se $q=0$; logo

$$- \frac{C_1 a^2}{4} + C_3 = 0 \quad . \quad (4.77 \text{ b})$$

- para $R = a$ tem-se

$$M_r = M \quad . \quad (4.78)$$

Mas,

$$M_r = - D \left(\frac{d^2 q}{dR^2} + \frac{V}{R} \frac{dq}{dR} \right) \quad ,$$

onde

$$D = \frac{E \cdot t^3}{12(1-\nu^2)} \quad . \quad (4.79 \text{ a-b})$$

Manipulando-se as equações (4.76) e (4.79 a) chega-se a:

$$q = \frac{-M}{2D(1+\nu)} R^2 + \frac{M \cdot \bar{a}^2}{2D(1+\nu)}$$

$$\beta = \frac{M}{D(1+\nu)} \cdot R \quad (4.80 \text{ a-b})$$

Particularizando-se, na eq. (4.80 b), o raio R para o ponto nodal β_j , virá:

$$M = \frac{D(1+\nu)}{a} \cdot \beta_j \quad (4.81)$$

Substituindo-se o valor de M dado em (4.81) na (4.80 a) virá:

$$q = -\frac{R^2}{2a} \beta_j + \frac{a}{2} \beta_j \quad (4.82)$$

Na equação anterior resta considerar o deslocamento de corpo rígido da placa, proveniente da deformação da casca. Assim, a eq. (4.82) passa ser escrita como:

$$q^i = u_j^* + \left(\frac{a}{2} - \frac{R^2}{2a} \right) \beta_j . \quad (4.83)$$

As equações (4.74) e (4.83), que relacionam o campo de deslocamentos no interior da placa com os deslocamentos nodais adotados, podem ser postas sob a forma matricial, obtendo-se então

$$\begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{R}{a} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{a}{2} - \frac{R^2}{2a} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} u_j^* \\ w_j^* \\ \beta_j \end{Bmatrix} , \quad (4.84)$$

onde

$$|\phi_{p\ell}| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{R}{a} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{a}{2} - \frac{R^2}{2a} \end{vmatrix} \quad (4.85)$$

corresponde à matriz das funções de interpolação para a placa.

Obtida a matriz $|\phi_{pl}|$ e notando-se que neste caso o vetor das deformações é dado por:

$$\{\epsilon_{pl}\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \chi_r \\ \chi_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{dp}{dR} \\ \frac{p}{R} \\ -\frac{d^2q}{dR^2} \\ -\frac{1}{R} \frac{dq}{dR} \end{Bmatrix} \quad (4.86)$$

e que:

$$\begin{Bmatrix} N_r \\ N_\theta \\ M_r \\ M_\theta \end{Bmatrix} = |E| \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \chi_r \\ \chi_\theta \end{Bmatrix} ; \quad (4.87)$$

seguinto-se o mesmo procedimento descrito no item 4.3.4 obter-

se-ã:

$$|B_{pl}| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{vmatrix} \quad (4.88)$$

$$|k_{pl}| = 2\pi \int_0^a |B_{pl}|^t |E| |B_{pl}| \cdot R \, dR \quad .$$

$$|k_{pl}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\pi Et}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\pi Et^3}{12(1-\nu)} \end{vmatrix} \quad (4.89 \text{ a-b})$$

que é a matriz de rigidez para a placa.

4.5 - Influência do Anel de Reforço

Ocorre frequentemente na prática, principalmente quando se trata de associações de cascas, a necessidade da utilização de anéis de reforço ^{16,17} como elementos estruturais, os quais realizam o vínculo de engastamento elástico.

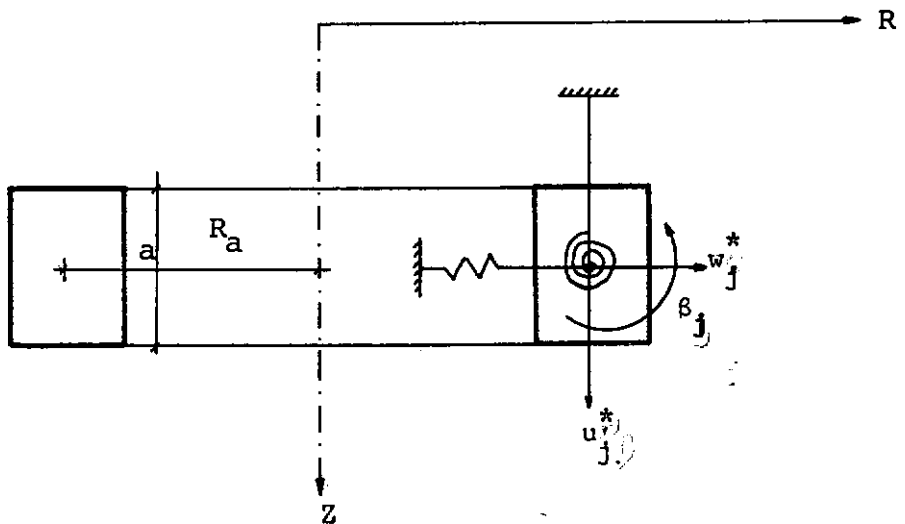


fig. 4.9 - Simulação estrutural do efeito do anel sobre a casca

Para a análise do anel de rigidez (fig. 4.9) deve-se observar inicialmente que, para um deslocamento axial, o anel desloca-se sem se deformar (deslocamento de corpo rígido).. Entretanto, a rotação ou o deslocamento radial do

anel são acompanhados de uma deformação do mesmo, expressa por

$$\epsilon_a = \frac{\Delta R}{R_a} \quad , \quad (4.90)$$

sendo ΔR o acréscimo no raio R_a do anel.

4.5.1 - Anel de Pequenas Dimensões

Se se considera que as dimensões do anel são pequenas, de forma que os esforços possam ser considerados como atuando no seu eixo, o funcionamento estrutural do anel pode ser simulado como produzindo um efeito de mola - translacional (na direção radial) e rotacional. Neste caso é possível considerar-se o anel como um ponto material e localizar este ponto material em um nó da estrutura. Para se complementar a análise, deve-se agora obter os coeficientes de mola, associados ao deslocamento radial e à rotação, e esses coeficientes deverão ser somados na diagonal principal da matriz de rigidez global da estrutura, nas posições convenientes. Com este procedimento, automaticamente tem-se garantida a compatibilização dos deslocamentos do anel e da casca.

- Coeficiente associado ao deslocamento radial

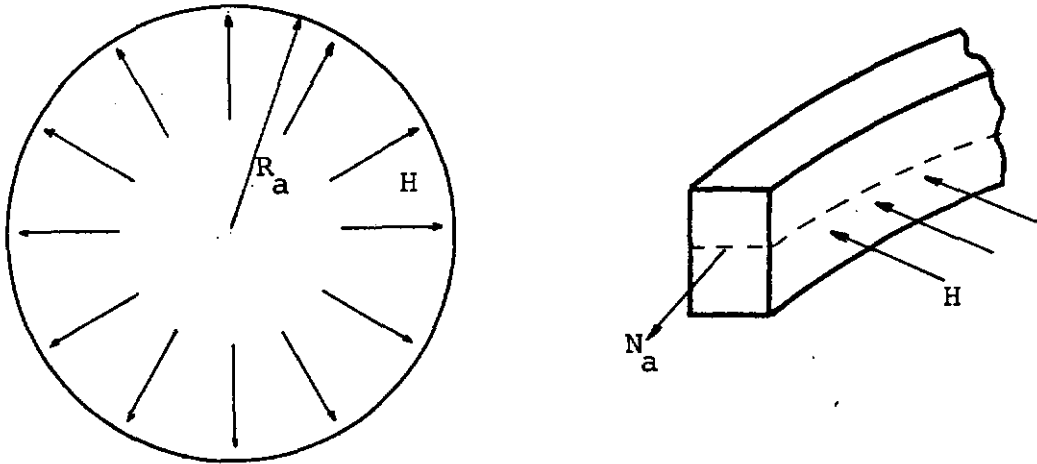


fig.4.10 a-b - Anel submetido a uma pressão radial -
Esforço normal na seção transversal

Se o anel está submetido a uma força radial H (fig. 4.10 a-b), a força normal que age na seção transversal do anel será:

$$N_a = H R_a ; \quad (4.91)$$

e a tensão:

$$\sigma_a = \frac{N}{S_a} , \quad (4.92)$$

onde S_a é a área da seção transversal do anel.

Uma vez que :

$$\sigma_a = E_a \cdot \epsilon_a \quad , \quad (4.93)$$

a partir da (4.90), notando-se que $\Delta R = w_j^*$, ter-se-á:

$$\sigma_a = \frac{E_a}{R_a} \cdot w_j^* \quad . \quad (4.94)$$

Substituindo-se (4.91) e (4.92) em (4.94), virá:

$$H = E_a \frac{S_a}{R_a^2} w_j^* \quad . \quad (4.95)$$

Para se obter o coeficiente de rigidez de ve-se, coerentemente com a eq. (4.54), trabalhar com a carga total que age no anel e fazer $w_j^* = 1$. Procedendo-se dessa forma obter-se-á:

$$k_a = 2\pi \frac{E_a S_a}{R_a} \quad (4.96)$$

- Coeficiente associado à rotação

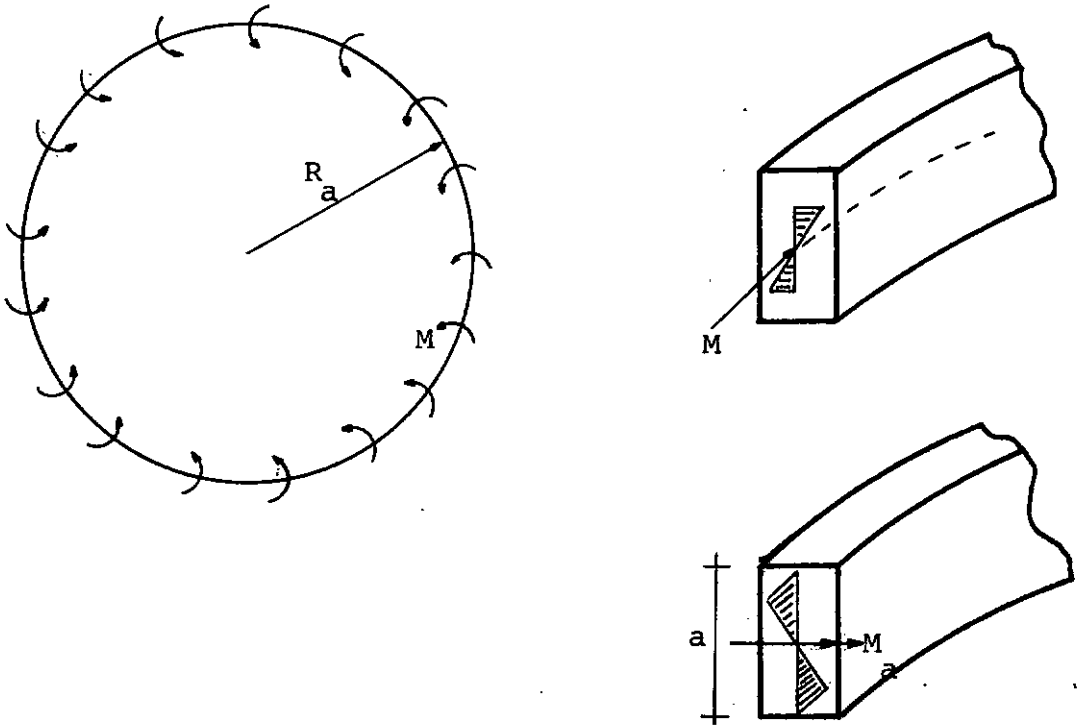


fig. 4.11 a-c - Anel sujeito a um momento uniformemente distribuído - Momento fletor atuando na seção transversal

Se o anel está submetido à ação de um momento M , agindo ao longo do seu eixo (fig. 4.11 a,b), o momento fletor (fig. 4.11c) a que fica sujeito este anel será dado por:

$$M_a = M \cdot R_a ; \quad (4.97)$$

e a tensão nas bordas será

$$\sigma_a = \pm \frac{M_a}{I_a} \cdot \frac{a}{2} \quad , \quad (4.98)$$

sendo I_a o momento de inércia da seção transversal do anel em relação a um eixo contido no seu plano.

Devido à variação linear da deformação ϵ_a ao longo da altura a do anel, a equação (4.90) pode ser escrita como:

$$\epsilon_a = \frac{\Delta R}{R_a} = \frac{a}{2} \beta_j \frac{1}{R_a} \quad . \quad (4.99)$$

Levando-se as equações (4.99), (4.98) e (4.97) em (4.93), ter-se-á:

$$M_a = \frac{E_a \cdot I_a}{R_a^2} \beta_j \quad . \quad (4.100)$$

O coeficiente de rigidez será obtido tomando-se o momento total que age no anel e fazendo-se na (4.100) $\beta_j=1$. Assim:

$$K_a = 2\pi \frac{E_a \cdot I_a}{R_a} \quad . \quad (4.101)$$

4.5.2 - Anel de Grandes Dimensões

Se as dimensões do anel são tais que não podem ser desprezadas, o problema deve ser encarado de forma distinta àquela apresentada no ítem anterior.

As contribuições do anel, para a matriz de rigidez global da estrutura, são ainda obtidas a partir das equações (4.96) e (4.101). Entretanto, na montagem da matriz de rigidez do elemento de casca, deve-se, neste caso, levar em consideração a dimensão do anel. Isto pode ser feito, considerando-se o anel como um trecho rígido pertencente ao elemento de casca que a ele se liga. Seja assim a figura (4.12).

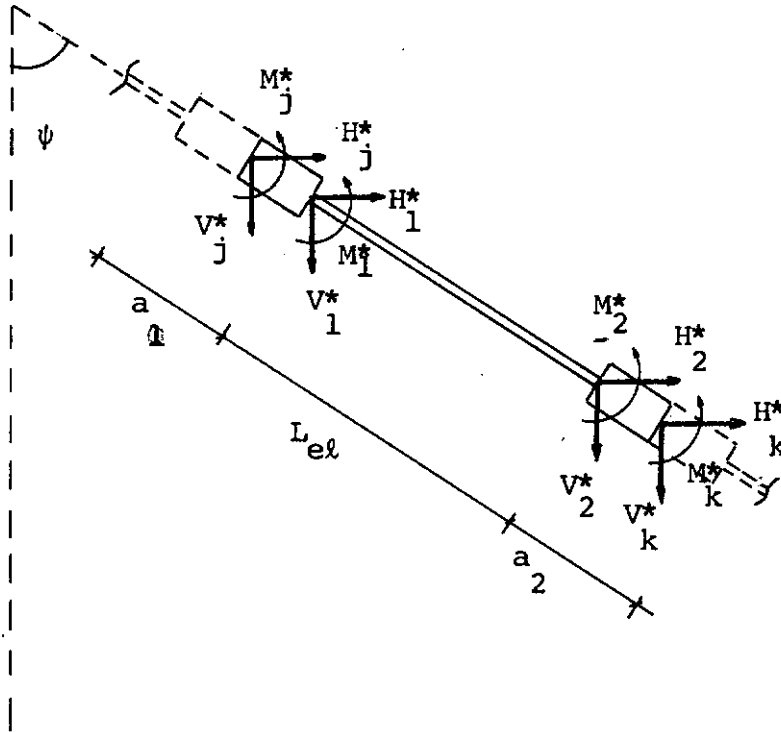


fig. 4.12 - Consideração do anel como trecho rígido

Defina-se $|k_{el}^*|$ como a matriz de rigidez* obtida para o trecho elástico (casca propriamente dita) e seja $\{q_{el}^*\}$ e $\{d_{el}^*\}$

*Está se considerando neste ponto que, tanto a matriz de rigidez, como os vetores de cargas consistentes e deslocamentos nodais do elemento, já estão condensados.

os vetores das forças e deslocamentos nas extremidades deste trecho. Por considerações de equilíbrio estático, pode-se escrever que:

$$\begin{aligned}
 V_j^* &= V_1^* \\
 H_j^* &= H_1^* \\
 M_j^* &= M_1^* - V_1^* \frac{a_1}{2} \operatorname{sen} \psi + H_1^* \frac{a_1}{2} \operatorname{cos} \psi \\
 V_k^* &= V_2^* \\
 H_k^* &= H_2^* \\
 M_k^* &= M_2^* + V_2^* \frac{a_2}{2} \operatorname{sen} \psi + H_2^* \frac{a_2}{2} \operatorname{cos} \psi . \quad (4.102 \text{ a-f})
 \end{aligned}$$

Pondo-se estas equações sob forma matricial, ter-se-á:

$$\left\{ \begin{array}{c} V_j^* \\ H_j^* \\ M_j^* \\ V_k^* \\ H_k^* \\ M_k^* \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_1}{2} \operatorname{sen} \psi & \frac{a_1}{2} \operatorname{cos} \psi & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a_2}{2} \operatorname{sen} \psi & -\frac{a_2}{2} \operatorname{cos} \psi & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} V_1^* \\ H_1^* \\ M_1^* \\ V_2^* \\ H_2^* \\ M_2^* \end{array} \right\}$$

(4.103 a)

ou mais simplesmente:

$$\{q^*\}_{\text{mod.}} = |T_a| \{q_{el}^*\} \quad (4.103 \text{ b})$$

A partir da equação (4.103 b) é válido es
crever-se que:

$$\{d_{el}^*\} = |T_a|^t \{d^*\}_{\text{mod.}} \quad (4.104)$$

$$\{k^*\}_{\text{mod.}} = |T_a| |k_{el}^*| |T_a|^t \quad (4.105)$$

As equações (4.103 a-b), (4.104) e (4.105) permitem analisar a influência do anel de reforço, tendo-se em conta as dimensões do mesmo.

C A P Í T U L O V
APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS
ANÁLISE E DISCUSSÃO

5.1 - Introdução

Nos capítulos anteriores, apresentou-se a formulação básica teórica do método dos elementos finitos, necessária ao desenvolvimento de um programa automático, para análise de cascas de revolução sujeitas a carregamento com simetria axial (alguns dados relativos a este programa serão apresentados no capítulo VII). Neste capítulo, algumas estruturas, analisadas com o uso do programa elaborado, são apresentadas, e os resultados obtidos são comparados com as correspon-

dentes soluções analíticas.

5.2 - Cilindro Engastado submetido a uma Força Radial.

O primeiro teste consistiu na análise de uma casca cilíndrica engastada em um bordo ^{4,6} e submetida, no outro bordo, à ação de uma força radial unitária. As dimensões e os valores das constantes adotadas estão mostrados na fig. 5.1. A casca foi analisada para quatro diferentes divisões no comprimento de 1" junto ao bordo onde se aplica a carga. Os resultados obtidos para as deflexões no ponto de aplicação da carga estão mostrados na tabela 5.1. Estes resultados são comparados com a solução exata¹⁷, e com os valores obtidos com o elemento desenvolvido na Ref. 4. A comparação entre estes dois elementos, comprova o aumento na precisão dos resultados pelo uso de funções deslocamentos mais refinadas*. Na tabela 5.2 apresentam-se os valores do esfor

* É importante mencionar que, conforme foi ressaltado na Ref. 6, os resultados obtidos por Grafton e Strome⁴ estão prejudicados, por não terem estes autores utilizado, na formulação por eles adotada, o valor correto da energia de deformação. Entretanto, o gráfico apresentado na Ref. 6, devido a sua pe

ço normal circunferencial máximo, comparando-os com a solução exata.

Os valores presentes na tabela 5.1 estão plotados na fig. 5.2, onde fica perfeitamente evidenciada a rápida convergência para a solução exata, com o aumento do número de elementos.

Os gráficos para os deslocamentos e os momentos meridionais, correspondentes às diferentes divisões de elementos adotadas, são mostrados nas figs. 5.3 e 5.4, e sua concordância com a solução exata é notória.

quena precisão, não possibilitou a este trabalho uma comparação em termos numéricos do elemento aqui apresentado com o elemento da Ref. 4. Ainda assim a observação dos gráficos mostrados na Ref. 6 comprova que o elemento aqui desenvolvido é superior àquele da Ref. 4.

Tabela 5.1 - Deslocamento radial máximo - $z = 0$

Nº de elem.	Desl. Radial ($\times 10^{-3}$)	Erro (%)	Erro (Ref.4) (%)
6	2.8419	1.13	-
9	2.8735	0.03	31.7
14	2.8742	0.00	11.1
24	2.8742	0.00	3.1
Sol. Exata - 2.8742×10^{-3} (Ref. 17)			

Tabela 5.2 - Esforço normal circunferencial máximo - $z=0$

Nº de elem.	N_{θ}	Erro (%)
6	58.688	2.10
9	57.784	0.56
14	57.538	0.09
24	57.495	0.02
Sol. Exata - 57.485 (Ref. 17)		

5.3 - Cilindro com Anéis de Reforço

Analisou-se também o caso de um cilindro longo, fechado, submetido a uma pressão interna uniforme (fig. 5.5 a), possuindo anéis de reforço distribuídos ao longo do seu comprimento e igualmente espaçados.

A solução analítica formulada na Ref. 17, é elaborada, supondo que dado o caráter infinito do cilindro, o comportamento do mesmo, em um trecho qualquer entre dois anéis, se repete igualmente para os outros, e de tal forma que as deformações radiais em um destes trechos são simétricas em relação ao seu ponto médio. A idealização estrutural, representativa do funcionamento desse cilindro, foi feita analisando-se um único trecho conforme está mostrado na fig. 5.5 b. Além disso, devido ao fato de que a pressão interna, agindo nas tampas de fechamento do cilindro, produz um esforço de tração, constante ao longo do mesmo (esforço meridional de membrana), aplicou-se, nas extremidades do trecho analisado, uma força axial correspondente a este esforço.

Com este procedimento, foi efetuada a análise utilizando-se três divisões distintas: 2 elementos espa-

çados de 12", 4 elementos espaçados de 6" e 6 elementos com 4" de comprimento.

Nas tabelas 5.3 e 5.4 são dados os valores obtidos para o deslocamento radial, o esforço normal circunferencial e o momento meridional, respectivamente nas posições correspondentes ao anel e ao ponto médio entre dois anéis consecutivos. Estes valores, quando se utilizam dois elementos, afastam-se consideravelmente da solução real do problema. Entretanto, já com quatro elementos, a concordância é perfeita.

Nas figuras 5.6, 5.7 e 5.8 estão representados os diagramas obtidos para os deslocamentos radiais, para os esforços normais circunferenciais e para os momentos meridionais.

Tabela 5.3 - Deslocamento radial, esforço normal circunferencial e momento meridional - posição correspondente ao anel

Nº de elem. p/trecho	Desl. Radial ($\times 10^{-2}$)	Erro (%)	N_{θ}	Erro (%)	M_s	Erro (%)
2	2.7740	21.00	9 779	14.89	4 268	18.16
4	3.5123	0.00	11 555	0.56	3.615	0.08
6	3.5122	0.00	11 532	0.36	3.613	0.03
Sol.Exata (Ref.17)	3.5122×10^{-2}		11 491		3 612	

Tabela 5.4 - Deslocamento radial, esforço normal circunferencial e momento meridional - posição a meio vão entre anéis

Nº de elem.	Desl. Radial ($\times 10^{-2}$)	Erro (%)	N_{θ}	Erro (%)	M_s	Erro (%)
2	6.8368	1.52	19 246	2.00	-1 537	21.21
4	6.9423	0.00	19 585	0.27	-1 272	0.32
6	6.9426	0.00	19 614	0.13	-1 269	0.08
Sol.Exata (Ref.17)	6.9426×10^{-2}		19 639		-1 268	

5.4 - Casca Esférica - Pressão Uniforme

O próximo exemplo a ser analisado consiste numa casca esférica fechada engastada no bordo e submetida a uma pressão radial uniforme. Esta casca foi estudada para três divisões distintas, conforme está mostrado na fig. 5.9. Os diagramas obtidos para os momentos meridionais*, os esforços normais circunferenciais* e os esforços normais meridionais estão mostrados nas figuras 5.10, 5.11 e 5.12.

Para uma análise realística dos resultados obtidos para os momentos meridionais (fig. 5.10), faz-se necessário a inclusão neste ponto de alguns comentários básicos. Na aplicação do método dos elementos finitos (modelo de deslocamentos) os deslocamentos no interior de cada elemento são aproximados por meio de funções simples. A idéia básica do método consiste em que, através do uso de muitos elementos de tamanho reduzido, é possível representar complicados estados de deformação da estrutura através de estados de deformação simples no

* Os diagramas traçados, utilizando 8 elementos são praticamente idênticos aos obtidos por Hansteen⁷, que também utilizou funções de 5º e do 2º grau para os deslocamentos w e u .

interior de cada elemento. Realmente, a prática tem demonstrado, que, se se garante o cumprimento dos critérios de convergência, a solução assim obtida converge para a exata, quando se aumenta o número de elementos.

No caso que estamos discutindo, além da aproximação adotada na representação do campo de deslocamentos, também a superfície de dupla curvatura é aproximada por meio de um conjunto de elementos cônicos.

O problema que se apresenta consiste, portanto, em se procurar determinar sob que circunstâncias as duas aproximações adotadas levam a resultados convenientes. Dessa forma, deve-se previamente analisar a semelhança de comportamento de uma casca de dupla curvatura e da sua idealização como sendo constituída por um conjunto de elementos cônicos*.

No caso de cascas de revolução de dupla curvatura, a solução analítica correspondente ao efeito local, produzido por ações de bordo, é comumente aproximada pela casca cônica, tangente em cada ponto de um certo intervalo con

* Este assunto é mais detalhadamente discutido na referência 23.

sidêrado* .

Baseando-se, portanto, nestas considerações, deve-se esperar que, para cascas finas não abatidas, sujeitas a carregamento de bordo, a casca idealizada como um conjunto de elementos cônicos comporte-se semelhantemente à correspondente casca de dupla curvatura.

Se, por outro lado, o carregamento é tal que produza grandes esforços de membrana, deve-se esperar que a idealização cônica afaste-se da correspondente casca de dupla curvatura. Isso decorre do fato de que, na solução analítica de membrana, tem grande importância o raio de curvatura R_1 do meridiano, que nesse caso não é levado em consideração .

O efeito causado pela descontinuidade do raio R_1 , resultante da aproximação de uma superfície curva , por meio de uma superfície poligonal, pode ser mostrado partindo-se da análise da solução de membrana de uma casca cônica submetida à uma pressão interna. Sabe-se que nesse caso os deslocamentos dependem do ângulo do cone e da abscissa meridional, medida a partir do seu vértice. Assim sendo, tomando-se dois e-

* A aplicação deste método é válida para cascas não abatidas e para cascas em que a relação raio/espessura seja grande.

lementos cônicos adjacentes (fig. 5.13), pertencentes à superfície poligonal, uma vez que seus ângulos internos são distintos e suas abcissas meridionais ~~também~~ ~~co~~ ~~ss~~ ~~ão~~, ~~conclui-se~~ ~~que~~, num estado de membrana, os dois elementos apresentam deslocamentos e rotações diferentes na circunferência nodal comum. Entretanto, a continuidade da estrutura deve ser mantida nesse nó. Isto é conseguido através das forças (aproximadamente de membrana) que cada elemento exerce sobre o outro. Devido ao ângulo existente entre estes elementos, estas forças estão dirigidas mais para dentro, do que os esforços de membrana que ocorreriam nestes elementos. Como consequência, cada elemento sofre, próximo à circunferência nodal, uma deflexão para dentro, em relação à sua posição deformada, resultando numa incompatibilidade de tangente entre esses dois elementos, e portanto no aparecimento de momentos fletores.

Conclui-se, assim, que ~~quanto maiores se~~ ~~se~~ ~~jam~~ os valores dos esforços meridionais de membrana, ~~tanto~~ maiores serão esses momentos residuais. A referência 23 apresenta a seguinte fórmula para o cálculo destes momentos residuais:

$$M_s(\text{res.}) \approx 0.09 (\Delta\phi)^2 N_s R_1, \quad (5.1)$$

onde:

$\Delta\phi$ - semi-soma dos ângulos subtendidos por dois elementos ad jacentes à circunferência nodal. (medido em radianos).

N_s - esforço meridional de membrana (lb/in).

R_1 - raio de curvatura do meridiano (in) .

O sinal do momento residual corresponde ao indicado na fig. 5.13, isto é, positivo se os esforços meridionais de membrana forem de compressão.

De posse dessas observações, pode-se agora analisar os diagramas mostrados na fig. 5.10. Neste caso, as duas situações anteriormente discutidas existem. Na região central da casca, observa-se que os momentos residuais ocorrem e seus valores correspondem aos obtidos, utilizando-se a eq. (5.1). Além disso, como era de se esperar e como também demonstra a fórmula anterior, à medida que o tamanho do elemento diminui, a solução obtida converge para a exata²²; (embora esta convergência seja lenta); o que é uma conclusão lógica, já que à proporção que o elemento diminui, tanto mais a superfície poligonal se aproxima de geometria da casca. Próximo ao bordo engastado, verifica-se que todas as três curvas tendem para a exata. No caso da curva 3, isto era de se esperar, já que nessa

região foi utilizado um elemento subentendendo um ângulo α de $2,5\theta$. Porém, no caso da curva 2, uma outra explicação deve ser dada. O que ocorre é que, uma vez que o ângulo central da casca não é grande ($\alpha = 35\theta$), o efeito da perturbação de borda, causado pelo engaste, se estende por quase toda a região da casca (observe-se o diagrama de N_0 ; fig.5.11); e portanto, próximo ao apoio, este efeito é de tal forma preponderante que dever-se-ia esperar, conforme explicado anteriormente, esta maior aproximação à solução exata. Se se utiliza, na fórmula 5.1, em lugar do esforço meridional de membrana, o valor correspondente obtido para o esforço normal meridional, verifica-se que os momentos residuais, assim calculados, são praticamente idênticos à diferença entre os momentos obtidos e a solução exata. Isso está mostrado na tabela 5.5*.

* Embora, no exemplo apresentado, os valores dos momentos residuais tenham sido pequenos, em outras situações analisadas, em que a predominância dos esforços de membrana sobre os momentos meridionais era grande, maiores erros nos momentos fletores foram obtidos.

Tabela 5.5 - Momento meridional no bordo engastado

Nº de elem.	Mom.Meridional (M_s)	Erro (%)	Mom.Residual
8	-38.29	1.97	+0.56
14	-38.10	1.46	+0.56
35	-37.64	0.24	+0.09
Sol. Exata: -37.55			
(Ref. 22)			

Na tabela 5.6 apresentam-se os valores dos demais esforços, calculados também no bordo engastado. Mesmo com apenas 8 elementos, os valores alcançados são praticamente idênticos aos valores exatos calculados, utilizando-se a solução em série hipergeométrica. Portanto, para os esforços N_s , N_θ e M_θ , uma rápida convergência (embora de caráter oscilatório) à solução exata deve ser esperada. Conclui-se dessa forma que, para estes esforços, a aproximação da superfície da casca não parece causar maiores problemas. Isto mesmo pode ser melhor observado pela análise dos diagramas de esforços normais, representados nas figs. 5.11 e 5.12.

Tabela 5.6 - Esforços normais e momento circunferencial no bordo engastado.

Nº de elem.	N_s	Erro (%)	N_θ	Erro (%)	M_θ	Erro (%)
8	-36.46	0.16	-6.08	0.16	-6.38	1.90
14	-36.34	0.16	-6.06	0.16	-6.34	1.32
35	-36.38	0.05	-6.06	0.16	-6.27	0.16
Sol.Exata (Ref.22)	-36.40		-6.07		-6.26	

5.5 - Precisão dos Resultados.

Um último aspecto deve ser abordado neste capítulo. Ele diz respeito aos erros de truncamento provenientes das operações internas efetuadas pelo computador. Este problema torna-se ainda mais importante quando se utiliza, para definir o campo de deslocamentos, funções muito refinadas. Este é exatamente o caso que aqui se apresenta (polinômios do 5º grau para os deslocamentos w). Na tabela 5.7 comparam-se os resultados da tabela 5.1 (precisão estendida), com os valores que foram obtidos usando-se a precisão simples.

Tabela 5.7 - Comparação dos resultados - precisão simples e dupla

Nº de elem.	Deslocamento Radial ($\times 10^{-3}$)	
	Precisão Simples	Precisão Dupla
6	2.8419	2.8419
9	2.8735	2.8735
14	2.8739	2.8742
24	2.8603	2.8742
Sol. Exata: 2.8742×10^{-3} (Ref. 17)		

Da análise destes resultados nota-se que , à medida que aumenta o número de elementos, os erros de truncamento tornam-se cada vez maiores; e se se utiliza a precisão simples, os resultados começam a divergir. Nestes casos é im prescindível o uso da precisão estendida.

5.6 - Análise Estrutural da Cúpula do Estádio Olímpico "Salle Omnisport"

O exemplo da aplicação prática do programa elaborado consistiu na análise estrutural da Cúpula do Estádio Olímpico "Salle Omnisport", atualmente em fase de construção na Argélia*.

Na análise desta estrutura, constituída pela associação de uma casca esférica, uma casca toroidal e uma placa circular (fig. 5.14), foram utilizados 94 elementos, e a mesma foi estudada para duas solicitações de carga: uma constituída pela ação combinada do peso próprio e sobrecarga, e a outra pela ação de uma protensão circunferencial, na região da casca toroidal, que foi simulada como forças diretamente aplicadas nos nós. O tempo de computação gasto na resolução deste problema (computador IBM 1130 com 32K de memória foi de 25 minutos).

Os diagramas de esforços, correspondentes a essas duas solicitações, estão mostrados nas figs. 5.15 a 5.22. Da análise das figs. 5.15 e 5.16, observa-se que, na região correspondente à casca esférica, os esforços N_s e N_θ são praticamente constantes e de valores semelhantes. Dever-se-ia,

* Esta mesma cúpula foi também analisada com o uso do programa desenvolvido na (Ref. 35).

portanto, esperar momentos nulos neste trecho; e realmente eles foram obtidos. Na região da casca toroidal, a grande variação dos esforços N_{θ} (fig. 5.16) indica a predominância dos esforços de flexão, que também foi obtida.

Assim, os valores calculados, com o uso deste programa, parecem indicar que a idealização estrutural, obtida com o número de elementos utilizados, foi satisfatória.

5.7 - Figuras

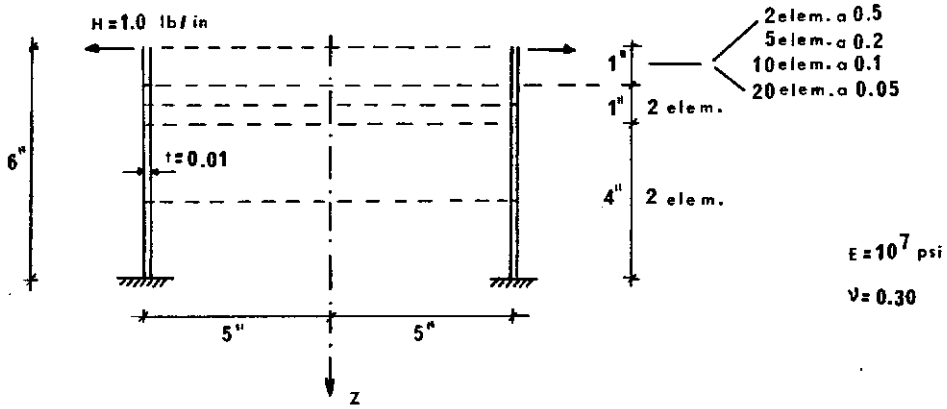


Fig. 5.1 - CASCA CILÍNDRICA - PROPRIEDADES E DISTRIBUIÇÃO DOS ELEMENTOS

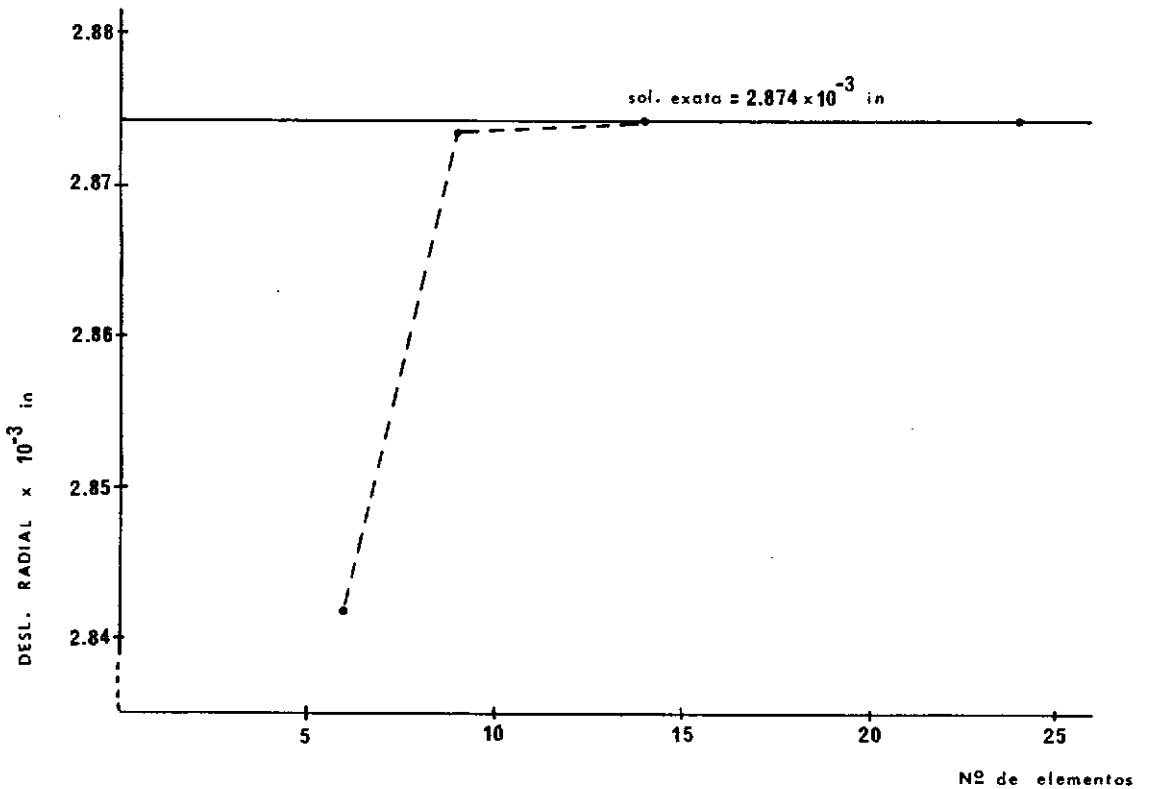


Fig. 5.2 - CONVERGÊNCIA

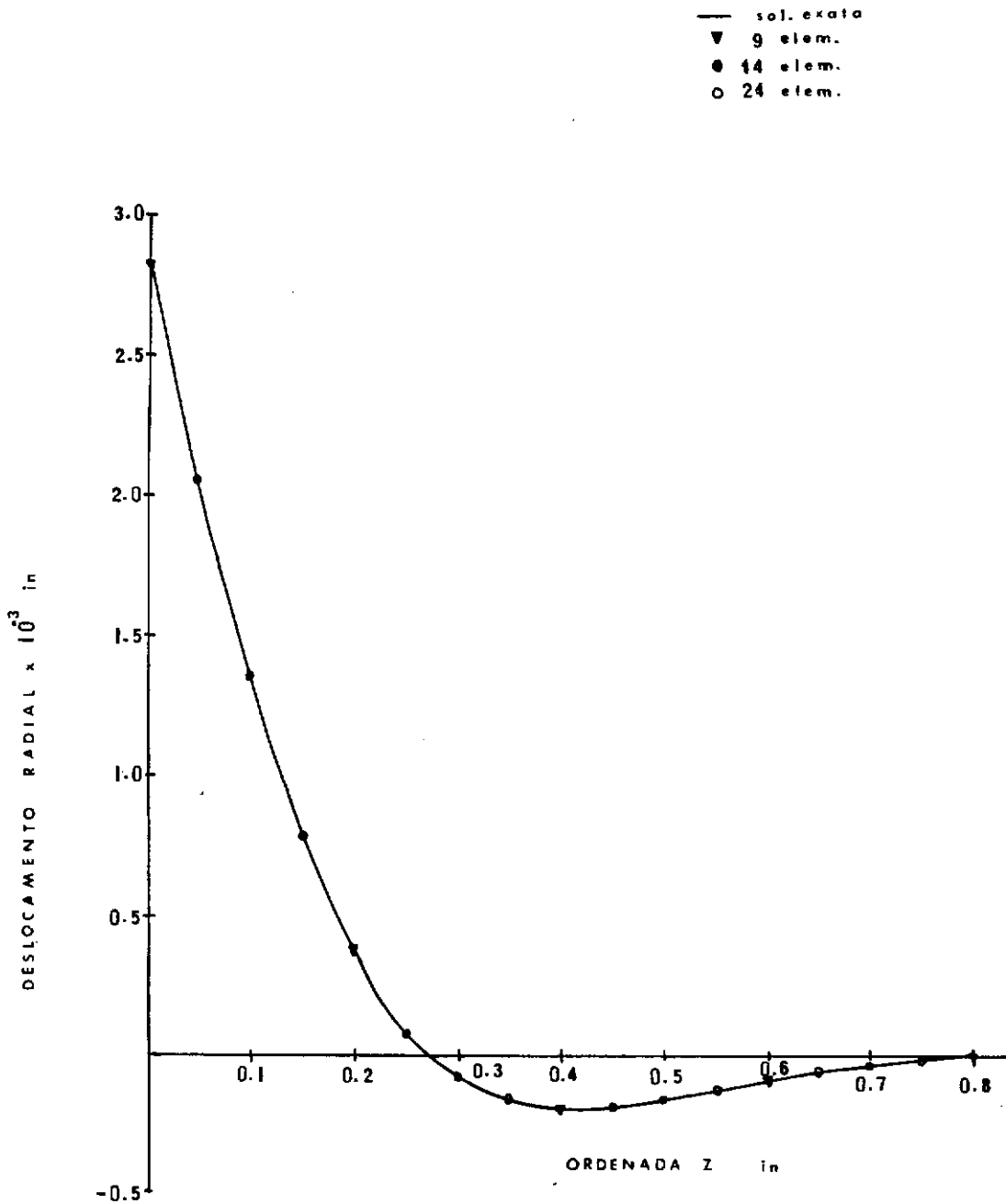


Fig. 5.3 - DESLOCAMENTOS - CASCA CILÍNDRICA

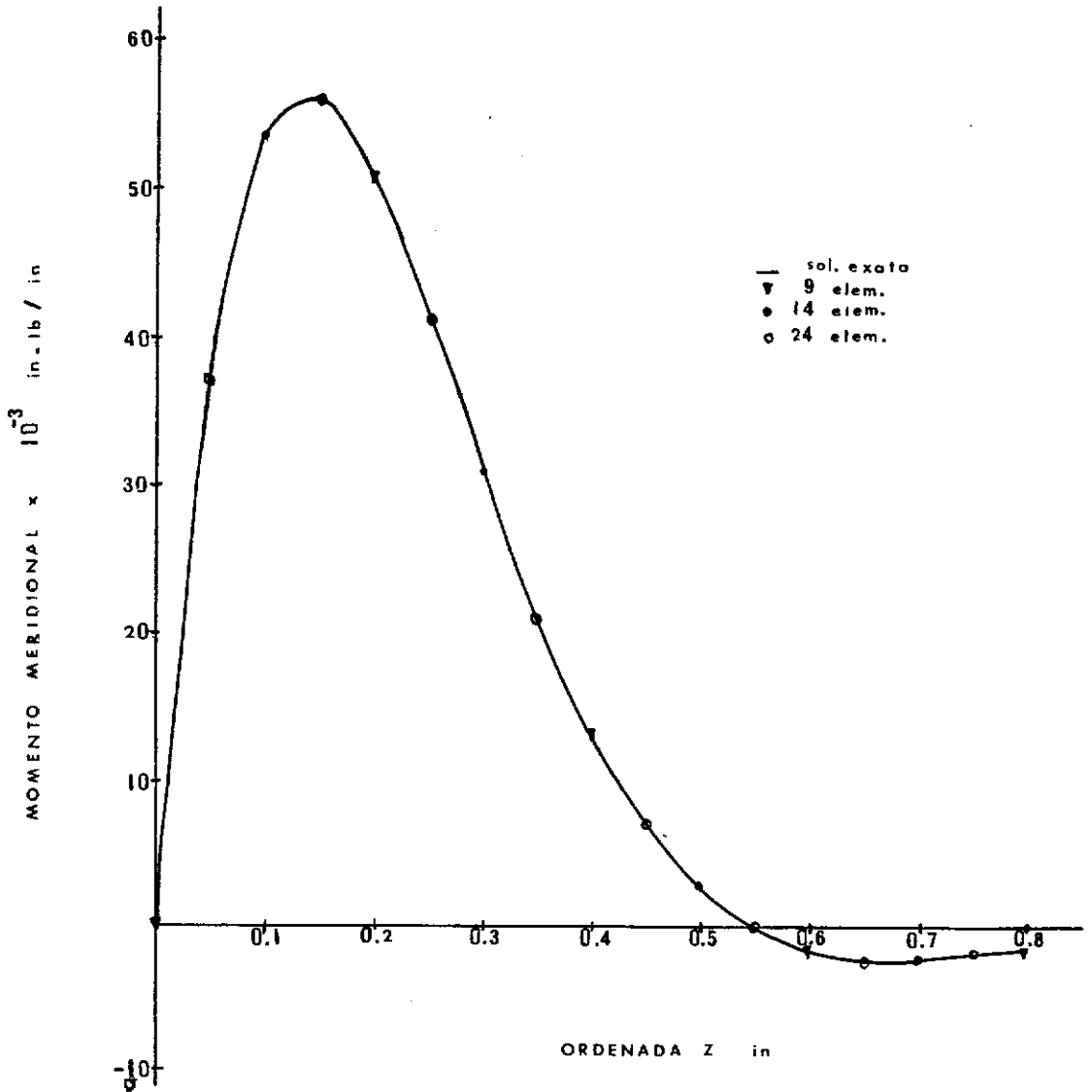


Fig. 5.4 - MOMENTOS MERIDIONAIS - CASCA CILÍNDRICA

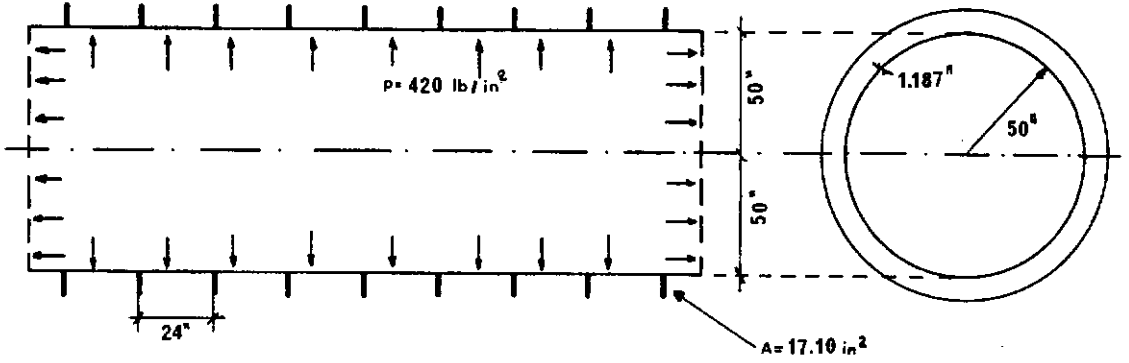


Fig. 5.5a - CILINDRO COM ANÉIS

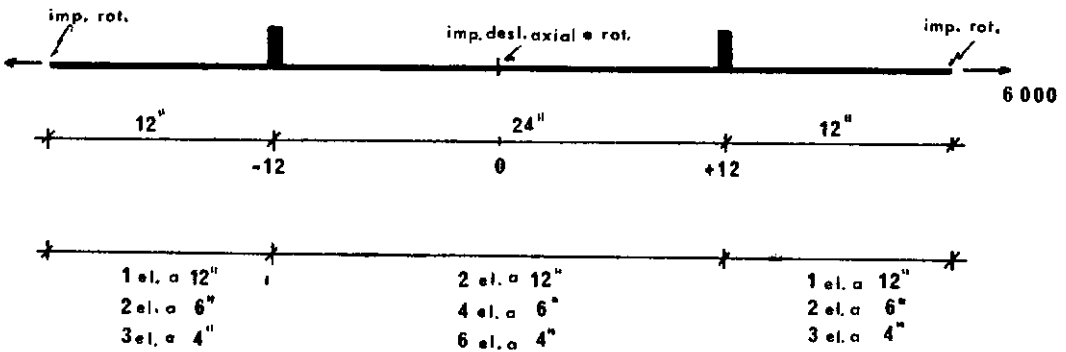


Fig. 5.5b - TRECHO ANALISADO - SIMULAÇÃO ESTRUTURAL

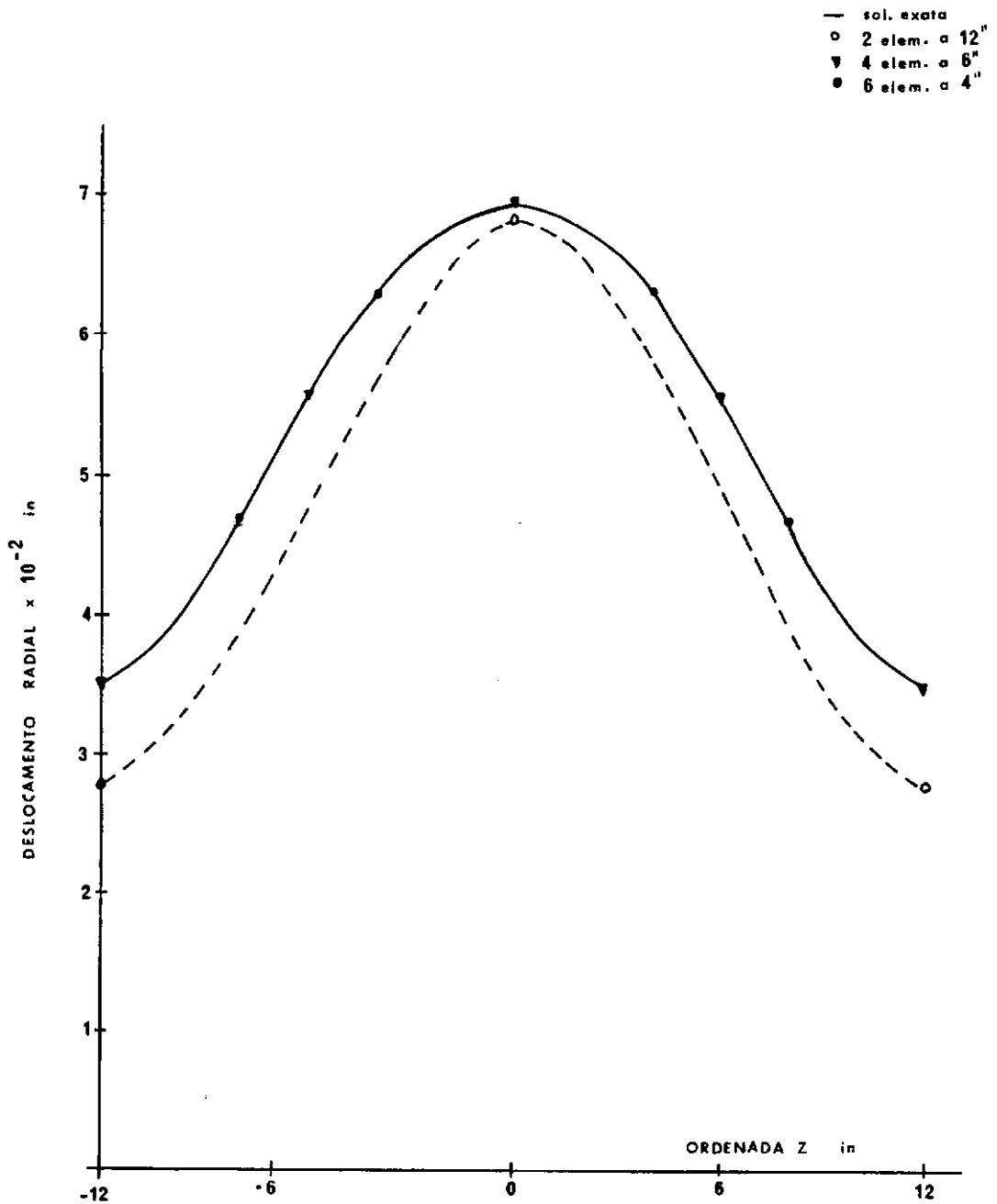


Fig. 5.6 - DESLOCAMENTOS - CILINDRO COM ANÉIS

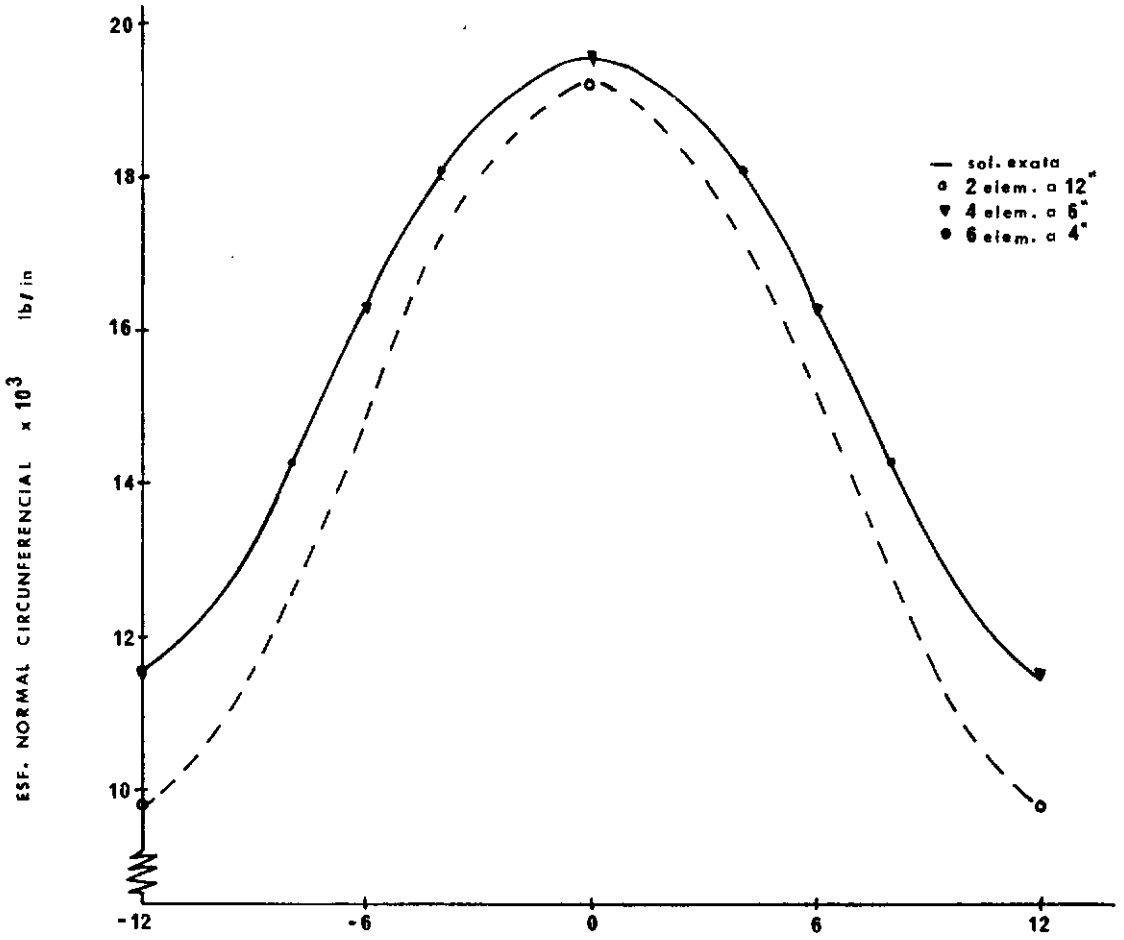


Fig. 5.7 - ESFORÇO N_θ - CILINDRO COM ANÉIS

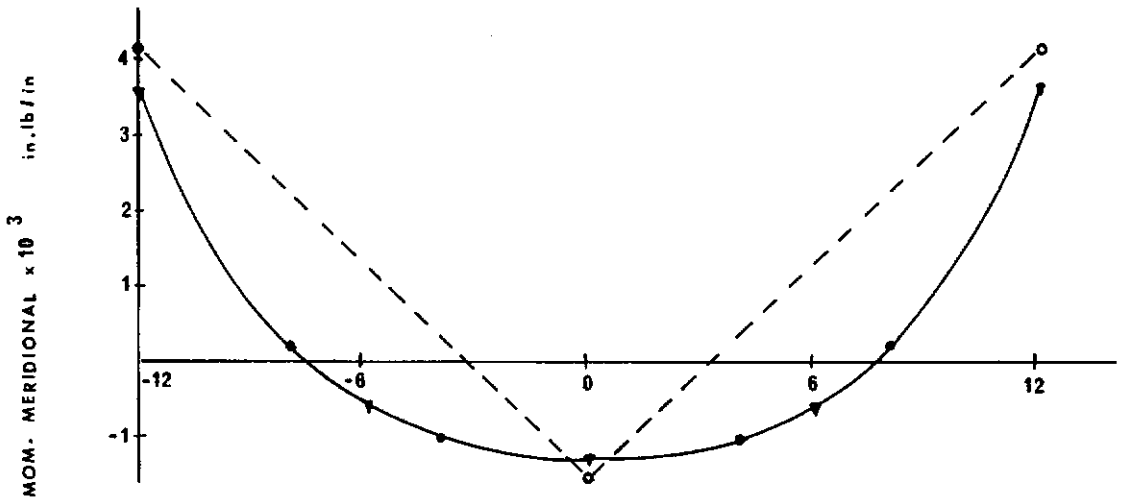


Fig. 5.8 - MOMENTO M_x - CILINDRO COM ANÉIS

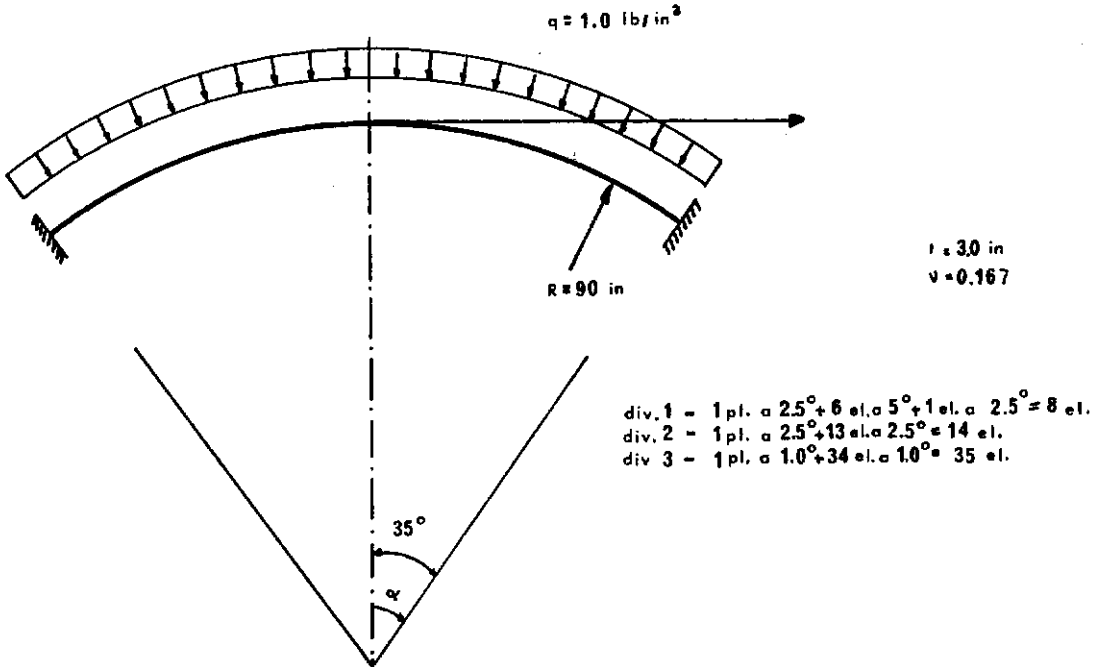


Fig. 5.9 - CASCA ESFÉRICA - PRESSÃO UNIFORME

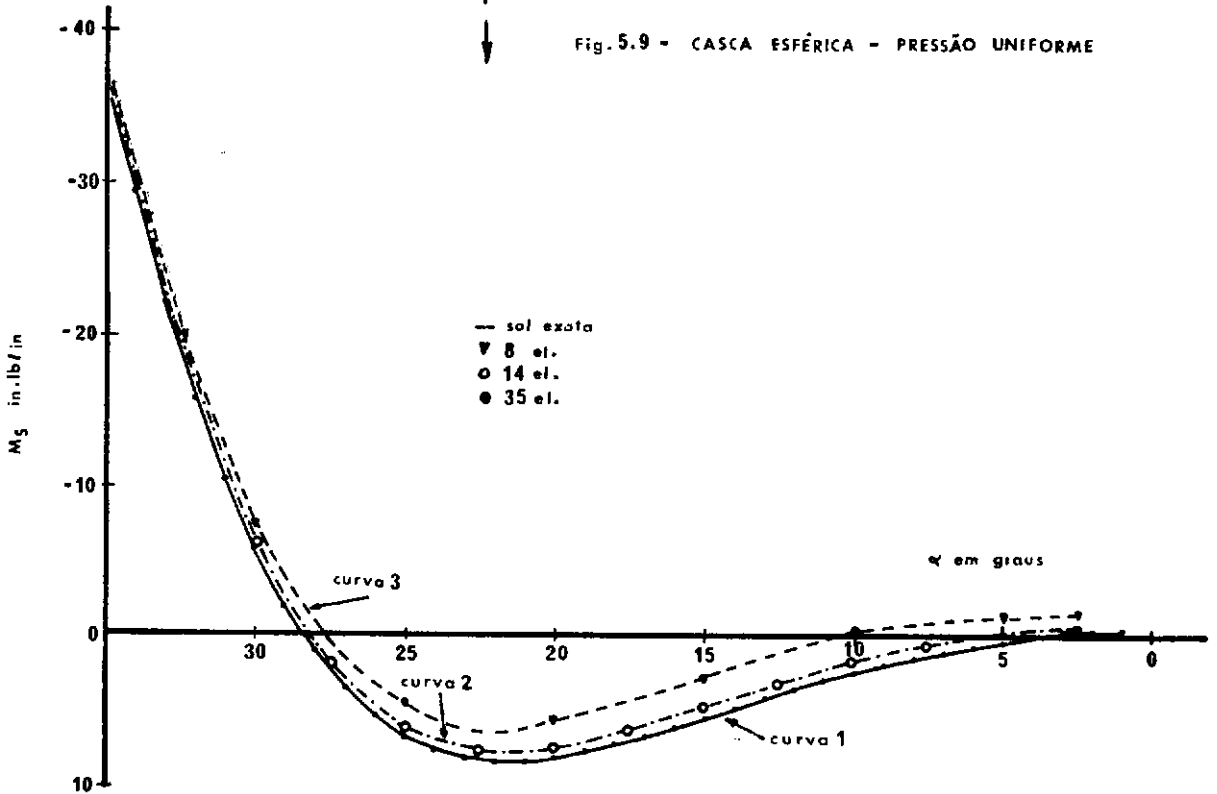


Fig. 5.10 - MOMENTO MERIDIONAL

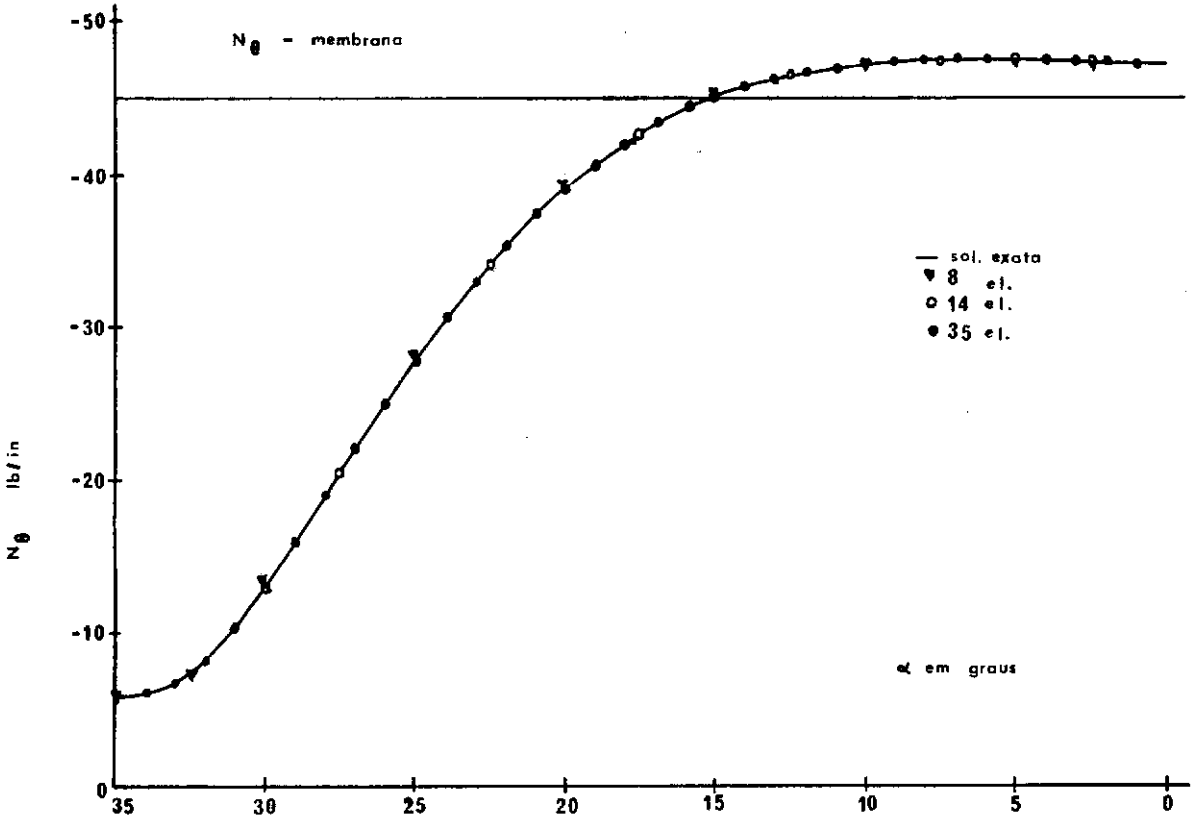


Fig. 5.11 - ESFORÇO NORMAL CIRCUNFERENCIAL

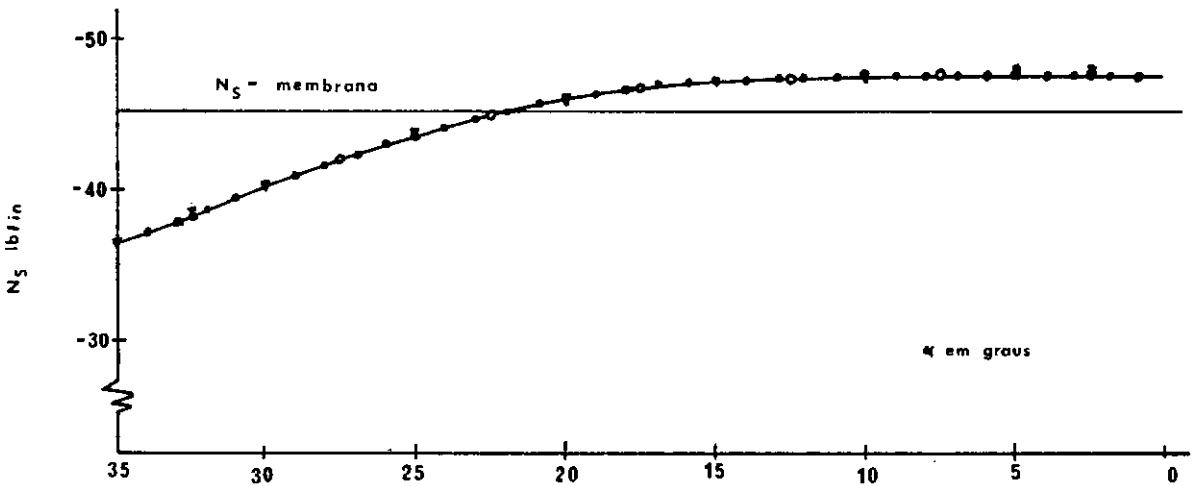


Fig. 5.12 - ESFORÇO NORMAL MERIDIONAL

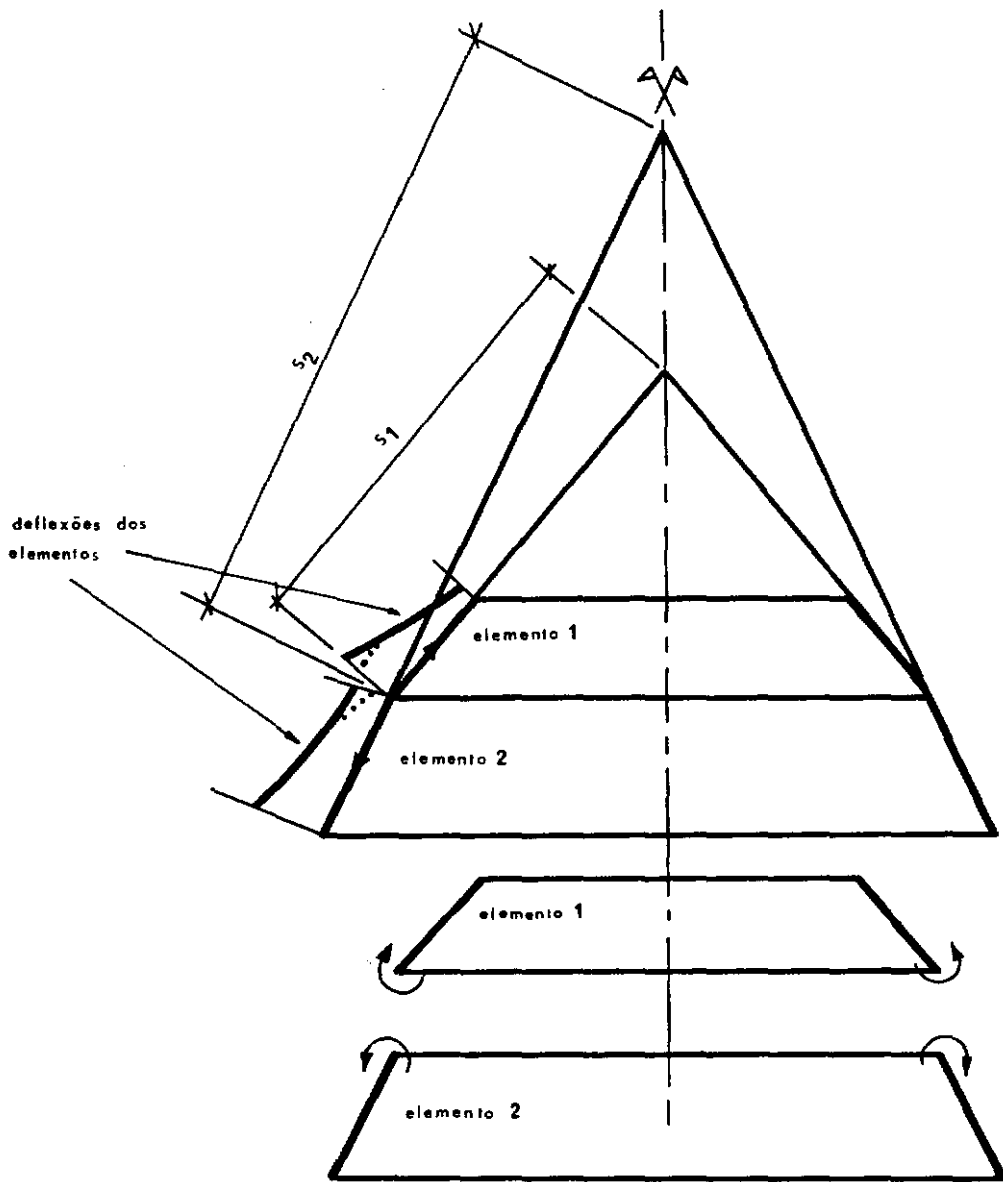


Fig. 5.13 - MOMENTO MERIDIONAL - CASCA COM MERIDIANO POLIGONAL

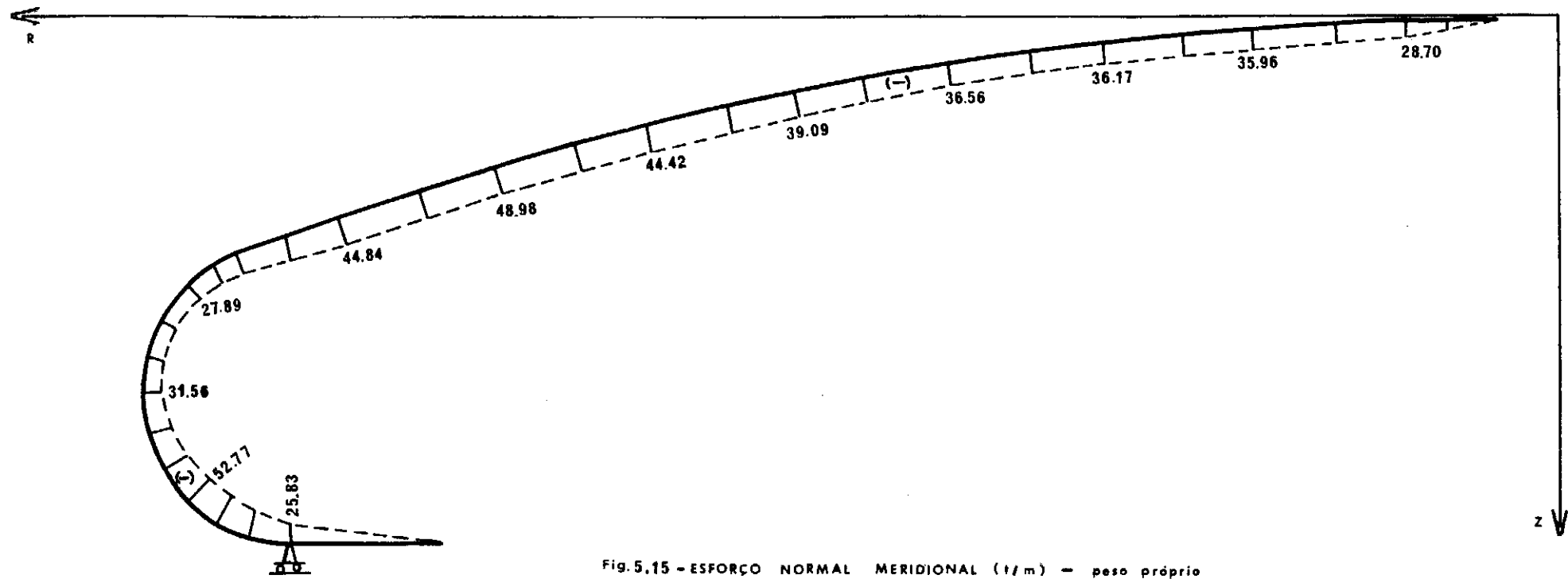


Fig. 5.15 - ESFORÇO NORMAL MERIDIONAL (t/m) - peso próprio

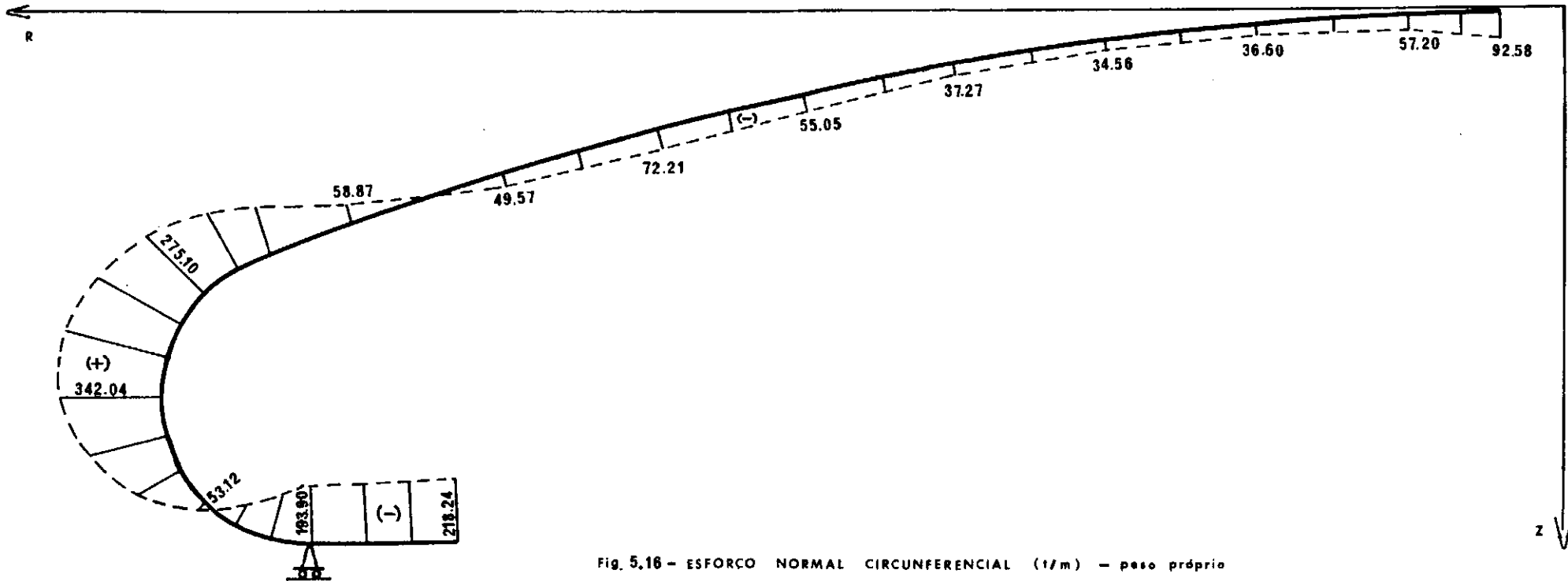


Fig. 5.16 - ESFORÇO NORMAL CIRCUNFERENCIAL (t/m) - peso próprio

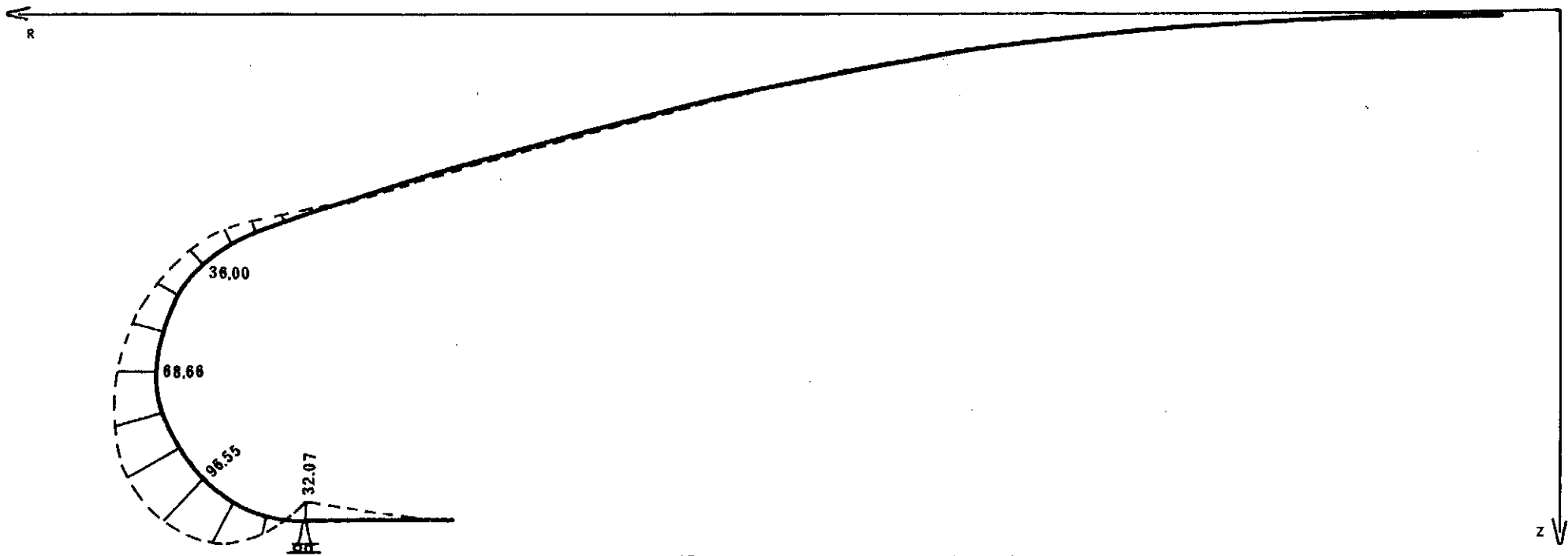


Fig. 5.17 - MOMENTO MERIDIONAL (tm/m) - peso próprio

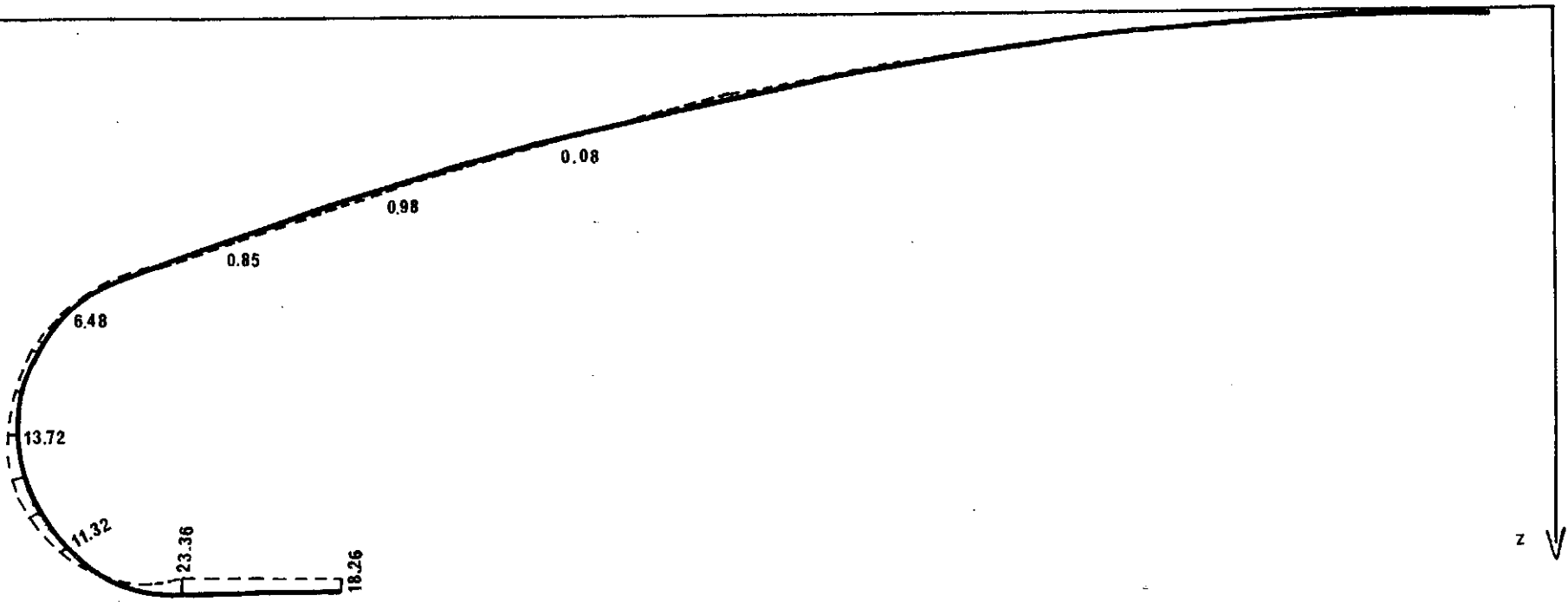


Fig. 5.18 - MOMENTO CIRCUNFERENCIAL (tm/m) - peso próprio

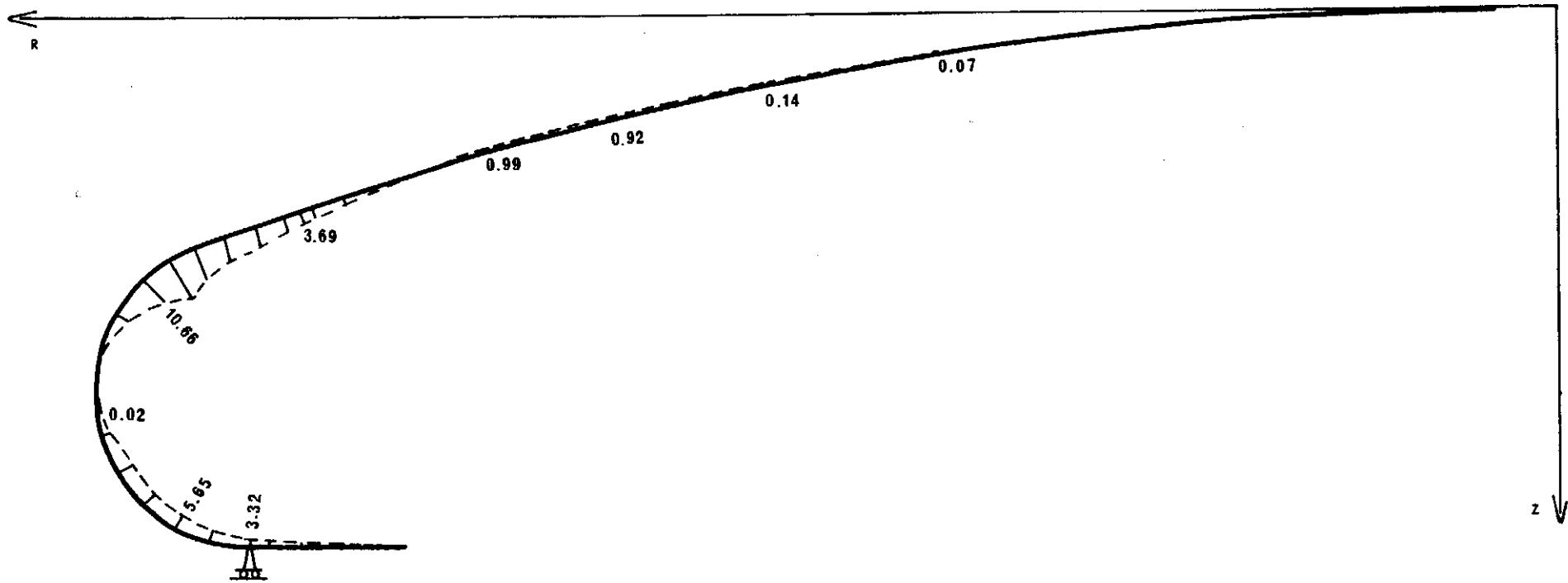


Fig. 5.19 - ESFORÇO NORMAL MERIDIONAL (1/m) - pretensão

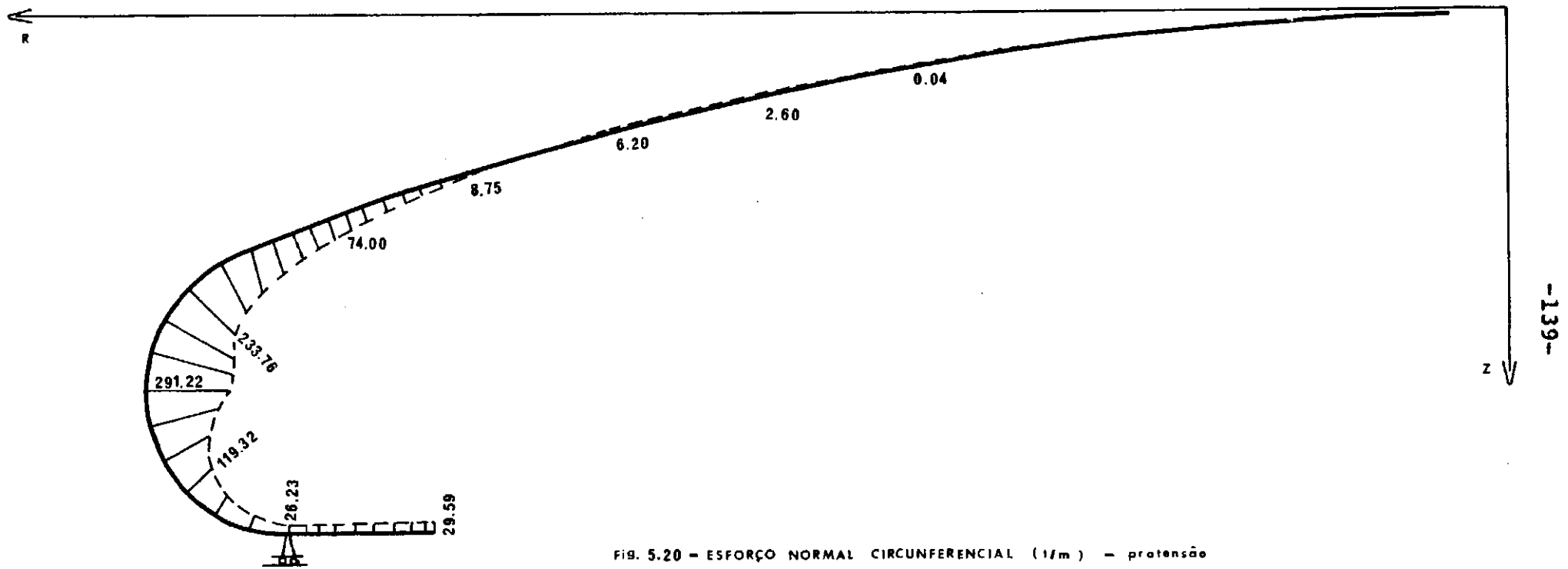


FIG. 5.20 - ESFORÇO NORMAL CIRCUNFERENCIAL (1/m) - protensão

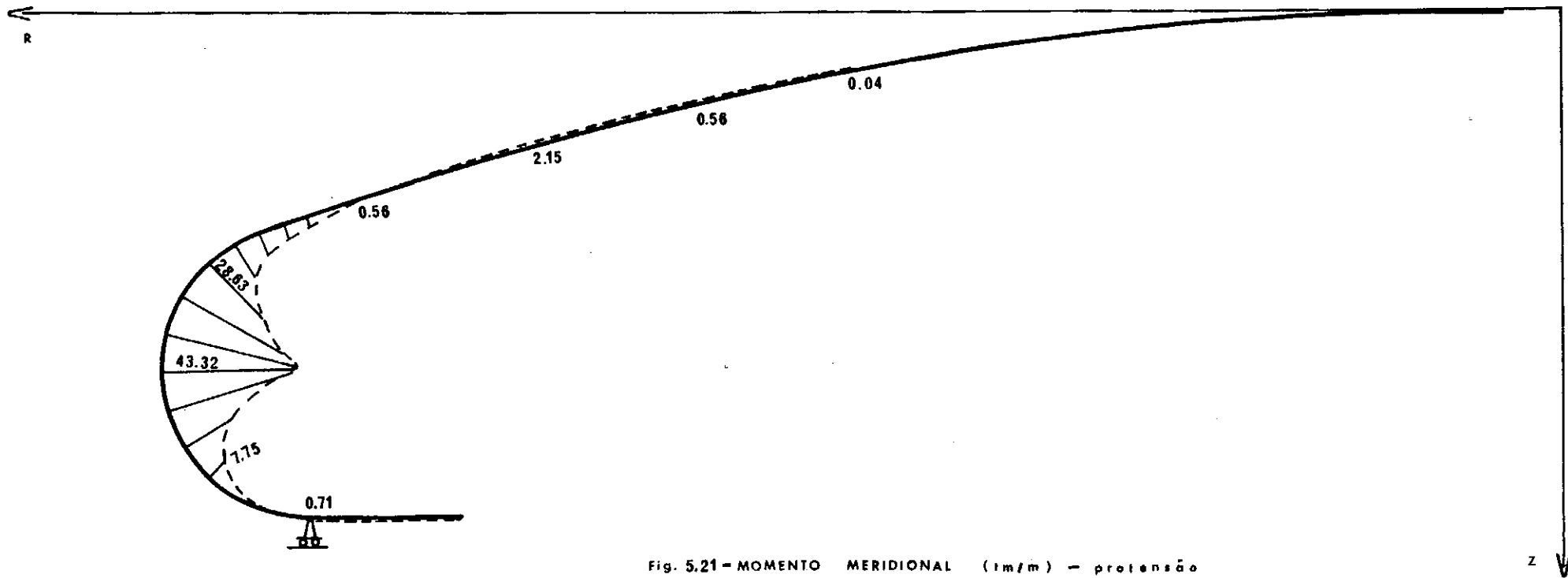


Fig. 5.21 - MOMENTO MERIDIONAL (tm/m) - protensão

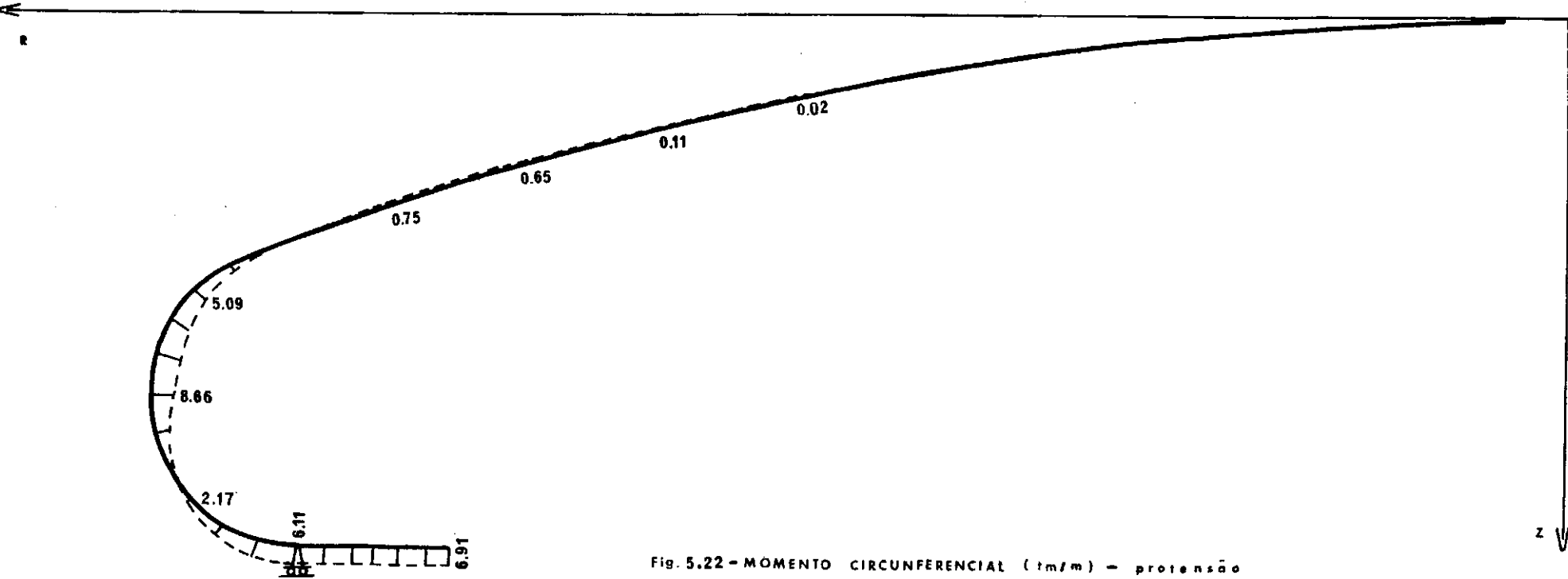


Fig. 5.22 - MÔMENTO CIRCUNFERENCIAL (tm/m) - protensão

C A P Í T U L O VI

CONCLUSÕES

Apresentam-se, neste capítulo, algumas conclusões obtidas a partir dos exemplos analisados. A generalidade dessas conclusões é questionável. Cobrir todos os casos possíveis de ocorrerem na prática é tarefa extremamente difícil, senão impossível.

1. No caso de cascas cônicas, cilíndricas, ou mesmo placas circulares, com um número reduzido de elementos, os resultados obtidos convergem rapidamente para os valores exatos.

2. Se as cascas a serem analisadas são de dupla curvatura, o uso do elemento cônico introduz uma aproximação na geometria da mesma. Neste caso é possível prever-se dois comportamentos distintos:

a) Se a casca está sujeita apenas à ação de cargas de bordo, não haverá o aparecimento de momentos residuais. Porém, próximo ao bordo carregado, é necessária a utilização de maior número de elementos, a fim de que se possa representar a grande variação dos esforços, resultantes das perturbações de bordo.

b) Se o carregamento é do tipo que produz grandes esforços de membrana, deve-se esperar a presença de momentos residuais que afastam os valores dos momentos meridionais da solução exata. De qualquer forma, estes momentos residuais tendem a desaparecer com o aumento do número de elementos utilizados, de forma que a solução converge para a exata, embora esta convergência seja lenta.

Em ambos os casos, anteriormente discutidos, a influência do efeito da aproximação da geometria da estrutura, sobre os esforços normais, é bastante reduzida.

3. A forma de consideração dos anéis de rigidez indicou uma concordância muito boa com os efeitos reais que os mesmos produzem sobre a estrutura.

4. A utilização de uma função deslocamento mais refinada levou a uma conseqüente melhora nos resultados, justificando a adoção deste elemento com um nó interno.

5. A inclusão da placa circular para coroamento das cascas fechadas melhorou os resultados que se obtiveram para os deslocamentos e esforços solicitantes na região próxima ao eixo de simetria*. Entretanto, discrepâncias nos valores calculados para o nó pertencente à placa devem ser esperadas. Ressalta-se aqui a importância do uso de um raio bastante pequeno para a placa.

6. A versatilidade deste elemento, com a possibilidade de sua aplicação a quaisquer associações de cascas, bem como os tempos de computação relativamente pequenos, constituem-se em outros fatores que depõem favoravelmente ao uso deste elemento.

Estas são as conclusões a que se chegou, mediante a análise dos resultados obtidos com o uso deste elemento. Como uma complementação do trabalho aqui desenvolvido, julga-se interessante a extensão da teoria, de forma a ser possível com este elemento, tratar-se dos casos de deformações

* Resultados desse efeito não são apresentados, já que quase todas as referências adotam este procedimento como o mais conveniente.

não simétricas, mediante o desenvolvimento dos deslocamentos em série de Fourier⁶. Também, a análise dinâmica de cascas de revolução, poderia ser incluída, bastando apenas deduzir-se a matriz de massa do elemento.

Entretanto, a crítica mais severa ao elemento reside ainda na aproximação envolvida na geometria das cascas de dupla curvatura. Aqui sim, um trabalho futuro mereceria grande interesse - o desenvolvimento de um elemento curvo para cascas axissimétricas, aproveitando-se, também as vantagens que se obtêm dessa simetria - e poderia ser feito a partir dos trabalhos das referências 10, 14, 11, 25.

Mais uma vez ressalta-se aqui um aspecto a ser observado. Ele diz respeito aos resultados a serem obtidos com o uso do programa desenvolvido neste trabalho. Uma das características do método dos elementos finitos é o seu caráter de solução aproximada. Além disso, os deslocamentos e esforços que se obtêm com o uso deste programa, correspondem aos da estrutura idealizada como um conjunto de elementos cônicos; e a partir desses resultados, deve-se julgar o funcionamento real da estrutura. Assim sendo, grande importância deve ser dada à forma de discretização da estrutura \underline{e} e isto depende muito do bom senso de cada um. Por isso mesmo, ~~os~~

exemplos aqui mostrados, as discussões apresentadas e as conclusões formuladas foram orientados de forma a estabelecer a escolha mais acertada, e indicar sob que circunstâncias os resultados obtidos serão tanto mais próximos dos exatos.

C A P Í T U L O VII
PROGRAMA ELABORADO

7.1 - Introdução

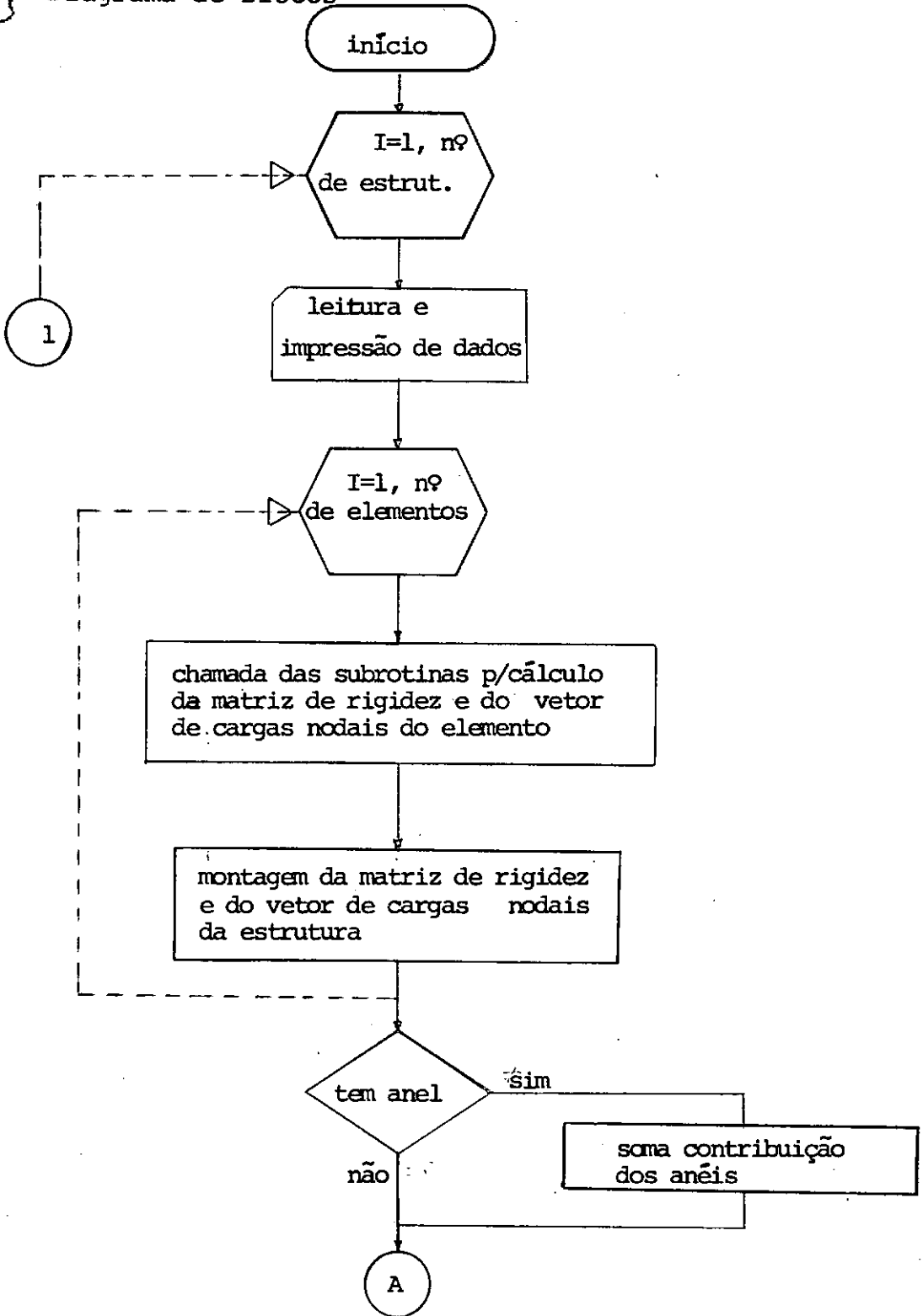
Apresenta-se neste capítulo o diagrama de blocos, bastante simplificado, do programa elaborado neste trabalho. A montagem do programa segue os padrões convencionais de outros programas elaborados na COPPE - montagem da matriz de rigidez da estrutura em banda, e resolução do sistema de equações* pelo método de Gauss.

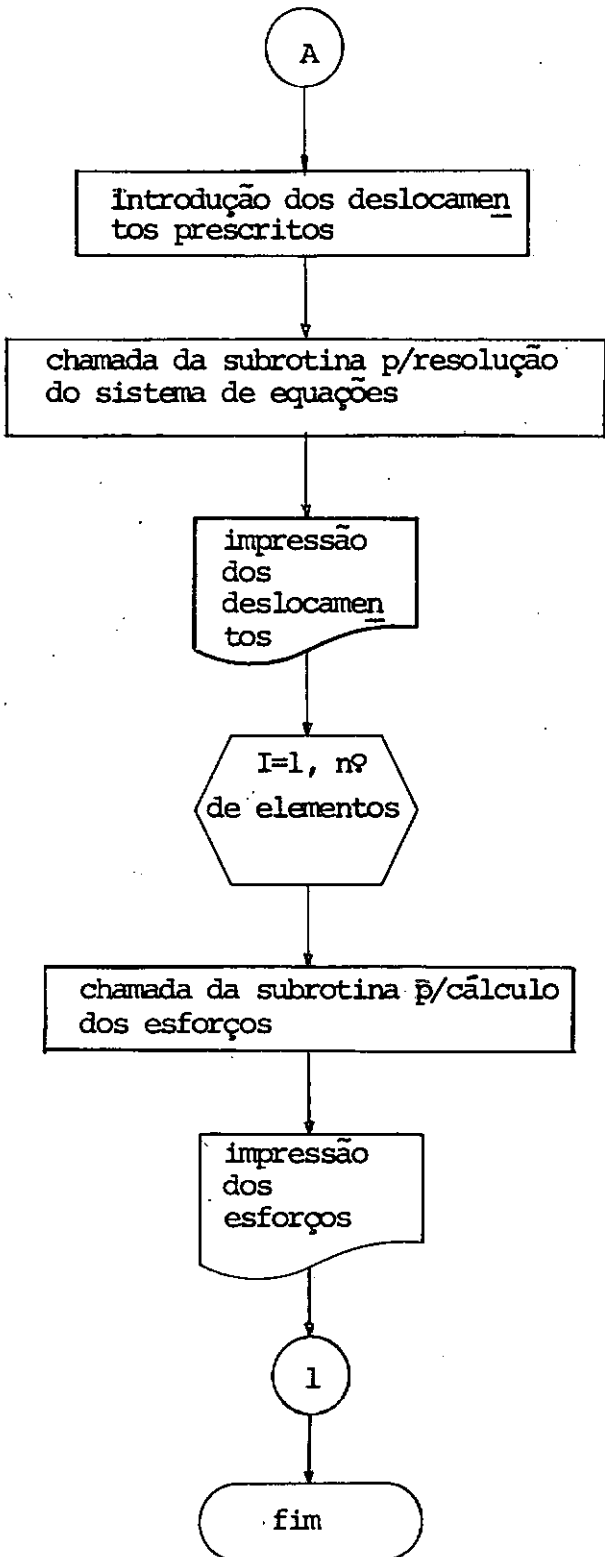
* A subrotina para resolução do sistema de equações corresponde praticamente, à desenvolvida na Ref. 25. Uma pequena modi-

A listagem referente a este programa encontra-se no apêndice, e corresponde ao programa idealizado para um computador IBM-1130 com 32K de memória. Os comentários introduzidos nesta listagem tem por finalidade indicar as distintas etapas que estão sendo realizados. Em seguida fornecem-se os significados das variáveis lidas neste programa, e o manual de entrada das mesmas.

ficção foi introduzida para possibilitar a resolução simultânea de mais de um estado de carregamento.

7.2 - Diagrama de Blocos





7.3 - Variáveis Lidas e suas Significações

- NPROB - número de estruturas a serem analisadas
- NPOIN - número de nós
- NELEM - número de elementos
- NFREE - número de graus de liberdade por nó (no caso igual a 3)
- NNOD - número de nós por elemento (no caso igual a 2)
- NBOUN - número de nós com restrições
- NCOLN - número de casos de carregamento
- NYM - número de materiais com propriedades elásticas diferentes
- NUTAN - número de anéis
- IDENS - índice que indica se existem forças de massa e se serão lidas ou geradas automaticamente
- IINC - indica se as incidências serão lidas ou geradas
- NT - índice que indica o número de trechos em que a estrutura será subdividida, para efeito de leitura ou de gerações diferentes das suas coordenadas
- NTIP() - relaciona-se com o índice anterior indicando o tipo de geração adotada, ou leitura das coordenadas, se fôr o caso

- X(J,K) - coordenadas cartesianas do nó J. (em coordenadas globais)
- K = 1 - abcissa segundo a direção R
- K = 2 - ordenada segundo a direção Z
- FI1 - ângulo central inicial do trecho da casca esférica, cujas coordenadas nodais serão geradas
- FI2 - ângulo central final
- RLI - raio da casca esférica
- DENSI(I) - peso específico do elemento I
- CENTR(I) - força centrífuga por unidade de volume, do elemento I
- NOD(I,J) - incidências do elemento I
- J = 1 - nó inicial; J = 2 nó final
- THICK(I) - espessura do elemento
- NEP(I) - grupo a que pertence as propriedades elásticas do elemento I
- NANEL() - nó a que pertence o anel
- COMPA() - comprimento do anel, medido na direção tangente ao meridiano da casca. Nos casos em que essa tangente não seja única, ou se mais de dois elementos concorrerem num mesmo anel, o comprimento deste será obrigatoriamente nulo
- XIA() - momento de inércia do anel, referido ao eixo contido no plano do anel

- AREA() - área da seção transversal
- EA() - módulo de elasticidade do material do anel
- NF() - número do nó que possui restrições
- NB(,J) - índice que indica se a direção J é ou não restringida (J=1a3)
- BV(,J) - valor do deslocamento prescrito, segundo a dire -
ção J, fornecido em coordenadas globais, (positivo,
se no sentido desses eixos)
- J=1 - deslocamento na direção do eixo Z
- J=2 - deslocamento na direção do eixo R
- J=3 - rotação
- EI(I) - módulo de elasticidade do material pertencente ao
grupo de propriedades elásticas I
- PI(I) - coeficiente de Poisson
- NCONC(J) - indica o número de nós com carga concentrada, no
carregamento J
- NECCD(J) - indica se o carregamento J tem cargas distribuídas
nos elementos
- NECFM(J) - indica se o carregamento J tem forças de massa
- U(,J) - força concentrada no nó, correspondente ao carre-
gamento J (em coordenadas globais)
- VCC(I,J) - ordenadas das componentes da carga distribuída sou
bre o elemento, nos nós inicial, final e no meio
deste elemento (em coordenadas locais)

Nº de CARTÕES	VARIÁVEIS	FORMATOS	COMENTÁRIOS
1	NPROB	I10	-
1	-	80H	Título
1	NPOIN, NELEM, NFREE, NNOD , NBOUN, NCOLN, NYM , NUTAN, IDENS, IINC	10I5	IDENS=0 - não há forças de massa IDENS=1 - leitura direta IDENS=2 - geração automática IINC =0 - geração das incidências IINC ≠0 - leitura das incidências
1	NT ,NTIP ()	8I10	NTIP ()=1 - geração das coordenadas p/as cascas de geratriz retilínea (cônicas, cilíndricas e placas circ.) NTIP ()=2 - geração para as cascas esféricas NTIP ()=3 - leitura direta

Nº de CARTÕES	VARIÁVEIS	FORMATOS	COMENTÁRIOS
NT	NTIP()=1 I,K,X(I,), X(K,)	2I10,4F10.5	lido se NTIP()=1 - lê-se: n.º inicial, n.º final, e coordenadas destes n.ºs
	NTIP()=2 I,K,FI1,FI2, X(I,)	2I10,5F10.5	lido se NTIP()=2 - lê-se: n.º inicial, n.º final, ang.central inicial, ang. final (em graus), raio, e coordenadas cartesianas do n.º inicial
	NTIP()=3 I,K	2I10	lido se NTIP()=3 - lê-se: n.º inicial, e n.º final
$\frac{K-I+1}{4}$ ou $\frac{K-I+1}{4}+1$	X(,)	8I10	leitura das coordenadas dos n.ºs I a K
NELEM	DENSI(), CENTR()	2F10.4	lidos se IDENS=1
Variável	I,K,DENSI(I), CENTR(I)	2I10,2F10.4	lidos se IDENS=2 - p/os elementos compreendidos entre os elementos I e K, os valores de DENSI() e CENTR() são constantes

Nº de CARTÕES	VARIÁVEIS	FORMATOS	COMENTÁRIOS
$\frac{NELEM}{4}$ ou $\frac{NELEM+1}{4}$	NOD(,1),NOD(,2)	8I10	Lidos se IINC \neq 0
	I,K,NOD(I,), NOD(K,)	6I10	lidos se IINC=0 - lêem-se os elementos I,K e as suas incidências. Entre estes elementos as incidências são geradas. A lei de formação das incidências p/os elementos entre I e K , deve ser a mesma e igual à destes últimos. No caso da placa adota-se incidências iguais
NELEM	I,THICK(I), NEP(I)	I10,F10.4, I10	-
NUTAN	NANEL(),COMPA(), XIA(),AREA(), EA()	I10,3F10.4 , F10.0	só serão lidos se NUTAN \neq 0

Nº de CARTÕES	VARIÁVEIS	FORMATOS	COMENTÁRIOS
NBOUN	NF (), NB (,1), NB (,2), NB (,3), BV (,1), BV (,2), BV (,3)	4I10,3F10.7	NB (,J)=0 - direção J é restringida NB (,J)≠0 - direção J não é restrin- gida
NYM	E1 (), P1 ()	F10.0, F10.8	-
1	NCONC ()	3I10	-
1	NECCD (J)	3I10	NECCD (J)=0 - não há carga distribuí- da sobre os elementos, no carregamen- to J NECCD (J)≠0 - existe carga
1	NECFM (J)	3I10	NECFM (J)=0 - não há força de massa, no carregamento J NECFM (J)≠0 - existe

Nº de CARTÕES	VARIÁVEIS	FORMATOS	COMENTÁRIOS
NCOLN*NCONC (J)	K,U (3*K-2) , U (3*K-1) , U (3*K)	I10,3F10.3	lê-se: nã carregado, força na direção Z, força na direção R, e momento. Deve-se fornecer todos os cartões referentes a um mesmo carregamento. Os carregamentos são tomados em ordem crescente
NCOLN*NECCD (J) * *NELEM	VCC (,J)	6F10.5	para cada elemento lê-se um cartão correspondente a cada carregamento J, Se p/um dado carregamento não houver forças distribuídas, nenhum cartão será dado. Os elementos são lidos em ordem sequencial

7.4 - Subrotinas Utilizadas pelo Programa

- Subrotina PLAXI - calcula a matriz de rigidez e as cargas nodais equivalentes, para a placa circular.
- Subrotina AXISI - calcula a matriz de rigidez do elemento .
Chama as subrotinas FESAX e FOMAX. Monta o vetor de cargas nodais equivalentes do elemento.
- Subrotina FESAX - calcula as cargas nodais equivalentes às forças de superfície.
- Subrotina FOMAX - calcula as cargas nodais equivalentes às forças de massa.
- Subrotina SOVAX - resolve o sistema de equação pelo método de Gauss.
- Subrotina STRAX - calcula os esforços solicitantes nos nós do elemento.

A P P E N D I C E

// FOR

*LIST SOURCE PROGRAM

*ONE WORD INTEGERS

*EXTENDED PRECISION

**

SUBROUTINE PLAXI(C,NECFM,KJ)

C

C

C

C

ESTA SUBROTINA CALCULA A MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE PLACA
PARA CORDAMENTO DAS CASCAS FECHADAS

DIMENSION C(6,6),NECFM(3)

COMMON VCC(9,4),TH,PI,F(9,9),YMI,PR1,XE(2,2),A(4,4),BS(4,9),DBS(4,
*9),DB(3,6),VAC(3),DENSI(95),CENTR(95)

COMMON IDENS,NCOLN,NCARD

DO 1 I=1,3

DO 1 J=1,3

1 C(I,J)=0.

C(2,2)=2.*PI*YMI*TH/(1.-PR1)

C(3,3)=2.*PI*YMI*TH**3/(12.*(1.-PR1))

IF(NCARD) 2,2,3

3 DO 4 I=1,NCOLN

VCC(1,I)=-VCC(2,I)*PI*XE(1,1)**2

VCC(2,I)=0.

4 VCC(3,I)=-VCC(2,I)*PI*XE(1,1)**3/4

2 DO 5 I=1,NCOLN

IF(NECFM(I)) 6,6,7

7 VCC(1,I)=VCC(1,I)+PI*DENSI(KJ)*TH*XE(1,1)**2

VCC(2,I)=0.

VCC(3,I)=VCC(3,I)+PI*DENSI(KJ)*TH*XE(1,1)**3/4.

6 CONTINUE

5 CONTINUE

RETURN

END

// DUP

*STORE WS UA PLAXI

OEC3

// FOR

*LIST SOURCE PROGRAM

*EXTENDED PRECISION

*ONE WORD INTEGERS

**

SUBROUTINE AXISI(C,NECFM,COP2,IT,KJ,NELEM)

C

C

C

C

ESTA SUBROTINA CALCULA A MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO
PARA CASCAS AXISSIMETRICAS E PLACAS CIRCULARES

DIMENSION W(5),QSI(5),S1(3,3),C(6,6),CVD(6,3),NECFM(3)

DIMENSION COP2(4),T(6,6)

COMMON VCC(9,4),TH,PI,SAX(9,9),YMI,PR1,XE(2,2),A(4,4),BS(4,9),DBS(
*4,9),DB(3,6),VAC(3),DENSI(95),CENTR(95)

COMMON IDENS,NCOLN,NCARD,K1,K2

```
C
C   DEFINICAO DAS COORDENADAS DOS NOS J - K
C
  HI=XE(1,2)
  HJ=XE(2,2)
  RI=XE(1,1)
  RJ=XE(2,1)
  COMP=((RJ-RI)**2+(HJ-HI)**2)**0.5
  SE=(RJ-RI)/COMP
  CO=(HJ-HI)/COMP
C
C   SE TEM ANEL O VETOR DE CARGAS EQUIVALENTES E' CALCULADO
C   APENAS PARA O TRECHO ELASTICO
C
  IF(IT-1) 1,2,1
1  RI=RI+COP2(3)*SE
  RJ=RJ-COP2(2)*SE
  COMP=COMP-COP2(3)-COP2(2)
2  CONTINUE
C
C   MONTAGEM DO VETOR DE CARGAS CONSISTENTES
C
  IF(NCARD) 201,201,202
C
C   SUBROTINA PARA CALCULO DAS CARGAS NODAIS EQUIVALENTES
C   AS FORÇAS DE SUPERFICIE
C
202 CALL FESAX(COMP,SE,CO,RI,RJ)
201 IF(IDENS) 303,303,302
C
C   SUBROTINA PARA CALCULO DAS CARGAS NODAIS EQUIVALENTES
C   AS FORÇAS DE MASSA
C
302 CALL FOMAX(SE,CO,COMP,RI,RJ,NECFM,KJ)
303 CONTINUE
  DO 5 I=1,9
  DO 5 J=1,9
  5 SAX(I,J)=0.
C
C   DEFINICAO DA MATRIZ DE ELASTICIDADE ISOTROPICO
C
  DO 6 I=1,4
  DO 6 J=1,4
6  A(I,J)=0.
  GG=TH/(1.-PR1**2)
  A(1,1)=YM1*GG
  A(2,2)=A(1,1)
  A(1,2)=PR1*A(2,2)
  A(3,3)=YM1*GG*TH**2/12.
  A(4,4)=A(3,3)
```

```
A(3,4)=PR1*A(4,4)
A(2,1)=A(1,2)
A(4,3)=A(3,4)
DO 100 I=1,3
DO 100 J=1,3
100 S1(I,J)=0.
S1(1,1)=CO
S1(1,2)=SE
S1(2,1)=-SE
S1(2,2)=CO
S1(3,3)=1.
```

C
C
C

DEFINICAO DA MATRIZ B* E INTEGRACAO NUMERICA - 5 PONTOS

```
W(1)=0.236926885056189
W(2)=W(1)
W(3)=0.478628670499366
W(4)=W(3)
W(5)=0.5688888888888889
QSI(1)=0.906179845938664/2.
QSI(2)=-QSI(1)
QSI(3)=0.538469310105683/2.
QSI(4)=-QSI(3)
QSI(5)=0.0000000000000000
DO 50 L=1,5
Q1=QSI(L)
Q2=QSI(L)**2
Q3=QSI(L)**3
Q4=QSI(L)**4
Q5=QSI(L)**5
R=(RI+RJ)/2.+Q1*(RJ-RI)
DO 101 I=1,4
DO 101 J=1,9
101 DBS(I,J)=0.
DBS(1,1)=(4.*Q1-1.)/COMP
DBS(2,1)=2.*Q1*(Q1-0.5)*SE/R
DBS(2,2)=(4.*Q2-10.*Q3-8.*Q4+24.*Q5)*CO/R
DBS(2,3)=(0.5*Q2-Q3-2.*Q4+4.*Q5)*CO*COMP/R
DBS(3,2)=(8.-60.*Q1-96.*Q2+480.*Q3)/COMP**2
DBS(3,3)=(1.-6.*Q1-24.*Q2+80.*Q3)/COMP
DBS(4,2)=(8.*Q1-30.*Q2-32.*Q3+120.*Q4)*SE/(COMP*R)
DBS(4,3)=(Q1-3.*Q2-8.*Q3+20.*Q4)*SE/R
DBS(1,4)=(4.*Q1+1.)/COMP
DBS(2,4)=2.*Q1*(Q1+0.5)*SE/R
DBS(2,5)=(4.*Q2+10.*Q3-8.*Q4-24.*Q5)*CO/R
DBS(2,6)=(-0.5*Q2-Q3+2.*Q4+4.*Q5)*CO*COMP/R
DBS(3,5)=(8.+60.*Q1-96.*Q2-480.*Q3)/COMP**2
DBS(3,6)=(-1.-6.*Q1+24.*Q2+80.*Q3)/COMP
DBS(4,5)=(8.*Q1+30.*Q2-32.*Q3-120.*Q4)*SE/(COMP*R)
DBS(4,6)=(-Q1-3.*Q2+8.*Q3+20.*Q4)*SE/R
```

```
DBS(1,7)=-8.*Q1/COMP
DBS(2,7)=(1.-4.*Q2)*SE/R
DBS(2,8)=((1.-4.*Q2)**2)*CO/R
DBS(2,9)=Q1*((1.-4.*Q2)**2)*CO*COMP/R
DBS(3,8)=-(1.-12.*Q2)*16./(COMP**2)
DBS(3,9)=-Q1*(3.-20.*Q2)*16./COMP
DBS(4,8)=-Q1*(1.-4.*Q2)*16.*SE/(COMP*R)
DBS(4,9)=(1.-24.*Q2+80.*Q4)*SE/R
```

C
C
C

DEFINICAO DA MATRIZ B

```
DO 102 I=1,4
DO 102 J=1,3
BS(I,J)=0.
BS(I,J+3)=0.
BS(I,J+6)=0.
DO 102 K=1,3
BS(I,J)=BS(I,J)+DBS(I,K)*S1(K,J)
BS(I,J+3)=BS(I,J+3)+DBS(I,K+3)*S1(K,J)
102 BS(I,J+6)=BS(I,J+6)+DBS(I,K+6)*S1(K,J)
```

C
C
C

PRODUTO DAS MATRIZES E * B

```
DO 20 I=1,4
DO 20 J=1,9
DBS(I,J)=0.
DO 20 K=1,4
20 DBS(I,J)=DBS(I,J)+A(I,K)*BS(K,J)
CONST=W(L)*P1#R*COMP
```

C
C
C

MATRIZ DE RIGIDEZ NAO CONDENSADA

```
DO 35 I=1,9
DO 35 J=1,9
DO 35 K=1,4
35 SAX(I,J)=SAX(I,J)+BS(K,I)*DBS(K,J)*CONST
50 CONTINUE
```

C
C
C

CONDENSACAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ E DO VETOR DE CARGA

```
DET=1./((SAX(7,7)*SAX(8,8)*SAX(9,9)+2*SAX(7,8)*SAX(8,9)*SAX(7,9)-SAX(7,9)**2*SAX(8,8)-SAX(7,8)**2*SAX(9,9)-SAX(8,9)**2*SAX(7,7))
S1(1,1)=-((SAX(8,8)*SAX(9,9)-SAX(8,9)**2)*DET
S1(1,2)=(SAX(7,8)*SAX(9,9)-SAX(8,9)*SAX(7,9))*DET
S1(1,3)=-((SAX(7,8)*SAX(8,9)-SAX(8,8)*SAX(7,9))*DET
S1(2,2)=-((SAX(7,7)*SAX(9,9)-SAX(7,9)**2)*DET
S1(2,3)=(SAX(7,7)*SAX(8,9)-SAX(7,8)*SAX(7,9))*DET
S1(3,3)=-((SAX(7,7)*SAX(8,8)-SAX(7,8)**2)*DET
S1(2,1)=S1(1,2)
S1(3,1)=S1(1,3)
```

```
S1(3,2)=S1(2,3)
IF(NCARD) 212,212,209
212 IF(IDENS) 208,208,209
209 DO 210 J=1,NCOLN
    DO 211 I=1,3
    VAC(I)=0.
    DO 211 L=1,3
211 VAC(I)= VAC(I)-S1(I,L)*VCC(L+6,J)
210 WRITE(12*K2) (VAC(I),I=1,3)
    DO 71 I=1,6
    DO 71 J=1,3
    CVD(I,J)=0.
    DO 71 L=1,3
71 CVD(I,J)=CVD(I,J)+SAX(I,L+6)*S1(L,J)
    DO 72 I=1,6
    DO 72 J=1,NCOLN
    C(I,J)=0.
    DO 73 L=1,3
73 C(I,J)=C(I,J)+CVD(I,L)*VCC(L+6,J)
72 VCC(I,J)=VCC(I,J)+C(I,J)
208 CONTINUE
    DO 55 I=1,3
    DO 55 J=1,6
    DB(I,J)=0.
    DO 55 K=1,3
55 DB(I,J)=DB(I,J)+S1(I,K)*SAX(K+6,J)
    WRITE(11*K1) ((DB(I,J),I=1,3),J=1,6)
    DO 60 I=1,6
    DO 60 J=1,6
    C(I,J)=0.
    DO 61 K=1,3
61 C(I,J)=C(I,J)+SAX(I,K+6)*DB(K,J)
60 C(I,J)=SAX(I,J)+C(I,J)
```

C
C INFLUENCIA DO ANEL COMO TRECHO RIGIDO
C

```
IF(IT-1) 51,51,52
52 DO 53 I=1,6
    DO 53 J=1,6
53 T(I,J)=0.
    DO 54 K=1,6
54 T(K,K)=1.
    DO 56 I=1,2
    T(3*I,3*I-2)=COP2(I)*SE
56 T(3*I,3*I-1)=COP2(I+2)*CO
```

C
C TRANSFORMACAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ
C

```
DO 57 I=1,6
DO 57 J=1,6
```

```

SAX(I,J)=0.
DO 57 L=1,6
57 SAX(I,J)=SAX(I,J)+C(I,L)*T(J,L)
DO 58 I=1,6
DO 58 J=1,6
C(I,J)=0.
DO 58 L=1,6
58 C(I,J)=C(I,J)+T(I,L)*SAX(L,J)

```

C
C TRANSFORMACAO DO VETOR DE CARGA CONSISTENTE
C

```

IF(NCARD) 59,59,62
59 IF(IDENS) 51,51,62
62 DO 63 I=1,6
DO 63 J=1,NCOLN
SAX(I,J)=0.
DO 63 L=1,6
63 SAX(I,J)=SAX(I,J)+T(I,L)*VCC(L,J)
DO 64 J=1,NCOLN
DO 64 I=1,6
64 VCC(I,J)=SAX(I,J)
51 CONTINUE
RETURN
END

```

// DUP
*STORE WS UA AXISI OEC3
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
*ONE WORD INTEGERS
**

SUBROUTINE FESAX(C,SE,CO,RI,RJ)

C
C ESTA SUBROTINA CALCULA O VETOR DE CARGAS NODAIS EQUIVALENTES
C AS FORCAS DE SUPERFICIE
C

```

DIMENSION VCL(9,4)
COMMON VCC(9,4),TH,PI,F(9,9),YMI,PR1,XE(2,2),A(4,4),BS(4,9),DBS(4,
*9),DB(3,6),VAC(3),DENSI(95),CENTR(95)
COMMON IDENS,NCOLN,NCARD
DO 10 I=1,9
DO 10 J=1,6
10 F(I,J)=0.
F(1,1)=147.*RI+21.*RJ
F(1,3)=-21.*(RI+RJ)
F(1,5)=84.*RI
F(2,2)=156.*RI+15.*RJ
F(2,4)=-15.*RI+6.*RJ
F(2,6)=96.*RI+36.*RJ
F(3,2)=(8.*RI+RJ)*C

```



```
F(3,4)=(RJ-RI)*C
F(3,6)=(8.*RI+4.*RJ)*C
F(4,1)=F(1,3)
F(4,3)=21.*RI+147.*RJ
F(4,5)=84.*RJ
F(5,2)=6.*RI-15.*RJ
F(5,4)=15.*RI+156.*RJ
F(5,6)=36.*RI+96.*RJ
F(6,2)=F(3,4)
F(6,4)=-(RI+8.*RJ)*C
F(6,6)=-(4.*RI+8.*RJ)*C
F(7,1)=F(1,5)
F(7,3)=F(4,5)
F(7,5)=336.*(RI+RJ)
F(8,2)=48.*RI
F(8,4)=48.*RJ
F(8,6)=288.*(RI+RJ)
F(9,2)=-(16.*RI+8.*RJ)*C
F(9,4)=(8.*RI+16.*RJ)*C
F(9,6)=16.*(RJ-RI)*C
CONST=PI*C/630.
DO 15 I=1,9
DO 15 J=1,6
15 F(I,J)=F(I,J)*CONST
DO 20 I=1,9
DO 20 J=1,NCOLN-
VCL(I,J)=0.
DO 20 L=1,6
20 VCL(I,J)=VCL(I,J)+F(I,L)*VCC(L,J)
DO 30 I=1,9
DO 30 J=1,9
30 F(I,J)=0.
F(1,1)=CO
F(1,2)=-SE
F(2,1)=SE
F(2,2)=CO
F(3,3)=1.
DO 35 I=1,3
DO 35 J=1,3
F(I+3,J+3)=F(I,J)
35 F(I+6,J+6)=F(I,J)
DO 40 I=1,9
DO 40 J=1,NCOLN
VCC(I,J)=0.
DO 40 L=1,9
40 VCC(I,J)=VCC(I,J)+F(I,L)*VCL(L,J)
RETURN
END
```

// FOR

#LIST SOURCE PROGRAM

*EXTENDED PRECISION

*ONE WORD INTEGERS

**

SUBROUTINE FOMAX(SE,CO,C,RI,RJ,NECFM,KJ)

C

C

C

C

ESTA SUBROTINA CALCULA O VETOR DE CARGAS NODAIS EQUIVALENTES
AS FORÇAS DE MASSA

DIMENSION FP(2),NECFM(3)

COMMON VCC(9,4),TH,PI,FM(9,9),YM1,PR1,XE(2,2),A(4,4),BS(4,9),DBS(4
*,9),DB(3,6),VAC(3),DENSI(95),CENTR(95)

COMMON IDENS,NCOLN

FM(1,1)=70.*RI*CO

FM(1,2)=-(79.*RI+19.*RJ)*SE

FM(2,1)=70.*RI*SE

FM(2,2)=(79.*RI+19.*RJ)*CO

FM(3,1)=0.

FM(3,2)=(5.*RI+2.*RJ)*C

FM(4,1)=70.*RJ*CO

FM(4,2)=-(79.*RJ+19.*RI)*SE

FM(5,1)=70.*RJ*SE

FM(5,2)=(79.*RJ+19.*RI)*CO

FM(6,1)=0.

FM(6,2)=-(5.*RJ+2.*RI)*C

FM(7,1)=140.*(RI+RJ)*CO

FM(7,2)=-112.*(RI+RJ)*SE

FM(8,1)=140.*(RI+RJ)*SE

FM(8,2)=112.*(RI+RJ)*CO

FM(9,1)=0.

FM(9,2)=8.*(RJ-RI)*C

CONST=PI*TH*C/210.

DO 5 I=1,9

DO 5 J=1,2

5 FM(I,J)=FM(I,J)*CONST

FP(1)=DENSI(KJ)*CO+CENTR(KJ)*SE

FP(2)=-DENSI(KJ)*SE+CENTR(KJ)*CO

DO 20 J=1,NCOLN

IF(NECFM(J)) 21,21,22

22 DO 10 I=1,9

DO 10 L=1,2

10 VCC(I,J)=VCC(I,J)+FM(I,L)*FP(L)

21 CONTINUE

20 CONTINUE

RETURN

END

// DUP

*STORE

// FOR

WS UA FOMAX.

OEC3

```
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
**
```

```
      SUBROUTINE SOVAX(A,B,N,M,NCOLN)
```

```
C
C  ESTA SUBROTINA RESOLVE UM SISTEMA DE EQUACOES
C  COM MATRIZ DE COEFICIENTES BANDA - N * M
C  JACK LOPEZ A.
C
```

```
      DIMENSION A(285,12),B(285,3)
      NM1=N-1
      DO 3 I=1,NM1
      DO 3 J=2,M
      II=I+J-1
      IF(II-N)1,1,3
1  F=-A(I,J)/A(I,1)
      DO 6 K=1,NCOLN
6  B(II,K)=B(II,K)+F*B(I,K)
      MJ1=M-J+1
      DO 2 K=1,MJ1
      L=K+J-1
2  A(II,K)=A(II,K)+F*A(I,L)
3  CONTINUE
      DO 7 NC=1,NCOLN
      B(N,NC)=B(N,NC)/A(N,1)
      DO 5 L=2,N
      I=N-L+1
      DO 4 K=2,M
      IK1=I+K-1
      IF(IK1-N)4,4,5
4  B(I,NC)=B(I,NC)-A(I,K)*B(IK1,NC)
5  B(I,NC)=B(I,NC)/A(I,1)
7  CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
// DUP
*STORE      WS  UA  SOVAX      OEC3
// FOR
```

```
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
*ONE WORD INTEGERS
**
```

```
      SUBROUTINE STRAX(DEL,COP2,IT,KC,LL,NTEN,JJ1,JJ2)
```

```
C
C  ESTA SUBROTINA CALCULA OS ESFORCOS SOLICITANTES
C  NOS NOS DA ESTRUTURA
C
```

```
      DIMENSION DEL(6),COP2(4),DEL1(6),QSIT(2),DBC(4,6),TEN(4)
      COMMON VCC(9,4),TH,P1,T(9,9),YM1,PR1,XE(2,2),EL(4,4),BS(4,9),DBS(4
```

```
* ,9),DB(3,6),VAC(3),DENSI(95),CENTR(95)  
COMMON IDENS,NCOLN,NCARD,K1,K2
```

```
C  
C ELEMENTO PLACA - OS ESFORCOS NAO SAO CALCULADOS  
C
```

```
IF(JJ2-JJ1) 10,2,10  
2 NTEN=NTEN-1  
GO TO 60
```

```
C  
C DEFINICAO DA MATRIZ DE ELASTICIDADE  
C
```

```
10 DO 5 I=1,4  
DO 5 J=1,4  
5 EL(I,J)=0.  
GG=TH/(1.-PR1**2)  
EL(1,1)=YM1*GG  
EL(2,2)=EL(1,1)  
EL(1,2)=PR1*EL(2,2)  
EL(3,3)=(YM1*GG*TH**2)/12.  
EL(4,4)=EL(3,3)  
EL(3,4)=PR1*EL(4,4)  
EL(2,1)=EL(1,2)  
EL(4,3)=EL(3,4)
```

```
C  
C DEFINICAO DAS COORDENADAS DOS NOS J - K  
C
```

```
HI=XE(1,2)  
HJ=XE(2,2)  
RI=XE(1,1)  
RJ=XE(2,1)  
COMP=((RJ-RI)**2+(HJ-HI)**2)**0.5  
SE=(RJ-RI)/COMP  
CO=(HJ-HI)/COMP  
READ(11*K1) ((DB(LL,M1),LL=1,3),MI=1,6)  
IF(NCARD) 8,8,12  
8 IF(IDENS) 11,11,12  
12 K2=KC+NCOLN*(LL-1+NTEN)  
READ(12*K2) (VAC(I),I=1,3)  
GO TO 13  
11 DO 14 I=1,3  
14 VAC(I)=0.  
13 CONTINUE
```

```
C  
C TENDO ANEL OS ESFORCOS SAO CALCULADOS NA UNIAO DA CASCA COM O ANEL  
C
```

```
IF(IT-1) 61,61,62  
62 RI=RI+COP2(3)*SE  
RJ=RJ-COP2(2)*SE  
COMP=COMP-COP2(3)-COP2(2)  
DO 63 I=1,6
```

```

DO 63 J=1,6
63 T(1,J)=0.
DO 64 K=1,6
64 T(K,K)=1.
DO 66 I=1,2
T(3*I,3*I-2)=COP2(I)*SE
66 T(3*I,3*I-1)=COP2(I+2)*CO

```

C
C
C
MODIFICACAO DOS DESLOCAMENTOS

```

DO 67 J=1,6
DEL1(J)=0.
DO 67 I=1,6
67 DEL1(J)=DEL1(J)+T(I,J)*DEL(I)
DO 68 I=1,6
68 DEL(I)=DEL1(I)
61 CONTINUE

```

```

QSIT(1)=-0.50000000
QSIT(2)=0.50000000
DO 100 I=1,9
DO 100 J=1,9

```

```

100 T(I,J)=0.
T(1,1)=CO
T(1,2)=SE
T(2,1)=-SE
T(2,2)=CO
T(3,3)=1.
DO 104 I=1,3
DO 104 J=1,3
T(I+3,J+3)=T(I,J)

```

```

104 T(I+6,J+6)=T(I,J)
DO 50 K=1,2
Q1=QSIT(K)
Q2=QSIT(K)**2
Q3=QSIT(K)**3
Q4=QSIT(K)**4
Q5=QSIT(K)**5
R=(RI+RJ)/2.+Q1*(RJ-RI)
DO 101 I=1,4
DO 101 J=1,9
101 DBS(I,J)=0.

```

C
C
C
DEFINICAO DA MATRIZ B*

```

DBS(1,1)=(4.*Q1-1.)/COMP
DBS(2,1)=2.*Q1*(Q1-0.5)*SE/R
DBS(2,2)=(4.*Q2-10.*Q3-8.*Q4+24.*Q5)*CO/R
DBS(2,3)=(0.5*Q2-Q3-2.*Q4+4.*Q5)*CO*COMP/R
DBS(3,2)=(8.-60.*Q1-96.*Q2+480.*Q3)/COMP**2
DBS(3,3)=(1.-6.*Q1-24.*Q2+80.*Q3)/COMP

```

```
DBS(4,2)=(8.*Q1-30.*Q2-32.*Q3+120.*Q4)*SE/(COMP*R)  
DBS(4,3)=(Q1-3.*Q2-8.*Q3+20.*Q4)*SE/R  
DBS(1,4)=(4.*Q1+1.)/COMP  
DBS(2,4)=2.*Q1*(Q1+0.5)*SE/R  
DBS(2,5)=(4.*Q2+10.*Q3-8.*Q4-24.*Q5)*CO/R  
DBS(2,6)=(-0.5*Q2-Q3+2.*Q4+4.*Q5)*CO*COMP/R  
DBS(3,5)=(8.+60.*Q1-96.*Q2-480.*Q3)/COMP**2  
DBS(3,6)=(-1.-6.*Q1+24.*Q2+80.*Q3)/COMP  
DBS(4,5)=(8.*Q1+30.*Q2-32.*Q3-120.*Q4)*SE/(COMP*R)  
DBS(4,6)=(-Q1-3.*Q2+8.*Q3+20.*Q4)*SE/R  
DBS(1,7)=-8.*Q1/COMP  
DBS(2,7)=(1.-4.*Q2)*SE/R  
DBS(2,8)=((1.-4.*Q2)**2)*CO/R  
DBS(2,9)=Q1*((1.-4.*Q2)**2)*CO*COMP/R  
DBS(3,8)=-((1.-12.*Q2)*16.)/(COMP**2)  
DBS(3,9)=-Q1*(3.-20.*Q2)*16./COMP  
DBS(4,8)=-Q1*(1.-4.*Q2)*16.*SE/(COMP*R)  
DBS(4,9)=(1.-24.*Q2+80.*Q4)*SE/R  
DO 102 I=1,4  
CO 102 J=1,9  
BS(I,J)=0.  
DO 102 L=1,9  
102 BS(I,J)=BS(I,J)+DBS(I,L)*T(L,J)
```

C
C
C
PRODUTO DAS MATRIZES E * B

```
DO 20 I=1,4  
DO 20 J=1,9  
DBS(I,J)=0.  
DO 20 L=1,4  
20 DBS(I,J)=DBS(I,J)+EL(I,L)*BS(L,J)
```

C
C
C
MODIFICACAO DA MATRIZ (E * B)

```
DO 25 I=1,4  
DO 25 J=1,6  
DBC(I,J)=0.  
DO 25 L=1,3  
25 DBC(I,J)=DBC(I,J)+DBS(I,L+6)*DB(L,J)  
DO 30 I=1,4  
DO 30 J=1,6  
30 DBC(I,J)=DBS(I,J)+DBC(I,J)
```

C
C
C
CALCULO DOS ESFORÇOS NOS NOS DA ESTRUTURA

```
DO 33 I=1,4  
TEN(I)=0.  
DO 33 J=1,3  
33 TEN(I)=TEN(I)+DBS(I,J+6)*VAC(J)  
DO 35 I=1,4
```

```
DO 35 J=1,6
35 TEN(I)=TEN(I)+DBC(I,J)*DEL(J)
   IF(K-1) 41,41,42
41 JJ=JJ1
   GO TO (43,82,43,82),IT
42 JJ=JJ2
   GO TO (43,43,83,83),IT
82 KPN=2
   GO TO 84
83 KPN=1
84 WRITE(5,4) KC,LL,JJ,KPN,(TEN(I),I=1,4)
   4 FORMAT(4X,12,5X,13,5X,13,2X,12,5X,E15.7,3(9X,E15.7))
   GO TO 50
43 WRITE(5,1) KC,LL,JJ,(TEN(I),I=1,4)
   1 FORMAT(4X,12,5X,13,5X,13,4(9X,E15.7))
50 CONTINUE
60 CONTINUE
   RETURN
   END
```

```
// DUP
*STORE      WS  UA  STRAX      OEC3
```

```
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(2501READER,1403PRINTER,DISK)
```

```
**
DIMENSION X(95,2),NOD(95,2),NEP(95),THICK(95),E1(10),P1(10)
DIMENSION NCONC(3),NECCD(3),NECFM(3),U(285,3)
DIMENSION DEL(6),C(6,6),S(285,12)
DIMENSION NANEL(15),COMPA(15),XIA(15),AREA(15),EA(15),COP2(4)
DIMENSION NF(15),NB(15,3),BV(15,3)
DIMENSION DELC(2),NTIP(7),COAN(3)
COMMON VCC(9,4),TH,PI,T(9,9),YM1,PR1,XE(2,2),EL(4,4),BS(4,9),DBS(4
*,9),DB(3,6),VAC(3),DENSI(95),CENTR(95)
COMMON IDENS,NCOLN,NCARD,K1,K2
DEFINE FILE 11(100,54,U,K1),12(400,9,U,K2)
```

```
C
C ESTE PROGRAMA ANALISA CASCAS AXISSIMETRICAS E PLACAS CIRCULARES
C SUBMETIDAS A CARREGAMENTO DE REVOLUCAO
```

```
C
C
C
10 READ(8,10) NPROB
   FORMAT(I10)
   DO 20 LA=1,NPROB
     K1=1
     K2=1
```

```
C
C LARGURA MAXIMA DE BANDA ADOTADA - LB=12
C
LB=12
```

PI=3.141592653589793

C
C
C

LEITURA E IMPRESSAO DOS DADOS

WRITE(5,1)

1 FORMAT('1',18X,80('*')/,19X,'*',78X,'*'/,19X,'*',16X,'PROGRAMA PAR
A ANALISE DE CASCAS AXISSIMETRICAS',16X,''/,19X,'*',78X,'*'/,19X,
'',78X,'*'/,19X,'*',25X,'METODO DOS ELEMENTOS FINITOS',25X,'*'/,1
9X,'',78X,'*'/,19X,'*',78X,'*'/,19X,'*',30X,'COPPE/UFRJ - 1972',3
1X,''/,19X,'*',78X,'*'/,19X,'*',78X,'*'/,19X,'*',26X,'AUGUSTO CES
AR N. R. GALEAO',26X,''/,19X,'*',78X,'*'/,19X,80('*'),////////)

WRITE(5,1000) LA

1000 FORMAT(///20X,'PROBLEMA N.=',I3)

WRITE(5,2)

2 FORMAT(///20X,'CARACTERISTICAS GERAIS DO PROBLEMA'////)

READ(8,1001)

1001 FORMAT(80H

*

WRITE(5,1001)

READ(8,1002) NPOIN,NELEM,NFREE,NNOD,NBOUN,NCOLN,NYM,NUTAN,IDENS,
*IINC

1002 FORMAT(10I5)

WRITE(5,1003) NPOIN,NFREE,NELEM,NNOD,NUTAN,NBOUN,NYM,NCOLN

1003 FORMAT(//' NUM. DE NOS',7X,'=',I3,24X,'NUM. DE GRAUS DE LIBERDADE

* POR NO =',I3,/' NUM. DE ELEMENTOS =',I3,24X,'NUM. DE NOS POR ELE

* MENTO',10X,'=',I3,/' NUM. DE ANEIS =',I3,24X,'NUM. DE NOS COM

* DESL. PRESCRITOS =',I3,/' NUM. DE MATERIAIS =',I3,24X,'NUM. TOT

*AL DE CARREGAMENTOS',7X,'=',I3,//)

C
C
C

GERACAO AUTOMATICA OU LEITURA DAS COORDENADAS DOS NOS

READ(8,1999) NT,(NTIP(NP),NP=1,NT)

1999 FORMAT(8I10)

WRITE(5,1005) IDENS,IINC,NT,(NTIP(NP),NP=1,NT)

1005 FORMAT(20X,'INDICES DE CONTROLE - IDENS=',I2,5X,'IINC=',I2,5X,'N

*I=',I2,5X,'NTIP=',I7I3)

DO 520 NP=1,NT

IF(NTIP(NP)-2) 508,509,510

508 READ(8,2000) I,K,(X(I,J),J=1,2),(X(K,J),J=1,2)

2000 FORMAT(2I10,4F10.5)

DELTA=K-I

DO 511 J=1,2

511 DELC(J)=(X(K,J)-X(I,J))/DELTA

M=K-2

DO 512 L=1,M

DO 512 J=1,2

512 X(L+1,J)=X(L,J)+DELC(J)

GO TO 521

509 READ(8,2001) I,K,F11,F12,RL1,(X(I,J),J=1,2)

2001 FORMAT(2I10,5F10.5)


```
DELTA=K-I
DELFI=(FI2-FI1)/DELTA
M=K-1
DO 514 L=I,M
FI1=FI1+DELFI
X(L+1,1)=RLI*SIN(PI*FI1/180.)
514 X(L+1,2)=X(I,2)+(RLI**2-X(I,1)**2)**0.5-RLI*COS(PI*FI1/180.)
GO TO 521
510 READ(8,2002) I,K
2002 FORMAT(2I10)
READ(8,2003) (X(L,1),X(L,2),L=I,K)
2003 FORMAT(8F10.5)
521 CONTINUE
520 CONTINUE
WRITE(5,1007)
1007 FORMAT(///20X,'COORDENADAS DOS NOS'///)
WRITE(5,1008)
1008 FORMAT(' NO',7X,'COORD.-R',7X,'COORD.-Z')
DO 111 I=1,NPOIN
WRITE(5,1009) I,X(I,1),X(I,2)
1009 FORMAT(1X,I3,2(4X,F11.5))
111 CONTINUE
```

C
C
C

GERACAO AUTOMATICA OU LEITURA DAS FORÇAS DE MASSA POR-ELEMENTO

```
IF(IDENS-1) 300,301,302
301 DO 303 I=1,NELEM
READ(8,2005) DENSI(I),CENTR(I)
2005 FORMAT(2F10.4)
303 CONTINUE
GO TO 405
302 READ(8,2006) I,K,DENSI(I),CENTR(I)
2006 FORMAT(2I10,2F10.4)
M=K-1
DO 304 J=I,M
DENSI(J+1)=DENSI(J)
304 CENTR(J+1)=CENTR(J)
IF(NELEM-K) 302,405,302
300 CONTINUE
```

G
C
C

GERACAO AUTOMATICA OU LEITURA DAS INCIDENCIAS DOS ELEMENTOS

```
IF(IINC) 405,405,404
404 READ(8,1004) (NOD(I,1),NOD(I,2),I=1,NELEM)
1004 FORMAT(8I10)
GO TO 409
C
405 READ(8,1017) I,K,(NOD(I,J),NOD(K,J),J=1,2)
1017 FORMAT(6I10)
KNEL=K-2
```

```
KNOD=NOD(I,2)-NOD(I,1)
IF(KNOD) 406,408,406
406 DO 407 J=1,KNEL
DO 407 L=1,2
407 NOD(J+1,L)=NOD(J,L)+KNOD
408 IF(NELEM-K) 409,409,405
409 CONTINUE

C
C LEITURA DAS ESPESSURAS DOS ELEMENTOS E GRUPOS A QUE PERTENCEM
C
DO 40 IB=1,NELEM
READ(8,43) I,THICK(I),NEP(I)
43 FORMAT(I10,F10.4,I10)
40 CONTINUE
WRITE(5,1010)
1010 FORMAT(///20X,'INCIDENCIAS E PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS'///' ELEM.
*','6X,'MAT.','9X,'INCIDENCIAS',12X,'ESPE.','15X,'FORCAS DE MASSA'//,2
*2X,'NO INI.','3X,'NO FIN.','26X,'P.ESPEC.','7X,'F.CENTR. ')
DO 120 I=1,NELEM
IF(IDENS) 140,140,141
141 WRITE(5,1011) I,NEP(I),NOD(I,1),NOD(I,2),THICK(I),DENS(I),CENTR(I
*)
1011 FORMAT(3X,I3,8X,I2,10X,I3,7X,I3,5X,F10.4,9X,F10.4,5X,F10.4)
GO TO 142
140 WRITE(5,1011) I,NEP(I),NOD(I,1),NOD(I,2),THICK(I)
142 CONTINUE
120 CONTINUE

C
C LEITURA DAS CARACTERISTICAS DOS ANEIS
C
IF(NUTAN) 128,128,129
129 DO 130 IA=1,NUTAN
READ(8,1031) NANEL(IA),COMPA(IA),XIA(IA),AREA(IA),EA(IA)
1031 FORMAT(I10,3F10.4,F10.0)
130 CONTINUE
WRITE(5,1033)
1033 FORMAT(///20X,'CARACTERISTICAS DOS ANEIS',///' ANEL',6X,'NO',9X,'C
*OMP.','5X,'M.INERCIA',10X,'AREA',8X,'MOD.ELAST. ')
DO 131 I=1,NUTAN
WRITE(5,1034) I,NANEL(I),COMPA(I),XIA(I),AREA(I),EA(I)
1034 FORMAT(3X,I2,5X,I3,3(4X,F10.4),3X,F15.0)
131 CONTINUE
128 CONTINUE

C
C LEITURA DAS CONDICÕES DE APOIO
C
DO 50 I=1,NBOUN
READ(8,1012) NF(I),NB(I,1),NB(I,2),NB(I,3),BV(I,1),BV(I,2),BV(I,3)
1012 FORMAT(4I10,3F10.7)
50 CONTINUE
```

```
WRITE(5,1024)
1024 FORMAT(///20X'CONDICOES DE APOIO'//)
WRITE(5,1013)
1013 FORMAT(' APOIO',5X,'NO',3X,'DIR.-Z',3X,'DIR.-R',5X,'ROT.',7X,'DESL
*.-Z',4X,'DESL.-R',7X,'ROT.')
DO 121 I=1,NBOUN
WRITE(5,1014) I,NF(I),NB(I,1),NB(I,2),NB(I,3),BV(I,1),BV(I,2),BV(I
*,3)
1014 FORMAT(I6,2X,I5,4X,3(I5,4X),3(F10.4,1X))
121 CONTINUE
```

C
C LEITURA DAS PROPRIEDADES ELASTICAS DOS MATERIAIS
C

```
DO 64 I=1,NYM
READ(8,1018) EI(I),P1(I)
1018 FORMAT(F10.0,F10.8)
64 CONTINUE
WRITE(5,1019)
1019 FORMAT(///20X,'PROPRIEDADES ELASTICAS'///,' MAT.',7X,'MOD.ELAST.',
*9X,'C.POISSON')
DO 123 I=1,NYM
WRITE(5,1020) I,EI(I),P1(I)
1020 FORMAT(I5,7X,F10.0,8X,F10.4)
123 CONTINUE
NLIB=NPOIN*NFREE
DO 68 I=1,NLIB
DO 68 J=1,NCOLN
68 U(I,J)=0.
```

C
C LEITURA DAS COMBINACOES DE CARREGAMENTO
C

```
READ(8,1015) (NCONC(J),J=1,NCOLN)
READ(8,1015) (NECCD(J),J=1,NCOLN)
READ(8,1015) (NECFM(J),J=1,NCOLN)
1015 FORMAT(3I10)
WRITE(5,1050)
1050 FORMAT(///20X,'COMBINACAO DOS CARREGAMENTOS',///,' CARG.',8X,'F.CO
*NC.',8X,'F.DIST.',8X,'F.MASSA',/16X,'NCONC',10X,'NECCD',10X,'NECFM
*')
NCARC=0
NCARD=0
DO 900 J=1,NCOLN
IF(NCONC(J)) 901,901,902
902 NCARC=NCARC+1
901 IF(NECCD(J)) 903,903,904
904 NCARD=NCARD+1
903 WRITE(5,1051) J,NCONC(J),NECCD(J),NECFM(J)
1051 FORMAT(I6,3(10X,15))
900 CONTINUE
WRITE(5,1021) NCARC
```

1021 FORMAT(///20X,'CARGAS CONCENTRADAS NOS NOS'///' CARREGAMENTOS COM
* CARGA CONCENTRADA=',I2//)

C
C LEITURA DAS CARGAS CONCENTRADAS NOS NOS
C

DO 65 J=1,NCOLN
IF(NCONC(J)) 6,70,6

6 NC=NCONC(J)
WRITE(5,1016) J

1016 FORMAT(' CARREGAMENTO NUMERO=',I2,/' NO',8X,'FORCA-Z',8X,'FORCA
*-R',8X,'MOMENTO')

DO 69 I=1,NC
READ(8,1022) K,U(3*K-2,J),U(3*K-1,J),U(3*K,J)

1022 FORMAT(I10,3F10.3)
WRITE(5,1023) K,U(3*K-2,J),U(3*K-1,J),U(3*K,J)

1023 FORMAT(1X,I3,3F15.4)
DO 102 KKK=1,NFREE

J1C=NFREE*(K-1)+KKK
102 U(J1C,J)=2.*PI*X(K,1)*U(J1C,J)

69 CONTINUE

70 CONTINUE

65 CONTINUE

WRITE(5,1028) NCARD

1028 FORMAT(///20X,'CARGAS DISTRIBUIDAS NOS ELEMENTOS'///,' CARREGAMENT-
*OS COM CARGA DISTRIBUIDA=',I2//)

C
C FORMACAO DAS MATRIZES
C

IF(NCARD) 599,599,600

600 WRITE(5,1029)

1029 FORMAT(' ELEM.',4X,'CARG.',40X,'VETOR DE CARGA DO ELEMENTO',/32X,
*'NO INICIAL',21X,'NO FINAL',21X,'NO INTERNO',/,24X,'ORD.MERID.',5X
*'ORD.NORMAL',5X,'ORD.MERID.',5X,'ORD.NORMAL',5X,'ORD.MERID.',5X,'O
*RD.NORMAL')

599 DO 16 J=1,LB

DO 16 I=1,NLIB

16 S(I,J)=0.

JBMAX=0

DO 27 KJ=1,NELEM

C
C LEITURA DO VETOR DE CARGA DO ELEMENTO
C

IF(NCARD) 601,601,602

602 DO 603 J=1,NCOLN

IF(NECCD(J)) 604,604,605

605 READ(8,1052) (VCC(I,J),I=1,6)

1052 FORMAT(6F10.5)

WRITE(5,1053) KJ,J,(VCC(I,J),I=1,6)

1053 FORMAT(4X,I3,7X,I2,3X,6(F15.5))

GO TO 606

```
604 DO 607 I=1,9
607 VCC(I,J)=0.
606 CONTINUE
603 CONTINUE
GO TO 608
601 IF(IDENS) 608,608,609
609 DO 610 J=1,NCOLN
DO 610 I=1,9
610 VCC(I,J)=0.
608 CONTINUE
TH=THICK(KJ)
J2=NEP(KJ)
YM1=E1(J2)
PR1=P1(J2)
IT=1
JJ1=NOD(KJ,1)
JJ2=NOD(KJ,2)
IF(JJ2-JJ1) 502,501,502
501 NNOD=1
XE(1,1)=X(JJ1,1)
```

C
C
C

SUBROTINA PARA MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ DA PLACA

```
CALL PLAXI(C,NECFM,KJ)
GO TO 505
502 NNOD=2
DO 85 I=1,NNOD
JJ=NOD(KJ,I)
XE(I,1)=X(JJ,1)
85 XE(I,2)=X(JJ,2)
```

C
C
C

EFEITO DO ANEL COMO TRECHO RIGIDO DO ELEMENTO

```
DO 210 I=1,4
210 COP2(I)=0.
IF(NUTAN) 201,201,202
202 DO 203 I=1,NUTAN
IF(JJ1-NANEL(I)) 204,205,203
205 IT=IT+1
COP2(I)=-COMPA(I)/2.
COP2(3)=COMPA(I)/2.
204 IF(JJ2-NANEL(I)) 201,206,203
206 IT=IT+2
COP2(2)=COMPA(I)/2.
COP2(4)=-COMPA(I)/2.
203 CONTINUE
201 CONTINUE
```

C
C
C

SUBROTINA PARA MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE CASCA

CALL AXISI(C,NECFM,COP2,IT,KJ,NELEM)

C
C MONTAGEM DO VETOR DE CARGA DA ESTRUTURA
C

```
505 IF(NCARD) 253,253,254
253 IF(IDENS) 256,256,254
254 DO 255 I=1,NNOD
    JJ=NOD(KJ,I)
    DO 255 J2=1,NFREE
    JG=NFREE*(JJ-1)+J2
    JL=NFREE*(I-1)+J2
    DO 255 J=1,NCOLN
    U(JG,J)=U(JG,J)+VCC(JL,J)
255 CONTINUE
256 CONTINUE
```

C
C MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL DA ESTRUTURA
C

```
DO 27 L=1,NNOD
DO 27 K=1,NNOD
DO 26 J=1,NFREE
J1=NFREE*(NOD(KJ,L)-1)+J
JE=NFREE*(L-1)+J
DO 26 I=1,NFREE
IB=NFREE*(NOD(KJ,K)-1)+I
IE=NFREE*(K-1)+I
JB=J1-IB+1
IF(JB) 26,26,23
23 IF(JB-JBMAX) 25,25,24
24 JBMAX=JB
IF(LB-JBMAX) 28,25,25
28 WRITE(5,2222) JBMAX
2222 FORMAT(///// ' A LARGURA DE BANDA ULTRAPASSOU A MAXIMA ADOTADA* / , '
* LARGURA DE BANDA OBTIDA =',15,/' O EXEMPLO FOI INTERROMPIDO')
GO TO 21
25 S(IB,JB)=S(IB,JB)+C(IE,JE)
26 CONTINUE
27 CONTINUE
```

C
C CONTRIBUICAO DOS ANEIS
C

```
IF(NUTAN) 801,801,802
802 DO 71 I=1,NUTAN
    JJ=NANEL(I)
    COAN(1)=0.
    COAN(2)=2.*PI*EA(I)*AREA(I)/X(JJ,1)
    COAN(3)=2.*PI*EA(I)*XIA(I)/X(JJ,1)
    DO 71 J=1,NFREE
    IB=NFREE*(JJ-1)+J
71 S(IB,1)=S(IB,1)+COAN(J)
```

801 CONTINUE

INTRODUCAO DOS DESLOCAMENTOS PRESCRITOS

```

DO 33 I=1,NBOUN
DO 36 J=1,NFREE
IF(NB(1,J)) 39,32,38
32 IB=NFREE*(NF(I)-1)+J
DO 36 KJ=2,JBMAX
IND2=IB-1+KJ
IF(IND2-NLIB) 42,42,44
42 DO 41 KC=1,NCOLN
41 U(IND2,KC)=U(IND2,KC)-S(IB,KJ)*BV(I,J)
S(IB,KJ)=0.
44 IND1=IB+1-KJ
IF(IND1) 35,35,34
34 DO 45 KC=1,NCOLN
45 U(IND1,KC)=U(IND1,KC)+S(IND1,KJ)*BV(I,J)
S(IND1,KJ)=0.
35 CONTINUE
36 CONTINUE
S(IB,1)=1.
DO 39 KC=1,NCOLN
39 U(IB,KC)=BV(I,J)
38 CONTINUE

```

SUBROTINA PARA RESOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES

```

CALL SUBVAX(S,U,NLIB,JBMAX,NCOLN)
DO 200 KC=1,NCOLN
K1=1
K2=1
WRITE(5,3) KC
3 FORMAT('1',20X,'RESULTADOS DA ANALISE'///10X,'DESLOCAMENTOS NODA
*IS',///10X,'CARREGAMENTO NUMERO=',12,///' NO',4X,'DESLOCAMENTO-2',4
*X,'DESLOCAMENTO-R',11X,'ROTACAO'///)
DO 51 I=1,NPCIN
WRITE(5,1025) I,U(3*I-2,KC),U(3*I-1,KC),U(3*I,KC)
1025 FORMAT(1X,I3,3(3X,E15.7))
51 CONTINUE
WRITE(5,4)
4 FORMAT('1',10X,'ESFORCOS SOLICITANTES',////)
WRITE(5,1026)
1026 FORMAT(' CARG.',3X,'ELEM.',6X,'NO',12X,'N-MERIDIONAL',7X,'N-CIRCUN
*FERENCIAL',12X,'M-MERIDIONAL',7X,'M-CIRCUNFERENCIAL'///)
NTEN=0

```

CALCULO DOS ESFORCOS SOLICITANTES

C

```
DO 60 LL=1,NELEM
  JJ1=NOD(LL,1)
  JJ2=NOD(LL,2)
  DO 61 I1=1,NNOD
    JJ=NOD(LL,I1)
    XE(I1,1)=X(JJ,1)
    XE(I1,2)=X(JJ,2)
    DEL(3*I1-2)=U(3*JJ-2,KC)
    DEL(3*I1-1)=U(3*JJ-1,KC)
    DEL(3*I1)=U(3*JJ,KC)
```

```
61 CONTINUE
  TH=THICK(LL)
  J1=NEP(LL)
  YM1=E1(J1)
  PR1=P1(J1)
  IT=1
  DO 80 I=1,4
80 COP2(I)=0.
  IF(NUTAN) 81,81,82
82 DO 83 I=1,NUTAN
  IF(JJ1-NANEL(I)) 84,86,83
86 IT=IT+1
  COP2(1)=-COMPA(I)/2.
  COP2(3)=COMPA(I)/2.
84 IF(JJ2-NANEL(I)) 81,87,83
87 IT=IT+2
  COP2(2)=COMPA(I)/2.
  COP2(4)=-COMPA(I)/2.
83 CONTINUE
81 CONTINUE
```

C

C

C

SUBROTINA PARA CALCULO DOS ESFORCOS SOLICITANTES

CALL STRAX(DEL,COP2,IT,KC,LL,NTEN,JJ1,JJ2)

60 CONTINUE

200 CONTINUE

21 CONTINUE

20 CONTINUE

CALL EXIT

END

// DUP

*STORE WS UA AXSIM

0EC3

// XEQ AXSIM L 1

*FILES(11,,0EC3),(12,,0EC3)

REFERÊNCIAS
BIBLIOGRÁFICAS

- 1 - GREENE, B.E.; STROME, Donald R.; WEIKEL, R.C. Application of stiffness method to the analysis of shell structures.
In: ASME PAPER. |N.Y.|, Mar. 1961. n.61 - AV - 58.
- 2 - ADINI, A. Analysis of shell structures by the finite element method. Berkeley, University of California ,
Ph. D. Thesis, 1961.
- 3 - MEYER, Robert R. & HARMON, Marilyn B. Conical segment method for analyzing open crown shells of revolution for edge loadings. In: AIAA JOURNAL. |N.Y.|, Apr. 1963. v.1,
n. 4, p.886-91.

- 4 - GRAFTON, Peter E. & STROME, Donald R. Analysis of axisymmetrical shells by the direct stiffness method. In: AIAA JOURNAL. |N.Y. |; Oct. 1963. v.1, n. 10, p.2342-7.
- 5 - POPOV, Egor P.; PENSIEN, Joseph; LU, Zung-An. Finite element solution for axisymmetrical shells. In: ASCE. Journal of the Engineering Mechanics Division. |California|, Oct. 1964. v.90, n.EM5, p. 119-45.
- 6 - PERCY, John H.; PIAN, Theodore H.H.; KLEIN, Stanley; NAVARATNA, Dharendra R. Application of matrix displacement method to linear elastic analysis of shells of revolution. In: AIAA JOURNAL |N.Y. | Nov. 1965. v.3 , n. 11, p.2138-45.
- 7 - HANSTEEN, O.E. A Conical element for displacement analysis of axisymmetric shells. "In": HOLLAND & BELL. The finite element method in stress analysis. Canada, Tapir, 1970, p.319-29.
- 8 - CLOUGH, R.W. & RASHID, Y. Finite element analysis of axisymmetric solids. In: ASCE. Journal of the Engineering Mechanics Division. |California|, Feb. 1965. v.91, n.EML, p.71-85.

- 9 - WILSON, Edward L. Structural analysis of axisymmetric solids. In: AIAA JOURNAL. |N.Y.|, Dec. 1965. v.3, n. 12, p. 2269-74.
- 10 - JONES, R.E. & STROME, Donald R. Direct stiffness method analysis of shells of revolution utilizing of shells of revolution utilizing curved elements. In: AIAA JOURNAL. |N.Y.|, Sept. 1966. v.4, n.9, p.1519-25.
- 11 - STRICKLIN, James A.; NAVARATNA, Dharendra R.; PIAN, Theodore H.H. Improvements on the analysis of shells of revolution by the matrix displacement method. In: AIAA JOURNAL |N.Y.|, Nov. 1966. v.4, n.11, p.2069-71.
- 12 - WASHIZU, K. Variational methods in elasticity and plasticity. Pergamon Press. 1968.
- 13 - ARANTES E OLIVEIRA, Eduardo R. de. Introdução à teoria das estruturas de comportamento linear. Lisboa, Bertrand (Irmãos), Ltda., dez. 1966.
- 14 - ZIENKIEWICZ, O.C. The finite element method in engineering science. 2nd. London, McGraw-Hill, Book Company, 1971.

- 15 - NOVOZHILOV, V.V. Thin shell theory. P. Noordhoff Ltda, Groningen, the Netherlands, 1959.
- 16 - GRAVINA, P.B.J. Cascas de revolução. São Paulo, 1957.
- 17 - FLÜGGE, Wilhelm. Stresses in shells. Fourth Printing . Berlin, Springer-Verlag, 1967.
- 18 - HILDEBRAND, F.B. Introduction to numerical analysis. N. York, McGraw-Hill, 1956.
- 19 - MEYER, Cristien & SCORDELIS, Alexander C. Analysis of curved folded plate structures. In: ASCE. Journal of the structural Division. |California|, Oct. 1971, v.97, n. ST10, p.2459-81.
- 20 - ABRAMOWITZ, Milton & SEGUN, Irene A. Handbook of mathematical functions. New York, Dover Publications , Inc., 1968.
- 21 - TIMOSHENKO, Stephen P. & GOODIER, J.N. Theory of elasticity. New York, McGraw-Hill Book Company, Inc. 3rd, 1970.

- 22 - TIMOSHENKO, Stephen P. & WOINOWSKY-KRIEGER, S. Theory of plates and shells. New York, McGraw-Hill Book Company, Inc., 2nd, 1959.
- 23 - JONES, R.E. & STROME, Donald R. A survey of analysis of shells by the displacement method. Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mech., Air Force Inst. of Teach., Wright Patterson A.F. Base, Ohio, Oct. 1965.
- 24 - HAISLER, Walter E. & STRICKLIN, James A. Rigid-body displacements of curved elements in the analysis of shells by the matrix-displacement method. In: AIAA JOURNAL. [N.Y.], Aug. 1967. v.5, n.8, p.1525-7.
- 25 - ACUÑA, Jack L. Analises de placas con elementos compatibles de orden superior. Rio de Janeiro, COPPE-UFRJ, Te se de Mestrado. 1972.
- 26 - BREBBIA, Carlos & TOTENHAM, H., ed. Finite element techniques in structural mechanics. Southampton, University of Southampton, Apr. 1970.
- 27 - PRZEMIENIECKI, J. S. Theory of matrix structural analysis. New York, McGraw-Hill Book Company, 1968.

- 28 - PARDOEN, Gérard C. Deflection function for the symmetrical bending of circular plates. In: AIAA JOURNAL. |N.Y.| , Feb. 1972. v.10, n.2, p.239-40.
- 29 - ARCHER, John S. Consistent Matrix Formulations for structural analysis using finite-element techniques-. In: AIAA JOURNAL. |N.Y.|, Oct. 1965. v.3, n.10, p.1910-7.
- 30 - IRONS, Bruce M.R. & DRAPER, Keith J. Inadequacy of nodal connections in a stiffness solution for plate bending. In: AIAA JOURNAL. |N.Y.|, May. 1965. p. 961.
- 31 - STRICKLIN, James A. Computation of stress resultants from the Element stiffness matrices. In: AIAA JOURNAL . |N.Y.|, June 1966. v.4, n.6, p.1095-6.
- 32 - GIRIJA VALLABHAN, C.V. & NARAYANASWAMI, R, Error analysis for rectangular finite elements. In: ASCE. Journal of the Structural Division . |California|, Jan. 1972 . v.98, n.ST1, p.413-9.
- 33 - CANTIN, GILLES. Rigid body motions in curved finite elements. In: AIAA JOURNAL. |N.Y.|, v.8, n.7, p.1252-5.

- 34 - KRAHULA, Joseph L. & POLHEMUS, Jones F. Use of Fourier series in the finite element method. In: AIAA JOURNAL. |N.Y. |, Apr. 1968. v.6, n.4, p.726-8.
- 35 - DANTAS, José I. Método dos elementos finitos aplicado a problemas axissimétricos. Rio de Janeiro, COPPE-UFRJ, Tese de Mestrado. 1971.