Numere complexe în formă algebrică $z = a + bi$

Fie $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$, $i = \sqrt{-1}$

Se numeşte **partea reală** a numărului complex z : $\operatorname{Re}(z) = a$

Se numeşte coeficientul **părții imaginare** a numărului complex z : $\operatorname{Im}(z) = b$

Se numeşte **modulul** numărului complex z : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, şi evident $|z| \in [0, \infty) \subset \mathbb{R}$

Se numeşte **conjugatul** numărului complex $z = a + bi$, numărul complex $\overline{z} = a - bi$

Obs : $z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

Operații cu numere complexe în formă algebrică

Fie $\begin{array}{l} z_1 = a_1 + b_1 i \\ z_2 = a_2 + b_2 i \end{array}$ $\quad \begin{array}{l} z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2) i \\ z_1 - z_2 = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2) i \end{array}$ $\quad \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i - b_1 b_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

$$\sqrt{a + bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{|z| + a}{2}} + \sqrt{\frac{|z| - a}{2}}\, i\right)$$

$$\sqrt{a - bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{|z| + a}{2}} - \sqrt{\frac{|z| - a}{2}}\, i\right)$$

Puterile lui i :

$i^1 = i$	$i^5 = i$	$i^{4k+1} = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = -1$	$i^{4k+2} = -1$
$i^3 = -i$	$i^7 = -i$	$i^{4k+3} = -i$
$i^4 = 1$	$i^8 = 1$	$i^{4k} = 1$

Reținem:

$i^{4k} + i^{4k+1} + i^{4k+2} + i^{4k+3} = 0$

$(1+i)^2 = 2i$

$(1-i)^2 = -2i$

Numere complexe conjugate

Proprietăți

1) $z + \overline{z} \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}$
2) $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{C}$
3) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
4) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
5) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
6) $(\overline{z^n}) = \overline{z}^n$
7) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$
8) $z \in \mathbb{R}^* i \Leftrightarrow z = -\overline{z}$ (pur imaginar)

Modulul unui număr complex

Proprietăți

1) $|z| \geq 0, (\forall) z \in \mathbb{C}$

2) $\left|z\right|=\left|\overline{z}\right|=\left|-z\right|=\left|\overline{-z}\right|$, $\forall z\in\mathbb{C}$

3) $\left|z\right|^2=z\cdot\overline{z}$, $\forall z\in\mathbb{C}$ deci vom avea $\left|z\right|=1\Leftrightarrow\overline{z}=\frac{1}{z}$, $\forall z\in\mathbb{C}$

4) $\left|z_1\cdot z_2\right|=\left|z_1\right|\cdot\left|z_2\right|$, $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$

5) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{\left|z_1\right|}{\left|z_2\right|}$, $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}, z_2\neq 0$

6) $\left|z^n\right|=\left|z\right|^n$, $\forall z\in\mathbb{C}$

7) $\left|z_1+z_2\right|\le\left|z_1\right|+\left|z_2\right|$, $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$ egalitate dacă $z_1=kz_2$, $k\in\mathbb{Z}$

Rădăcinile de ordinul III ale unității sunt soluțiile ecuației : $x^3=1$

$$x^3=1\Leftrightarrow x^3-1=0\Leftrightarrow(x-1)(x^2+x+1)=0$$

$x_1=1$

$\Delta=1-4=-3=3i^2$

$x_{2,3}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow\varepsilon\in\left\{1;\ -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right\}$$

Obs : $\varepsilon^3=1$ şi dacă $\varepsilon\neq 1$ atunci $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$

Rădăcinile de ordinul IV ale unității sunt soluțiile ecuației : $x^4=1$

$$x^4=1\Leftrightarrow x^4-1=0\Leftrightarrow(x^2-1)(x^2+1)=0\Leftrightarrow(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)=0$$

$x_1=1, x_2=-1, x_3=i, x_4=-i$

$\Rightarrow\varepsilon\in\{1;\ -1;\ i;\ -i\}$

Obs : $\varepsilon^4=1$ şi dacă $\varepsilon\neq 1$ atunci $\varepsilon^3+\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$

Rădăcinile de ordinul n ale unității sunt soluțiile ecuatiei : $z^n=1$

$z^n=1\Leftrightarrow\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$ *unde* ε_k, $k=\overline{0;n-1}$ *sunt rădăcinile de ordin n ale unității scrise sub formă trigonometrică.*

Obs : $\varepsilon^n=1$ şi dacă $\varepsilon\neq 1$ atunci $\varepsilon^{n-1}+\varepsilon^{n-2}+...+\varepsilon+1=0$

Formula lui Moivre: $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^k=\cos k\alpha+i\sin k\alpha$

Forma trigometrică:

z = r$\cdot$(cosα+isinα) unde r = $\left|z\right|$ si α=argz (argumentul redus a lui z) . Pentru aflarea argumentul redus aplicăm regula (dacă nu ne aflăm pe axe)

$$\alpha=\begin{cases}arctg\frac{b}{a} & \text{dacă suntem în primul cadran}\\ \pi+arctg\frac{b}{a} & \text{dacă suntem în II sau III}\\ 2\pi+arctg\frac{b}{a} & \text{dacă suntem în IV}\end{cases}$$

şi folosim arctg(-x) = $-$arctgx

EXERCIŝ II

1. Fie numărul complex $z = 2 - 3i$. Să se calculeze : $2z - 3\bar{z}$

2. Să se determine $a,b \in \mathbb{R}$ astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(1+3i)(4-2i) = a + bi$

3. Să se determine partea reală a numărului $z = i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot .... \cdot i^{2009}$

4. Să se determine conjugatul numărului complex $z = -4 - 9i$

5. Să se calculeze modulul numărului complex $z = (2+3i)^2$

6. Să se calculeze $z_1 + \bar{z}_2$, unde $z_1 = 1 + i$ si $z_2 = -1 + i$.

7. Să se determine $a,b \in \mathbb{R}$ astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $\frac{2+i}{i-2} = a + bi$

8. Să se determine partea reală a numărului $z = (1-2i)(1+2i)$

9. Să se calculeze conjugatul numărului complex $z = -2 + 2i$

10. Să se calculeze modulul numărului complex $z = (1+i)^4$

11. Să se calculeze suma de numere complexe $i^5+i^6+i^7+i^8$.

12. Să se determine $a,b \in \mathbb{R}$ astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $\frac{1}{1-i} = a + bi$

13. Să se determine partea reală a numărului $z = (3i)^3$

14. Să se determine conjugatul numărului complex $z = 2 - 5i$.

15. Să se calculeze modulul numărului complex $z = -1 - 4i$

16. Să se calculeze suma $S = \frac{1}{i} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^7}$ şi suma $S = i + i^3 + i^5 + i^7$

17. Să se determine $a,b \in \mathbb{R}$ astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $\frac{5+16i}{16-5i} = a + bi$

18. Să se determine conjugatul numărului complex $z = \frac{2-5i}{3}$

19. Să se calculeze modulul numărului complex $z = (3-i)^2$

20. Să se determine conjugatul numărului complex $z = 1 + 7i$

21. Să se calculeze modulul numărului complex $z = \sqrt{3} + i$;

22. Să se determine partea reală a numărului $z = i^{20} + i^{21} + i^{22}$

23. Să se calculeze $z = (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

24. Să se determine $a,b \in \mathbb{R}$ astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $\overline{\left(\frac{2+3i}{4+5i}\right)} = a + bi$

25. Să se calculeze modulul numărului complex $z = \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$

26. Să se determine partea reală a numărului $z = i^{2007}$

27. Să se determine conjugatul numărului complex $z = 12 - \frac{i}{2}$

28. Să se determine partea reală a numărului $z = (1-3i)(3-i)$

29. Să se dea un exemplu de număr complex care are modulul 1.

30. Să se calculeze conjugatul numărului complex $z = 2009i$

31. Să se calculeze modulul numărului complex $z = (1-2i)^2$

32. Să se determine $a,b \in \mathbb{R}$ astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(\sqrt{3} + i)^4 = a + bi$

33. Să se calculeze modulul numărului complex $z = -4 + 3i$

34. Să se scrie sub formă algebrică numărul $z = \cos 0 + i\sin 0$

35. Să se arate că $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 \in \mathbb{R}$, dacă $z_1 = 1 + 2i$ si $z_2 = 2 - i$

36. Să se calculeze modulul numărului complex $z = 2i$;

37. Să se calculeze suma $S=1+i+\frac{1}{1+i}$

38. Să se determine conjugatul numărului complex $z=(2-3i)^2$

39. Să se determine partea reală a numărului $z=\left(\frac{3-4i}{5}\right)^2$;

40. Să se calculeze modulul numărului complex z=$\frac{4-3i}{3-4i}$

41. Să se determine partea reală a numărului $z=(1+2i)^2$

42. Să se rezolve in $\mathbb{C}$ ecuatia $|z|-z=4-3i$

43. Să se determine a,b $\in\mathbb{R}$ astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $\frac{-5+6i}{-6+5i}=a+bi$

44. Să se calculeze Re(z)+Im(z) pentru $z=(2-i)(2+i)$

45. Să se determine a,b $\in\mathbb{R}$ astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $\frac{i-1}{i+1}=a+bi$

46. Să se calculeze $(2-i)(3+i)$

47. Să se calculeze $i^{1997}+i^{2002}+i^{2007}+i^{2012}$

48. Să se determine a,b $\in\mathbb{R}$ astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $\frac{11+i}{1-11i}=a+bi$

49. Să se determine partea reală a numărului $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{15}$;

50. Să se determine conjugatul numărului complex $z=i+2$;

51. Să se calculeze modulul numărului complex $z=\frac{3-4i}{-4+3i}$

52. Să se determine conjugatul numărului complex $z=\frac{3-4i}{5}$

53. Să se determine a,b $\in\mathbb{R}$ astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $1+i(a+b)=a+3i$

54. Să se calculeze modulul numărului complex $z=\frac{2+3i}{3+2i}$;

55. Să se determine partea imaginară a numărului $z=\frac{1}{1+i}$

56. Să se calculeze modulul numărului complex $z=\sqrt{2}+i\sqrt{3}$

57. Să se determine a,b $\in\mathbb{R}$ astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $\frac{5+2i}{2-5i}=a+bi$

58. Să se calculeze modulul numărului complex z=cos1+isin1

59. Să se determine a $\in\mathbb{R}$ astfel încât, pentru $z=a+i$ să avem $|z|=|z-1|$

60. Să se calculeze modulul numărului complex $z=\sqrt{5}+i\sqrt{3}$

61. Să se calculeze conjugatul numărului complex $z=-1-3i$

62. Să se calculeze modulul numărului complex $z=(1-i)^2$

63. Să se calculeze conjugatul numărului complex $z=i^{10}-i^{11}$

64. Să se calculeze suma $z=1+i+i^2+i^3+i^4+.....+i^{11}$

65. Să se calculeze modulul numărului complex $z=\frac{1-2i}{2+i}$

66. Să se determine partea reală a numărului $z=i^{2004}+i^{2007}$

67. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că $z=1-i$ este rădăcină a ecuației $x^2-2x+m=0$

68. Să se calculeze produsul de numere complexe $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot....\cdot i^{10}$

69. Să se calculeze modulul numărului complex $z=i+i^2+i^3+....+i^{2010}$

70. Să se dea un exemplu de număr complex z, pentru care $z-\bar{z}=2i$

71. Să se calculeze modulul numărului complex $z=2i(1+i)^2$.

72. Să se calculeze suma de numere complexe $S=i+2i^3+3i^5+4i^7$

73. Să se determine partea reală a numărului $z = \frac{2+3i}{(2-i)^2}$.

74. Să se determine a,b$\in \mathbb{R}$ astfel încât numărul $a+bi$ este inversul numărului complex $3-5i$

75. Să se calculeze modulul numărului complex $z = (3+i)^4$

76. Să se determine partea reală a numărului $z = (1+i)^{10}$

77. Să se dea un exemplu de număr complex z, pentru care $z - \bar{z} = 4i$

78. Să se calculeze produsul de numere complexe $i \cdot i^2 \cdot .... \cdot i^7$

79. Să se calculeze modulul numărului comple $z = \sqrt{15} - i$

80. Să se determine a,b$\in \mathbb{R}$ astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $\frac{3+i}{3i-1} = a+bi$

81. Să se determine a$\in \mathbb{C}$ știind că $z = 1+i$ este soluție a ecuației $z^2 - 2z + a = 0$

82. Să se determine partea reală a numărului $z = (2+i)^2$

83. Să se calculeze modulul numărului complex $z = i^{2007}$

84. Să se determine a,b$\in \mathbb{R}$ astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(2+3i)(4+5i) = a+bi$

85. Să se determine partea reală a numărului $z = i + i^5 + i^{10} + i^{20} + i^{2010}$

86. Să se găsească un număr natural n pentru care $i^n + i^{n+1} = 1 - i$, unde $i^2 = -1$

87. Să se calculeze modulul numărului complex $z = \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot i$

88. Să se determine a$\in \mathbb{R}$ dacă $\operatorname{Re}(z) = 4$ și $z = 1 + (a-1)(3-i)$

89. Să se determine partea reală a numărului $z = (\cos x + i\sin x)^3$

90. Să se calculeze modulul numărului complex $z = \frac{3+i}{3-i}$

91. Să se determine partea reală a numărului $z = (\sqrt{3} - i)^2 + (\sqrt{3} + i)^2$

92. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $x^2 - 8x + 25 = 0$.

93. Să se calculeze modulul numărului complex $z = \frac{(1+i)^2}{1-i}$

94. Dacă $z^2 + z + 1 = 0$ să se calculeze $z^{2009} + \frac{1}{z^{2009}}$

95. Aflați $z \in \mathbb{C}$ din $|z| + z = 1 + \sqrt{2} + i$

96. Să se arate că numărul $(1-i)^{24}$ este real. **V2**

97. Să se arate că numărul $(\frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i})^2$ este real. **V4**

98. Să se calculeze $\frac{1}{1+2i} + \frac{1}{1-2i}$. **V5**

99. Să se calculeze modulul numărului complex $\frac{8+i}{7-4i}$. **V7**

100. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^2 = -4$. **V8**

101. Știind că $z \in \mathbb{C}$ și că $z^2 + z + 1 = 0$, să se calculeze $z^4 + \frac{1}{z^4}$. **V10**

102. Să se calculeze $\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$. **V12**

103. Să se arate că numărul $(1+i\sqrt{3})^2 + (1-i\sqrt{3})^2$ este număr întreg. **V13**

104. Să se calculeze modulul numărului complex $z = \frac{2-i}{2+i}$. **V16**

105. Să se arate că numărul $(1+i\sqrt{3})^3$ este întreg. **V17**

106. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $x^2 - 2x + 4 = 0$.**V18**

107. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $x^2 - 2x + 2 = 0$.**V20**

108. Să se calculeze$1+\ i + i^2 + ... + i^{10}$. **V22**

109. Să se calculeze $z + \frac{1}{z}$ *pentru* $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. **V24**

110. Să se calculeze $(1-i)(1+2i) - 3(2-i)$.**V25**

111. Fie z_1 şi z_2 soluțiile complexe ale ecuației $2z^2+z+50=0$. Să se calculeze $|z_1|+|z_2|$. **V26**

112. Să se calculeze modulul numărului complex $z=1+i+i^2+...+i^6$.**V27**

113. Să se calculeze $(1+i)^{10}+(1-i)^{10}$.**V28**

114. Să se calculeze modulul numărului complex $z=(3+4i)^4$. **V34**

115. Să se calculeze modulul numărului $(2+i)^3+(2-i)^3$. **V35**

116. Se dă numărul complex $z=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Să se demonstreze că $z^2=\overline{z}$. **V39**

117. Se consideră $a\in\mathbb{R}$ şi numărul complex $z=\dfrac{a+2i}{2+ai}$. Să se determine *a* pentru care $z\in\mathbb{R}$. **V40**

118. Să se determine partea reală a numărului complex $z=\dfrac{1-i}{1+i}$. **V44**

119. Să se arate că numărul $(2+i)^4+(2-i)^4$ este întreg. **V47**

120. Să se determine partea reală a numărului $z=(\sqrt{3}+i)^6$. **V48**

121. Să se arate că, dacă z este soluție a ecuației $z^2+2z+4=0$, *atunci* $z^2-\dfrac{8}{z}=0$. **V50**

122. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $2\overline{z}+z=3+4i$.**V56**

123. Să se determine partea reală a numărului complex $z=\dfrac{1+4i}{4+7i}$.**V58**

124. Să se calculeze $(2+i)(3-2i)-(1-2i)(2-i)$.**V66**

125. Să se arate că numărul $\dfrac{25}{4+3i}+\dfrac{25}{4-3i}$ este întreg.**V68**

126. Să se determine $z\in\mathbb{C}$ ştiind că $\dfrac{\overline{z}+7i}{z}=6$. **V69**

127. Să se calculeze $(1+i)^{20}$. **V70**

128. Să se arate că numărul $(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4})^{100}$ este număr real.**V72**

129. Să se calculeze $|5-12i|-|12+5i|$.**V73**

130. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^2+3z+4=0$.**V74**

131. Să se calculeze $(1-i)(1-i^2)\left(1-i^3\right)\cdot...\cdot(1-i^{2009})$.**V80**

132. Să se verifice că numărul $1+i$ este rădăcină a ecuației $z^4+4=0$. **V82**

133. Fie $z\in\mathbb{C}$ Fie $z\in\mathbb{C}$. Să se arate că dacă $2z+3\overline{z}\in\mathbb{R}$, atunci $z\in\mathbb{R}$. **V84**

134. Fie $z\in\mathbb{C}$.Să se arate că numărul $i(z-\overline{z})$ este real**. V85**

135. Să se arate că numărul $\dfrac{1+3i}{1-3i}+\dfrac{1-3i}{1+3i}$ este real. **V86**

136. Fie $z\in\mathbb{C}$ o rădăcină de ordin 3 a unității, diferită de 1. Să se calculeze z^2+z+1. **V87**

137. Să se determine numerele complexe *z* care verifică relația $z+3i=6\overline{z}$. **V89**

138. Să se arate că $1+\cos\dfrac{2\pi}{5}+\cos\dfrac{4\pi}{5}+\cos\dfrac{6\pi}{5}+\cos\dfrac{8\pi}{5}=0$. **V90**

139. Să se calculeze modulul numărului complex $z=(\sqrt{2}-1+i(\sqrt{2}+1))^2$. **V91**

140. Să se calculeze modulele rădăcinilor complexe ale acuației $z^2+2z+4=0$. **V93**

141. Să se calculeze $\left(\dfrac{(1-2i)(3i-1)}{5}\right)^4$.**V94**

142. Fie $z\in\mathbb{C}$ astfel încât $z+2\overline{z}=3+i$. Să se calculeze modulul numărului *z*. **V98**

143. Calculați produsul de numere complexe $i\cdot i^3\cdot i^5\cdot i^7\cdot i^9\cdot i^{11}$. **Bac2010**

144. Calculați $\left(\left(1-i\right)\left(i-1\right)\right)^4$. **Bac2010**

145. Arătați că numărul $i\sqrt{2}-1$ este soluție a ecuației $z^2+2z+3=0$. **Bac2010**

146. Calculați modulul numărului complex $z=1-i\sqrt{3}$. **Bac2011**