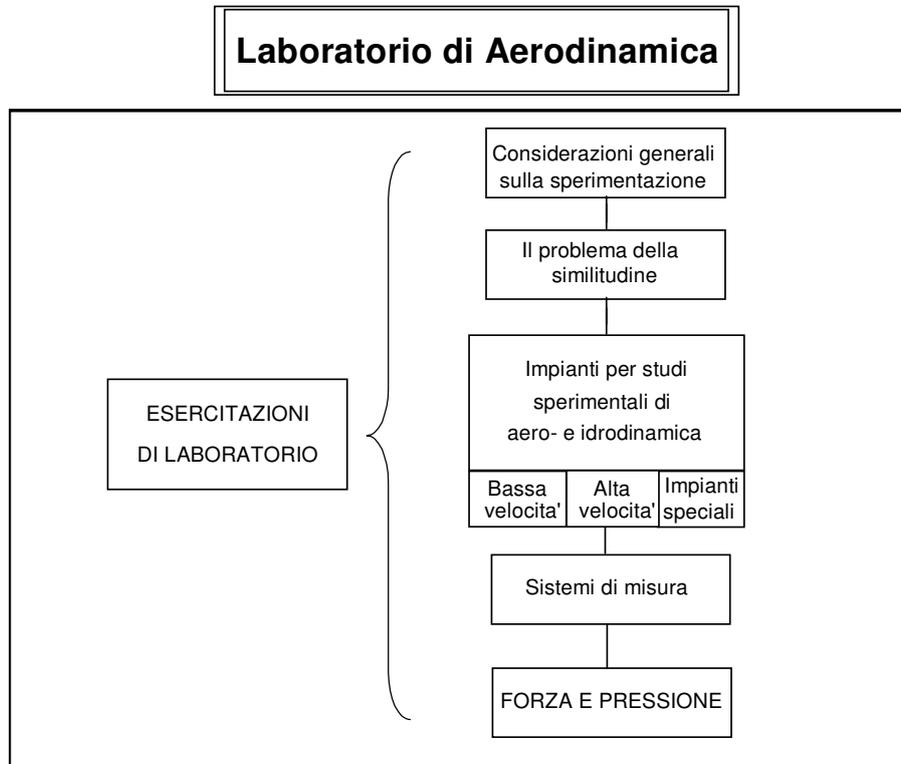


**AERODINAMICA SPERIMENTALE**  
**Energetica**

(G.P. Romano)

Anno Accademico 2010-2011

## PROGRAMMA DEL CORSO



### Bibliografia:

- B.R. Munson, D.F. Young, T.H. Okiishi, Fundamentals of Fluid Mechanics, Wiley, 1995
- E. Mattioli, Aerodinamica, Levrotto-Bella, 1988
- I.H. Abbott, A.E. Van Doenhoff, Theory of wing sections, Dover Publications, 1959
- W.H. Rae, A. Pope, Low Speed Wind Tunnel Testing, Wiley, 1984
- A. Pope, K. Goin, High Speed Wind Tunnel Testing, Kriegel, 1978
- R.J. Goldstein, Fluid Mechanics Measurements, Hemisphere, 1983
- W. Merzkirch, Flow Visualization, Academic Press, 1987
- AA.VV., Handbook of Experimental Fluid Mechanics, Springer-Verlag, 2007
- Manuali d'uso degli apparati sperimentali

# Capitolo 1

## CONSIDERAZIONI GENERALI SULLA FLUIDODINAMICA SPERIMENTALE

### 1.1 GENERALITA'

Ai fini della definizione di un progetto (di un velivolo, di un veicolo o di un motore) o della comprensione dei fenomeni fisici coinvolti, lo studio di un particolare campo fluidodinamico, può essere intrapreso tramite una delle tre dimensioni della fluidodinamica: sperimentale, teorica e numerica. Questi tre approcci, elencati nell'ordine nel quale storicamente si sono avvicinati, sono a tutt'oggi ugualmente importanti e complementari piuttosto che sostitutivi uno dell'altro e solo l'interazione tra i tre può fornire conclusioni pienamente soddisfacenti. Ciò premesso, bisogna comunque mettere in evidenza i vantaggi e svantaggi reciproci al fine di poter valutare quali sono le limitazioni dell'approccio utilizzato:

	<b>Sperimentale</b>	<b>Teorico</b>	<b>Numerico</b>
<b>Vantaggi</b> □	- flussi reali - accuratezza □ - elevati numeri di Reynolds □ - condizioni di turbolenza □	- soluzioni esatte - condizioni al contorno □	- variazioni parametri - condizioni al contorno - separazione fenomeni - tempi e costi
<b>Svantaggi</b> □	- errori sperimentali - similitudine - limitata variazione parametri - difficoltà in presenza di: più specie chimiche, gradienti di temperatura - condizioni al contorno - tempi di utilizzo e costi	- condizioni particolari - equazioni semplificate - geometrie semplici	- errori numerici - bassi numeri di Reynolds - condizioni di turbolenza - modello matematico

Tabella 1. Vantaggi e svantaggi di ciascuno dei tre approcci possibili alla fluidodinamica.

Come la fluidodinamica numerica, che ha avuto un notevole sviluppo negli ultimi venti anni grazie allo sviluppo dei calcolatori, anche la fluidodinamica sperimentale ha conosciuto ultimamente un notevole sviluppo. Negli ultimi anni si sono sviluppate tecniche sperimentali che permettono di acquisire una notevole mole di dati e di elaborarli in tempi ragionevoli; simultaneamente gli impianti sperimentali hanno conosciuto una riduzione in dimensioni e costi ed una maggiore specificità. Si e' quindi creata una situazione nella quale il problema consiste nell'interpretazione dei dati acquisiti, nell'individuazione di metodi di analisi che mettano in luce aspetti particolari e più praticamente anche nell'archiviazione dei dati per utilizzi futuri. Per fare un esempio: si e' passati da un numero di dati acquisiti di circa mille per ogni punto di misura (in numero complessivo al massimo pari a qualche decina) a milioni di dati (anche sotto forma di immagini) su reticoli di misura superiori a  $1000 \times 1000$ . Da questo punto di vista, risulta tuttora insufficiente la memoria dei calcolatori e sono necessari dispositivi di archiviazione aggiuntivi (dischi dedicati, dischi magneto-ottici, CD Rom etc...). In modo parallelo alla crescita del numero di dati e' cresciuta l'affidabilità statistica dei risultati ottenuti (anche se ciò non evita l'insorgere di interpretazioni erronee dei dati). Bisogna anche considerare che l'elevato numero di dati può richiedere maggior tempo di acquisizione e utilizzo dell'impianto (e quindi aumento dei costi).

## 1.2 ERRORI NELLA FLUIDODINAMICA SPERIMENTALE

Nella fluidodinamica sperimentale, come in qualsiasi altra misurazione, sono presenti una serie di *errori* ( $\epsilon$ ) (o, meglio, incertezze) in ciascuna delle operazioni che vengono effettuate per indagare il comportamento di un fluido e/o simularlo tramite un modello in scala. Si definisce *accuratezza* di una misura il complemento a 1 (100% di accuratezza) della differenza relativa (in valore assoluto) tra il valore misurato ( $M_G$ ) e il valore "vero" della grandezza in esame ( $V_G$ ) (di solito i valori relativi sono costruiti come percentuale del valore di fondo scala del sistema di misura). Essendo quest'ultimo in generale incognito, per valutare l'accuratezza di un certo sistema di misura e' necessaria una procedura preliminare di calibrazione, cioè una procedura di misura della grandezza quando il suo valore sia già noto. Inoltre, poiché il valore misurato e' dato dalla differenza tra il valore vero e l'errore complessivo della misura,

$$M_G = V_G \pm \epsilon \quad (1.1)$$

si può anche affermare che l'accuratezza sia data dal complemento a 1 della somma degli errori relativi (percentuali) commessi nella valutazione della grandezza misurata

$$\text{Accuratezza} = 1 - (|M_G - V_G| / V_{G\max}) = 1 - (|\varepsilon| / V_{G\max}) = 1 - |\varepsilon_r|.$$

Gli errori sono sostanzialmente di due tipi: *errori sistematici* ed *errori casuali*. I primi sono dovuti a deviazioni sistematiche del valore misurato da quello vero, determinate sempre dalla stessa causa (e di non facile identificazione a causa della loro sistematicità). Gli errori casuali, invece, si manifestano come deviazioni casuali dei valori misurati dovute a fluttuazioni imprevedibili nella catena di misura. Con il termine *precisione* si intende l'accuratezza dovuta ai soli errori casuali (quindi un sistema di misura preciso fornirà più o meno sempre la stessa misura). L'accuratezza sarà data dalla precisione meno il contributo relativo degli errori sistematici e sarà quindi sempre inferiore (o al più uguale) alla precisione. Nella figura 1 sono mostrati tre esempi di risultati di una misurazione (il centro rappresenta la misura "vera" e i cerchi concentrici l'allontanamento percentuale da questa): nel primo caso abbiamo a che fare con misure precise ma non ugualmente accurate a causa della presenza di un errore sistematico e di piccoli errori casuali (*a*), nel secondo le misure sono meno precise che in precedenza, pur avendo uguale accuratezza, a causa di più elevati errori casuali (in assenza di errore sistematico) (*b*) e nel terzo caso sono precise ed accurate essendo in presenza di soli piccoli errori casuali (*c*). Valori degli errori commessi tramite alcune tecniche di misura utilizzate in fluidodinamica sperimentale verranno forniti nel seguito; e' comunque difficile che si ottengano misure con errori inferiori all'1% (accuratezza e precisione dell'ordine del 99%).

Possiamo quindi riassumere il risultato di una misura nei termini della relazione (1.1) dove in  $\varepsilon$  sono contenuti sia gli errori sistematici che casuali. Questi ultimi, in realtà, devono essere considerati sotto due aspetti differenti. Infatti, vi e' un errore casuale dovuto al fatto che, pur in presenza di variazioni della grandezza da misurare, il sistema di misura fornisce sempre la stessa risposta e viene quindi commesso un certo errore detto errore massimo. Ma vi e' anche una variabilità intrinseca della stessa grandezza (causata da fluttuazioni intrinseche della grandezza e da un non perfetto controllo di tutte le condizioni al contorno) e una non riproducibilità di funzionamento dello strumento di misura. Questa variabilità da origine ad un insieme di valori misurati della grandezza in esame ( $M_{iG}$ ) che sarà caratterizzato da valori statistici quali la media ( $\overline{M_G}$ ) e la deviazione standard ( $\sigma_G$ ): la deviazione standard rappresenta l'errore statistico della misura (si consideri che per una distribuzione gaussiana, quale quelle normalmente incontrate nelle misure, il 99.7% dei dati sono compresi in un intervallo pari a  $\pm 3\sigma_G$ ).

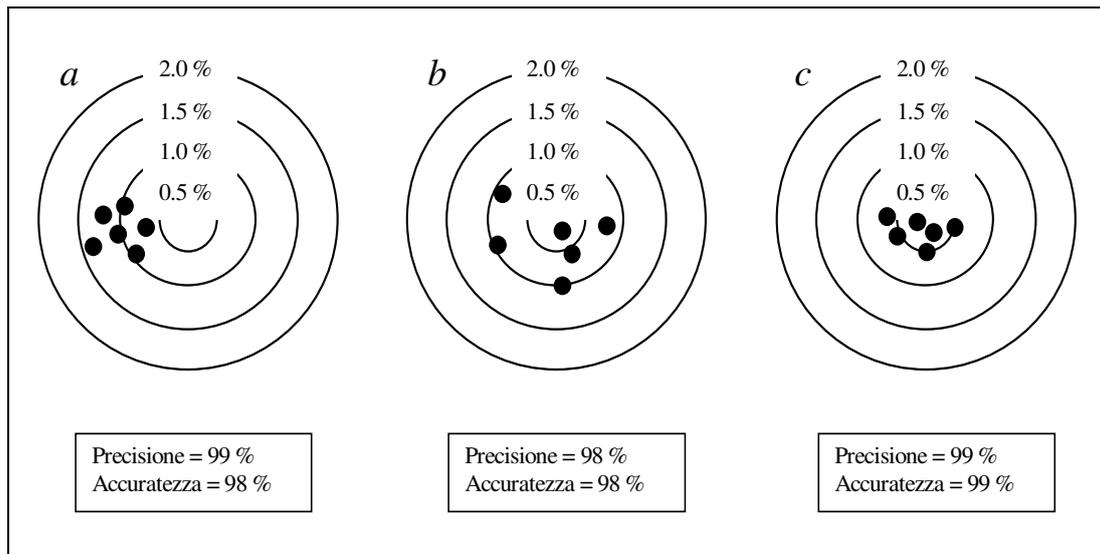


Figura 1. Esempio di presenza di errori sistematici e casuali e valori della precisione e dell'accuratezza della misura.

Possono presentarsi le seguenti situazioni (in assenza di errori sistematici):

- la misura fornisce sempre lo stesso risultato; in questo caso l'errore massimo e' molto maggiore di quello statistico e il risultato della misura e' espresso tramite la (1.1) dove  $\epsilon$  rappresenta proprio tale errore massimo;
- la misura fornisce risultati differenti; in questo caso l'errore statistico e' molto maggiore di quello massimo e il risultato della misura sar  espresso dalla relazione (in maniera tanto pi  accurata quanto maggiore e' il numero di valori dell'insieme,  $N$ ):

$$\overline{M}_G = V_G \pm \sigma_G / 2\sqrt{N} \quad (1.2)$$

- la misura fornisce pochi risultati differenti; in questo caso l'errore massimo e' prossimo a quello statistico e il risultato della misura e' espresso da un istogramma su pochi valori; il valor medio e la varianza saranno errati e si pu  esprimere il risultato della misura tramite la (1.1) con l'errore massimo dato da  $3\sigma_G$ .

Il discorso precedente vale qualora il risultato della misura fornisca direttamente la grandezza voluta (grandezza fondamentale). Se, invece che di una grandezza fondamentale, vogliamo ottenere il valore di una *grandezza derivata* (cio  se la misura non fornisce in uscita la grandezza voluta, ma un'altra che va convertita in quest'ultima tramite altre grandezze

fondamentali (misurate e non)), avremo la cosiddetta *propagazione degli errori*. Per ottenere un'espressione dell'errore sulla grandezza derivata, a partire da quelli sulle grandezze fondamentali, in queste condizioni, si assuma una generica relazione funzionale tra le grandezze fondamentali ( $M_{Gi}$ ) e quella derivata ( $M_Z$ ) del tipo  $M_Z = f(M_{Gi})$ .

Trattando di errori massimi, avremo il seguente valore per l'errore:

$$\varepsilon_Z = \sum_i \left| \frac{\partial f}{\partial M_{Gi}} \right| \varepsilon_{M_{Gi}} \quad (1.3)$$

e, nel caso di errore relativo (indicato con  $\varepsilon^r$ ), divideremo questo risultato per il valore  $M_G$ .

Invece, per gli errori statistici, avremo (ipotizzando indipendenza statistica tra le grandezze  $M_{Gi}$ ):

$$\sigma_Z = \sqrt{\sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial M_{Gi}} \right)^2 \sigma_{M_{Gi}}^2} \quad (1.4)$$

e, nel caso di errore relativo, divideremo questo risultato per il valore  $\overline{M}_G$ . Le espressioni (1.3) e (1.4) diventano particolarmente semplici nel caso in cui si considera l'errore relativo per una grandezza derivata esprimibile come monomio di quelle fondamentali ( $M_Z = \Pi_i (M_{Gi})^{p_i}$ ):

$$\varepsilon_Z^r = \frac{\varepsilon_Z}{M_G} = \sum_i p_i \varepsilon_{M_{Gi}}^r \quad \text{per gli errori massimi} \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_Z^r = \frac{\sigma_Z}{M_G} = \sqrt{\sum_i p_i^2 (\varepsilon_{M_{Gi}}^r)^2} \quad \text{per gli errori statistici} \quad (1.6)$$

In presenza di più sorgenti di errori casuali, l'errore massimo e l'errore statistico complessivo di una grandezza fondamentale saranno dati da:

$$\varepsilon_{tot} = \sum_i \varepsilon_i \quad \text{per gli errori massimi} \quad (1.7)$$

$$\sigma_{tot} = \sqrt{\sum_i \sigma_i^2} \quad \text{per gli errori statistici} \quad (1.8)$$

e, per una grandezza derivata, valgono le relazioni (1.3)-(1.6) nelle quali ciascun errore deve essere espresso complessivamente tramite le (1.7) e (1.8).

Verranno ora esaminati brevemente alcuni tipici errori (sistematici e casuali) commessi nella fluidodinamica sperimentale.

Errori causati dall'impianto utilizzato: appartengono a questa categoria tutti gli errori che si commettono lavorando in un ambiente limitato come una galleria del vento (o qualunque altro impianto sperimentale), come per esempio gli errori dovuti alla presenza di supporti, alla variazione indesiderata delle grandezze fluidodinamiche dell'apparato (pressione, temperatura, velocità), alla presenza delle pareti dell'impianto (crescita dello strato limite) e all'interferenza di queste con il modello (problemi di bloccaggio). Questi errori sono di solito sistematici (ma per esempio la presenza di un supporto può anche dare fluttuazioni che si trasformano in deviazioni casuali) e vanno valutati (e possibilmente corretti) prima di effettuare le misure e verranno approfonditi nella parte relativa agli impianti.

Errori causati dalla strumentazione utilizzata: ogni strumento di misura ha una sua precisione che dipende dal principio fisico su cui è basata la misura stessa, dal modo in cui tale principio viene applicato praticamente e dall'effetto sulla misura delle variazioni di condizioni ambientali. Anche in questo caso, prima di effettuare una misura, bisogna valutare la precisione della strumentazione utilizzata. Come esempio possono essere considerati gli errori di calibrazione (cioè gli errori sulle grandezze geometriche, elettriche e ottiche che influenzano la determinazione delle curve o dei parametri di calibrazione della strumentazione), gli errori introdotti dai convertitori e dai filtri del segnale, gli errori prodotti dalle schede di acquisizione e in generale gli errori dovuti alla presenza del rumore in ciascun passo del processo di misura. A questa categoria appartengono anche gli errori che si commettono con l'uso di traccianti da inserire nel flusso per misurarne alcune proprietà: la scelta di tali traccianti dovrà essere tale da minimizzare gli effetti sul campo fluidodinamico e ciò si traduce nell'impiego di sostanze non reagenti, di densità prossima a quella del fluido in esame e in quantità quanto più basse possibile (e comunque non tossiche !!). Si tratta di solito di errori casuali massimi e statistici che verranno approfonditi nella parte relativa alle tecniche di misura.

Fluttuazioni dovute alla turbolenza ed errori statistici: anche nella ipotesi teorica di assenza degli errori sistematici e casuali di cui in precedenza, si osserverebbero delle fluttuazioni delle grandezze

misurate nella fluidodinamica sperimentale causate dalla turbolenza del flusso. Queste fluttuazioni sono realmente presenti nel fluido e la loro caratterizzazione costituisce uno dei risultati che si vogliono ottenere da una campagna di misure. La teoria dell'analisi dei segnali aiuta a valutare quali errori si commettono nella trattazione di insiemi di dati (l'errore e' funzione del numero di dati acquisiti come nella (1.2)). Esempi di tali errori sono quelli associati alla valutazione dei momenti statistici, delle scale caratteristiche del flusso, delle funzioni di correlazione e degli spettri. Questi errori sono trattati come errori casuali statistici e vengono trattati nella teoria dell'analisi dei segnali.

### **1.3 RISOLUZIONE SPAZIALE E TEMPORALE DI UNA MISURA**

Quando effettuiamo una misura di una grandezza fisica, utilizziamo della strumentazione la cui parte sensibile costituisce l'elemento che interagisce con la grandezza fisica da misurare e che genera o rappresenta essa stessa il cosiddetto *volume di misura* cioè la regione di spazio nella quale viene effettuata la misura. La misurazione stessa e' effettuata valutando la risposta della strumentazione, nel suo complesso, dopo un certo intervallo di tempo detto *intervallo di misura*. Queste due quantità sono caratteristiche di ogni sistema di misura e verranno considerate in maniera specifica nella parte relativa alla descrizione dei sistemi di misura.

Tuttavia, e' importante tenere presente che queste due quantità limitano la precisione della misura dal punto di vista spaziale e temporale. Il volume di misura definisce praticamente la regione minima al di sotto della quale non e' possibile determinare le fluttuazioni nello spazio della grandezza in esame. Si definisce *risoluzione spaziale* l'inverso della dimensione minima che può essere misurata con la strumentazione utilizzata, e quindi l'inverso della dimensione minore del volume di misura: un'elevata risoluzione spaziale corrisponderà ad un volume di misura piccolo e viceversa. La risoluzione spaziale ha le dimensioni di un numero d'onda (o frequenza spaziale) e può anche essere considerata come il numero d'onda massimo ottenibile con la strumentazione utilizzata (figura 2). Allo stesso modo, l'intervallo di misura definisce l'intervallo temporale minimo al di sotto del quale non e' possibile determinare le fluttuazioni nel tempo della grandezza in esame. Si definisce *risoluzione temporale* l'inverso dell'intervallo di tempo minimo misurabile e quindi l'inverso dell'intervallo di misura. La risoluzione temporale ha dimensioni di una frequenza e può considerarsi come la massima frequenza ottenibile dal sistema di misura.

Bisogna considerare però che all'interno di un flusso turbolento sarà presente un insieme continuo di vortici aventi dimensioni spaziali decrescenti da quelli più grandi (individuati dalla cosiddetta scala integrale) a quelli più piccoli (individuati dalla scala di Kolmogorov) cui sono associate velocità, temperatura, densità e pressione caratteristici. La risoluzione spaziale fisserà un limite minimo alle scale spaziali che possono essere misurate (limite massimo alle frequenze spaziali come rappresentato in figura 2). La risoluzione temporale dell'apparato di misura fisserà un limite minimo alle scale temporali che possono essere misurate (limite massimo alle frequenze).

Per i sistemi di misura comunemente utilizzati nella fluidodinamica sperimentale è molto difficile che si riescano ad ottenere risoluzioni spaziali e temporali in grado di descrivere il comportamento del flusso fino alle scale di Kolmogorov sia nello spazio che nel tempo. Di conseguenza, bisognerà accettare un compromesso o utilizzare strumentazione differente per le indagini nel dominio spaziale e in quello temporale.

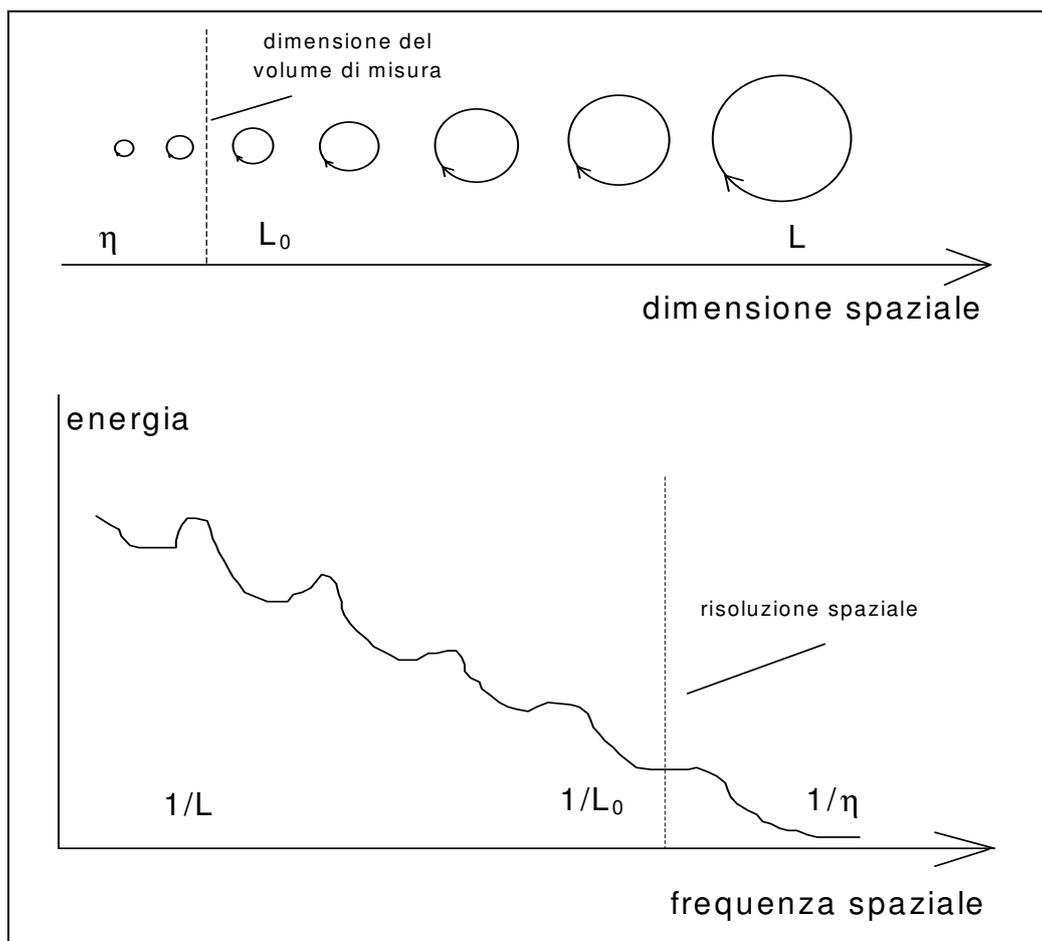


Figura 2. Effetto della risoluzione spaziale finita sulla descrizione di un insieme di strutture vorticosi di dimensione crescente (figura superiore) e corrispondente andamento nel dominio dei numeri d'onda (figura inferiore).

Bisogna anche considerare che, per quanto riguarda grandezze differenti dalla velocità, e' possibile che le scale di interesse siano ben al di sotto della scala di Kolmogorov e praticamente irraggiungibili: un esempio e' dato dalle scale tipiche della diffusione molecolare nel mescolamento di uno scalare in un fluido che sono anche 1000 volte più piccole della scala di Kolmogorov.

## 1.4 SISTEMI DI UNITA' DI MISURA

Accenniamo brevemente al problema delle unita' di misura di una grandezza fisica. Un sistema di misura e' un insieme di unita' di misura basato su grandezze fondamentali. Tale sistema deve essere indipendente dal luogo in cui si effettua la misura (sistema di misura assoluto): per esempio un sistema di misura contenente il peso del campione di riferimento sarebbe dipendente dalla quota sul livello del mare e dalla latitudine del luogo nel quale si effettua la misura; è quindi preferibile utilizzare la massa in luogo del peso del campione di riferimento. Nonostante questo, per ragioni di comodità, si usano comunque sistemi non assoluti (sistemi tecnici).

Il Sistema Internazionale (SI) ha come unita' di misura fondamentali quelle di lunghezza (metro,  $m$ ), di massa (chilogrammo,  $Kg$ ), di tempo (secondo,  $s$ ), di temperatura (grado Kelvin,  $^{\circ}K$ ), di corrente elettrica (ampere,  $A$ ), di intensità luminosa (candela,  $cd$ ) e di quantità di materia (mole,  $mol$ ). Ciascuna di queste unita' di misura fondamentali rappresenta una ben precisa quantità fisica che può essere misurata in qualsiasi punto della Terra. Da queste unita' fondamentali possono essere ottenute le unita' di misura derivate (o composte): per esempio la velocità di un oggetto è misurata in  $m s^{-1}$ . Alcune unita' derivate hanno nomi propri (newton, joule, watt, hertz etc.).

Per convertire le unita' di misura da un sistema di misura ad un altro, e' necessario utilizzare alcuni fattori di conversione dalle unita' fondamentali di un sistema a quelle di un altro. Per esempio, per quello che riguarda la pressione, valgono i seguenti fattori di conversione:

$1 \text{ atmosfera} = 1 \text{ atm} = 101325 \text{ pascal (Pa)} = 101325 \text{ N/m}^2 = 1.01325 \text{ bar}$	SI
$1 \text{ torr} = 13.59 \text{ mm H}_2\text{O} = 133.2 \text{ Pa}$	Unita' tecniche
$1 \text{ millibar} = 10^3 \text{ dina/cm}^2 = 100 \text{ Pa}$	CGS

Senza entrare ulteriormente nel dettaglio dei differenti sistemi di unita' di misura, si tenga presente che il risultato numerico di una misura deve essere affiancato dall'indicazione dell'unita' di misura usata e dell'errore commesso.

# Capitolo 2

## IL PROBLEMA DELLA SIMILITUDINE

### 2.1 GENERALITA'

Le equazioni della fluidodinamica sono equazioni dimensionali, nel senso che ogni termine possiede dimensioni fisiche uguali a quelle della grandezza considerata nell'equazione (massa, quantità di moto ed energia) per unità di volume diviso per un tempo. Di conseguenza, volendo confrontare tra loro i differenti termini per stabilire quali sono preponderanti nelle diverse condizioni di moto, bisognerebbe considerare il valore di ciascuna grandezza nelle equazioni (lunghezze, tempi, velocità, temperature, pressioni, densità...) e calcolare il valore di ogni termine. Un metodo più pratico e più utile è quello di adimensionalizzare le equazioni e formare gruppi di variabili adimensionali che possano essere confrontati tra loro. A questo proposito si utilizzano le grandezze di misura fondamentali (massa, lunghezza, tempo e temperatura) e le loro unità di misura. La forma adimensionale delle equazioni consente anche di individuare in modo univoco quante e quali sono le grandezze fondamentali necessarie a descrivere completamente un dato problema fluidodinamico senza dover ricorrere alla ricerca di esse tramite il teorema di Buckingham. I risultati ottenuti con simulazioni numeriche e/o esperimenti per dati valori delle variabili possono essere estesi alla classe più ampia di valori che mantengono invariato il gruppo adimensionale caratteristico del problema in esame.

### 2.2 FORMA ADIMENSIONALE DELLE EQUAZIONI E GRUPPI ADIMENSIONALI

Per rendere adimensionali le equazioni, si prenderanno delle grandezze caratteristiche per le variabili fluidodinamiche e termodinamiche ( $u_i$ ,  $p$ ,  $\rho$ ,  $c$  e  $T$ ) e per le variabili posizione ( $x_i$ ) e tempo ( $t$ ) (queste grandezze saranno derivate dalle condizioni al contorno e iniziali del problema e saranno indicate con il pedice  $o$ ):

$$\rho^* = \rho/\rho_o \quad u_i^* = u_i/U_o \quad p^* = p/p_o \quad t^* = t/t_o \quad x_i^* = x_i/L_o \quad T^* = T/T_o \quad (3.1)$$

dove si sono assunte pari a zero la pressione e la temperatura di riferimento,  $p'$  e  $T'$  (altrimenti al posto di  $p^* = p/p_0$  e  $T^* = T/T_0$  si scriverà  $p^* = (p - p')/p_0$  e  $T^* = (T - T')/T_0$ ).

Dall'equazione di stato, ponendo  $\rho = \rho(T, p)$ , possiamo ottenere:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\beta\rho \frac{DT}{Dt} + A\rho \frac{Dp}{Dt} \quad (2.2)$$

con  $\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}$  coefficiente di espansione termica (con dimensioni dell'inverso di una temperatura) e  $A = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{1}{a^2 \rho}$  coefficiente di compressibilità ( $1/A=K$  e' il modulo di elasticità

con la stessa dimensione della pressione). Nella relazione precedente si e' introdotta la velocità del suono nel mezzo,  $a = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)^{1/2}$ , che per una trasformazione isentropica ( $p = k\rho^\gamma$ , dove  $\gamma = c_p/c_v$  rappresenta il rapporto tra i calori specifici a pressione e volume costante) e' pari a  $(\gamma RT)^{1/2}$ . Per un gas perfetto isentropico  $\beta=1/T$  e  $A=1/\gamma p$ . Adimensionalizzando  $\beta$  e  $A$  otteniamo

$$Gu = \beta^* = \beta T_0 \quad (\text{numero di Guy Lussac})$$

$$A^* = Ap_0 \quad (\text{esprimibile tramite il numero di Mach (cfr. dopo)})$$

e l'equazione (3.2) (assumendo che il tempo scali come  $L_0/U_0$ ) diventa:

$$\frac{D\rho^*}{Dt^*} = -Gu\rho^* \frac{DT^*}{Dt^*} + A^*\rho^* \frac{Dp^*}{Dt^*} \quad (2.3)$$

Possiamo a questo punto adimensionalizzare l'equazione di conservazione della massa:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \underline{\nabla})\rho + \rho \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0$$

usando la adimensionalizzazione (3.1) e dividendo tutto per  $\rho_0 U_0 / L_0$ :

$$St \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + (\underline{u}^* \cdot \underline{\nabla}^*)\rho^* + \rho^* \underline{\nabla}^* \cdot \underline{u}^* = 0 \quad (2.4)$$

che e' la forma adimensionale dell'equazione di conservazione della massa. Si e' introdotto il gruppo adimensionale

$$St = L_0 / U_0 t_0 \quad (\text{numero di Strouhal})$$

(se il tempo caratteristico e' sostituito da una frequenza caratteristica  $f_o$ , allora il numero di Strouhal sarà definito tramite  $f_o$ ). Notiamo che se  $t_o \approx L_o/U_o$ , allora il numero di Strouhal e' circa unitario.

L'adimensionalizzazione delle equazioni di bilancio della quantità di moto (equazioni di Navier-Stokes) segue la strada percorsa in precedenza per ottenere (assumendo il coefficiente di viscosità dinamica  $\mu$  costante):

$$St \left( \rho^* \frac{\partial \underline{u}^*}{\partial t^*} \right) + \rho^* (\underline{u}^* \cdot \underline{\nabla}^*) \underline{u}^* = -\frac{1}{Ru} \underline{\nabla}^* p^* - \frac{1}{Fr^2} \rho^* \underline{k} + \frac{1}{Re} \underline{\nabla}^{*2} \underline{u}^* + \frac{1}{3Re} \underline{\nabla}^* (\underline{\nabla}^* \cdot \underline{u}^*) \quad (2.5)$$

dove  $\underline{k} = -\underline{g}/g$  e' il versore nella direzione della forza di gravita' (con verso opposto a quello della gravita'). Nell'equazione precedente si sono introdotti i gruppi adimensionali:

$$Re = U_o L_o / \nu \quad (\text{numero di Reynolds})$$

$$Fr = U_o / (g L_o)^{1/2} \quad (\text{numero di Froude})$$

$$Ru = \rho_o U_o^2 / p_o \quad (\text{numero di Rouark})$$

Nei gruppi adimensionali precedenti, qualora  $\mu$  non sia costante, sarà contenuto il valore  $\mu_o$  relativo allo stato di riferimento e resterà un termine  $\mu^*$  all'interno dell'equazione (lo stesso discorso e' valido per  $\beta$  e  $A$  già definiti e per le quantità  $K$  e  $D$  all'interno dei gruppi adimensionali che compaiono dall'equazione dell'energia e di conservazione di uno scalare).

Notiamo che, per un gas perfetto isentropico, si può scrivere:

$$Ru = \rho_o U_o^2 / p_o = \gamma U_o^2 / a^2 = \gamma Ma^2$$

dove

$$Ma = U_o / a \quad (\text{numero di Mach}).$$

Utilizzando la definizione del numero di Mach e di Rouark, le equazioni (2.3) e (2.4) diventano:

$$\frac{D\rho^*}{Dt^*} = -Gu\rho^* \frac{DT^*}{Dt^*} + \frac{Ma^2}{Ru} \frac{Dp^*}{Dt^*} \quad (2.6)$$

$$-Gu\rho^* \frac{DT^*}{Dt^*} + \frac{Ma^2}{Ru} \frac{Dp^*}{Dt^*} + \rho^* \underline{\nabla}^* \cdot \underline{u}^* = 0 \quad (2.7)$$

che rende esplicita la dipendenza dal numero di Mach nelle equazioni di stato e di continuità essendo  $A^* = A p_0 = Ma^2 / (Ru \rho^*)$  (nella (2.7) comparirà anche il numero di Strouhal una volta sviluppate le derivate sostanziali).

Nel caso di condizioni di moto turbolento, i termini aggiuntivi dovuti alla turbolenza derivano dai termini di trasporto o inerziali utilizzando la decomposizione di Reynolds. Dal punto di vista dell'analisi dimensionale e dell'importanza relativa di questi termini, bisognerà allora considerare che i termini inerziali rappresentano i termini di riferimento rispetto ai quali vengono adimensionalizzati tutti gli altri. Di conseguenza, assumendo che le fluttuazioni delle grandezze fluttuanti abbiano lo stesso ordine di grandezza delle grandezze medie (cosa che andrà altrimenti valutata per ogni situazione), i termini dovuti alla turbolenza saranno moltiplicati per un gruppo adimensionale unitario e come tali andranno confrontati con gli altri termini.

## 2.3 SIGNIFICATO DEI GRUPPI ADIMENSIONALI

Ciascuno dei gruppi adimensionali definiti in precedenza è stato ricavato come rapporto (o parte del rapporto) tra un termine dell'equazione considerata e il corrispondente termine inerziale (che in tutte le equazioni in forma adimensionale viene ad essere moltiplicato per l'unità). Di conseguenza, ciascun gruppo adimensionale può essere pensato come indicativo del rapporto tra le forze, i tempi, le velocità e le energie (o il calore) relativi a ciascun termine rispetto a quelle di inerzia:

$St$  = tempo (forza) convettivo ( $L_0/U_0$ ) / tempo (forza) locale caratteristico del fenomeno

$Re$  = forze di inerzia / forze viscosi

$Fr^2$  = forze di inerzia / forze gravitazionali

$Ru$  = pressione dinamica / pressione statica = forze di inerzia / forze di pressione

$Ma^2$  = (velocità del fluido)<sup>2</sup> / (velocità del suono)<sup>2</sup> = forze di inerzia / forze elastiche

Notiamo che ciascun numero può anche essere ottenuto direttamente da considerazioni dimensionali ( per esempio, considerando la forza di inerzia proporzionale a  $ma \approx \rho_0 L_0^2 U_0^2$  e le forze viscosi dell'ordine di  $\mu U_0 L_0$ , si ottiene proprio l'espressione del numero di Reynolds  $Re = U_0 L_0 \rho / \mu$ ).

L'aver scritto le equazioni in forma adimensionale permette di ottenere tre risultati:

- 1) determinazione di soluzioni delle equazioni in forma più generale e confronto con soluzioni numeriche più semplici (a parità di gruppi adimensionali);
- 2) individuazione delle forme asintotiche e semplificazione delle equazioni;
- 3) similitudini e analogie tra campi di moto.

Il primo punto significa che possiamo mettere a punto dei programmi di calcolo numerico per risolvere le equazioni che hanno soluzioni generali e non dipendenti dalla scelta particolare di tempi, lunghezze, velocità, temperatura, pressione e densità ma solo dalle loro combinazioni nei gruppi adimensionali. Per il secondo punto, possiamo ottenere delle equazioni semplificate che conducono a soluzioni valide solo in alcuni regimi di moto (soluzioni asintotiche). Per il terzo punto si rimanda al paragrafo seguente.

## 2.4 SIMILITUDINE

Due campi fluidodinamici si dicono simili quando è verificata l'uguaglianza tra i gruppi adimensionali necessari (e sufficienti) alla descrizione completa del fenomeno in esame. L'applicazione della similitudine permette di studiare, numericamente o sperimentalmente, un fenomeno fluidodinamico a scala diversa da quella di partenza: nel primo caso si ottengono soluzioni numeriche di validità generale, mentre nel secondo si possono effettuare prove su modelli in scala ridotta. Tuttavia, non è possibile verificare l'uguaglianza tra tutti i gruppi adimensionali (e spesso anche tra solo alcuni) e bisognerà operare una scelta di quello effettivamente fondamentale per lo studio in oggetto. Per esempio, se abbiamo un campo fluidodinamico con una corrente in presenza di superficie libera, e richiediamo la similitudine contemporanea tra il numero di Reynolds e di Froude, otteniamo le due relazioni:

$$\frac{U_1 L_1}{\nu_1} \approx \frac{U_2 L_2}{\nu_2} \quad \frac{U_1}{(gL_1)^{1/2}} \approx \frac{U_2}{(gL_2)^{1/2}} \quad (2.8)$$

dove con i pedici 1 e 2 sono indicati il primo e secondo campo fluidodinamico. Per il rapporto tra le lunghezze otteniamo:

$$\frac{L_1}{L_2} \approx \frac{U_2 \nu_1}{U_1 \nu_2} \quad \frac{L_1}{L_2} \approx \left( \frac{U_1}{U_2} \right)^2$$

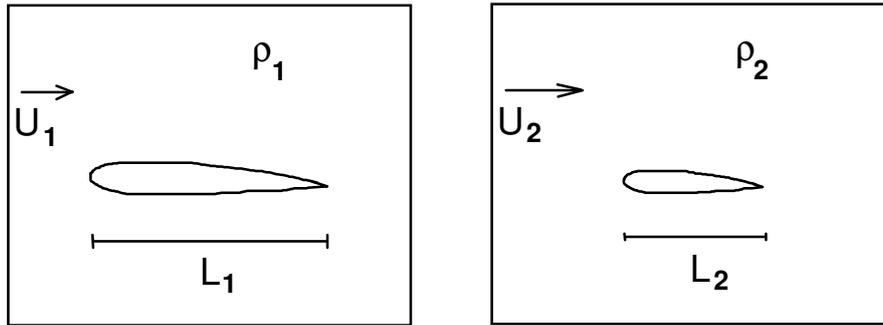


Figura 3. Similitudine geometrica, cinematica e dinamica tra campi di moto.

cioè se  $\nu_1 \approx \nu_2$  (viscosità cinematiche dei due fluidi uguali), la prima ci dice che se  $U_2 < U_1$  allora  $L_1 < L_2$ , mentre la seconda ci dice che  $L_1 \gg L_2$ . Allora, se siamo interessati più al campo di moto lontano dalla superficie libera, useremo la similitudine di Reynolds, se invece a quello in prossimità della superficie libera useremo la similitudine di Froude. L'alternativa è rimuovere la condizione di uguaglianza tra le viscosità cinematiche dei fluidi 1 e 2.

Con riferimento alla figura 3, si possono distinguere tre tipi di similitudine:

- 1) similitudine geometrica (riguarda le lunghezze);
- 2) similitudine cinematica (riguarda le lunghezze e i tempi, e quindi le velocità, e implica la 1));
- 3) similitudine dinamica (riguarda le lunghezze, i tempi e le masse, e quindi le densità e le forze, e implica la 1) e la 2)).

Come detto, l'analisi dimensionale alla Buckingham permette di individuare i gruppi adimensionali che verificano le tre similitudini, però dalle equazioni adimensionalizzate abbiamo già individuato i gruppi fondamentali che contengono le variabili geometriche, cinematiche e dinamiche e che quindi assicurano la verifica della similitudine nella sua forma più generale (cioè quella dinamica). Anche le condizioni al contorno e iniziali potranno essere considerate come condizioni di similitudine geometrica, cinematica e dinamica. La similitudine completa permette di generalizzare i risultati ottenuti su un campo di moto ad un altro avente valori di lunghezza, tempi (o velocità) e massa (o densità o forze) differenti, ma tali da dare gli stessi gruppi adimensionali.

Per quanto riguarda l'Aerodinamica Sperimentale, le similitudini più importanti per lo studio di modelli in scala sono quelle di Reynolds e Mach. La prima richiede impianti di dimensioni notevoli e/o alte velocità. Bisogna in particolare fare molta attenzione alla transizione da moto

laminare a moto turbolento: un esperimento non può essere effettuato in condizioni laminari se in realtà avviene in condizioni turbolente perché le equazioni e la fisica del problema sono differenti. Tuttavia, mentre per  $Re < 500$  la similitudine deve essere verificata esattamente, per  $Re > 10^4$  possono esserci anche differenze nel numero di Reynolds in quanto i fenomeni di tipo turbolento tendono ad avere un comportamento asintotico al crescere di Reynolds. I requisiti per il numero di Reynolds possono contrastare con la similitudine di Mach che riguarda gli effetti di compressibilità del fluido (*cfr.* equazione di conservazione dell'energia e i gruppi adimensionali ivi presenti). Si distinguono le seguenti condizioni:

- $Ma < 0.3$                       flusso incompressibile (gallerie aerodinamiche a bassa velocità, tunnel idrodinamici);
- $0.3 < Ma < 0.7$                 flusso con dipendenza non trascurabile dagli effetti di compressibilità, ma in condizioni subsoniche senza onde d'urto (gallerie aerodinamiche subsoniche (ma anche gallerie a bassa velocità se si considera l'equazione linearizzata del potenziale e si scalano opportunamente le variabili geometriche));
- $0.7 < Ma < 1.3$                 flusso in regime transonico con dipendenza importante dagli effetti di compressibilità (gallerie aerodinamiche transoniche);
- $Ma > 1.3$                         flusso in regime supersonico con dipendenza fondamentale dagli effetti della compressibilità e con onde d'urto (gallerie aerodinamiche supersoniche o ipersoniche).

Per quanto riguarda le non stazionarietà, cioè il numero di Strouhal, bisognerà distinguere se queste sono imposte dalle condizioni al contorno e iniziali (e allora la similitudine deve essere completa) o dalla presenza di instabilità locali del flusso (dove potrà essere anche parziale). Il primo caso corrisponde a forzanti esterne (eliche, elicotteri) e il secondo a scie a valle di corpi o a strati di mescolamento.

## 2.5 ANALOGIE

Lo scopo delle analogie e' quello di studiare un fenomeno fluidodinamico mediante analisi teoriche, numeriche o sperimentali su un flusso con caratteristiche del tutto diverse ma governato in definitiva da equazioni simili. Nel seguito verranno trattate due analogie fluidodinamiche: quella tra un flusso viscoso e non (analogia di Hele-Shaw) e tra un flusso compressibile e uno con superficie libera (analogia di Mach-Froude).

### 2.5.1 Analogia di Hele-Shaw

Si vuole studiare un flusso non viscoso, potenziale, bidimensionale mediante il campo di moto tridimensionale che si genera tra due piatti paralleli ravvicinati che risulta quindi essere fortemente viscoso!! In particolare verranno considerate le linee di corrente in presenza di corpi di varia forma, posizionati tra i due piatti paralleli, nell'ipotesi  $2h \ll L$  (essendo  $2h$  la distanza tra i piatti paralleli ed  $L$  la dimensione longitudinale della zona indagata). I parametri fondamentali del campo di moto in esame e il sistema di riferimento utilizzato sono indicati nella figura 4.

Il fenomeno è governato dall'equazione di conservazione della massa per flussi incompressibili e dalle equazioni di Navier Stokes. Nel nostro caso assumeremo condizioni di stazionarietà ( $St \ll 1$ ), assenza di forze di massa ( $Fr \gg 1$ ) e velocità verticale nulla ( $w = 0$ ) per ottenere:

$$\underline{\nabla}^* \cdot \underline{u}^* = 0, \quad (\underline{u}^* \cdot \underline{\nabla}^*) \underline{u}^* = -\frac{1}{Ru} \frac{1}{\rho^*} \underline{\nabla}^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \underline{u}^* \quad (2.9)$$

sul piano  $(x,y)$ , essendo  $u^*=(u^*,v^*)$  e avendo diviso per  $\rho^*$ . Questo e' un sistema di tre equazioni nelle incognite  $u^*=u^*(x,y,z)$ ,  $v^*=v^*(x,y,z)$  e  $p^*=p^*(x,y)$  (la terza equazione di Navier-Stokes fornisce  $\partial p^*/\partial z=0$  cioè  $p^*=p^*(x^*, y^*)$ ). Si sono usate la velocità indisturbata ( $U_\infty$ ) e l'altezza tra i piatti ( $h$ ) come grandezze caratteristiche per adimensionalizzare le velocità e le lunghezze (notiamo anche che, essendo la densità costante,  $\rho^*=1$ ).

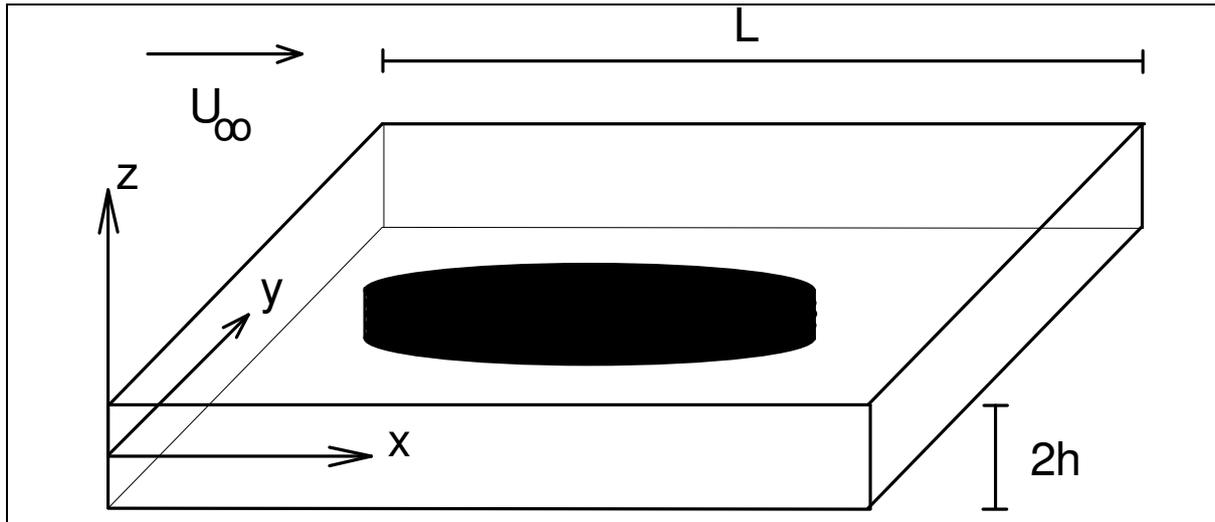


Figura 4. Parametri fondamentali e sistema di riferimento per l'analogia di Hele-Shaw.

Il sistema di equazioni precedenti è lo stesso che deve essere utilizzato per descrivere il moto incompressibile, stazionario, viscoso, bidimensionale tra due pareti (moto alla Couette): in quest'ultimo caso la componente  $v^*$  è identicamente nulla e le equazioni sono scritte per le componenti  $u^*$  e  $w^*$  (che dipenderanno solo da  $x^*$  e  $z^*$ ). Ipotizzando il moto completamente sviluppato ( $\partial/\partial x=0$ , cioè dipendenza della velocità solo dalla coordinata  $z^*$ ), dalla equazione di conservazione della massa (scritta in  $x^*$  e  $z^*$ ), si ricava che  $w=\text{cost.}=0$  (essendo  $w=0$  alla parete) e che  $u^*=u^*(z^*)$ . Dalla seconda equazione di Navier-Stokes si ottiene  $\partial p^*/\partial z^*=0$ , cioè la pressione è solo funzione della  $x^*$ . Dalla prima equazione di Navier-Stokes si ottiene allora (essendo nulli i termini inerziali):

$$\frac{1}{Ru} \frac{dp^*}{dx^*} = \frac{1}{Re} \frac{d^2 u^*}{dz^{*2}}$$

che a sinistra dell'uguaglianza è solo funzione di  $x^*$  e a destra solo di  $z^*$ . La soluzione è:

$$u^*(z^*) = \frac{Re}{Ru} \frac{dp^*}{dx^*} \frac{z^{*2}}{2} + C_1 z^* + C_2$$

Imponendo che  $u^*(\pm 1)=0$  (cioè velocità nulla sulle pareti), si ottiene  $C_1=0$  e  $C_2=-\frac{Re}{2Ru} \frac{dp^*}{dx^*}$ . Inoltre, imponendo che al centro del condotto ( $z^*=0$ ) sia  $u^*(0)=1$  si ottiene:

$$u^*(z^*) = (1 - z^{*2}) = f(z^*) \qquad \frac{dp^*}{dx^*} = -\frac{1}{2} \frac{Ru}{Re}$$

Questa è la soluzione classica del moto alla Couette (sostituendo le grandezze dimensionali si ottengono gli andamenti usuali).

Cerchiamo ora una soluzione del problema iniziale a partire da questa. In effetti, nel problema di Hele-Shaw vi sono due dimensioni caratteristiche ( $h$  e  $L$ ) e la corretta adimensionalizzazione sarà quella con  $h$  lungo  $z$  e con  $L$  lungo  $x$  e  $y$ . Le tre equazioni andranno riscritte come:

$$\underline{\nabla}^* \cdot \underline{u}^* = 0, \quad \frac{h}{L} (\underline{u}^* \cdot \underline{\nabla}^*) \underline{u}^* = -\frac{h}{L} \frac{1}{Ru} \underline{\nabla}^* p^* + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{h}{L} \right)^2 \nabla_{x,y}^{*2} \underline{u}^* + \frac{\partial^2 \underline{u}^*}{\partial z^{*2}} \right] \quad (2.10)$$

(notiamo subito che il primo termine tra parentesi sembra essere molto più piccolo del secondo, anche se bisogna prima avere un'idea dell'ordine di grandezza della derivata seconda di  $u^*$  lungo  $z^*$ ). Scriviamo la velocità come il prodotto di una parte dipendente da  $x^*$  e  $y^*$  ( $\underline{u}_0^*$ ) e una parte dipendente da  $z^*$  espressa dalla forma precedentemente trovata  $f(z^*)$

$$\underline{u}^*(x^*, y^*, z^*) = \underline{u}_0^*(x^*, y^*) f(z^*),$$

e verifichiamo se è possibile ottenere una soluzione di questo tipo.

L'equazione di continuità diventa:

$$\underline{\nabla}^* \cdot (\underline{u}_0^* f) = f \underline{\nabla} \cdot \underline{u}_0^* = 0, \quad \underline{\nabla}^* \cdot \underline{u}_0^* = 0$$

e le due equazioni di Navier-Stokes:

$$\frac{h}{L} (\underline{u}_0^* f \cdot \underline{\nabla}^*) (\underline{u}_0^* f) = -\frac{h}{L} \frac{1}{Ru} \underline{\nabla}^* p^* + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{h}{L} \right)^2 f \nabla_{x,y}^{*2} \underline{u}_0^* + \underline{u}_0^* \frac{\partial^2 f}{\partial z^{*2}} \right]$$

Essendo  $\partial^2 f / \partial z^{*2} = -2$ , effettivamente il secondo termine tra parentesi è molto più grande del primo.

Moltiplicando il tutto per  $(L/h)$  otteniamo:

$$(\underline{u}_0^* f \cdot \underline{\nabla}^*) (\underline{u}_0^* f) = -\frac{1}{Ru} \underline{\nabla}^* p^* - \frac{L}{h} \frac{2}{\text{Re}} \underline{u}_0^*$$

Se cerchiamo gli ordini di grandezza di questi termini abbiamo:

$$(1) \quad (1/Ru) \quad (L/h \ 1/Re)$$

Affinché possano essere trascurati i termini inerziali, ma non quelli viscosi (altrimenti la soluzione sarebbe banalmente quella nulla), dovrà essere:

$$\left(\frac{h}{L}\right)Re \ll 1, \quad Ru \approx \left(\frac{h}{L}\right)Re \quad (2.11)$$

cioè la condizione di Hele-Shaw, che diventa tanto più difficile da verificare quanto maggiore è il numero di Reynolds (e quindi il numero di Rouark). Sperimentalmente si trova che  $Re < 10^2$  (a questo proposito è importante sottolineare che il numero di Reynolds è costruito con  $h$  come dimensione caratteristica; nel caso in cui venga usata  $L$ , allora nella disuguaglianza precedente apparirebbe  $(h/L)^2$ ,  $h/L \sim 10^{-2}$  e la condizione è verificata).

Sotto queste condizioni l'equazione diventa:

$$-\frac{1}{Ru} \nabla^* p^* = \frac{L}{h} \frac{2}{Re} \underline{u}_0^*, \quad \text{cioè} \quad \underline{u}_0^* = -\frac{1}{2} \frac{Re}{Ru} \left(\frac{h}{L}\right) \nabla^* p^*$$

cioè il campo di velocità  $\underline{u}_0^*$  è espresso come il gradiente di una funzione scalare e quindi è irrotazionale. Inserendo questo risultato nell'equazione di continuità, otteniamo che il campo è potenziale.

Le componenti della velocità saranno:

$$u_0^*(x, y) = -\frac{1}{2} \frac{Re}{Ru} \left(\frac{h}{L}\right) \frac{\partial p^*}{\partial x^*}, \quad v_0^*(x, y) = -\frac{1}{2} \frac{Re}{Ru} \left(\frac{h}{L}\right) \frac{\partial p^*}{\partial y^*}$$

o, in forma dimensionale,:

$$u_0(x, y) = -\frac{h^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad v_0(x, y) = -\frac{h^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y}$$

che sono del tutto equivalenti alla forma che era stata ottenuta per la velocità al centro del condotto nel moto di Couette. Se introduciamo un potenziale di velocità  $\Phi_0$  ( $\underline{u}_0^* = \nabla_{\perp}^* \Phi_0 = (h/L) \nabla_{\perp}^* \Phi_0$ ) si ottiene che

$$\Phi_0(x^*, y^*) = -\left(\frac{\text{Re}}{Ru}\right) \frac{p^*(x, y)}{2} + \text{cost} \qquad \nabla^2 \Phi_0 = 0$$

cioè il campo del potenziale è proporzionale al campo di pressione. La soluzione completa è:

$$\underline{u}^*(x^*, y^*, z^*) = \frac{1}{2} \frac{\text{Re}}{Ru} \left(\frac{h}{L}\right) \nabla_{\perp}^* p^*(z^{*2} - 1)$$

Allora, per ogni valore di  $z^*$ , abbiamo uno strato con un campo di velocità bidimensionale, irrotazionale e incompressibile (e quindi potenziale) con le condizioni di velocità normale allo strato uguale a zero (gli strati non interagiscono), e velocità tangenziale non nulla (flusso non viscoso in scorrimento relativo rispetto agli altri strati). Le linee di corrente del flusso stazionario saranno quindi identiche a quelle ipotetiche di un flusso bidimensionale non viscoso. Il campo  $\underline{u}_0^*$  è irrotazionale, mentre  $\underline{u}^*$  è rotazionale (ma solo sui piani  $(x, z)$  o  $(y, z)$ ). C'è inoltre da considerare che non è in alcun modo verificata la condizione di non scorrimento su un corpo posto nella zona interna alle due piastre e che quindi in prossimità del corpo saranno presenti effetti viscosi.

E' possibile posizionare corpi di varia dimensione e forma nella zona compresa tra le due piastre e osservare le linee di corrente risultanti (che coincidono con le traiettorie nel caso stazionario). Queste avranno una linea tangente che fornirà la direzione del vettore velocità locale:

$$d\psi = -v dx + u dy$$

Il modulo delle componenti di velocità (o della componente tangenziale intorno ad un corpo) sarà dato da  $\partial\psi/\partial x$  e  $\partial\psi/\partial y$  e tramite l'equazione di Bernoulli sarà possibile determinare la pressione.

La quantità che in realtà viene misurata è la distanza  $d$  tra le linee di corrente: infatti, imponendo portata costante, si ottiene:

$$U S = U 2h d = U_{\infty} 2h d_{\infty} \qquad U = U_{\infty} (d_{\infty} / d)$$

essendo  $S$  la superficie di fluido tra due linee di corrente distanti  $d$  nel piano  $(x,y)$  e  $2h$  lungo l'asse  $z$ . Misurando le distanze  $d$  e  $d_\infty$  è quindi possibile, nota  $U_\infty$  (p.e. da misure di portata) ottenere la velocità  $U$  in una sezione qualsiasi. Se  $U_\infty$  non è nota si otterrà la velocità normalizzata rispetto al valore a monte, che, comunque, è quanto necessario per valutare il coefficiente di portanza tramite il teorema di Bernoulli nella sua forma più semplice

$$c_p = 1 - \left( \frac{U}{U_\infty} \right)^2 = 1 - \left( \frac{d_\infty}{d} \right)^2.$$

L'errore sulla misura della velocità sarà dato da:

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta U_\infty}{U_\infty} + \frac{\Delta d_\infty}{d_\infty} + \frac{\Delta d}{d} \approx \frac{\Delta U_\infty}{U_\infty} + 2 \frac{\Delta d}{d}$$

dove l'ultimo termine viene determinato dallo spessore delle linee di corrente.

Quando la condizione (2.11) non è più verificata (p.e. a causa di un aumento del numero di Reynolds), vi è un ispessimento delle linee di corrente (le particelle più vicine alle piastre interagiscono con quelle prossime al centro e gli strati non si muovono più in maniera indipendente) e le particelle a velocità maggiore (al centro) vengono deflesse, a causa della presenza di un corpo, meno di quelle più lente in prossimità della superficie delle piastre.

### 2.5.2 Analogia di Mach-Froude (o analogia idraulica)

Consideriamo un flusso in presenza di superficie libera ad un'altezza  $h$  (dal fondo) piccola rispetto alla dimensione caratteristica sul piano parallelo al fondo ( $h \ll L$ ), incompressibile ( $Ma^2/Ru \ll 1$ ,  $Gu \ll 1$ ), in condizioni non stazionarie e non viscoso ( $Re \gg 1$ ). Tale flusso sarà governato dalle equazioni:

$$\underline{\nabla}^* \cdot \underline{u}^* = 0, \quad St \left( \rho^* \frac{\partial \underline{u}^*}{\partial t^*} \right) + \rho^* (\underline{u}^* \cdot \underline{\nabla}^*) \underline{u}^* = -\frac{1}{Ru} \underline{\nabla}^* p^* - \frac{1}{Fr^2} \rho^* \underline{k} \quad (2.12)$$

(l'adimensionalizzazione è fatta rispetto a  $h$  e  $U_\infty$ ).

Sia data inoltre una condizione al contorno sulla superficie libera  $z^*=Z^*(x^*, y^*, t^*)$  con  $p^*(Z^*)=0$  come pressione di riferimento.

Per risolvere questo problema, abbiamo quindi un sistema di quattro incognite ( $u^*$ ,  $v^*$ ,  $w^*$  e  $p^*$ ) in quattro equazioni. Possiamo effettuare una sostituzione di variabile tra la componente  $w^*$  e la posizione della superficie libera  $Z^*$ . Infatti, per  $z^*=Z^*$  abbiamo:

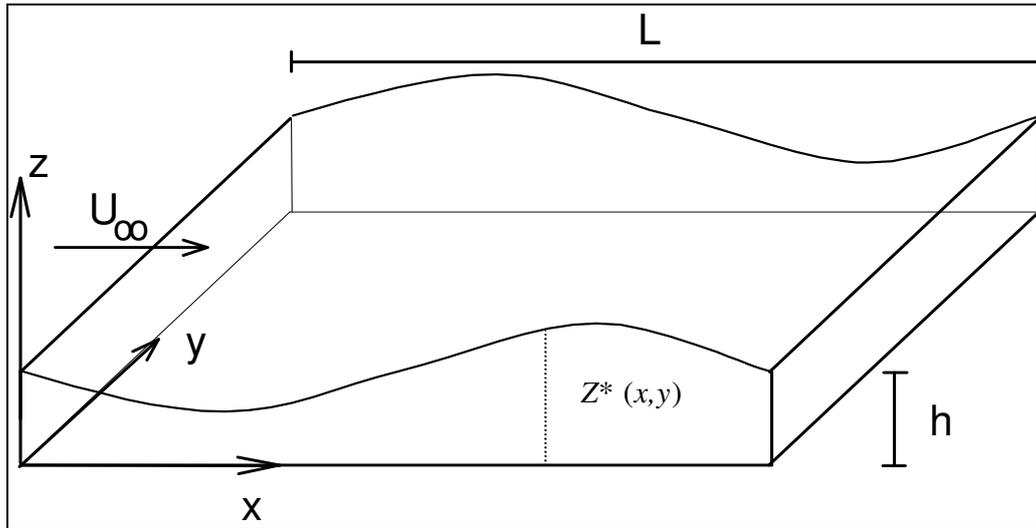


Figura 5. Parametri fondamentali e sistema di riferimento per l'analogia di Mach-Froude.

$$w^*(z^* = Z^*) = \frac{DZ^*}{Dt^*} = St \frac{\partial Z^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial Z^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial Z^*}{\partial y^*}$$

(mentre per  $z^*=0$  si imporrà  $w^*=0$ ). Le incognite saranno quindi  $u^*$ ,  $v^*$ ,  $Z^*$  e  $p^*$ .

Integriamo l'equazione di continuità in  $z^*$ :

$$\int_0^{Z^*} \left( \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) dz^* = 0$$

cioè:

$$\int_0^{Z^*} \left( \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) dz^* + w^*(Z^*) = 0$$

e infine:

$$St \frac{\partial Z^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} \left( \int_0^{Z^*} u^* dz^* \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left( \int_0^{Z^*} v^* dz^* \right) = 0 \quad (2.13)$$

Se ipotizziamo che la pressione  $p^*(x^*, y^*, z^*, t^*) = p^*(Z^*(x^*, y^*, t^*), z^*) = \rho^*(Z^*-z^*)(Ru/Fr^2)$ , cioè sia data dalla pressione idrostatica (dalla legge di Stevino,  $p=\rho g(Z-z)$ ), allora la terza equazione di Navier-Stokes (Eulero) ci dice che  $w^*=0$  lungo le traiettorie percorse dalle particelle fluide e quindi, se inizialmente nulla, la  $w^*$  si mantiene tale. D'altra parte se  $h \ll L$ , sembra ragionevole supporre che la componente verticale di velocità sia nulla (e quindi far discendere la legge di Stevino). In questo caso, il gradiente di pressione verrà a dipendere solo da  $x^*$  e  $y^*$  e, dalle altre due equazioni, si ottiene (essendo sia  $\rho$  che  $g$  costanti):

$$\rho^* \frac{Du^*}{Dt^*} = f(x^*, y^*, t^*)$$

se inizialmente il fluido è a riposo in direzione verticale. Abbiamo quindi che:

$$\begin{cases} u^* = u^*(x^*, y^*, t^*) \\ v^* = v^*(x^*, y^*, t^*) \\ w^* = 0 \end{cases}$$

Dalla eq. (2.13) otteniamo:

$$St \frac{\partial Z^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} (u^* Z^*) + \frac{\partial}{\partial y^*} (v^* Z^*) = 0 \quad (2.14)$$

e dalla prime due equazioni di Eulero (essendo  $\nabla p^* = (\rho^* Ru/Fr^2) \nabla Z^*$ ):

$$\begin{cases} St \left( \rho^* \frac{\partial u^*}{\partial t^*} \right) + \rho^* \left( u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = - \frac{\rho^*}{Fr^2} \frac{\partial Z^*}{\partial x^*} \\ St \left( \rho^* \frac{\partial v^*}{\partial t^*} \right) + \rho^* \left( u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) = - \frac{\rho^*}{Fr^2} \frac{\partial Z^*}{\partial y^*} \end{cases} \quad (2.15)$$

Abbiamo quindi tre equazioni nelle incognite  $u^*$ ,  $v^*$  e  $Z^*$  ( $p^*$  è determinato dalla legge di Stevino).

Moltiplicando la (2.14) per  $\rho^*$  e le (2.15) per  $Z^*$ :

$$\begin{cases} St \frac{\partial(\rho^* Z^*)}{\partial t^*} + \frac{\partial(\rho^* u^* Z^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(\rho^* v^* Z^*)}{\partial y^*} = 0 \\ Z^* St \left( \rho^* \frac{\partial u^*}{\partial t^*} \right) + \rho^* Z^* \left( u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = - \frac{\rho^*}{2Fr^2} \frac{\partial Z^{2*}}{\partial x^*} \\ Z^* St \left( \rho^* \frac{\partial v^*}{\partial t^*} \right) + \rho^* Z^* \left( u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) = - \frac{\rho^*}{2Fr^2} \frac{\partial Z^{2*}}{\partial y^*} \end{cases}$$

possiamo definire la densità e la pressione superficiali:

$$\bar{\rho}^* = \rho^* Z^* \qquad \bar{p}^* = \bar{\rho}^* Z^* = \rho^* Z^{2*}$$

per ottenere:

$$\left\{ \begin{array}{l} St \frac{\partial \bar{\rho}^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(\bar{\rho}^* u^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(\bar{\rho}^* v^*)}{\partial y^*} = 0 \\ \bar{\rho}^* St \left( \frac{\partial u^*}{\partial t^*} \right) + \bar{\rho}^* \left( u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{1}{2Fr^2} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x^*} \\ \bar{\rho}^* St \left( \frac{\partial v^*}{\partial t^*} \right) + \bar{\rho}^* \left( u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{1}{2Fr^2} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial y^*} \end{array} \right. \quad (2.16)$$

che sono del tutto analoghe alle equazioni di Eulero che si ottengono nel caso bidimensionale, compressibile, non viscoso in assenza di forze di gravità (con un'equivalenza tra il numero di Froude al quadrato moltiplicato per 2 e quello di Rouark). Notiamo, in particolare, che i due campi di velocità sono equivalenti e che i campi di pressione e densità sono entrambi determinati dall'altezza della superficie libera  $Z^*$ . Notiamo anche che la pressione superficiale è del tipo:

$$\bar{p}^* = \bar{\rho}^* Z^* = \frac{\bar{\rho}^{*2}}{\rho^*} = \text{cost. } \bar{\rho}^{*2}$$

cioè una trasformazione politropica del tipo  $p = K\rho^\gamma$  (dove  $\gamma$  è il rapporto tra i calori specifici) con  $\gamma = 2$  (mentre di solito è compreso tra 1 e 5/3), cui corrisponde una velocità del suono:

$$\bar{a} = \left( \frac{\gamma \bar{p}}{\bar{\rho}} \right)^{1/2} = \left( \frac{2\bar{p}}{\bar{\rho}} \right)^{1/2} = (2Z^*)^{1/2}$$

Per una politropica con  $\gamma = 2$  vale anche:

$$\frac{1}{Ru} = \frac{p_0}{\rho_0 U_0^2} = \frac{a^2}{2U_0^2} = \frac{1}{2Ma^2}$$

che prova l'analogia tra numeri di Froude e Mach.

Inoltre, è possibile far corrispondere all'equazione per l'energia di un gas isentropico e non viscoso ( $T_0/T = 1+Ma^2/2$ , con  $\gamma=2$ ), l'equazione di conservazione dell'energia per un fluido

incompressibile, in presenza di superficie libera ( $h/Z = 1 + Fr^2/2$ ), cosa che ci permette di completare la seguente tabella (dove si è anche inserito il rapporto tra le frequenze caratteristiche di un fenomeno in aria ( $\omega$ ) e in acqua ( $\Omega$ ), che è funzione del rapporto tra la velocità del suono in aria e quella delle onde sulla superficie libera dell'acqua ( $c \approx (gh)^{1/2}$ , come può essere ottenuto dall'uguaglianza del numero di Strouhal):

Flusso compressibile	Flusso incompressibile (a superficie libera)
$Ma$	$Fr$
$\rho/\rho_0$	$Z/h$
$p/p_0$	$(Z/h)^2$
$T/T_0$	$Z/h$
$\omega/\Omega$	$a/c$

Di conseguenza, un flusso incompressibile, bidimensionale, non viscoso, a superficie libera, con  $h \ll L$ , corrisponde ad un flusso compressibile, bidimensionale, non viscoso (entrambi non stazionari). In entrambi i casi può essere introdotto un potenziale di velocità,  $\Phi$ , e, utilizzando l'equazione dell'energia, l'equazione di conservazione della massa può essere trasformata in una equazione per il potenziale. Quest'ultima equazione, nell'ipotesi di piccole perturbazioni per il campo di velocità ( $u', v' \ll U_\infty$ ) e per la geometria (*p.e.* profilo con spessore molto minore della corda), diventa rispettivamente:

$$(1 - Ma^2) \nabla^2 \Phi = 0 \qquad (1 - Fr^2) \nabla^2 \Phi = 0$$

(valide solo per  $Ma \neq 1$  e  $Fr \neq 1$ ). Abbiamo le seguenti equivalenze:

$$\begin{array}{ll} Ma < 1 & \text{regime subsonico} \\ Ma > 1 & \text{regime supersonico} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} Fr < 1 & \text{regime subcritico} \\ Fr > 1 & \text{regime supercritico} \end{array}$$

Allora, nel caso  $Fr > 1$ , potremo, attraverso questa analogia, osservare la formazione delle onde d'urto e la loro configurazione stazionaria, mentre nel caso  $Fr < 1$  potremo verificare la sopraelevazione della superficie libera (cioè l'andamento della pressione) in prossimità di corpi

immersi. Si noti che tutti i numeri caratteristici sono stati adimensionalizzati con  $h$ ; nel caso in cui si usi la dimensione longitudinale  $L$ , allora la condizione  $Re \gg 1$  diventa:

$$\text{Re}\left(\frac{h}{L}\right) \gg 1$$

E' possibile verificare questa analogia nella cosiddetta tavola ad acqua nella quale in corrispondenza di restringimenti (ugelli) o allargamenti di sezione o in presenza di ostacoli di varia forma si osserva la formazione di onde sulla superficie libera la cui conformazione è analoga a quella che si osserva in un flusso compressibile caratterizzato da un rapporto tra i calori specifici pari a 2. Attraverso la ripresa di queste configurazioni della superficie libera è possibile ottenere per esempio l'andamento del coefficiente di pressione intorno ad un profilo alare, la frequenza caratteristica dei vortici nella scia di un cilindro (scia di Von Karman) o l'inclinazione delle onde d'urto che si vengono a formare intorno a corpi di varia forma. L'errore risultante dipenderà dalla lunghezza d'onda prodottasi sulla superficie libera e dalla digitalizzazione del sistema di ripresa.

# Capitolo 3:

## IMPIANTI PER STUDI SPERIMENTALI DI FLUIDODINAMICA

### 3.1 GENERALITA'

Gli impianti utilizzati nella sperimentazione in campo aeronautico hanno lo scopo di riprodurre le condizioni del flusso intorno ad un oggetto di interesse aerodinamico in modo più possibile fedele a quanto avviene nella realtà. Al fine di contenere i costi, verranno realizzati modelli in scala ridotta degli oggetti in esame intorno ai quali studiare l'andamento del campo fluidodinamico. Il requisito della scala ridotta impone comunque di soddisfare l'uguaglianza dei numeri caratteristici come descritto nel capitolo precedente.

Per quello che riguarda il numero di Mach, distingueremo due classi di impianti:

- gallerie a bassa velocità (subsoniche,  $Ma < 1$ );
- gallerie ad alta velocità (supersoniche e ipersoniche,  $Ma \geq 1$ ).

Nei primi gli effetti della compressibilità del flusso verranno trascurati completamente.

Per quello che riguarda il numero di Reynolds, i requisiti di scala ridotta e di similitudine dinamica, richiederebbero velocità di prova superiori a quelle reali. In effetti, non essendo questo realizzabile (anche per non dover altrimenti considerare gli effetti di compressibilità), si cerca almeno di verificare la condizione sul numero di Reynolds:  $Re > Re_{critico}$  dove  $Re_{critico}$  è un valore al di là del quale gli effetti del numero di Reynolds sono bassi (tipicamente dell'ordine di qualche decina di migliaia). A questo proposito, rivestono particolare importanza gli studi di base sulle variazioni delle quantità fluidodinamiche al crescere del numero di Reynolds. In alcuni casi si ricorre ad impianti speciali (gallerie pressurizzate, vasche idrodinamiche) per raggiungere l'uguaglianza del numero di Reynolds.

Per tutti gli impianti vi sono alcuni parametri fondamentali che consentono di valutare l'attendibilità delle prove sperimentali da effettuarsi presso l'impianto stesso. Tra questi i più importanti sono:

- dimensioni della sezione di prova;
- velocità massima e minima nella sezione di prova;
- livello di turbolenza (fluttuazioni delle componenti di velocità);
- temperatura, densità e pressione (soprattutto per gallerie ad alta velocità e gli impianti speciali);
- efficienza dell'impianto.

Tra gli altri parametri da non trascurare vi sono l'accessibilità alla sezione di prova (per inserire strumentazione di misura e per effettuare visualizzazioni), il costo di esercizio, le dimensioni complessive dell'impianto, la rumorosità ed in generale l'inquinamento ambientale che tale impianto comporta. La richiesta di migliorare uno di questi parametri è spesso in conflitto con gli altri ed è necessario ottenere un compromesso: per esempio, al crescere delle dimensioni della sezione di prova, aumentano il costo di esercizio, le dimensioni complessive e la rumorosità dell'impianto a favore di un aumento del numero di Reynolds.

È importante mettere in evidenza che, mentre nel caso reale è di solito il corpo (velivolo, autoveicolo..) che si muove nel fluido, nelle prove su modelli è il fluido in moto ad investire il corpo. Di conseguenza, pur nel pieno rispetto del principio di relatività galileiana, il campo di moto intorno ai modelli presenterà delle fluttuazioni (dovute alla turbolenza del flusso) che non sono presenti nel caso reale. È questo il motivo per cercare di ridurre il più possibile il livello di turbolenza negli impianti per studi sperimentali. Diverse sono le situazioni nelle quali si vuole indagare proprio l'effetto della turbolenza per esempio all'interno di condotti, nello strato limite di parete o all'uscita di getti.

Le differenti categorie di impianti vengono descritte separatamente nel seguito.

### **3.2 GALLERIE DEL VENTO A BASSA VELOCITÀ**

Vi sono due tipi di gallerie del vento a bassa velocità: a circuito aperto e a circuito chiuso. Nelle prime l'aria fluisce lungo una linea dall'ingresso all'uscita, mentre, in quelle a circuito chiuso, l'aria percorre un cammino chiuso per tornare al punto di partenza. Le gallerie a circuito aperto sono sempre a sezione di prova chiusa in quanto in tale sezione la pressione, per il teorema di Bernoulli, è sempre inferiore a quella atmosferica e quindi, nel caso di sezione di prova aperta, ci sarebbe un flusso richiamato dall'esterno verso l'interno della camera di prova. Le gallerie a

circuito chiuso possono funzionare sia con sezione aperta che chiusa. Si riportano alcuni vantaggi e svantaggi dei due tipi di gallerie:

- gallerie a circuito aperto:

vantaggi: costi di costruzione, scarico in aria dei fumi;

svantaggi: aria non controllata in ingresso, rumorosità, costi di esercizio;

- gallerie a circuito chiuso:

vantaggi: qualità del flusso, costi di esercizio, poca rumorosità;

svantaggi: costi di costruzione, pulizia, raffreddamento.

Gli elementi caratteristici di una galleria del vento a bassa velocità (riportati nella figura 6) sono:

- sezione di ingresso;
- camera di calma e nido d'ape;
- convergente;
- sezione di prova;
- diffusore (o divergente);
- compressore (o ventilatore);
- contrazione;
- secondo diffusore;
- elementi angolari di deviazione del flusso;
- sistema di raffreddamento;
- sistema di aspirazione dello strato limite.

Ciascuno di essi verrà trattato con maggiore dettaglio nel seguito; si faccia riferimento al testo di Rae e Pope per ulteriori approfondimenti su tali elementi e per la determinazione delle specifiche progettuali di ciascuno di essi.

### 3.2.1 Sezione di ingresso

E' presente solo nelle gallerie a circuito aperto ed é fatta a forma di imbuto per raccogliere quanta più aria possibile verso la camera di calma.

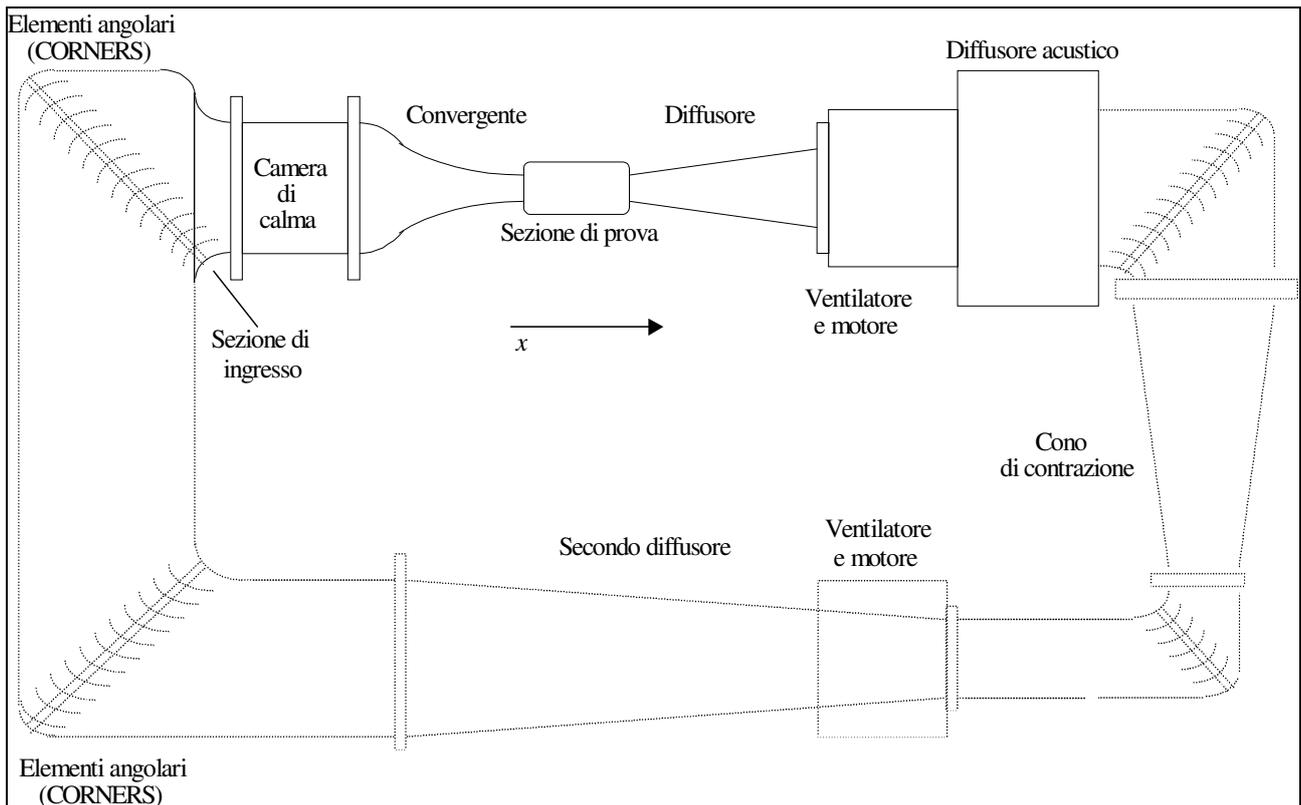


Figura 6. Schema geometrico ed elementi fondamentali di una galleria del vento a bassa velocità (con linee punteggiate sono indicate le parti caratteristiche solo di un impianto a circuito chiuso).

### 3.2.2 Camera di calma

È costituita da un tronco di cilindro; al suo interno la velocità del flusso deve essere la più bassa possibile per eliminare i vortici a larga scala che possono formarsi nelle sezioni a monte. A tale scopo la camera di calma presenta dei nidi d'ape, cioè dei canali a sezione circolare o quadrata (di dimensione trasversale pari a circa 1/10 di quella longitudinale), seguiti da reticoli di fili di passo decrescente. L'effetto di tali apparati è quello di uniformare il profilo di velocità (che risente della presenza a monte di curvature (gallerie chiuse) o di pareti (gallerie aperte)).

In generale, a valle della camera di calma, la turbolenza può essere considerata isotropa (non dipendente dalla direzione) per distanze assiali  $x > 20 M$  (essendo  $M$  il passo del reticolo finale); per quello che riguarda l'omogeneità, è necessario allontanarsi fino a  $x > 80 M$  per ottenerla in maniera completa. Al variare della distanza  $x$ , vi è un decadimento dell'energia cinetica turbolenta cioè delle fluttuazioni quadratiche di velocità:

$$u'^2 = u'^2 + v'^2 + w'^2 \cong 3u'^2$$

(l'ultima uguaglianza vale nel caso isotropo), che, sperimentalmente, si trova essere:

$$\left(\frac{u_1^2}{\bar{U}^2}\right)^{-1} \cong \frac{c}{C_d} \left[ \frac{x}{M} + \left(\frac{x}{M}\right)_0 \right]^n$$

essendo  $\bar{U}$  la velocità media,  $c \approx 100$ ,  $n \approx 1$ ,  $C_d = \frac{(d/M)(2-d/M)}{(1-d/M)^4}$ , dove  $d$  é il diametro dei fili

della rete (coefficiente di resistenza per unità di area) e  $(x/M)_0 \approx 5 \div 6$  (origine virtuale).

La legge di decadimento e' più o meno lineare. Questa legge determina la lunghezza della camera di calma a valle dei nidi d'ape e dei reticoli richiesta al fine di ottenere le fluttuazioni di velocità volute (di solito qualche frazione percentuale (0.1÷0.2)%). Gli esperimenti hanno confermato la validità della legge per  $Re_M = \frac{M\bar{U}}{\nu} > 5000$ .

### 3.2.3 Convergente

Ha un triplice scopo e cioè aumentare la velocità media del flusso che esce dalla camera di calma fino al valore desiderato per la sezione di prova, ridurre ulteriormente le fluttuazioni di velocità e infine ridurre lo spessore dello strato limite.

L'aumento di velocità é conseguenza della equazione di conservazione della massa che, nel caso di basse velocità, viene integrata sulla sezione a monte e a valle del convergente:

$$\int_V (\nabla^* \cdot \underline{U}^*) dV = 0$$

usando il teorema della divergenza  $\int_S (\underline{U} \cdot \underline{n}) ds = 0$  e scrivendo il risultato sulle sezioni di ingresso,  $A_i$ , di uscita,  $A_u$ , (dove  $\underline{U}$  é parallelo ad  $\underline{n}$ ) e sulle sezioni laterali ( $\underline{U}$  ortogonale ad  $\underline{n}$ ), si ottiene:

$$\int_{A_i} U_i dS_i - \int_{A_u} U_u dS_u = 0$$

Trascurando per semplicità gli effetti viscosi ( $U_i = cost$  e  $U_u = cost$ ), otteniamo:

$$U_i A_i \cong U_u A_u \quad \text{cioè} \quad U_u \cong U_i \left( \frac{A_i}{A_u} \right) = U_i \cdot c \quad (3.1)$$

Il rapporto  $A_i/A_u$  é detto rapporto di contrazione ed é indicato con la lettera  $c$ . Essendo  $c$  dell'ordine di  $5 \div 50$ , otteniamo un incremento della velocità media a valle del convergente di questo ordine di grandezza.

La riduzione delle fluttuazioni di velocità é un fatto osservato sperimentalmente con variazioni dell'ordine di:

$$\frac{u'_u}{u_i} \approx \frac{1}{c^2}, \quad \frac{v'_u}{v_i} \approx \frac{1}{\sqrt{c}}, \quad \frac{w'_u}{w_i} \approx \frac{1}{\sqrt{c}}, \quad (3.2)$$

cioè la riduzione per le componenti trasversali é molto minore di quella longitudinale.

Per quanto riguarda la riduzione dello spessore dello strato limite, questo effetto é dovuto al gradiente di pressione favorevole (poiché aumenta la velocità, per il teorema di Bernoulli diminuisce la pressione ) che impedisce il distacco e l'aumento di spessore dello strato limite (che invece si ha in un divergente).

#### 3.2.4 Sezione di prova

Come già detto, queste sono prevalentemente chiuse nel caso di gallerie a circuito aperto, e aperte o chiuse per quelle a circuito chiuso. Le pareti possono essere leggermente divergenti per compensare l'aumento di spessore dello strato limite nella sezione stessa. Può essere a sezione circolare, ma preferibilmente é a sezione quadrata o rettangolare per facilitare l'accesso ottico e l'inserimento di modelli o di strumentazione.

#### 3.2.5 Diffusore (o divergente)

Vi é un unico diffusore per una galleria a circuito aperto e due diffusori in circuito chiuso. Il diffusore ha il duplice scopo di allontanare l'elica del propulsore dalla sezione di prova e di ridurre le perdite di energia cinetica all'uscita della sezione stessa rallentando il flusso. Infatti poiché la potenza,  $W$ , di un flusso d'aria a velocità  $U$ , di densità  $\rho$ , in una sezione di prova di dimensioni  $A \times L$  (dove  $A$  e' la sezione e  $L$  la lunghezza) è data dall'energia cinetica,  $E_c$ , diviso l'intervallo  $\Delta t$ :

$$W = \frac{E_c}{\Delta t} \cong \frac{1}{2} \rho \frac{U^2 AL}{L/U} = \frac{1}{2} \rho U^3 A,$$

e la parte di potenza che verrà dissipata per effetti viscosi sarà moltiplicata per un coefficiente  $K$ :

$$\Delta W \cong K \frac{1}{2} \rho U^3 A,$$

ne consegue che la potenza dissipata é proporzionale alla terza potenza di  $U$ . Se allora realizziamo un divergente possiamo diminuire la velocità  $U$  e quindi a valle del divergente avere (indicando con il pedice  $d$  le quantità a valle del divergente e con  $p$  quelle nella sezione di prova):

$$(\Delta W)_d \cong (\Delta W)_p \left( \frac{U_d}{U_p} \right)^3 \left( \frac{A_d}{A_p} \right) = (\Delta W)_p \left( \frac{U_d}{U_p} \right)^2$$

essendo  $A_d U_d = A_p U_p$ . Si viene quindi a realizzare una notevole riduzione della potenza dissipata. D'altra parte l'angolo di apertura del diffusore,  $\alpha$ , non può essere aumentato oltre un certo valore ( $2\alpha < 10^\circ$ ), altrimenti potrebbero verificarsi dei gradienti di pressione avversi che provocherebbero il distacco dello strato limite. L'effetto complessivo sarebbe quello di un restringimento della sezione del diffusore che porterebbe ad un nuovo aumento delle perdite. Inoltre, si formerebbero disturbi, conseguenti alle variazioni di pressione, che potrebbero influenzare anche la sezione di prova.

### 3.2.6 Compressore (o ventilatore)

Vi sono due considerazioni fondamentali che guidano la scelta del posizionamento del ventilatore. La prima è che questo lavora in condizioni ottimali quando è immerso in un flusso il più possibile uniforme e la seconda deriva dal fatto che il costo è all'incirca proporzionale al suo diametro. Di conseguenza, è preferibile posizionare il ventilatore in una zona con sezione piccola (escludendo quindi la camera di calma) e a valle di una sezione sufficientemente rettilinea (escludendo quindi i lati brevi di una galleria chiusa). Per le gallerie aperte la scelta ricade sempre a valle del diffusore (che quindi, anche per i motivi di costo del ventilatore, non deve essere troppo divergente), mentre per quelle chiuse nel ramo di ritorno.

Il ventilatore è essenzialmente un *compressore assiale o centrifugo*, ma, a differenza di un propulsore aeronautico, opera in un ambiente chiuso e con area costante senza aumento di velocità attraverso di esso. La sua funzione è quella di compensare le perdite e le cadute di pressione dovute all'attrito in tutta la galleria e sul modello inserito nella sezione di prova. Per dimensionare correttamente un ventilatore, bisogna considerare che l'equazione di conservazione della massa predice che la velocità vari in proporzione inversa all'area della sezione di galleria considerata (3.1). D'altra parte, le perdite per attrito andranno ad influenzare l'altro termine presente nell'equazione di Bernoulli (oltre a quello contenente la velocità) e cioè la pressione

$$p + \frac{1}{2} \rho V^2 = \text{cost} \quad \left( p + \frac{1}{2} \rho V^2 \neq \text{cost} \text{ nel caso viscoso} \right).$$

Indichiamo con  $\Delta p$  la caduta di pressione tra due sezioni della galleria; la forza di attrito é quindi equilibrata dal prodotto  $\Delta p A$  (essendo  $A$  l'area della sezione considerata). La potenza dissipata sar  allora  $\Delta p AU$  e, in forma adimensionale, si utilizzer  il coefficiente di potenza dissipata

$$K_j = \frac{\Delta p_j AU_j}{\frac{1}{2} \rho U_j^2 AU_j} = \frac{2 \Delta p_j}{\rho U_j^2}$$

per la  $j$ -esima sezione in cui e' stato diviso l'impianto (la quantit   $2 \Delta p_j / \rho U_j^2$    a volte indicata con  $\eta_j$  ed   detta coefficiente di caduta ed   differente per ogni elemento della galleria). Rappresenta l'equivalente del coefficiente di resistenza,  $C_d$ , utilizzato nello studio di corpi in una corrente fluida. Il ventilatore deve essere in grado di bilanciare queste perdite complessive (che si verificano in ogni sezione della galleria):

$$K_t = \frac{2}{\rho} \sum_j \left( \frac{\Delta p_j}{U_j^2} \right) = \frac{2}{\rho U_0^2} \sum_j \Delta p_j \left( \frac{U_0}{U_j} \right)^2 = \frac{2}{\rho U_0^2} \Delta h \quad K_t = \sum_j \eta_j \leq 1 \quad (3.3)$$

avendo esteso la somma a tutti gli elementi della galleria ed avendo indicato con  $\Delta h$  la caduta complessiva di pressione e con  $U_0$  la velocit  riferita alla sezione di prova.

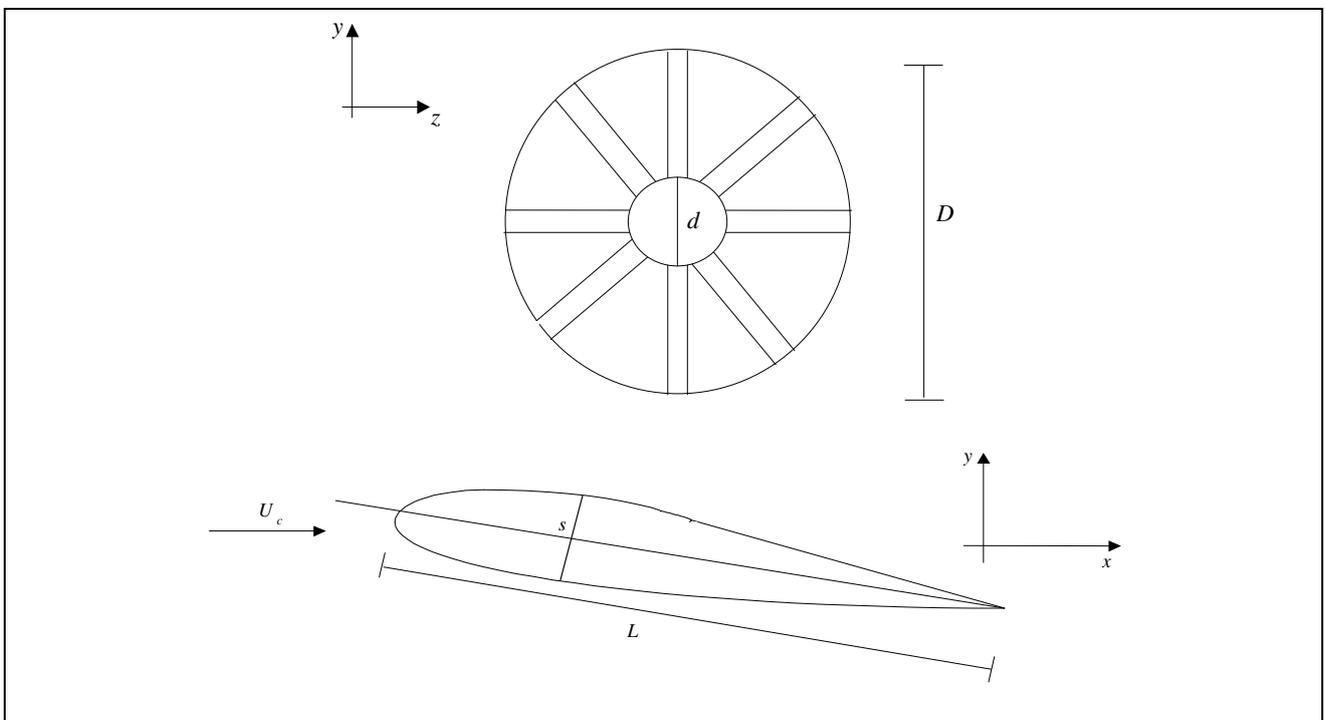


Figura 7. Elementi fondamentali di un ventilatore per galleria del vento: nella parte superiore della figura e' mostrata una vista perpendicolare al flusso medio (direzione  $x$ ) e nella parte bassa una vista parallela.

L'espressione (3.3) deve essere valutata per esempio calcolando la  $\Delta p$  in ogni sezione della galleria (tipicamente si ha  $K_t \approx 0.2$  per gallerie a circuito aperto e  $K_t \approx 0.15$  per gallerie a circuito chiuso che presentano quindi minori perdite relative e quindi minori costi di esercizio). In una galleria a circuito chiuso, pur essendovi un maggior numero di elementi rispetto ad una a circuito aperto (corner, divergenti,...), il fluido è già in moto e non deve essere accelerato a partire da una velocità quasi nulla; a tal proposito, è utile ricordare che il coefficiente di attrito ( $\lambda$  o  $C_d$ ) è maggiore alle basse piuttosto che alle alte velocità. Alle pagg. 86-93 del libro di Rae e Pope è esposto un metodo per effettuare la valutazione della (3.3) ed in tabella a pag. 91 vi sono alcuni valori del coefficiente  $K$  per differenti sezioni di una galleria del vento. È anche possibile calcolare la potenza che deve essere fornita dal fan,  $P_f$ , moltiplicando la caduta di pressione totale per la sezione in corrispondenza del fan e la velocità del flusso:  $P_f = A_c U_c \Delta p_{tot} = \pi (D_c/2)^2 U_c K_t \rho U_o^2/2$ . Tipici valori sono 50÷100 kW (l'effettiva potenza elettrica sarà divisa per un'efficienza pari a circa 0.8).

Un ventilatore è caratterizzato da 5 parametri fondamentali (vedi figura 7):

1. diametro esterno  $D$  ;
2. diametro del mozzo  $d$  ;
3. spessore delle pale  $s$  ;
4. corda della pala  $L$  ;
5. numero delle pale  $n$  .

La pala è un profilo alare molto allungato ( $s < L/10$ ). L'effetto dell'estremità della pala sul campo fluidodinamico è ridotto il più possibile avvicinando il ventilatore alle pareti del condotto (che quindi deve possibilmente essere cilindrico in quella sezione). Per ridurre l'effetto delle non stazionarietà sul campo di moto, il numero delle pale è di solito elevato ( $n > 10$ ).

Una valutazione di massima delle prestazioni del ventilatore può essere fatta tramite la *teoria dell'elemento di pala*. Poiché le pale ruotano con velocità angolare  $\omega$  diretta lungo l'asse  $x$ , vi sarà una velocità della pala  $\underline{V}_p = \underline{\omega} \times \underline{r}$  diretta tangenzialmente, di modulo  $\omega r$  (cioè funzione della distanza dal mozzo). Se definiamo l'angolo di avanzamento  $\Phi(r) = \arctg(\omega r/U_c)$  (essendo  $U_c$  la velocità in corrispondenza del compressore) come l'angolo al vertice del triangolo di lati  $U_c \Delta t$  e  $V_p(r) \Delta t$ , allora, considerando l'angolo di incidenza a riposo  $\beta(r)$  (che può essere funzione di  $r$  se c'è svergolamento del profilo), abbiamo che l'angolo di incidenza aerodinamica è dato da (vedi figura 8):

$$\alpha(r) = \beta(r) + \Phi(r) \cong \beta(r) + \frac{\omega r}{U_c} \quad \text{se } U_c \gg \omega r$$

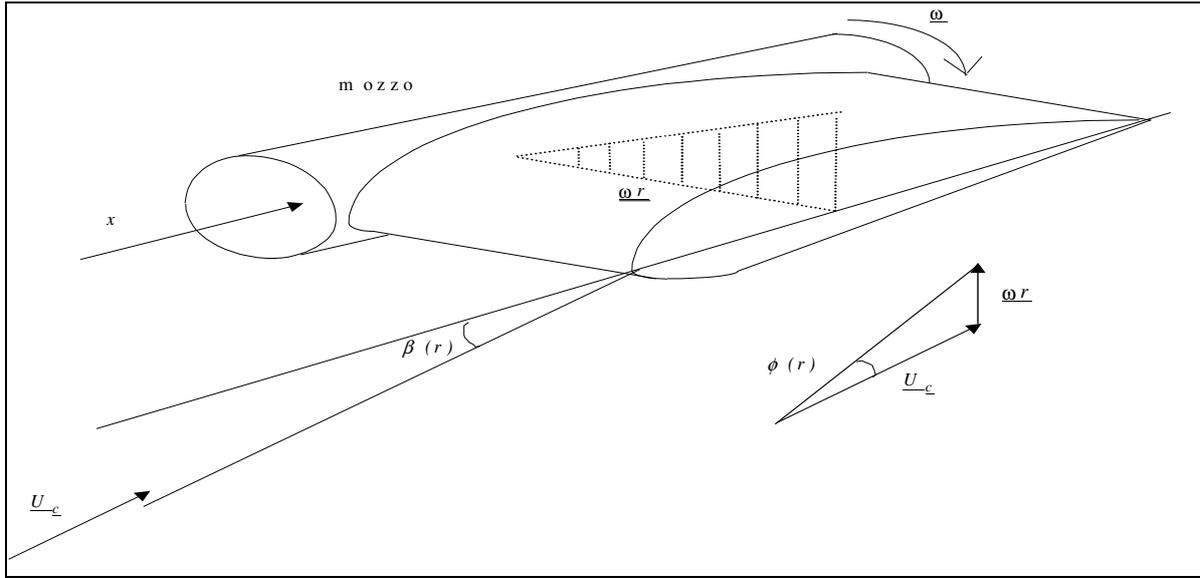


Figura 8. Configurazione geometrica del ventilatore rispetto alla direzione della corrente in galleria: angoli di incidenza, di svergolamento e andamento della velocità angolare lungo l'apertura della pala.

(notiamo anche che la velocità all'estremità del profilo assume in modulo un valore pari a  $\left[U_c^2 + (\omega D/2)^2\right]^{1/2}$ , che deve essere minore della velocità del suono nel mezzo per evitare condizioni transoniche che comporterebbero un aumento di resistenza e di rumore).

In assenza di rotazione vi sarà una portanza ( $L_0$ ) ortogonale alla direzione della corrente incidente caratterizzata da un coefficiente di portanza pari a  $C_{L_0} \approx 2\pi \beta(r)$ . Con riferimento alla figura 9, e in maniera simile a quanto avviene per l'ala finita, a causa della rotazione del ventilatore, vi sarà una portanza effettiva ( $L_e$ ) diretta ortogonalmente alla direzione che forma un angolo  $\phi(r)$  con la direzione della corrente incidente. Tale portanza effettiva darà origine ad una forza diretta parallelamente alla corrente che tenderebbe a spingere verso monte la pala (le forze ortogonali alla direzione della corrente vengono assorbite dai supporti del ventilatore). A causa della reazione vincolare, si genererà una componente propulsiva ( $S$ ) data da (per unità di apertura alare della pala):

$$dS(r) = dL_e(r) \sin \phi(r) = dL_0(r) \operatorname{tg} \phi(r) = C_{L_0}(r) \frac{1}{2} \rho U_c^2 L dr \cdot \operatorname{tg} \phi(r) = \frac{C_{L_0}(r) \rho U_c L dr \omega r}{2},$$

e la forza propulsiva complessiva si troverà integrando da  $d/2$  a  $D/2$ :

$$S = \int_{d/2}^{D/2} \frac{C_{L_0}(r) \rho U_c L \omega r dr}{2} \cong \frac{C_{L_0} \rho U_c L \omega}{16} (D^2 - d^2) \cong \frac{C_{L_0} \rho U_c L \omega D^2}{16},$$

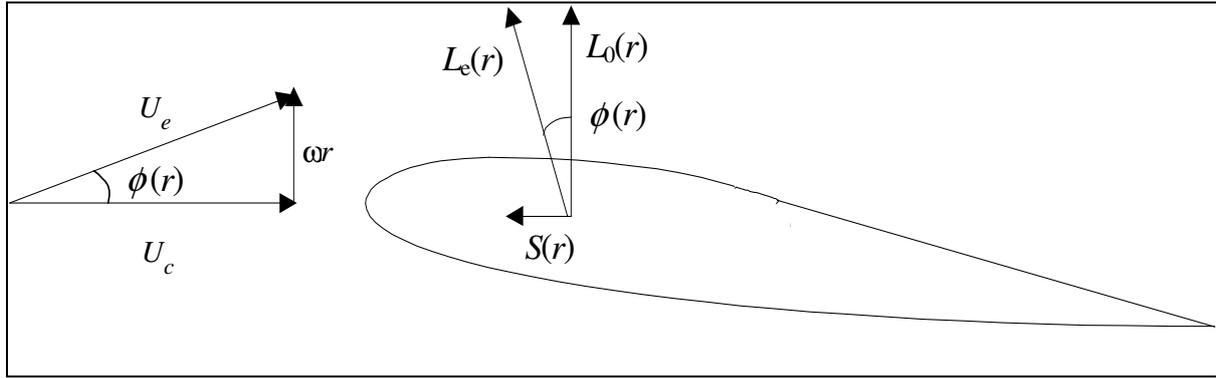


Figura 9. Velocità della corrente, velocità effettiva, portanza e portanza effettiva intorno ad un profilo di pala.

avendo assunto  $C_{L0}=const.$  e  $d \ll D$  (come in effetti è in tutte le condizioni operative).

Questa quantità viene di solito moltiplicata per un coefficiente  $\eta_f$  che definisce l'efficienza del ventilatore (inferiore all'unità a causa del fatto che comunque ci sono delle perdite). Si ottiene:

$$S \cong \frac{\eta_f C_{L0} \rho U_c L \omega D^2}{16}, \quad (3.4)$$

che è proporzionale a  $C_{L0}$ ,  $L$ ,  $D^2$ ,  $\rho$ ,  $U_c$  e  $\omega$  (oltre che all'efficienza del ventilatore  $\eta_f$ ). Quanto detto vale per una singola pala e andrà moltiplicato per il numero delle pale  $n$ .

Confrontando ora l'espressione (3.4) appena ottenuta con la (3.3), per riuscire a compensare le perdite di attrito, dovrà essere  $S > \Delta h D^2$ , e si otterrà la condizione:

$$\frac{n C_{L0} L \omega \eta_f \rho U_c D^2}{16} \geq \frac{K_t \rho U_0^2 D^2}{2}, \quad \text{cioè} \quad n \omega \geq \frac{8 U_0^2 K_t}{U_c C_{L0} L \eta_f} = \frac{8 K_t U_0}{\eta_f C_{L0} L} \left( \frac{D_c}{D_0} \right)^2$$

che è una condizione sul numero delle pale (una volta scelta la pala stessa (cioè  $C_{L0}$  e  $L$ ), dato un valore per  $\eta_f$  (tipicamente 0.9, che determina anche un valore della velocità angolare dal diagramma che rappresenta l'efficienza della pala, Figura 2.6 a pg. 54 del Rae e Pope), avendo prima calcolato le perdite totali  $K_t$  (data la geometria dell'impianto) ed essendo note la velocità del flusso  $U_0$  e le dimensioni  $D_c$  e  $D_0$  dal dimensionamento della camera di prova). Bisogna anche considerare che il flusso in uscita dal ventilatore conterrà una notevole componente tangenziale di velocità che viene rimossa e convertita in recupero di pressione tramite dei raddrizzatori di flusso.

Nel caso in cui  $C_{Lo}$  non possa essere considerato costante lungo l'apertura palare, allora bisognerà svolgere l'integrale per esteso assegnando l'andamento radiale  $C_{Lo}(r)$ . Il calcolo del numero di pale svolto in questa modalità può portare ad un notevole miglioramento della condizione sul numero delle pale (minor numero di pale necessario a parità di velocità angolare del ventilatore).

### 3.2.7 Contrazione e secondo diffusore

Il cono di contrazione ed il secondo diffusore sono presenti solo per le gallerie a circuito chiuso. Il primo serve per restringere la sezione (che era stata allargata a valle della sezione di prova tramite il diffusore) per poter utilizzare un ventilatore il più piccolo possibile e ridurre i costi, il secondo per ritornare alle dimensioni della galleria a monte del convergente. Per il secondo diffusore valgono più o meno le stesse considerazioni fatte per il primo (per esempio angolo di apertura  $2\alpha < 10^\circ$ ).

### 3.2.8 Elementi angolari (corners)

Sono elementi a forma di profilo alare che attraversano trasversalmente la galleria del vento a circuito chiuso in corrispondenza dei bruschi cambiamenti di direzione. Il loro scopo è quello di "avviare" il flusso nel cambio di direzione a  $90^\circ$  presente nel raccordo tra una sezione rettilinea ed la successiva. Il coefficiente di caduta in corrispondenza di tali elementi è funzione della loro forma. A pag. 48 del Rae e Pope sono riportati alcuni valori caratteristici (che comunque sono dell'ordine di  $\eta \cong 0.1 \div 0.2$  cioè abbastanza elevati).

### 3.2.9 Sistema di raffreddamento

Tutte le perdite di energia nel circuito e specialmente in prossimità del compressore sono trasferite al flusso sotto forma di calore e provocano quindi un innalzamento della temperatura della corrente fluida (si arriva a incrementi di qualche grado per ogni giro completo nel caso dei tunnel ad alta potenza). E' quindi necessario un sistema di raffreddamento per riportare la temperatura alle condizioni di prova volute. A questo scopo possono essere utilizzati più sistemi:

- sistema con circolazione di liquido refrigerante a contatto esterno con la galleria;
- sistema con raffreddamento di elementi interni alla galleria (p.e. gli elementi angolari);
- sistema di scambiatori di aria per sostituire l'aria riscaldata con altra a temperatura inferiore.

### 3.2.10 Sistema di aspirazione dello strato limite

In una galleria del vento si vogliono misurare le caratteristiche di un modello di velivolo o di autoveicolo che si muove in un fluido a riposo usando il principio di relatività galileiana e misurando quello che succede con il fluido in moto e l'oggetto in esame a riposo. I due punti di vista sono esattamente equivalenti in ambiente aperto, cioè lontano da superfici solide. In un ambiente chiuso, quale la galleria (o qualsiasi impianto sperimentale), la presenza delle pareti del condotto si fa sentire in maniera notevole. Su queste pareti si sviluppa uno strato limite (il cui spessore cresce all'incirca come  $\sqrt{x}$  ed è proporzionale a  $Re^{1/2}$ ) all'interno del quale il profilo di velocità non corrisponde a quello del flusso indisturbato e quindi non è adatto ad indagare le prestazioni reali (per esempio gli effetti su un autoveicolo). A questo scopo, si pratica l'aspirazione dello strato limite a monte della sezione di prova, cioè si preleva del flusso in prossimità della parete della galleria (e di solito si reimmette a valle della sezione di prova). Tale sistema può funzionare anche in parallelo con il sistema di raffreddamento.

### **3.3 PARAMETRI DI UNA GALLERIA DEL VENTO A BASSA VELOCITÀ**

Come detto nella parte introduttiva di questo capitolo, vi sono alcuni parametri importanti che consentono di valutare le prestazioni di una galleria del vento. Per quello che riguarda le dimensioni della sezione di prova, la velocità massima e minima e il livello di turbolenza se ne è determinata la dipendenza dalla forma e dalle dimensioni del convergente e della camera di calma.

L'efficienza di una galleria è definita anche rapporto di energia ( $ER$ ) e misura il rapporto tra l'energia propria del fluido in movimento e quella immessa nel sistema:

$$ER = \frac{\text{energia del flusso}}{\text{energia immessa}}.$$

Se ammettiamo che l'energia immessa (da ventilatore, sistema di raffreddamento, impianto per l'aspirazione dello strato limite) sarà circa uguale alla somma delle perdite e normalizziamo tutto all'energia del flusso  $\left(\frac{1}{2}\rho U_0^2 A\right)$ , otteniamo che:

$$ER \cong \frac{1}{2} \frac{\rho U_0^2 AL}{\Delta h AL} = \frac{1}{2} \frac{\rho U_0^2}{\Delta h} = \frac{1}{K_t} = \frac{1}{\sum_j (\eta_j)}$$

cioè la valutazione delle perdite ci fornisce un'idea dell'efficienza della galleria. Essendo  $K_t < 1$ , risulterà  $ER > 1$  (tipicamente  $ER \approx 5$  per gallerie aperte, ed  $ER \approx 7$  per gallerie chiuse), il che significa che l'energia incamerata nel fluido in moto (trascurando il lavoro fatto per la messa in moto) è maggiore di quella che devo fornire per mantenerlo in questo stato.

Gli altri parametri fondamentali di una galleria del vento a bassa velocità (temperatura, densità e pressione) possono essere facilmente valutati a partire da un modello quasi unidimensionale e stazionario ( $St \ll 1$ ) di un gas perfetto non viscoso ( $Re \gg 1$ ) e non conduttore. Consideriamo anche che la densità sia variabile (cioè flusso comprimibile perché siamo a Mach intermedi) per ottenere:

$$A_1 \rho_1 U_1 = A_2 \rho_2 U_2 . \quad (3.5)$$

$$\rho^* U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} = - \frac{1}{Ru} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} , \quad (3.6)$$

$$\left( c_p T_1 + \frac{U_1^2}{2} \right) = \left( c_p T_2 + \frac{U_2^2}{2} \right) \quad (3.7)$$

Le tre equazioni trovate ((3.5), (3.6) e (3.7)) hanno come incognite  $\rho_2$ ,  $U_2$ ,  $p_2$  e  $T_2$ , una volta note le quantità sulla sezione 1 e sono espresse in funzione della dimensione dell'area della sezione 2,  $A_2$ .

Serve un'altra equazione e cioè l'equazione di stato:

$$\frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_2}{\rho_2 T_2} \quad (3.8)$$

Si ottiene:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1 + \left( \frac{\gamma-1}{2} \right) Ma_2^2}{1 + \left( \frac{\gamma-1}{2} \right) Ma_1^2} = H , \quad (3.9)$$

che rappresenta la variazione di temperatura tra le sezioni 1 e 2. Se sia  $Ma_1$  che  $Ma_2$  sono molto minori di 1, cioè in condizioni subsoniche, si ha  $H \cong 1$  e  $T_1 \cong T_2$ . Questa equazione è ottenuta direttamente dall'equazione dell'energia (3.7): e dalle definizioni ed è perciò sempre valida. La

quantità  $T_t = \left[ 1 + \left( \frac{\gamma-1}{2} \right) Ma^2 \right] T$  è detta temperatura di ristagno (o di arresto) ed è la temperatura raggiunta quando il fluido è portato a riposo in maniera adiabatica (senza scambi di calore).

Inoltre,

$$\frac{p_1}{p_2} = H^{\left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \right)} \quad (3.10)$$

che rappresenta la variazione della pressione tra le sezioni 1 e 2 (questa equazione è ottenuta con l'ausilio della relazione isentropica). La quantità  $p_t = \left[ 1 + \left( \frac{\gamma-1}{2} \right) Ma^2 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} p$ , è detta pressione di ristagno (o di arresto). Sviluppando in serie del numero di Mach questa espressione si ha:

$$p_t \cong p \left[ 1 + \frac{\gamma}{2} Ma^2 + o(Ma^4) \right] \cong p \left[ 1 + \frac{\gamma}{2} \frac{U^2}{\gamma RT} \right] = p + \frac{\rho U^2}{2} ,$$

cioè proprio la pressione totale del caso incompressibile (ma in realtà ancora valida anche per  $Ma \approx 0.8$ ). Dall'equazione (3.8) si ottiene:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{T_2}{T_1} \frac{p_1}{p_2} = H^{-1} H^{\left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \right)} = H^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (3.11)$$

e infine dall'equazione di conservazione della massa (3.5) otteniamo che

$$\frac{A_1}{A_2} = H^{-\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \frac{Ma_2}{Ma_1} , \quad \frac{Ma_1}{Ma_2} = H^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \frac{A_2}{A_1} \quad (3.12)$$

che permette di ricavare il salto di Mach (cioè di velocità) noto il rapporto  $A_2/A_1$  cioè la geometria (e viceversa). Allora se sono note le condizioni a monte (*p.e.* in camera di calma) possiamo trovare la densità, la pressione e la temperatura nella sezione desiderata in funzione di  $Ma_1$  e di  $A_1/A_2$  (noti) tramite le relazioni (3.9), (3.10), (3.11) e (3.12). Se in camera di calma è  $U_1 = 0$  ( $Ma_1=0$ ) avremo

$$H = \left[ 1 + \left( \frac{\gamma-1}{2} \right) Ma_2^2 \right] ,$$

cioè avremo le condizioni di ristagno  $T_1 = T_t$ ,  $p_1 = p_t$  e  $\rho_1 = \rho_t$ .

Se invece la sezione 2 é in condizioni soniche ( $Ma_2=1$ ) (indicata con \*), si avrà

$$H^* = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)Ma_1^2}$$

(tabelle per i valori delle quantità sono riportate sul Pope e Goin a pag 15).

Tutto ciò che abbiamo visto é valido solo se non ci sono urti cioè per le gallerie a basse velocità. Se c'è un urto (come nelle gallerie ad alta velocità o in sezioni particolari) la relazione per la temperatura é ancora valida, ma non quella per la pressione, densità ed area (perché non é più valida l'ipotesi di isentropicità attraverso l'urto).

### 3.4 GALLERIE DEL VENTO AD ALTA VELOCITÀ

Le gallerie ad alta velocità ( $Ma > 0.5$ ) possono essere subsoniche ( $Ma < 1$ ), transoniche ( $Ma \approx 1$ ) o supersoniche ( $Ma > 1.5$ ). Lo schema di una galleria del vento ad alta velocità é differente da quello di una galleria a bassa velocità (figura 10).

Si distinguono due situazioni:

- gallerie a circuito chiuso (funzionamento continuo);
- gallerie a circuito aperto (funzionamento intermittente) a loro volta divise in gallerie a svuotamento o a riempimento.

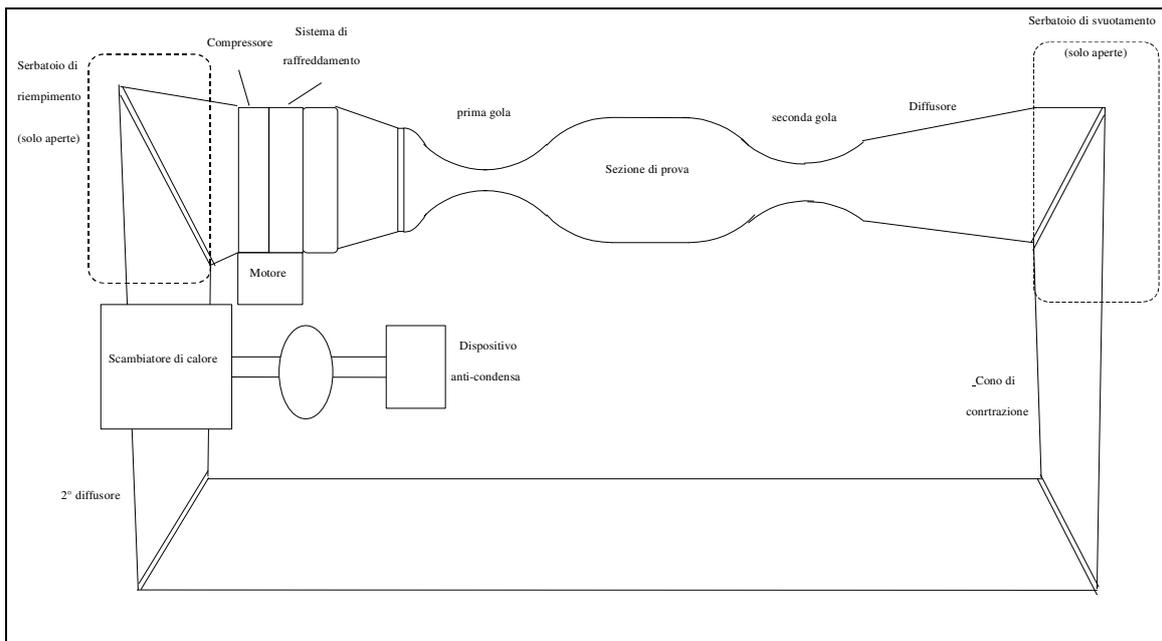


Figura 10. Schema geometrico ed elementi fondamentali di una galleria del vento ad alta velocità.

Le gallerie a circuito aperto sono prevalentemente a funzionamento intermittente (e non continuo) perché é necessario comprimere l'aria tramite un compressore a valle di un serbatoio di riempimento o fare il vuoto a valle di un serbatoio di svuotamento (entrambi di capacità limitata). Nel caso del circuito chiuso quest'operazione può essere effettuata con continuità utilizzando l'aria in ricircolo nell'impianto.

Le differenze principali rispetto alle gallerie a basse velocità sono:

- ◆ sezione di prova compresa tra due gole e non subito a valle del convergente;
- ◆ posizionamento del compressore a monte e non a valle della sezione di prova;
- ◆ scambiatore di calore e dispositivo anti-condensa;
- ◆ posizionamento del secondo diffusore.

Per comprendere il motivo di queste differenze é necessario riscrivere le equazioni precedenti per la temperatura, velocità (o Mach), densità e pressione nel caso di presenza di urti (e quindi senza utilizzare la condizione di isentropica). Ingrandiamo la zona in prossimità della sezione di prova ed indichiamo le sezioni come mostrato in figura 11.

### 3.4.1 Prima e seconda gola

Mettiamo insieme l'equazione di conservazione della massa l'equazione di bilancio della quantità di moto già scritte nel precedente paragrafo (equazioni (3.5) e (3.6)):

$$\begin{cases} \frac{\partial(\rho UA)}{\partial x} = 0 \\ \rho U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial U}{U} = -\frac{\partial \rho}{\rho} - \frac{\partial A}{A} \\ \rho U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \end{cases}$$

da cui, poiché le grandezze dipendono solo dalla coordinata  $x$ :

$$\frac{A}{\rho U^2} \frac{dp}{dx} \left( \frac{U^2}{dp/d\rho} - 1 \right) + \frac{dA}{dx} = 0$$

cioè

$$-\frac{dA}{dx} = \frac{dp}{dx} (Ma^2 - 1) \frac{A}{\rho U^2} = -\frac{dU}{dx} (Ma^2 - 1) \frac{A}{U} \quad (3.13)$$

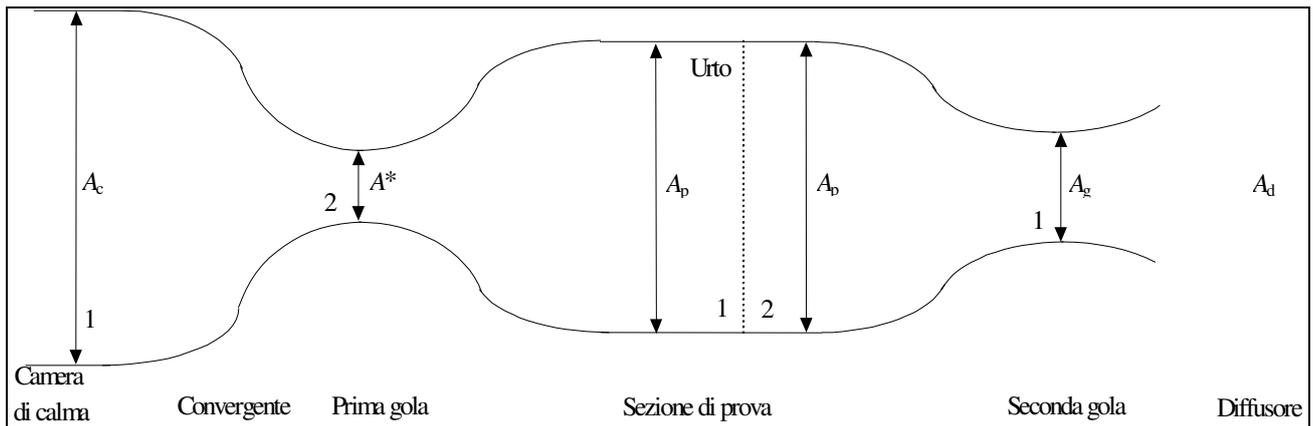


Figura 11. Schema delle sezioni di galleria in prossimità della sezione di prova.

Per una corrente subsonica ( $Ma < 1$ ) in un convergente ( $\frac{dA}{dx} < 0$ ) si ha una diminuzione di pressione ( $\frac{dp}{dx} < 0$ ) ed un aumento di velocità ( $\frac{dU}{dx} > 0$ ). Per una corrente supersonica il comportamento è opposto (i due comportamenti sono riassunti nella figura 12).

Si noti anche che  $\frac{dA}{dx} = 0$  è una condizione necessaria per  $Ma = 1$  (altrimenti ci sarebbe  $\frac{dp}{dx} = \infty$  per  $Ma = 1$ ). La velocità del suono è raggiunta solo quando la sezione ha un minimo locale (condizione sufficiente) perché se ci fosse un massimo la corrente subsonica decelererebbe nel divergente, mentre quella supersonica accelererebbe; quindi affinché vi sia la transizione transonica ci deve essere una sezione di gola. Questa differenza con il caso subsonico è dovuta al fatto che nel caso supersonico la variazione di pressione ha il sopravvento su quella di velocità (mentre accade l'opposto nel subsonico).

Allora se abbiamo un flusso subsonico e lo vogliamo accelerare avremo un primo convergente che lo porta in condizioni soniche ed un secondo divergente che lo porta in condizioni supersoniche (figura 13). A valle del convergente si formeranno delle condizioni soniche ( $Ma \approx 1$ ) con possibile formazione di onde d'urto a monte del modello, che possono essere riflesse fino alla camera di prova. In particolare, in condizioni di avviamento e in presenza di un modello, sarà anche possibile avere la cosiddetta condizione di "choking" (soffocamento), cioè la formazione e persistenza di onde d'urto di elevata intensità in camera di prova. Tali onde ostruiscono parzialmente il passaggio del flusso di aria originando grosse perdite per effetti viscosi e termici (fino al 90% delle perdite totali) che devono quindi essere compensate da un compressore più

potente con aggravio dei costi e degli ingombri. Poiché si è in condizioni transoniche e supersoniche, è possibile diminuire nuovamente la velocità a valle della sezione di prova tramite un'ulteriore convergente (seconda gola) ed è possibile evitare questo soffocamento nel resto del condotto.

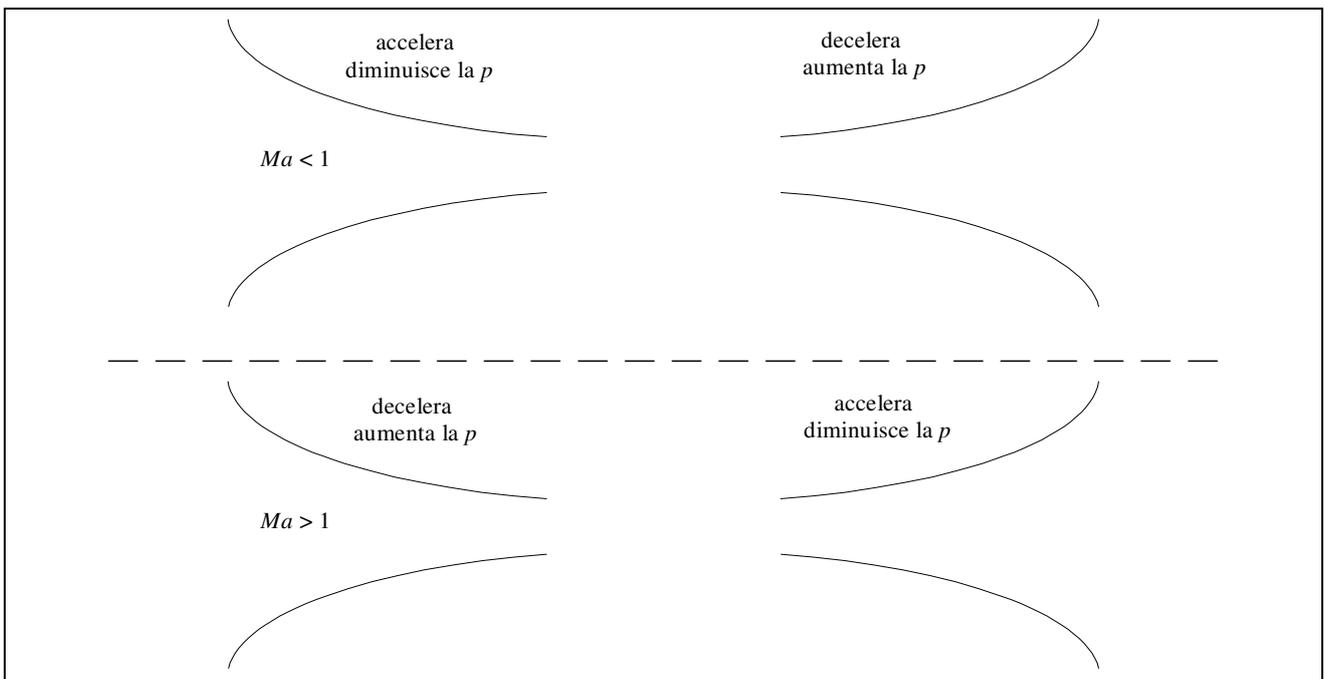


Figura 12. Andamento della pressione in un convergente-divergente nel caso subsonico e supersonico.

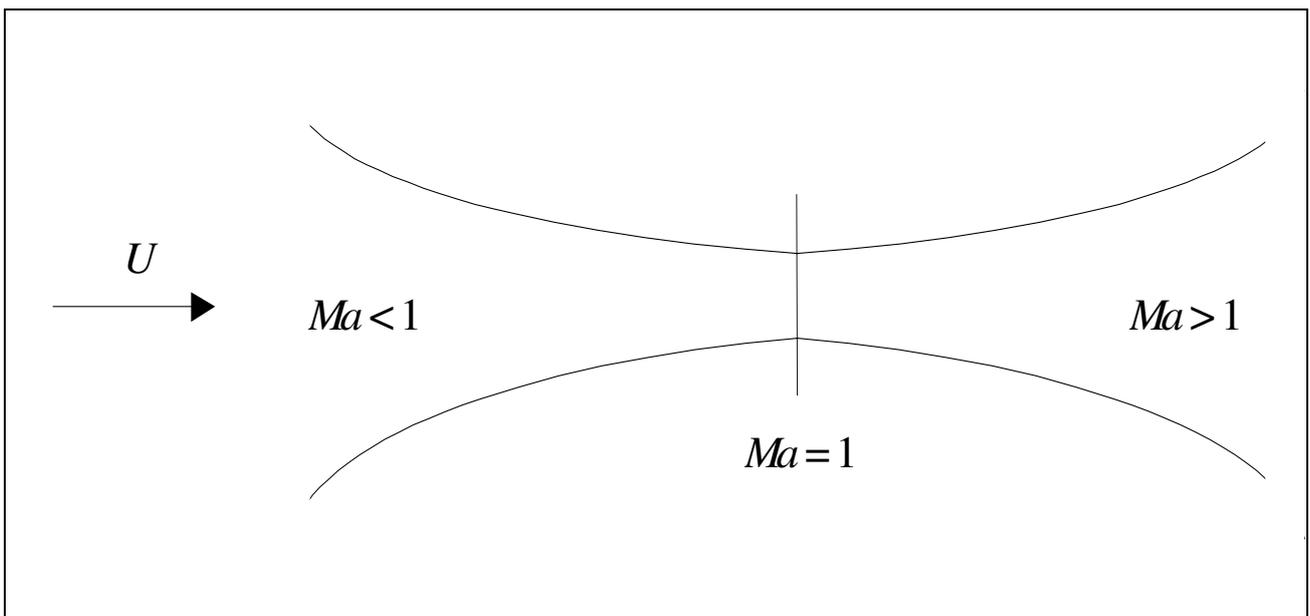


Figura 13. Accelerazione da flusso subsonico a flusso transonico attraverso un convergente e da flusso transonico a flusso supersonico attraverso un divergente in serie.

### 3.4.2 Parametri di una galleria del vento ad alta velocità

In presenza di urti le equazioni che definiscono le variazioni di temperatura, pressione, densità e velocità tra due sezioni viste in precedenza per il caso a basse velocità (equazioni (3.9), (3.10), (3.11) e (3.12)) vanno determinate a partire dalle relazioni (3.5), (3.6), (3.7) e (3.8) (la (3.9) resta tutt'ora valida perché ottenuta direttamente dall'equazione di conservazione dell'energia (3.7)). Si assume che a valle e a monte dell'urto (che ha spessore infinitesimo) la sezione resti inalterata) cioè che  $A_1 \approx A_2$  (avendo indicato con i pedici 1 e 2 le sezioni immediatamente a monte e a valle dell'urto). Dall'equazione di bilancio della quantità di moto, utilizzando l'equazione di conservazione della massa con si ottiene che:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1 + \gamma Ma_2^2}{1 + \gamma Ma_1^2} \quad (3.14)$$

Dall'equazione di stato e dal rapporto tra le temperature

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \left( \frac{1 + \gamma Ma_2^2}{1 + \gamma Ma_1^2} \right) \frac{1}{H} \quad (3.15)$$

Dall'equazione di conservazione della massa e dall'equazione di stato si può ricavare  $Ma_2$  a valle dell'urto in funzione di quello a monte:

$$Ma_2^2 = \frac{\left( \frac{2}{\gamma - 1} \right) + Ma_1^2}{\left( \frac{2\gamma Ma_1^2}{\gamma - 1} \right) - 1} \quad (3.16)$$

Per  $Ma_1 > 1$ , questa relazione ci dice che il numero di Mach a valle di un urto è minore di quello a monte. Sostituendo questa relazione in quella della temperatura (3.9) si ottiene:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\left( 1 + \left( \frac{\gamma - 1}{2} \right) Ma_1^2 \right) \left( \frac{2\gamma}{\gamma - 1} Ma_1^2 - 1 \right)}{\frac{(\gamma + 1)^2}{2(\gamma - 1)} Ma_1^2} \quad (3.17)$$

Allo stesso modo per la pressione (dalla (3.14)) e per la densità (dalla (3.15)) si ottiene:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma Ma_1^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)}, \quad (3.18)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)Ma_1^2}{2 + (\gamma - 1)Ma_1^2} \quad (3.19)$$

Le equazioni (3.16), (3.17), (3.18) e (3.19) forniscono il salto di velocità, temperatura, pressione e densità attraverso l'urto noto il numero di Mach a monte dello stesso. Si e' assunto che l'urto sia diretto ortogonalmente alla direzione della velocità (urto normale). Tale approssimazione risulta pienamente valida finche' non e' presente un modello in sezione di prova; in quest'ultima situazione bisognerà utilizzare le relazioni valide in presenza di urti obliqui. Si noti che attraverso l'urto, mentre il numero di Mach diminuisce bruscamente da valori maggiori di uno a valori inferiori, la temperatura, pressione e densità a valle dell'urto sono maggiori di quelle a monte.

Il rapporto tra le pressioni di ristagno  $p_{t2}/p_{t1}$  rappresenta l'inverso del rapporto di compressione ( $\lambda$ ) cioè una misura dell'energia persa attraverso l'urto. Si può valutare il rapporto  $p_{t2}/p_{t1}$ :

$$\frac{p_{t_2}}{p_{t_1}} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\left(\frac{p_{t_2}}{p_2}\right)\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}{\left(\frac{p_{t_1}}{p_1}\right)} = \left(\frac{2\gamma Ma_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}\right) \frac{\left(\frac{p_{t_2}}{p_2}\right)}{\left(\frac{p_{t_1}}{p_1}\right)}$$

Essendo  $\left(\frac{p_{t_k}}{p_k}\right) = \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right)Ma_k^2\right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$  (con  $k=1,2$ ), si ottiene

$$\frac{p_{t_2}}{p_{t_1}} = \left(\frac{2\gamma Ma_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}\right)^{-\frac{1}{\gamma - 1}} \left(\frac{Ma_1^2(\gamma + 1)}{2 + (\gamma - 1)Ma_1^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (3.20)$$

che e' sempre minore di 1.

### 3.4.3 Dimensionamento della prima e seconda gola

Vediamo di capire ora come dimensionare a regime la prima e la seconda gola (anche in presenza di urti) utilizzando una galleria con sezione variabile. Siano note dalle specifiche le dimensioni ( $A_p$ ) e la velocità ( $Ma_1 = Ma_{p1}$ ) nella sezione di prova (a monte dell'eventuale onda d'urto); se nella

prima gola siamo in condizioni soniche ( $Ma_2 = 1$ ) (come in effetti è) la relazione (3.12) permette di calcolare la sezione della prima gola ( $A_2=A^*$ ):

$$A^* = A_p Ma_{p1} H^* \left( \frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{1}{2(\gamma-1)}}, \quad (3.21)$$

con  $H^* = \left[ \frac{\left( \frac{\gamma+1}{2} \right)}{1 + \left( \frac{\gamma-1}{2} \right) Ma_{p1}^2} \right]$ . Noto  $A^*$ , posso determinare la sezione della camera di calma  $A_c$  in

funzione del numero di Mach in camera di calma (con riferimento agli indici 1 e 2 della figura 9):

$$A_c = \frac{A^* H^*}{Ma_c} \left( \frac{\gamma+1}{2} \right)^{-\frac{1}{2(\gamma-1)}}, \quad (3.22)$$

con  $H^* = \left[ \frac{\left( \frac{\gamma+1}{2} \right)}{1 + \left( \frac{\gamma-1}{2} \right) Ma_c^2} \right]$ .

Per quello che riguarda la seconda gola, ci si metterà nelle condizioni peggiori di urto in camera di prova; detto  $Ma_{p2}$  il numero di Mach a valle dell'urto si ha:

$$A_g = A_p \left( \frac{Ma_{p2}}{Ma_g} \right) H^* \left( \frac{\gamma+1}{2} \right)^{-\frac{1}{2(\gamma-1)}}, \quad (3.23)$$

con  $H^* = \left[ \frac{1 + \left( \frac{\gamma-1}{2} \right) Ma_{p2}^2}{1 + \left( \frac{\gamma-1}{2} \right) Ma_g^2} \right]$ .

La condizione limite si raggiunge per  $Ma_g = 1 \left( H^* = \left[ \frac{1 + \left( \frac{\gamma-1}{2} \right) Ma_{p2}^2}{\left( \frac{\gamma+1}{2} \right)} \right] \right)$ , da cui si ha:

$$A_g^* = A_p Ma_{p2} H^* \left( \frac{\gamma+1}{2} \right)^{-\frac{1}{2(\gamma-1)}}, \quad (3.24)$$

dove  $Ma_{p2}$  può essere espresso, mediante la (3.16), in funzione di  $Ma_{p1}$ , cioè il Mach a monte dell'urto. Nel caso in cui  $\gamma = 1.4$  si ottiene:

$$A_g^* = A_p \frac{(5 + Ma_{p_1}^2)^{1/2} (7Ma_{p_1}^2 - 1)^{2.5}}{216Ma_{p_1}^6} \quad (3.25)$$

dove per  $Ma_{p_1} \rightarrow 1$  si ha  $A_g^* \rightarrow A_p$  (ma resta un po' più piccola) e per  $Ma_{p_1} \rightarrow \infty$  si ottiene  $A_g^* \rightarrow 0.6A_p$ . Questa relazione permette di dimensionare la seconda gola, la cui area é al minimo uguale a  $0.6A_p$  quindi abbastanza grande (cfr. figura 14). Abbiamo così compreso perché e come vengono dimensionate le gole intorno alla sezione di prova.

#### 4.4.4 Posizionamento del compressore

Per quello che riguarda il posizionamento del compressore, bisogna considerare che a valle della sezione di prova il compressore darebbe origine ad onde d'urto di frenata e come già detto, tali onde d'urto, darebbero notevoli perdite di energia nel circuito che vanno evitate. Di conseguenza, si preferisce posizionare il compressore a monte della camera di calma.

#### 4.4.5 Scambiatore di calore e dispositivo anti-condensa

Il primo é necessario in quanto in una galleria ad alta velocità si formeranno comunque delle onde d'urto che riscalderanno il flusso in circolazione e sarà quindi necessario riportare la sua temperatura al valore di riferimento. Questa stessa operazione, però, porta di conseguenza un rapido raffreddamento che produce condensa (cioè bolle d'acqua nebulizzate che vengono immerse nella corrente). Questa condensa viene rimossa da un sistema di ventilazione (essiccatore).

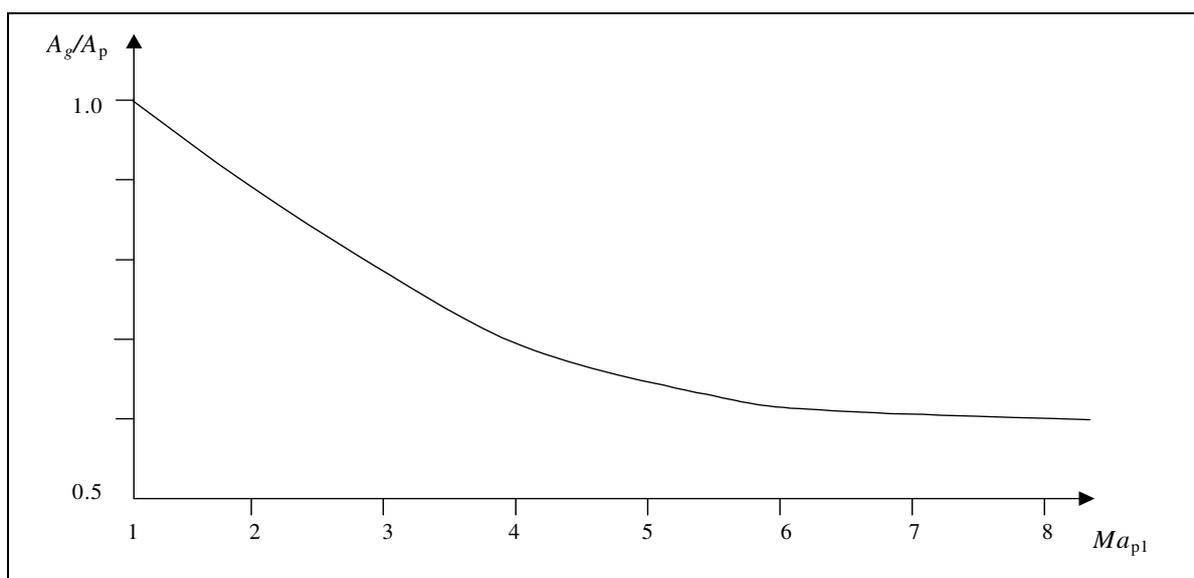


Figura 14. Andamento del rapporto tra le aree  $A_g/A_p$  in funzione del numero di Mach a monte dell'urto eq.(3.25).

#### 4.4.6 Posizionamento del secondo diffusore

Infine il posizionamento del secondo diffusore é forzatamente spostato il più lontano possibile per mantenere la sezione intermedia quanto più piccola possibile.

#### 3.4.7 Avvio della galleria

Nel caso subsonico la condizione di avvio di una galleria del vento deve permettere la messa in moto della massa d'aria fino alla velocità di utilizzo. Poiché l'efficienza della galleria e' proprio il rapporto tra energia del flusso d'aria e l'energia immessa (a regime) e tale efficienza ha un valore pari a  $5 \div 7$ , e' ragionevole supporre che sarà necessaria all'avviamento un'energia pari a qualche unita' di quella richiesta per il funzionamento (*cfr.* 3.2.6).

Nel caso di gallerie ad alta velocità il discorso e' differente. All'avvio di una galleria ad alta velocità avremo che, essendo in condizioni subsoniche, la velocità maggiore (cioè il Mach maggiore) si avrà nella prima gola. La potenza del compressore sarà circa uguale alla somma delle perdite di attrito registrate nel circuito come nel caso a basse velocità. Aumentando la potenza del compressore, il numero di Mach aumenta finché nella prima gola non si raggiungono condizioni soniche ( $Ma \approx 1$ ) e si sviluppa un urto normale ad una piccola distanza dalla gola (sezione *A* nella figura 15). Aumentando ancora la potenza, non si assiste ad un aumento del numero di Mach nella prima gola, quanto piuttosto ad uno spostamento dell'urto verso la sezione di prova (dove il numero di Mach é supersonico) (sezioni *B* e *C* della figura 15). Si verificano, a questo punto (e ancora di più quando l'urto si sposta in avanti per Mach superiori incrementando la potenza come nelle sezioni *D* ed *E* della figura 15) delle perdite di potenza attraverso l'urto che si sommeranno alle perdite di tipo subsonico dovute all'attrito.

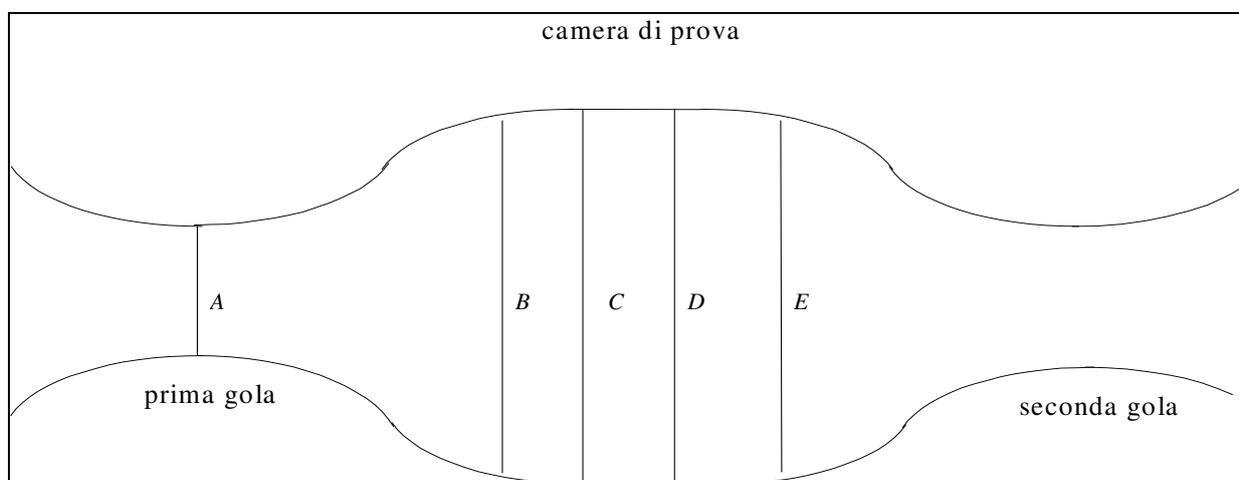


Figura 15. Formazione di onde d'urto in camera di prova all'avviamento di una galleria del vento ad alta velocità.

Questo provoca una richiesta addizionale di potenza. In condizioni di funzionamento normale si raggiunge un equilibrio tra la potenza del compressore e le perdite che sono dominate da quelle a cavallo dell'urto normale.

In queste condizioni un'idea delle perdite (e quindi della potenza necessaria al compressore sotto forma di rapporto di compressione) é fornita dal rapporto (3.20) tra la pressione di ristagno a monte dell'urto (cioè a monte della camera di prova) e quella a valle dell'urto (cioè in uscita dalla camera di prova). Bisogna considerare che si e' dimensionata la seconda gola richiedendo che ci fosse la condizione limite  $Ma_g \approx 1$ . Pero', in condizioni di avviamento, il numero di Mach nella seconda gola potrebbe essere maggiore dell'unita' (perché le condizioni sono subsoniche e la seconda gola funziona da acceleratore della corrente); per evitare questo, dalla (3.23) sarebbe richiesta una sezione  $A_g > A_g^*$  (sezione di gola con  $Ma_g = 1$ ) all'avviamento. Di conseguenza, nell'avviare una galleria ad alta velocità, il rapporto di compressione  $\lambda$  deve essere calcolato con l'urto di massima intensità, utilizzando la (3.20) (urto normale nella sezione di prova). Invece, in condizioni di funzionamento, l'urto si sposta nel diffusore in prossimità della seconda gola. Per ridurre l'intensità dell'urto in condizioni di funzionamento sono state disegnate sezioni di seconda gola con area variabile nel tempo in modo che all'avvio  $A_g > A_g^*$  e durante il funzionamento  $A^* < A_g < A_g^*$  (in condizioni ideali e stazionarie sarebbe  $A_g = A^*$ ). Il valore di  $\lambda$  necessario per avviare la galleria deve quindi essere maggiore del valore di  $\lambda$  necessario al funzionamento (cioè é richiesta una potenza aggiuntiva (di solito più del doppio) del compressore in fase di avviamento)

$$A_g = \frac{A_g^*}{Ma_g} \left[ \frac{1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} Ma_g^2}{\left( \frac{\gamma + 1}{2} \right)} \right]^{(\gamma+1/2(\gamma-1))} > A_g^*$$

### 3.4.8 Presenza di un modello

In presenza di un modello si formeranno urti aggiuntivi nella sezione di prova che richiederanno all'avviamento un rapporto di compressione ancora maggiore; di conseguenza, poiché il rapporto tra le aree della seconda e della prima gola (ottenibile dalle (3.21) e (3.23) inserendo la (3.16)) e' proprio dato dal rapporto di compressione  $\lambda = p_{t1}/p_{t2}$  (tanto maggiore quanti più urti vi sono in camera di prova), sarà necessaria un'area di seconda gola ancora maggiore di quella in assenza di modello. Inoltre, le dimensioni del modello devono essere abbastanza piccole per non dare luogo a "choking" (cioè ad un'occlusione della galleria causata dalla presenza di più onde d'urto intorno al

modello). Affinché questo sia vero, il numero di Mach in corrispondenza della sezione massima del modello ( $S_f$ ) non deve essere superiore a uno (le onde d'urto saranno presenti nella parte anteriore del modello). Al crescere del numero di Mach nella sezione di prova, aumenta la dimensione del modello che può essere provato senza che avvenga il "choking". Infatti indicando con l'indice 1 la sezione massima in corrispondenza del modello:

$$\frac{A_1}{A_p} = \frac{Ma_p}{Ma_1} H^{-\left(\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}\right)}$$

Essendo  $A_1 = A_p - S_f$ , si può scrivere

$$\frac{S_f}{A_p} = 1 - \frac{Ma_p}{Ma_1} \left[ \frac{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) Ma_1^2}{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) Ma_p^2} \right]^{\left(\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}\right)}$$

Affinché la sezione di prova all'avviamento non raggiunga le condizioni soniche ( $Ma_p = 1$ ), si ha ( $A_p = A_p^*$ ) un valore della sezione massima del modello pari a

$$\frac{S_f}{A_p^*} (Ma_1 \rightarrow 1) = 1 - Ma_p \left[ \frac{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) Ma_p^2} \right]^{\left(\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}\right)} \quad (3.26)$$

cioè un modello con numero di Mach in sezione di prova pari a 2, può avere una sezione frontale massima pari al 40 % della sezione di prova per non manifestare "choking". Da confronti con dati sperimentali, il valore trovato dalla (3.26) va diviso per un fattore empirico pari a circa 4.

A tale proposito, ricordiamo il comportamento delle linee di corrente per il caso di flussi compressibili: rispetto al caso incompressibile, in cui il valore costante della portata impone una convergenza a valle del modello delle linee di corrente (ciò che porta di conseguenza anche una rapida attenuazione dei disturbi a valle dell'oggetto in esame), nel caso compressibile, la densità varia con la pressione e in particolare decresce quando decresce la pressione (eq. di stato). Se la velocità aumenta, sarà necessario un allargamento delle linee di corrente per avere la stessa portata (essendo la densità diminuita). Un modello darà più ingombro rispetto al caso subsonico (figura

16). Un problema notevole delle gallerie transoniche, legato a questo fenomeno, é quello di cercare di eliminare le onde d'urto che si originano o si riflettono sulle pareti (e che quindi non sono presenti nel caso reale) a causa della deformazione dell'insieme delle linee di corrente. Si utilizzano camere di prova particolari le cui pareti si adattano in maniera continua alle linee di flusso intorno al modello. Ciò viene effettuato tramite deformazione delle pareti (*p.e.* con un sistema di martinetti) o tramite ventilazione (*p.e.* tramite pareti semi-impermeabili collegate a componenti nei quali si varia opportunamente la pressione) come mostrato nelle figure 17 e 18. La seconda soluzione permette anche il migliore assorbimento di eventuali onde d'urto, ma, di contro, provoca flussi in entrata ed in uscita dalle pareti.

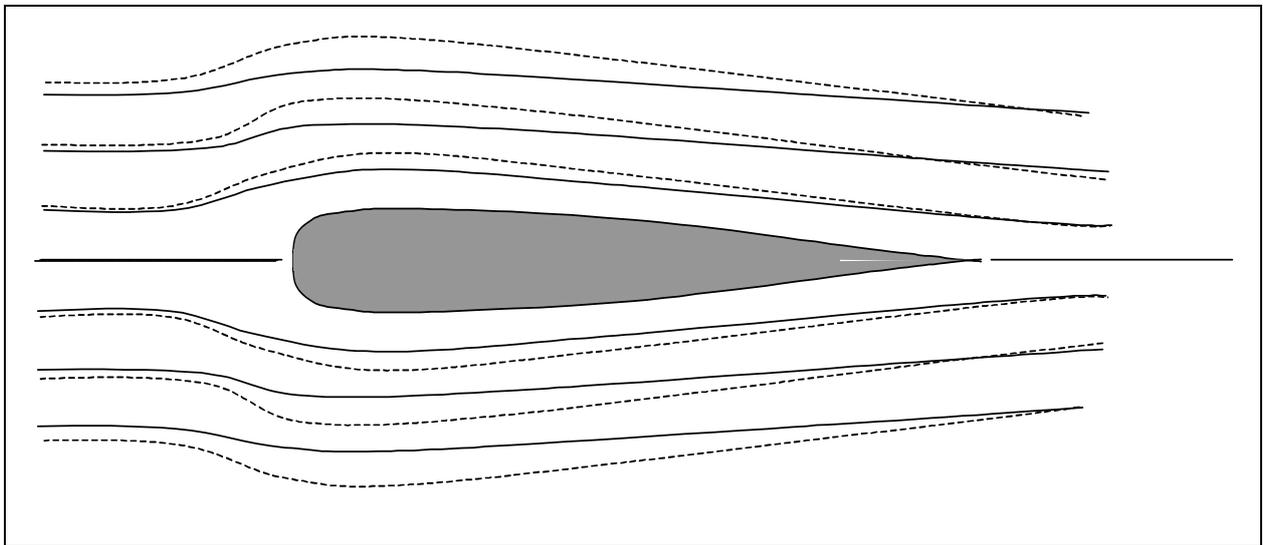


Figura 16. Andamento delle linee di corrente intorno ad un modello nel caso incompressibile (linee continue) e compressibile (linee tratteggiate).

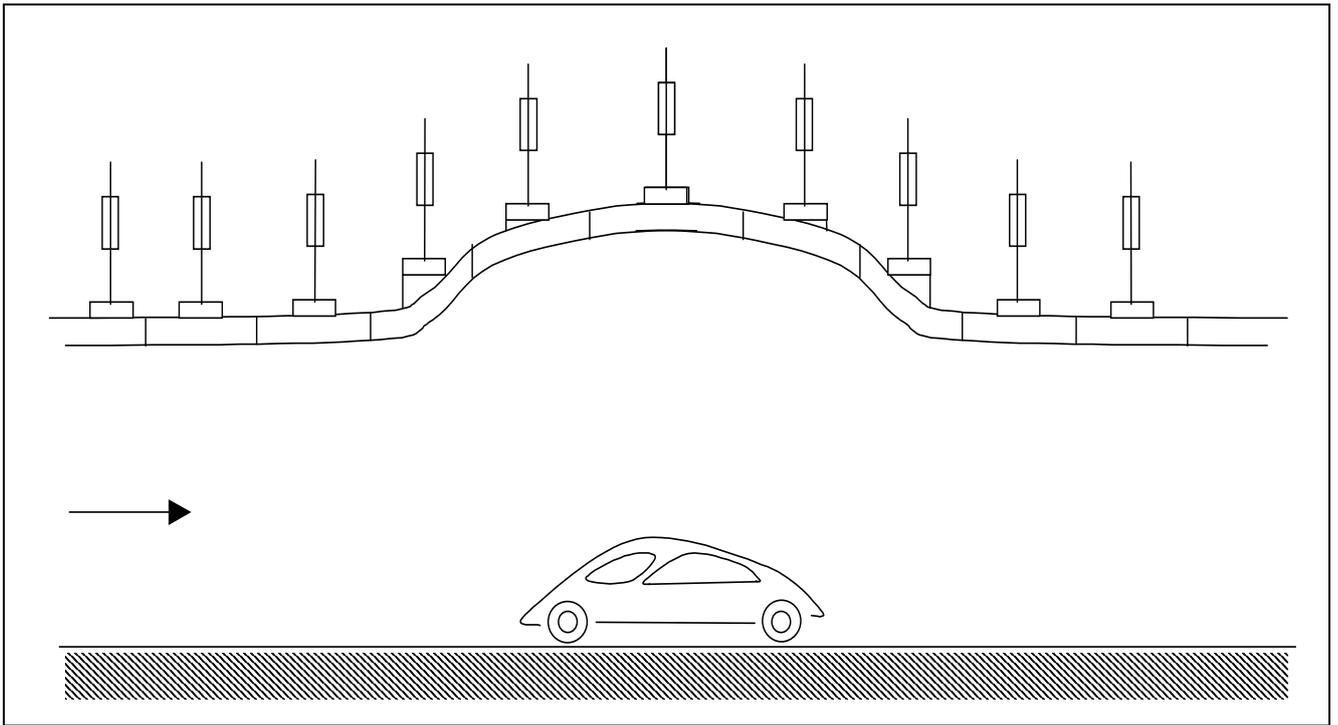


Figura 17. Adattamento della sezione di prova tramite deformazione delle pareti.

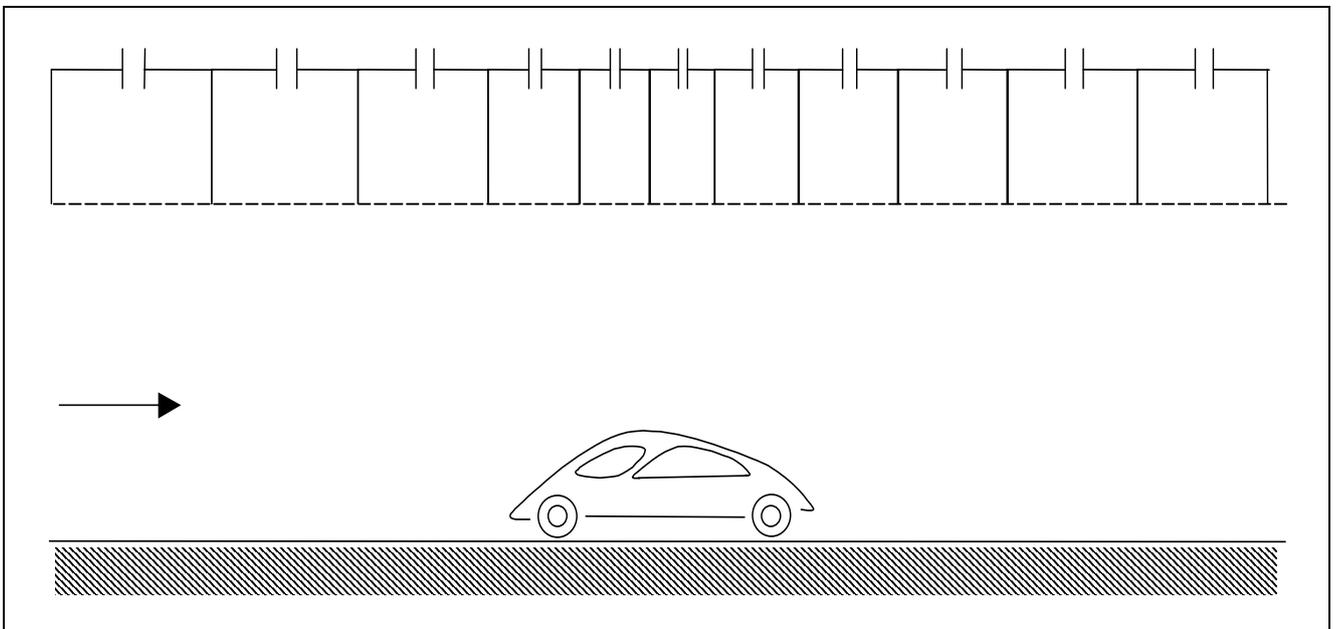


Figura 18. Adattamento della sezione di prova tramite ventilazione.

### 3.5 IMPIANTI SPECIALI

Vengono di seguito brevemente elencati alcuni impianti speciali utilizzati negli studi di fluidodinamica sperimentale ad alta e bassa velocità.

#### 3.5.1 Gallerie pressurizzate

Sono gallerie nelle quali si cerca di lavorare in similitudine del numero di Reynolds (cosa che richiede velocità di prova del modello maggiori di quelle reali) mantenendo anche la similitudine di Mach. Per realizzare entrambe queste similitudini e' necessario aumentare la pressione interna alla galleria e quindi la densità. Infatti (indicando con l'indice  $m$  il modello e con l'indice  $0$  la situazione reale),

$$Re_m = Re_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{U_m L_m \rho_m}{\mu_m} = \frac{U_0 L_0 \rho_0}{\mu_0}$$

e, se vogliamo lo stesso numero di Mach deve anche essere

$$U_m / (\gamma R T_m)^{1/2} = U_0 / (\gamma R T_0)^{1/2}$$

Se ipotizziamo che la temperatura alla quale vengono effettuate le prove sia uguale a quella della situazione reale (altrimenti potrebbero avvenire variazioni indesiderate dei parametri quali il coefficiente di viscosità), la relazione precedente si riduce all'uguaglianza delle velocità che nella similitudine di Reynolds conduce a

$$\frac{\rho_m}{\rho_0} = \frac{L_0}{L_m}$$

(essendo  $\mu$  dipendente solo dalla temperatura). Usando l'equazione di stato si ha anche:

$$\frac{p_m}{p_0} = \frac{L_0}{L_m}.$$

Da cui, essendo normalmente  $L_0/L_m \approx 10 \div 30$ , la pressione nelle prove con modello deve salire fino a  $10 \div 30$  volte quella reale (atmosferica) e cioè a  $10 \div 30$  atmosfere. Gli svantaggi di tali gallerie sono: tempo di compressione necessario prima di effettuare una prova (dell'ordine di ore), costi di manutenzione e di gestione, elevati carichi alari sul modello, difficoltà di isolamento della sezione di prova dal resto del circuito.

### 3.5.2 Gallerie a temperature estreme

Alcune gallerie del vento sono in grado di abbassare artificialmente la temperatura dell'aria e simulare le condizioni atmosferiche ad alta quota per studiare la formazione di ghiaccio sulle ali di un modello in prova nel tempo (*gallerie criogeniche*) (lo studio può essere effettuato in gallerie convenzionali se ci si accontenta di un'indagine su un'ala con profilo già ispessito). Allo stesso modo esistono gallerie che simulano condizioni di elevate temperature per riprodurre le condizioni esistenti nell'alta atmosfera al rientro di velivoli dallo spazio (*gallerie al plasma*). Un altro effetto, comune alle gallerie del vento a temperatura variabile e' quello di poter lavorare in similitudine simultanea di Reynolds e Mach senza dover variare la pressione (a differenza delle gallerie pressurizzate); infatti, richiedendo l'uguaglianza del numero di Reynolds e di Mach senza alterare le pressioni si ottiene (con il solito significato degli indici):

$$\left(\frac{T_m}{T_0}\right)^{1/2} \frac{\mu_m(T)}{\mu_0(T)} = \frac{L_m}{L_0}$$

ed essendo per l'aria  $\mu(T) \approx T^{0.5 \div 0.8}$ , si ottiene

$$\left(\frac{T_m}{T_0}\right)^{1 \div 1.3} = \frac{L_m}{L_0}$$

che fornisce il salto di temperatura richiesto (essendo  $L_m/L_0 \ll 1$ , sarà anche  $T_m \ll T_0$ ).

### 3.5.3 Gallerie idrodinamiche

Pur essendo state costruite per applicazioni navali, questo tipo di gallerie (di solito a sezione quadrata con o senza superficie libera) possono essere utilizzate per problemi di fluidodinamica incompressibile con numero di Reynolds particolarmente elevato (sia perché la viscosità cinematica dell'acqua è più di 10 volte maggiore di quella dell'aria, sia per le loro notevoli dimensioni (si ottengono velocità di molti metri al secondo in sezioni dell'ordine di 3÷5 metri):

$$v_{acqua} \cong 1.1 \cdot 10^{-6} m^2 / s \quad v_{aria} \cong 1.5 \cdot 10^{-5} m^2 / s \quad (T \cong 15^\circ C)$$

Teniamo anche presente che molte problematiche dell'aerodinamica sono presenti anche nelle applicazioni più avanzate dell'idrodinamica (riduzione della resistenza di attrito di corpi immersi in un fluido, campi fluidodinamici a valle di eliche e sistemi propulsivi, effetto di appendici portanti

quali timoni e alettoni). Per applicazioni legate alla valutazione delle prestazioni di sistemi propulsivi, sono frequentemente usati i tunnel di cavitazione nei quali la pressione può scendere fino a 1/10 di atmosfera per verificare in quali zone della superficie palare insorge la cavitazione.

#### 3.5.4 Gallerie automobilistiche

La stessa situazione vale d'altra parte anche nelle applicazioni più avanzate dell'industria automobilistica (resistenza d'attrito e di forma, alettoni deportanti e appendici in genere) e per le gallerie utilizzate per tali scopi, che sono equivalenti alle gallerie del vento a bassa velocità. La differenza più importante è quella relativa all'impianto di aspirazione dello strato limite, che deve essere necessariamente presente per simulare realmente l'avanzamento dell'autovettura in un fluido a riposo. Inoltre è necessario un dispositivo che faccia girare le ruote per simulare in maniera corretta il comportamento del flusso nella parte inferiore della vettura. Infatti, anche nella parte dell'autoveicolo più a diretto contatto con il suolo la progettazione deve essere particolarmente accurata per ottenere un incremento delle prestazioni favorito dall'interazione fluido-veicolo (effetto suolo).

#### 3.5.5 Vasche navali

Sono utilizzate nell'idrodinamica navale e consistono in larghe vasche nelle quali il modello viene trascinato da un carro ponte fino a velocità di 10÷20 m/s in condizioni di acqua ferma. Lo svantaggio principale è quello del basso tempo disponibile per le misure a causa dell'intervallo di tempo limitato nel quale il carro ponte raggiunge una velocità costante (e quindi dalla richiesta di dimensioni longitudinali particolarmente elevate (dell'ordine delle centinaia di metri).

#### 3.4.6 Gallerie ambientali

Recentemente alcune gallerie inizialmente costruite per scopi aeronautici sono state convertite a studi di fluidodinamica ambientale. Le caratteristiche principali sono quelle delle gallerie del vento a bassa velocità con modelli orografici (monti, colline, valli) e di edifici per simulare la diffusione di inquinanti. Spesso si aggiunge un gradiente di temperatura (e/o di densità) verticale in grado di riprodurre non solo il profilo di velocità, ma anche quello di temperatura (e/o di densità) realmente presente nello strato limite atmosferico.

# Capitolo 4:

## SISTEMI DI MISURA

### 4.1 GENERALITA'

La determinazione sperimentale delle variabili caratteristiche di un campo fluidodinamico (velocità, pressione, temperatura, densità, concentrazione) richiede l'uso di sistemi di misura i cui principi di funzionamento vanno compresi a fondo per un corretto uso dei dati ottenuti.

Si distinguono i sistemi di misura veri e propri, che permettono la determinazione quantitativa delle variabili, dai sistemi di visualizzazione che permettono un'analisi più qualitativa. In alcuni casi anche questi ultimi permettono di ottenere informazioni quantitative sulle variabili o su grandezze derivate (p.e. la visualizzazione di strutture vorticose in un campo di moto permette di individuarne le posizioni, dimensioni e le frequenze di generazione e interazione).

Per ogni sistema di misura individueremo la grandezza misurata, il principio di funzionamento, la metodologia della misura, la risoluzione spaziale e temporale del metodo (*cfr.* 1° capitolo), gli errori di misura e le principali controindicazioni all'utilizzo del sistema. Verranno descritti in dettaglio i sistemi di misura del campo di forza e di pressione e quelli della portata (per i sistemi di misura dei campi di densità, temperatura e velocità si rimanda ai corsi più avanzati della Laurea Specialistica).

### 4.2 SISTEMI DI MISURA DELLA FORZA SU UN MODELLO

La misura di forze intorno ad un oggetto in galleria possono essere effettuate in 3 modi:

- direttamente attraverso l'uso di bilance dinamometriche.
- indirettamente attraverso l'effetto del modello sulla scia e sulle pareti del canale.
- indirettamente attraverso misura del campo di pressione intorno al modello.

Verranno descritti i principi di funzionamento di tutti e tre questi metodi.

#### 4.2.1 Bilance dinamometriche

Il principio di funzionamento é la misura diretta della forza a partire dallo spostamento dalla posizione di equilibrio, quando il fluido viene messo in moto, di un elemento deformabile. La misura é effettuata tramite la lettura di questo spostamento che deve essere messo in relazione con il carico con una procedura di calibrazione. Come elementi deformabili vengono utilizzate capsule idrauliche (nelle quali vi é un pistone che esercita pressione su un fluido) o dispositivi elettrici (che variano la loro resistenza a seconda della pressione applicata o che variano la loro capacita' a seconda della deformazione) con amplificatori. La grandezza misurata é quindi uno spostamento. La risoluzione spaziale é legata alle dimensioni dell'oggetto in prova, in quanto questo é un metodo globale che misura i carichi su tutto il modello. La risoluzione temporale é bassa perché le bilance necessitano di un certo tempo per raggiungere una posizione di equilibrio: fluttuazioni sulla scala temporale inferiore al minuto non sono apprezzabili. Le principali controindicazioni sono legate all'uso di un braccio di sostegno che influenza ed altera il comportamento del campo di pressione e quindi le forze. Si usano bilance dinamometriche a 3 componenti (per misurare portanza, resistenza e momento di beccheggio su un profilo alare o su una sezione di un corpo allungato) o a 6 componenti (per portanza, resistenza, forza laterale, momento di beccheggio, di imbardata e di rollio per un'ala o un corpo di forma qualsiasi) (cfr. figura 19). Per quello che riguarda la bilancia a 6 componenti, con riferimento alla figura 19 (e agli assi e ai versi di rotazione), si ha:

portanza	$-L = C + H + E$	( $C, H, e E$ sono definite negative)
resistenza	$D = A + B$	
forza laterale	$Y = F$	( $F$ é definita negativa)
momento di rollio	$R_p = (H - C)b / 2$	(intorno all'asse $x$ )
momento di beccheggio	$M_p = El$	(intorno all'asse $y$ )
momento di imbardata	$S_p = (B - A)b / 2$	(intorno all'asse $z$ )

(essendo P il punto rispetto al quale vengono calcolati i momenti e avendo preso positive le uscite A, B, C,...quando sono in estensione e negative quando sono in compressione).

Da un punto di vista costruttivo é fondamentale la perpendicolarità tra le componenti misurate (e l'allineamento con gli assi coordinati cioè con gli assi galleria) altrimenti una forza in una direzione apparirà come avente componenti anche nelle altre. Da un punto di vista della calibrazione é necessario sottrarre l'effetto della bilancia stessa (peso ed eventuali altre forze e momenti presenti).

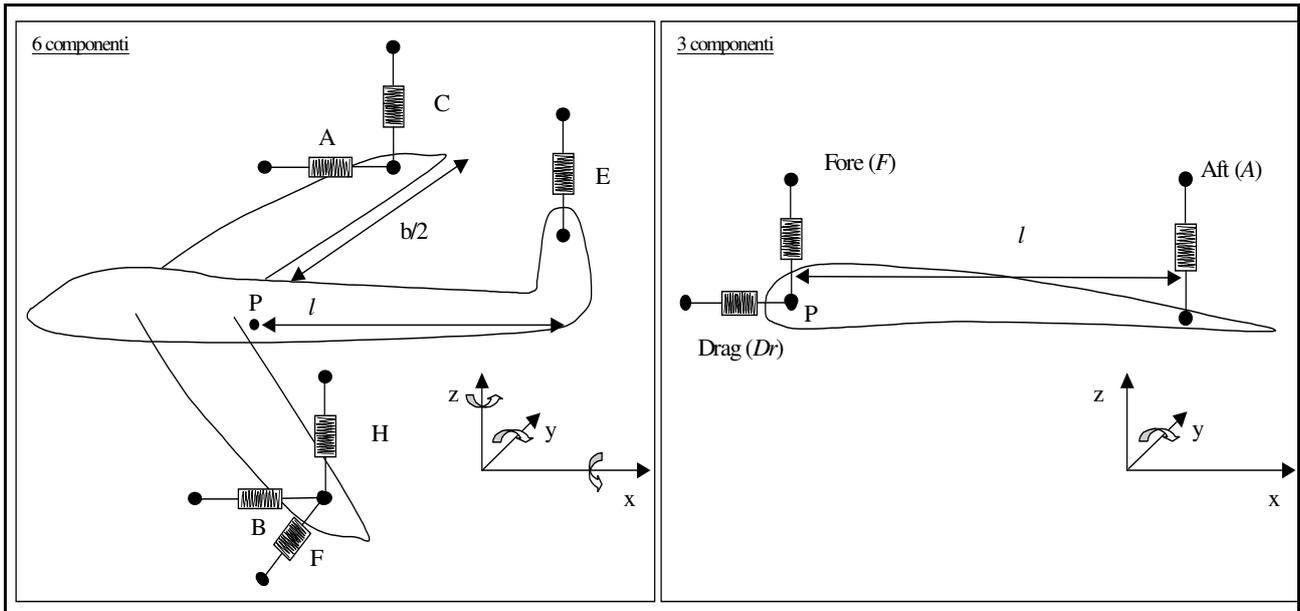


Figura 19. Deformazioni misurate da una bilancia a 6 (sinistra) e 3 componenti (destra).

Per la bilancia a 3 componenti, sempre con riferimento alla figura 19, vale:

portanza	$-L = F + A$
resistenza	$D = D_r$
momento di beccheggio	$M_p = Al$

(nella bilancia a 3 componenti in dotazione alla galleria del vento del Dipartimento e' presente un unico sostegno con un elemento lineare di lunghezza  $l$  al quale sono collegate le due celle di carico  $A$  ed  $F$ ; il momento di beccheggio rispetto alla posizione del sostegno sarà quindi  $M_p = A l/2 - F l/2 = (A-F) l/2 = 0.127 (A-F) \text{ N m}$ ).

I modelli sono sostenuti da fili di acciaio sottili (bilance meccaniche) o da bracci di sostegno (bilance elettroniche). Nelle bilance meccaniche si misurano le variazioni della lunghezza dei fili (ma questi si possono rompere con conseguente perdita del modello e quindi sono poco usati), mentre in quelle elettroniche l'uscita é un segnale elettrico in uscita da un trasduttore di forza che dovrebbe essere legato linearmente alla forza applicata. Quest'ultima relazione non é sempre verificata a causa di imperfezioni costruttive della bilancia o di deformazioni elastiche tra le varie parti che la compongono. Entrambe queste cause provocano un'interazione tra le forze misurate e un disallineamento che deve essere corretto mediante una procedura di calibrazione (che utilizza pesi noti e misura le uscite). Essendo le deformazioni non lineari funzione della temperatura, anche

la calibrazione può essere funzione della temperatura. La calibrazione consiste nel mettere in relazione l'uscita (di solito una tensione  $V$ ) con la forza applicata  $F$  per determinare la costante  $K$  differente per ciascuna uscita ( $V = K F$ ). L'errore relativo risultante sarà del tipo

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta K}{K}$$

dove il primo termine rappresenta l'errore di lettura e il secondo quello di calibrazione. Per la bilancia a 3 componenti sarà quindi

$$\Delta L = \Delta F + \Delta A, \quad \Delta D = \Delta D_r, \quad \Delta M_p = l\Delta A + A\Delta l$$

Il supporto dà luogo a due effetti, che modificano la misura rispetto alla situazione reale (nella quale il supporto non è presente):

- forze e momenti aggiuntivi (valutati mediante una misura con il solo supporto):
- variazione del campo di moto intorno al modello (interferenze tra campo fluidodinamico del modello e del supporto, che non possono essere valutate da misure sul solo supporto).

Entrambi gli effetti sono di carattere dinamico. Ovviamente, per minimizzare questi effetti, si può ridurre il più possibile la sezione del supporto (se cilindrico, il suo diametro  $d$ ), ma ciò provoca maggiore deformabilità del supporto stesso e la conseguente perdita di ortogonalità tra le direzioni lungo le quali si misurano le forze, oltre ad un aumento delle vibrazioni. Una valutazione teorica della resistenza del supporto può essere fatta analizzando il diagramma del coefficiente di resistenza in funzione del numero di Reynolds  $C_D (Re)$ , che per un cilindro a sezione circolare è rappresentato in figura 20 (se si lavora con numeri di Reynolds compresi tra  $10^2$  e  $10^5$  allora il  $C_D$  è costante e vale circa 1).

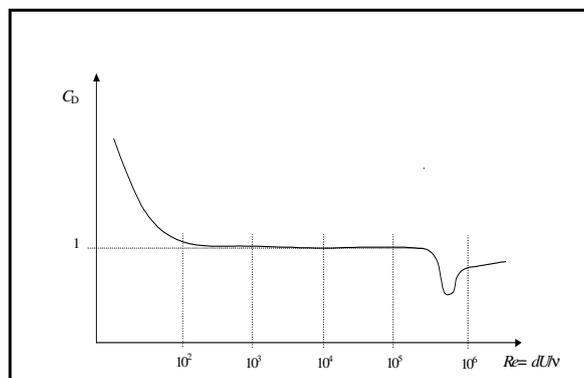


Figura 20. Andamento in funzione del numero di Reynolds del coefficiente di resistenza per un cilindro.

L'altra possibilità é quella di prendere il diametro  $d$  talmente piccolo da essere nella regione di Stokes ( $Re < 1$ ) dove  $C_D = A/Re$  (essendo  $A$  una costante che dipende dalla sezione e che vale 24 per un cilindro a sezione circolare). In questo caso la resistenza vale

$$D = \frac{1}{2} \rho U^2 d \cdot C_D = \frac{A \mu \rho U^2 d}{2 d \rho U} = \frac{A \mu U}{2}$$

é indipendente dal diametro del cilindro (che quindi posso fare grande a piacere purché valga la legge di Stokes). Quella di cui stiamo parlando é la forza per unita di lunghezza del cilindro. Una possibilità sperimentale per valutare l'interferenza supporto - modello é quella di posizionare in maniera simmetrica un supporto identico e nel misurare le variazioni del campo di forze dovute a questo. Utilizzando l'indice  $A$  per la configurazione sperimentale con il solo supporto (resistenza  $D_S$ ), l'indice  $B$  per quella con modello e supporto (resistenza  $D_S + D_M + D_{SM}$ , dove l'ultimo termine tiene conto dell'interazione) e l'indice  $C$  per modello, supporto e supporto posto simmetricamente (resistenza  $D_S + D_M + D_{SM} + D_{MS}$ ), si ha

$$D_A = D_S, \quad D_B = D_S + D_M + D_{SM}, \quad D_C \approx D_S + D_M + 2D_{SM}$$

dove si e' linearizzata la dipendenza da ciascuno degli effetti in gioco e si e' ipotizzato che l'interazione modello – supporto sia la stessa per entrambi i supporti ( $D_{SM} = D_{MS}$ ), ipotesi in effetti non vere, a meno che il supporto non sia molto più piccolo del modello. Dalle relazioni precedenti e' possibile determinare la resistenza del solo modello attraverso la misura di resistenza in tre differenti configurazioni:  $D_M = 2D_B - D_A - D_C$ . Si consulti comunque il libro di Rae e Pope a pag. 204 per ulteriori approfondimenti.

Come già detto nella parte relativa agli impianti, a volte é presente un disallineamento (qualche grado) tra l'asse della galleria e la direzione della corrente. Per correggere questo effetto, si prova il modello in configurazione dritta ( $d$ ) ed in configurazione rovesciata ( $r$ ). Siano  $C_{LM}$  e  $C_{DM}$  la portanza e la resistenza misurate (assi galleria) e  $C_L$  e  $C_D$  quelle incognite (assi vento) (cfr. figura 21). Essendo  $C_L \gg C_D$  (circa 10÷20 volte) e l'angolo  $\alpha$  molto piccolo (minore di  $5^\circ$ ), sarà

$$\left. \begin{aligned} (C_{LM})_d &= C_L \cos \alpha + C_D \sin \alpha \cong C_L \cos \alpha \\ (C_{DM})_d &= C_D \cos \alpha - C_L \sin \alpha \cong C_D \cos \alpha - (C_{LM})_d \operatorname{tg} \alpha \end{aligned} \right\}$$

e con il modello rovesciato (scambiando  $\alpha$  con  $-\alpha$ ) (figura 21):

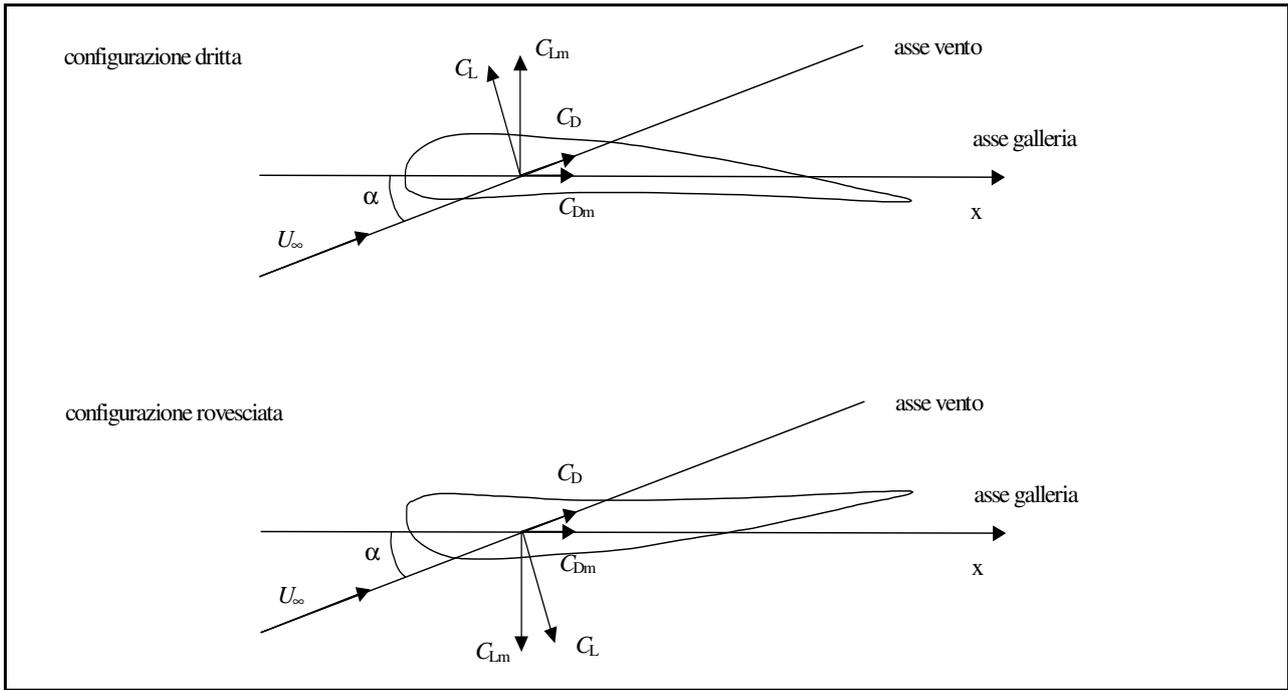


Figura 21. Configurazioni dritta e rovesciata per misurare l'angolo di disallineamento assi vento - assi galleria.

$$\left\{ \begin{array}{l} (C_{LM})_r = C_L \cos \alpha - C_D \sin \alpha \cong C_L \cos \alpha \\ (C_{DM})_r = C_D \cos \alpha + C_L \sin \alpha \cong C_D \cos \alpha + (C_{LM})_r \operatorname{tg} \alpha \end{array} \right\}$$

cioè l'angolo di disallineamento e' dato da

$$\operatorname{tg} \alpha \cong \frac{(C_{DM})_r - (C_{DM})_d}{[(C_{LM})_d + (C_{LM})_r]}$$

#### 4.2.2 Metodo della scia

Le forze su un modello possono anche essere misurate attraverso un'indagine nella scia dello stesso. In particolare, si ottiene la resistenza da un'indagine di quello che succede nella scia (rispetto a quanto succede a monte), mentre la portanza e' ottenuta da un'analisi del campo di pressione sulle pareti della camera di prova. Questi studi sono effettuati per profili alari (o comunque per configurazioni bidimensionali) dove queste sono le forze più importanti.

La resistenza é misurata usando l'eq. di bilancio della quantità di moto in due sezioni A e S a monte e a valle del modello. Il difetto di quantità di moto sarà proprio uguale alla resistenza (Batchelor). Nel caso incompressibile (bassa velocità) abbiamo (con riferimento alla figura 22):

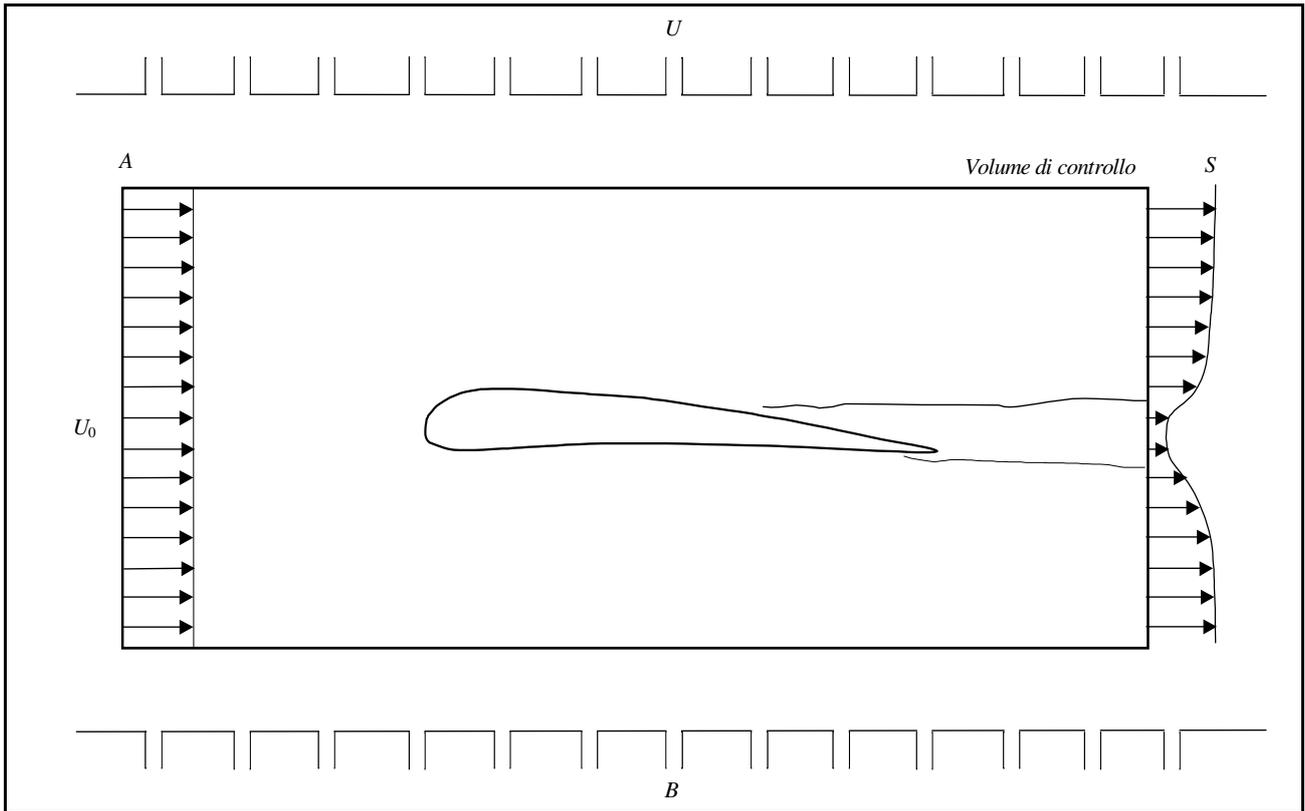


Figura 22. Determinazione della resistenza e della portanza da misure in scia e sulle pareti dell'impianto.

$$D = \iint_S [\rho U_A (U_A - U_0) + (p_A - p_S) - \rho U_S (U_S - U_0)] dS$$

( $S$  rappresenta l'area della sezione del condotto,  $U_S$  la velocità nella sezione a valle  $S$  e  $U_0$  la velocità indisturbata a monte) dove in  $D$  sono compresi sia gli effetti della resistenza di attrito che di quella di forma. L'uguaglianza precedente si ottiene a partire dalle equazioni di bilancio della quantità di moto (in direzione  $x$ ) e di conservazione della massa scritte in forma integrale nel volume di controllo, trascurando le forze tangenziali sulla superficie esterna di tale volume (ma non sul corpo). Considerando valida l'equazione di Bernoulli tra  $A$  e  $S$  nella sua forma più semplice, si può anche scrivere (assumendo che nella sezione di ingresso  $U_A \approx U_0$ ,  $V_A \approx 0$  e  $W_A \approx 0$ )

$$D = \iint_S [\rho U_S (U_0 - U_S) + (p_A - p_S)] dS = \iint_S [\rho U_S (U_0 - U_S) + \frac{1}{2} \rho (U_S^2 - U_0^2 + V_S^2 + W_S^2)] dS \quad ,$$

che rende esplicita la dipendenza dalle altre componenti della velocità (che possono essere trascurate se il rilevamento del profilo di velocità non è effettuato a ridosso del corpo,  $p_A \approx p_S$ ).

Nel caso di scia vicina (quando non si possono trascurare i termini aggiuntivi) si ottiene:

$$D = \frac{1}{2} \iint_S \rho (U_0 - U_s)^2 dS + \frac{1}{2} \iint_S \rho (V_s^2 + W_s^2) dS ,$$

(il secondo integrale necessita la misura delle altre componenti di velocità), mentre nel caso di scia lontana (quando è possibile trascurare il secondo contributo e  $U_s \approx U_0$ ) si ottiene

$$D = \iint_S \rho U_s (U_0 - U_s) dS + \frac{1}{2} \iint_S \rho (V_s^2 + W_s^2) dS ,$$

dove il secondo contributo dovuto alle altre componenti può essere trascurato. E' importante notare che nel caso di sezione di prova chiusa, le precedenti relazioni devono essere modificate, in quanto non esiste flusso attraverso la superficie laterale e il primo termine sarà modificato con  $(U_0^2 - U_s^2)$ .

Quindi, a partire da una misura di velocità in una sezione a valle del profilo, si può ottenere una valutazione della resistenza. Se il problema è realmente bidimensionale si ha che  $dS = l dy$  (dove  $l$  è l'apertura alare e  $y$  è la coordinata verticale) e che l'integrale in  $y$  andrà esteso sulla distanza di misura. In situazioni prossime allo stallo non è possibile usare l'espressione semplificata e bisogna inserire il contributo delle altre componenti di velocità a causa della presenza di strutture vorticosi.

La portanza può essere misurata attraverso il campo di pressione sulle pareti della galleria. Infatti il campo di pressione sulle pareti riproduce quello intorno al profilo (in realtà vi saranno dei termini correttivi) (*cfr.* figura 22):

$$L = \int_0^c (p_B - p_U) A dx ,$$

essendo  $c$  la corda (o la dimensione lungo l'asse della galleria) del profilo ed  $A$  la superficie di galleria tra una presa e l'altra. Nel caso bidimensionale si ha che  $A = l \cdot \Delta x$  essendo  $\Delta x$  la spaziatura tra le prese di pressione in direzione  $x$  ed  $l$  l'apertura alare.

I metodi elencati hanno come grandezze misurate rispettivamente la velocità e la pressione. I principi di funzionamento, le metodologie, la risoluzione spaziale e temporale e le limitazioni sono quindi quelle caratteristiche dei sistemi di misura di velocità (*p.e.* tubo di Pitot) e di pressione.

#### 4.2.3 Campo di pressione intorno al modello

Questo terzo metodo richiede la misura del campo di pressione intorno al modello (solo la parte statica). Il modello sarà equipaggiato con alcuni fori connessi attraverso dei tubi ad un barometro multiplo. La portanza sarà determinata (figura 23):

$$L = \int_0^c \int_0^l p \cos \alpha dS$$

(dove  $c$  è la corda,  $l$  l'apertura alare,  $\alpha$  l'angolo tra la direzione ortogonale alla corrente ( $y$ ) e la normale locale,  $p$  la pressione misurata e  $S$  la superficie alare).

Si può anche misurare il momento di beccheggio:

$$M = \int_0^c \int_0^l p \cos \alpha x dS$$

(essendo  $x$  la distanza dal punto  $P$  rispetto al quale si vuole calcolare il momento, di solito il bordo d'attacco o il quarto di corda), e la resistenza:

$$D = \int_0^c \int_0^l p \sin \alpha dS$$

Nel caso bidimensionale (ala a sezione costante) si ha che:  $dS = l dx$  (essendo  $dx$  la porzione dell'ala a cavallo della presa di pressione). Ovviamente, essendo le prese in un numero finito, sarà necessario sostituire l'integrale con una somma estesa alle prese sul dorso e sul ventre.

Bisogna però fare attenzione al risultato ottenuto per la resistenza  $D$  (la portanza  $L$  é di solito ben misurata): in effetti, a causa dell'indipendenza del campo di pressione dalla presenza dello strato limite, questa resistenza misurata contiene solo la resistenza di forma. Inoltre la procedura di proiezione della superficie  $dS$  sulla corda (cioè in direzione  $x$ ,  $dS = l dx \cong l dc$ ) può dare errori notevoli.

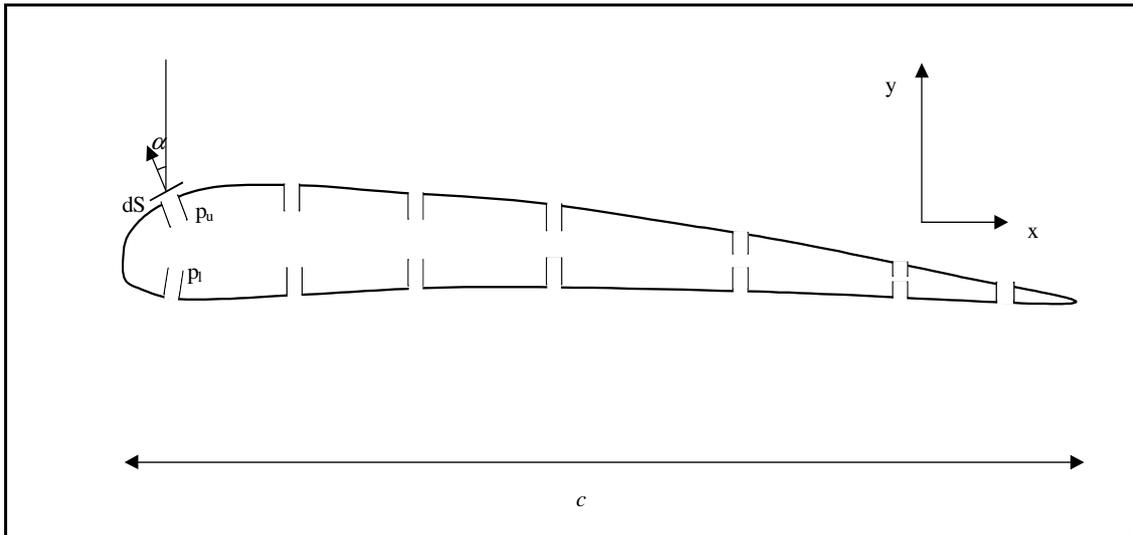


Figura 23. Determinazione della resistenza e della portanza da misure sulla superficie del modello.

Infatti, nel caso di flusso viscoso, si è trascurato in  $L$  un termine del tipo:

$$\int_0^c \int_0^l \tau_0 \sin \alpha \, dS$$

essendo  $\tau_0$  lo sforzo tangenziale alla parete, (che non può essere misurato con le prese di pressione).

Allo stesso modo, si è trascurato in  $D$  un termine aggiuntivo:

$$\int_0^c \int_0^l \tau_0 \cos \alpha \, dS$$

Pero', mentre il termine in  $L$  è trascurabile rispetto ai termini di pressione poiché contiene il seno di un angolo che quasi sempre è molto piccolo, quello in  $D$  non lo è, e questo porta errori nella determinazione della resistenza maggiori di quelli nel calcolo della portanza.

Anche in questo caso si rimanda ai sistemi di misura della pressione per quello che riguarda le caratteristiche della misura effettuata

### 4.3 SISTEMI DI MISURA DELLA PRESSIONE

Le misure di pressione statica sono essenzialmente di due tipi: canne barometriche (manometri) e trasduttori di pressione. Le canne barometriche riportano l'effetto di variazioni di pressione su orifizi situati su corpi o pareti, in termini di spostamenti su una scala graduata del liquido contenuto nelle canne stesse. La grandezza misurata è quindi lo spostamento di una colonna di liquido. Con riferimento alla figura 24, per una misura differenziale, applicando l'equazione di

Bernoulli (cioè trascurando gli effetti della viscosità) nella forma che contiene il termine di carico verticale, si ottiene

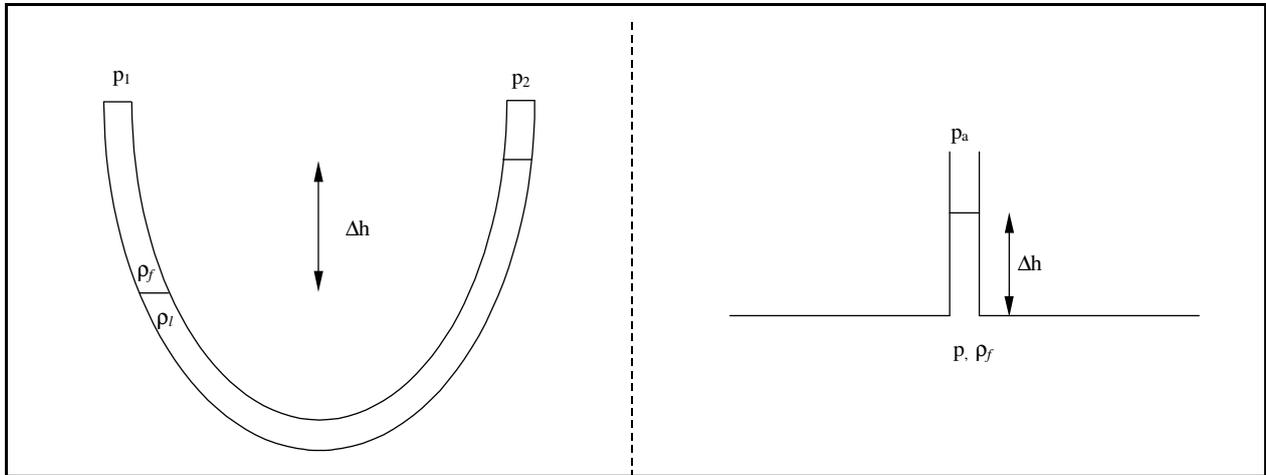


Figura 24. Sistemi di misura della pressione statica.

$$\Delta p = p_1 - p_2 = (\rho_l - \rho_f) \cdot \Delta h \cdot f(z, \Phi) \cdot g$$

(dove  $\Delta h$  rappresenta lo spostamento rispetto alla posizione di riferimento,  $z$  è l'altitudine sul livello del mare e  $\Phi$  la latitudine). Se abbiamo un'unica canna barometrica con liquido di densità  $\rho_f$  si ha (cfr. figura 24):

$$\Delta p = p - p_a = \rho_f g \cdot \Delta h f(z, \Phi).$$

A causa della differente risposta a seconda del liquido utilizzato (di solito acqua o alcool, ma anche mercurio) alle differenti altitudini e latitudini, è necessaria una calibrazione preliminare del sistema, misurando l'altezza raggiunta dal liquido con pressioni di riferimento note (*p.e.* in condizioni di assenza di moto ( $p = p_{atm}$ )): ciò determina la funzione  $f$ . La misura avviene tramite la lettura del livello raggiunto dal liquido su una scala graduata. L'errore relativo che si commette è dato da

$$\frac{\Delta(\Delta p)}{\Delta p} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta(\Delta h)}{\Delta h} + \frac{\Delta f}{f} + \frac{\Delta g}{g}$$

dove la densità è data con un certo numero di cifre significative (cioè l'errore è noto), l'errore relativo sull'altezza viene misurato,  $\Delta f / f \approx 1\%$  e l'errore relativo sull'accelerazione di gravità è trascurabile. La risoluzione spaziale del metodo è legata alla dimensione della presa di pressione (di solito dell'ordine di qualche mm). La risoluzione temporale è bassa in quanto le fluttuazioni vengono di solito smorzate dall'inerzia del liquido utilizzato e da fenomeni di capillarità nelle canne barometriche (tipicamente il minimo intervallo di tempo utilizzabile non è inferiore a qualche

secondo e quindi inutilizzabile per misurare le variazioni di pressione dovute alla turbolenza; si riescono a misurare pressioni in flussi turbolenti con fluttuazioni inferiori al 10 %).

I trasduttori di pressione trasformano il gradiente di pressione, presente tra ingresso ed uscita, in uno spostamento di una lamina deformabile collegata ad un circuito elettrico (lo spostamento e la deformazione si traducono in una variazione di resistenza, capacità o di frequenza). La quantità misurata è dunque una tensione la cui relazione con la variazione di pressione non è semplice: anche in questo caso è necessaria una calibrazione rispetto ad una pressione di riferimento. L'errore è di solito dell'ordine dell'1 % del valore massimo misurabile. La risoluzione spaziale è pari al metodo precedente, mentre quella temporale è migliore (intervallo di tempo dell'ordine della frazione di secondo e in quelli più moderni anche del centesimo di secondo).

Come detto, è sempre necessario riportare la pressione misurata ad un valore di riferimento (di solito la pressione atmosferica) in quanto la  $p = 0$  si ottiene solo nel caso di condizioni di vuoto: si misurerà quindi in effetti una differenza di pressione.

È importante mettere in evidenza che la forma della presa di pressione (sul corpo o sulle pareti dell'impianto) influenza molto il risultato attraverso un errore sistematico che è indicato nella figura 25 per alcune tipiche prese di pressione. Si noti che l'errore è molto maggiore a causa di uno smussamento degli spigoli a lato della presa di pressione rispetto a quello causato da un disallineamento angolare (se diretto in verso opposto alla corrente locale).

Per quello che riguarda la misura della pressione dinamica si usano sostanzialmente gli stessi sistemi per la misura delle differenze di pressione rispetto al caso di assenza di moto. Questa volta, però la presa di pressione è rivolta verso la direzione del moto. Lo strumento più usato è il tubo di Pitot che in realtà trasforma una misura di pressione in una misura di velocità (vedremo sotto quali condizioni) e quindi può rientrare anche nella categoria misura di velocità.

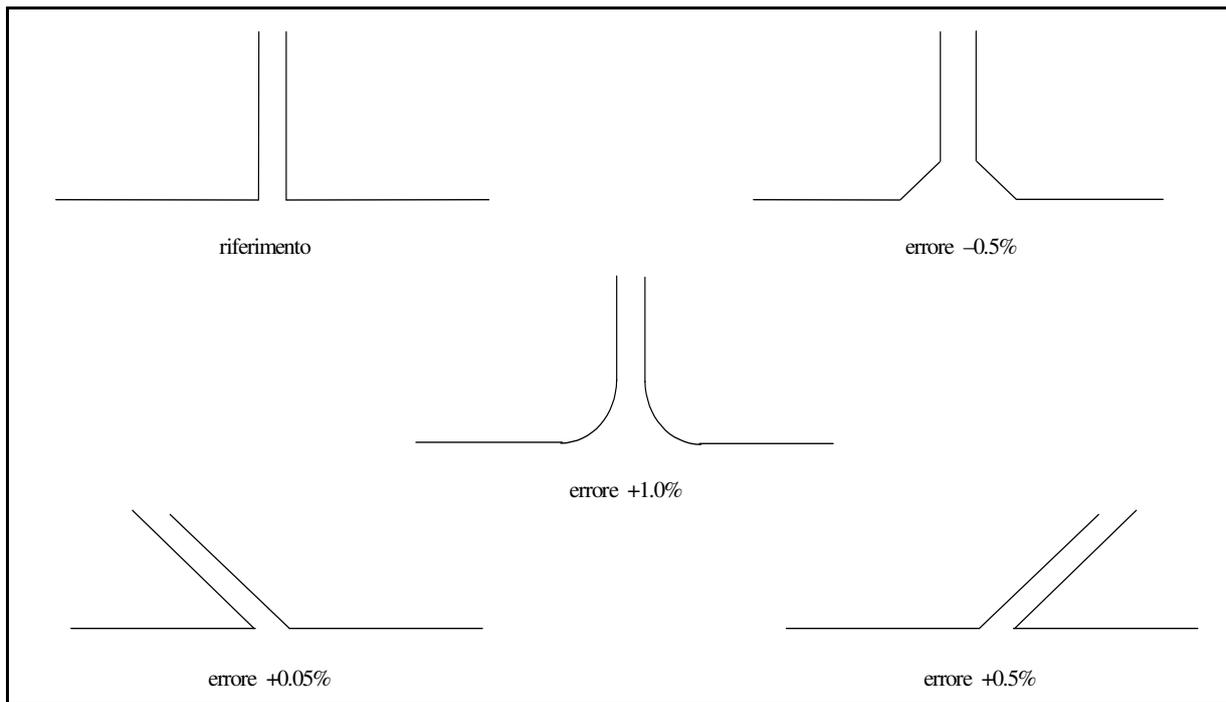


Figura 25. Errore sistematico causato dalla forma della presa sulle pareti dell'impianto.

**Tubo di Pitot.** È uno strumento che permette la misura della pressione totale (di ristagno) e della pressione statica e per differenza della pressione dinamica tramite almeno due prese, una orientata nella direzione del moto ed una (o più) in direzione normale (figura 26).

Il diametro del foro per la pressione di ristagno è maggiore di quello usato per la pressione statica (circa 0.5 cm). Complessivamente la dimensione del tubo di Pitot ( $D$  nella figura 26) raggiunge il centimetro. Questa misura è pari a più o meno l'inverso della risoluzione spaziale del sistema. La risoluzione temporale è simile a quella del caso delle prese statiche. Dobbiamo distinguere l'uso del tubo di Pitot nei vari regimi.

*Uso del tubo di Pitot per flussi incompressibili ( $Ma < 0.3$ ):* in questo caso la pressione totale e quella statica sono legati dalla relazione (teorema di Bernoulli):

$$p_t = p + \frac{1}{2} \rho U_s^2$$

dove  $p_t$  è misurata dalla presa totale e  $p$  dalla presa statica,  $U$  rappresenta la velocità in prossimità della presa statica (la velocità alla presa totale è nulla). Dalla misura della pressione è quindi immediato ottenere la misura di velocità:

$$U_s = \left( \frac{2(p_t - p)}{\rho} \right)^{1/2}. \quad (4.1)$$

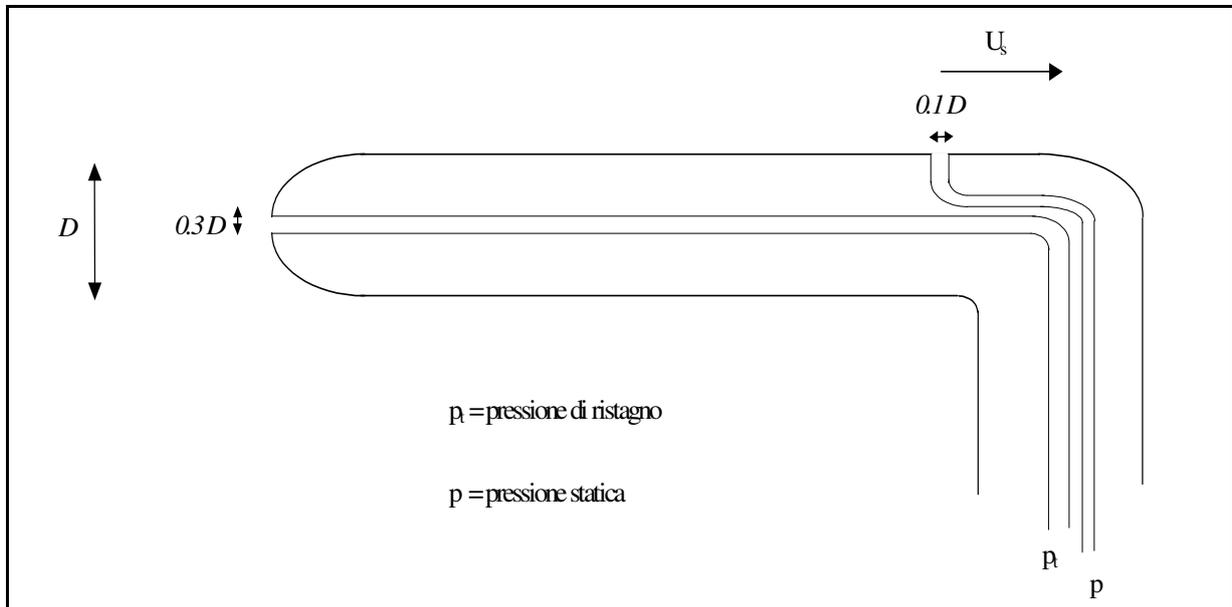


Figura 26. Geometria delle prese di pressione totale e statica in un tubo di Pitot.

L'errore che si commette nel caso delle misure di pressione statica e totale é equivalente a quanto visto in precedenza. Nel caso della velocità invece, una volta determinato l'errore sulla pressione, si avrà:

$$\frac{\Delta U_s}{U_s} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\Delta(\Delta p)}{\Delta p} + \frac{\Delta \rho}{\rho} \right].$$

In questo modo, tramite misure di pressione, si effettuano misure di velocità. In realtà, affinché sia valida la (4.1), sono necessarie le seguenti ipotesi:

- flusso stazionario (per il caso non stazionario non é sempre possibile integrare l'eq. di Navier-Stokes);
- assenza di forza di massa (altrimenti sarebbe presente un termine aggiuntivo nella relazione precedente del tipo  $2g\Delta h/\rho$ , con  $\Delta h$  che rappresenta la differenza di quota tra la presa statica e quella totale; tale termine é di solito trascurabile essendo  $\Delta h$  molto piccolo);
- flusso barotropico (nel quale non si innescano rotazioni causate da un diverso punto di applicazione tra il gradiente di pressione e di densità);

- flusso non viscoso (cioè ad elevati numeri di Reynolds ( $> 1000 \div 2000$  basato su  $D$ ), in assenza di separazione e comunque in zone distanti da pareti).

In particolare, in prossimità delle pareti, sono presenti effetti di interferenza tra Pitot e parete che provocano una differenza tra velocità misurata e velocità effettiva (vedi figura 27). Infatti l'aumento di velocità tra tubo e parete provoca un aumento della pressione di ristagno ed una diminuzione della pressione statica. Tale interferenza può essere corretta impiegando tubi di Pitot di differente dimensione esterna e forma.

Il tubo di Pitot non è uno strumento di misura che possiede molta sensibilità alla direzione della velocità (in figura 28 è riportato l'effetto sull'angolo di imbardata (sul piano  $(x,z)$ )). L'errore è trascurabile se la deviazione è inferiore a  $\pm 10^\circ$  (ma vi sono configurazioni, come quella del tubo di Kiel, per le quali l'errore è trascurabile fino a  $30^\circ$  a causa della presenza di un alloggiamento come riportato in figura 28). La presa statica è inoltre più sensibile alle variazioni di direzione rispetto a quella totale. Per determinare la direzione della velocità si possono usare tubi dotati di più fori: quando i fori laterali danno pressione uguale tra loro, allora il foro centrale è allineato con l'asse della corrente (vedi dettaglio in figura 28 dove è rappresentato un tubo di Pitot a cinque fori).

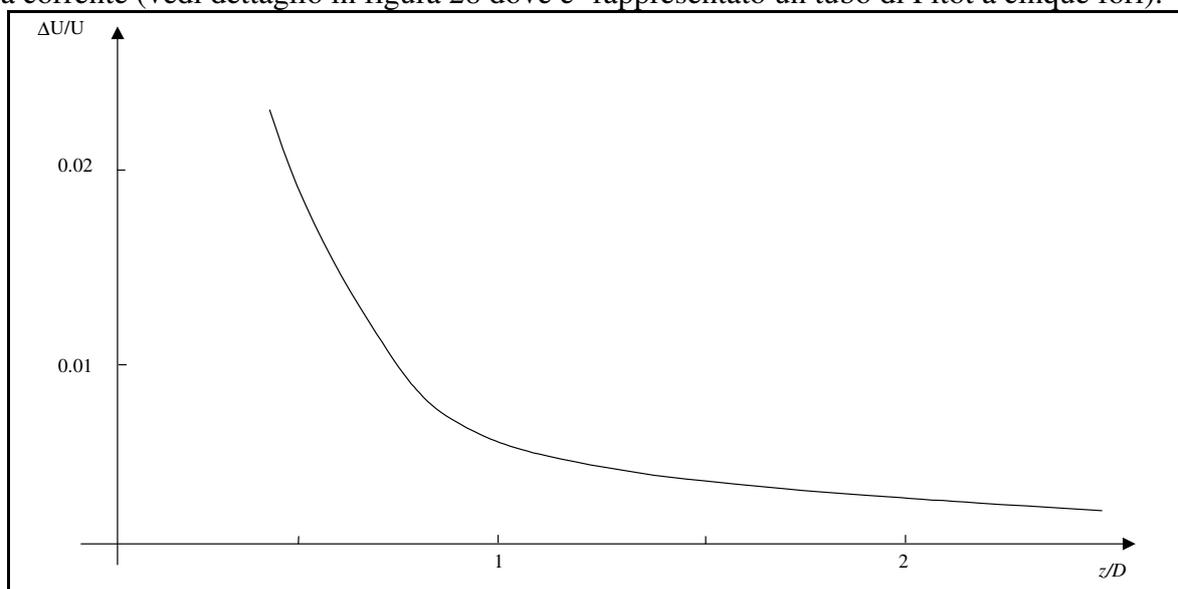


Figura 27. Errore relativo nella misura della velocità causato dalla prossimità di una parete.

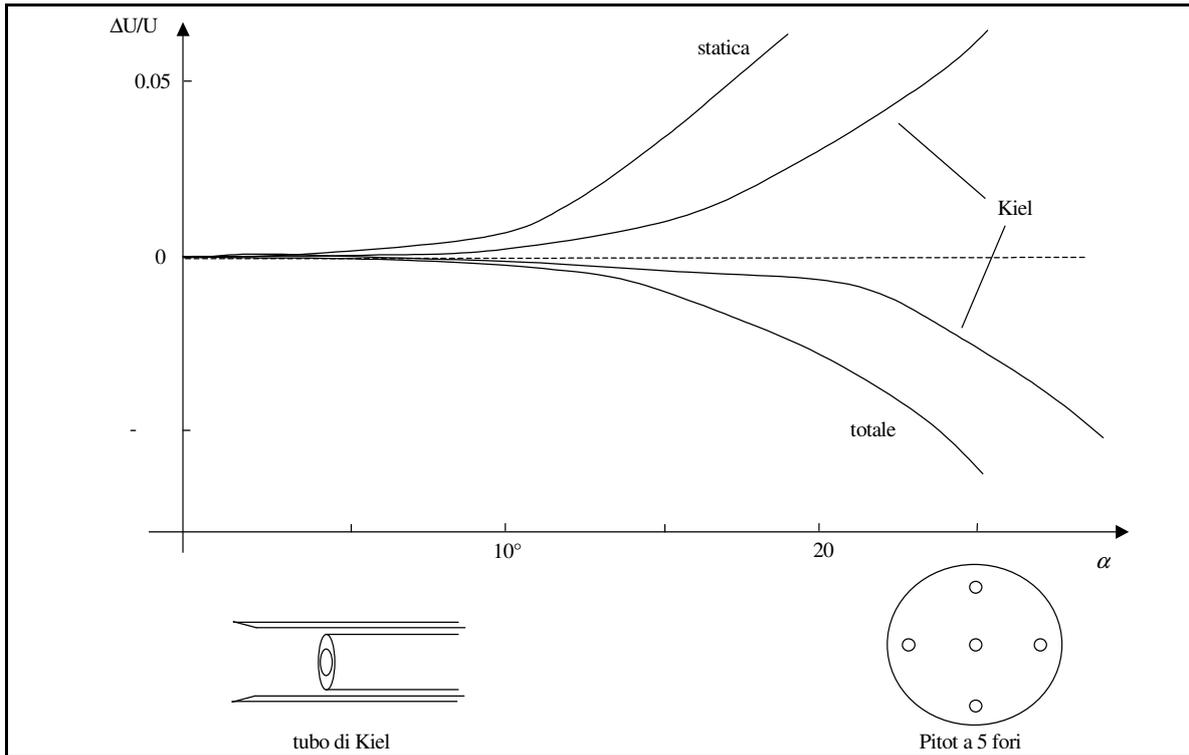


Figura 28. Errore relativo nella misura della velocità causato da disallineamento angolare sul piano  $(x,z)$ .

Uso del Pitot per flussi compressibili ( $0.3 < Ma < 1$ ): in questo caso, per un flusso isentropico (cfr. capitolo 2), abbiamo:

$$p_t = p \left[ 1 + \left( \frac{\gamma - 1}{2} \right) Ma_s^2 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

dove  $Ma_s = U_s / a_s$  (il numero di Mach è calcolato alla presa statica). Dalla relazione precedente, ricaviamo:

$$U_s = \left( \left[ \left( \frac{p_t}{p} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} - 1 \right] \left( \frac{2}{\gamma - 1} \right) a_s^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Utilizzando l'equazione dell'energia é possibile mettere in relazione la velocità del suono alla presa statica ( $a_s$ ) con quella alla presa totale( $a_t$ ):

$$c_p T_s + \frac{U_s^2}{2} = c_p T_t \Rightarrow a_s^2 = a_t^2 - \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) U_s^2$$

e quindi

$$U_s = \left( \left[ 1 - \left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \left(\frac{2}{\gamma-1}\right) a_t^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

L'errore sulla velocità é:

$$\frac{\Delta U_s}{U_s} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{a_t}{U_s}\right)^2 \left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left(\frac{\Delta p_t}{p_t} + \frac{\Delta p}{p}\right).$$

*Uso del Pitot per flussi supersonici ( $Ma > 1$ ):* in questo caso si formerà un'onda d'urto normale (localmente) rispetto alla linea di corrente che conduce alla presa di ristagno (figura 29). A cavallo dell'onda d'urto non varrà l'ipotesi di isentropicità, mentre a monte e a valle di questa varrà tale ipotesi. A cavallo dell'urto sarà per le pressioni statiche (*cfr.* capitolo 2):

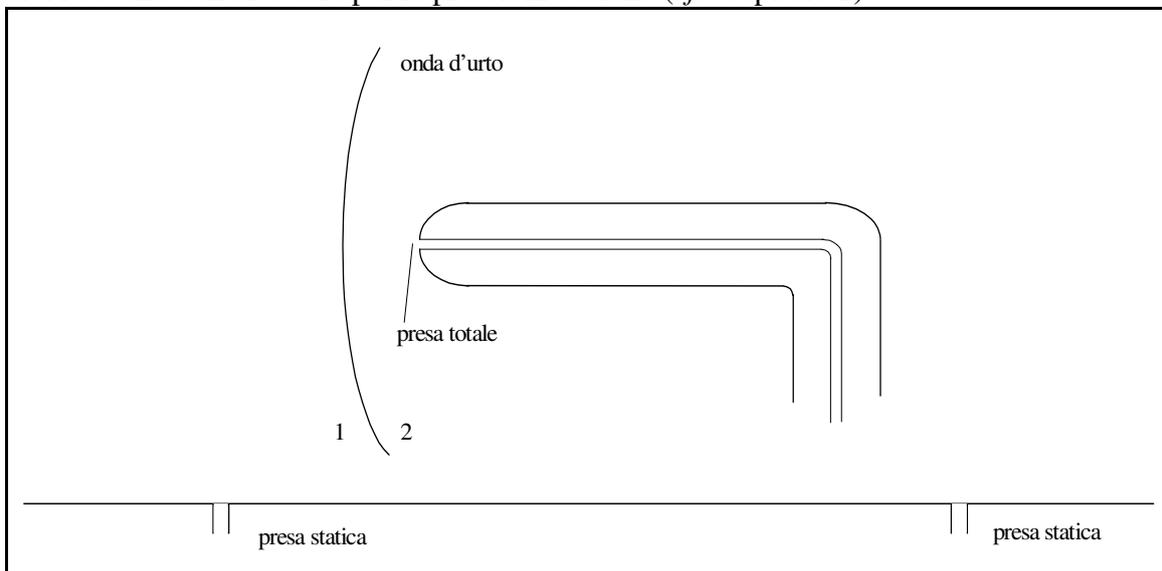


Figura 29. Configurazione di misura con tubo di Pitot in un flusso supersonico con presenza di onda d'urto.

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{1 + \gamma Ma_1^2}{1 + \gamma Ma_2^2} \right)$$

A valle dell'urto il rapporto tra pressione totale e statica è

$$\left(\frac{p_t}{p}\right)_2 = \left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)Ma_2^2\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

e quindi, rispetto alla pressione statica a monte,

$$\frac{p_{t2}}{p_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)\left(\frac{p_t}{p}\right)_2 = \left(\frac{1+\gamma Ma_1^2}{1+\gamma Ma_2^2}\right)\left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)Ma_2^2\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

dove  $p_{t2}$  è misurata con la presa di ristagno e  $p_1$  è misurata con la presa statica a monte. La relazione tra i numeri di Mach è:

$$Ma_2^2 = \frac{\left(\frac{2}{\gamma-1}\right) + Ma_1^2}{\left(\frac{2\gamma Ma_1^2}{\gamma-1}\right) - 1}$$

e quindi:

$$\frac{p_{t2}}{p_1} = \left[\frac{(\gamma-1)Ma_1^2 + 2}{(\gamma+1)Ma_1^2}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{2\gamma Ma_1^2}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

che permette di ricavare il numero di Mach,  $Ma_1$ , cioè la velocità  $U_1$  a monte dell'urto, in funzione di quanto misurato con il Pitot. L'errore sulla velocità è ricavabile da quello sulle pressioni (anche in forma grafica).

#### 4.4 SISTEMI DI MISURA DELLA PORTATA

Vi sono moltissimi misuratori di portata che misurano sia staticamente le quantità di flusso, o che determinano dinamicamente il passaggio del flusso attraverso una data sezione. Nel primo caso si ottiene una buona precisione ma scarsa risoluzione spaziale e temporale (*p.e.* attraverso le misure del tempo impiegato a riempire un contenitore di un volume noto), oltre ad una notevole semplicità.

Nel secondo caso, la misura é effettuata tramite la determinazione di grandezze collegate alla velocità (quale ad esempio la pressione in più punti): la risoluzione spaziale e temporale e gli errori saranno quindi quelli relativi alle grandezze misurate.

Le portate in massa e volume sono definite rispettivamente come:

$$Q_m = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \, dx dy dz = \iint_A \rho U \, dy dz \approx \rho UA, \quad Q_v = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V dx dy dz = \iint_A U dy dz \approx UA$$

dove le ultime uguaglianze sono valide qualora si assuma un profilo di velocità costante (assenza di strato limite). Vedremo in dettaglio solo due esempi di misuratori di portata dinamici: il tubo di Venturi (o venturimetro) e il rotametro.

**Tubo di Venturi.** Con questo apparato si misura la caduta di pressione in corrispondenza del restringimento di una sezione dell'impianto. Può essere utilizzato sia per liquidi che per gas in condizioni incompressibili e compressibili. Nel caso incompressibile (quasi 1D, stazionario, non viscoso), mettendo insieme il teorema di Bernoulli nelle sezioni 1 e 2 e la conservazione della massa, otteniamo (con riferimento alla figura 30):

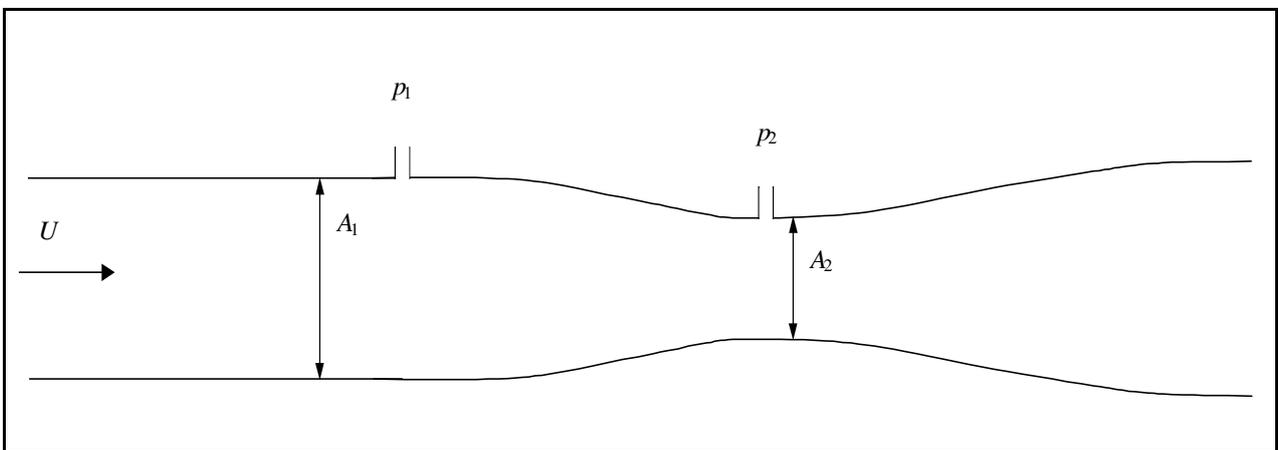


Figura 30. Tubo di Venturi.

$$p + \frac{1}{2} \rho U^2 = \text{cost}, \quad UA = \text{cost}$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho U_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho U_2^2, \quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{A_2}{A_1}$$

cioè

$$\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} = U_2^2 \left[ 1 - \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right] \Rightarrow U_2 = \left( \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left[ 1 - \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]} \right)^{\frac{1}{2}}$$

essendo  $\rho$ ,  $A_1$  e  $A_2$  noti, dalla misura della caduta di pressione é possibile trovare  $U_2$  ( $U_1$  sarà determinata dalla conservazione della massa). La portata in massa sarà:

$$Q_1 = Q_2 = \rho U_2 A_2 = A_2 \left[ \frac{2\rho(p_1 - p_2)}{\left[ 1 - \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Nel caso compressibile (quasi 1D, stazionario, non viscoso), dall'eq. dell'energia si ha che:

$$c_p T_1 + \frac{U_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{U_2^2}{2}, \quad U_2 = \left( \frac{2c_p(T_1 - T_2)}{1 - \left( \frac{U_1}{U_2} \right)^2} \right)^{1/2},$$

e dall'equazione di stato:

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} \quad \text{e} \quad \rho_2 = \frac{p_2}{RT_2}.$$

Inoltre, la relazione isentropica tra densità e pressione e la conservazione della massa forniscono

$$\rho_2 = \rho_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad \rho_1 U_1 A_1 = \rho_2 U_2 A_2$$

Combinando l'equazione dell'energia e quella di conservazione della massa e utilizzando successivamente l'equazione di stato e la relazione isentropica, si ottiene:

$$U_2 = \left( \frac{2c_p(T_1 - T_2)}{\left[ 1 - \left( \frac{\rho_2 A_2}{\rho_1 A_1} \right)^2 \right]} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{(p_1 - p_2)}{\left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{2\gamma p_1}{\gamma - 1 \rho_1} \left( 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1-\frac{1}{\gamma}}{\gamma}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{2\gamma p_1}{\gamma - 1} \frac{1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1-\frac{1}{\gamma}}{\gamma}}}{\left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2}{\gamma}} \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]} \right)^{\frac{1}{2}}$$

e, per la portata in massa

$$Q_1 = Q_2 = \rho_2 U_2 A_2 = A_2 \rho_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1/\gamma} \left( \frac{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left( 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{A_2 p_1}{T_1^{1/2}} \left[ \frac{2\gamma}{R(\gamma-1)} \right]^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1+\frac{1}{\gamma}}}{1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2}{\gamma}} \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

funzione di  $p_1, p_2, A_1, A_2$  e questa volta anche della temperatura (o della densità) a monte.

**Rotametro.** Il suo funzionamento è basato sul bilancio tra il peso di un oggetto (galleggiante) e le forze di resistenza esercitate dal fluido in un condotto leggermente divergente. Si misura l'altezza raggiunta dall'oggetto in condizioni di equilibrio; tale altezza con una scelta opportuna del divergente è linearmente proporzionale alla portata. Nel rotametro il galleggiante è messo in rotazione per avere una stabilizzazione giroscopica. In un tubo tronco-conico quale quello raffigurato nella figura 31 vale la relazione di equilibrio:

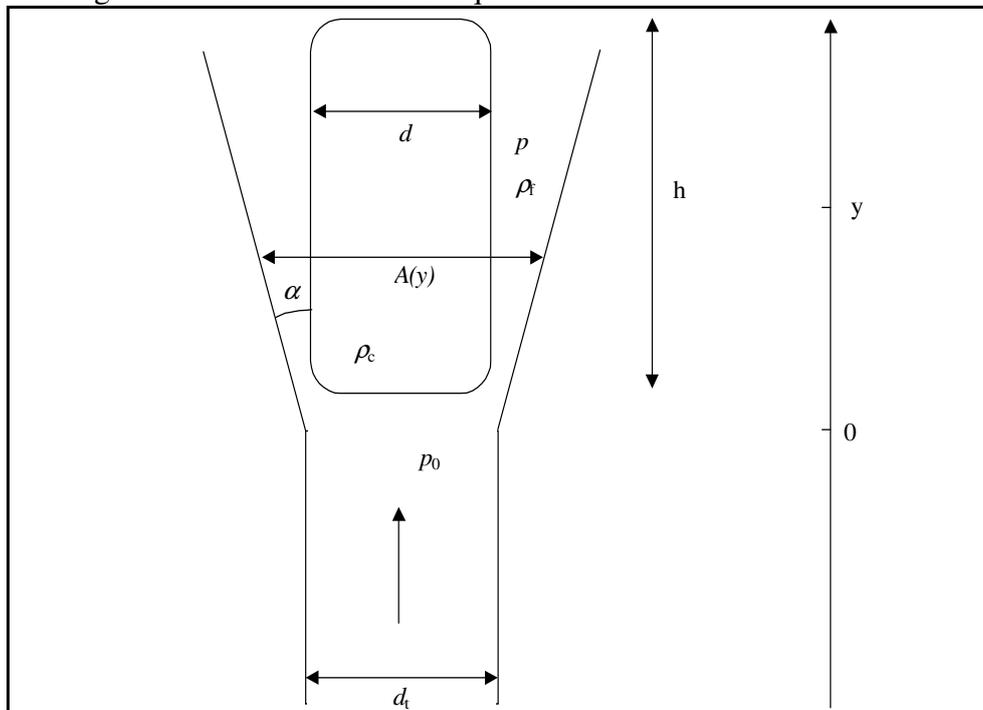


Figura 31. Rotametro.

$$(\rho_c V g - \rho_f V g) = D$$

che esprime il bilancio tra la forza di gravità, quella di galleggiamento e la spinta del fluido (dove  $V$  è il volume occupato dal corpo e  $\rho_c$  e  $\rho_f$  sono le densità del corpo e del fluido). Nel termine  $D$  sono inglobate la resistenza di forma e di attrito; trascurando quest'ultima abbiamo che:

$$D = S(p - p_0) ,$$

con  $S$  che rappresenta la sezione dell'oggetto e  $p$  la pressione generica nella sezione ad altezza  $y$  e  $p_0$  la pressione all'inizio del divergente. Se l'oggetto galleggiante è un cilindro si ha che  $S = \pi d^2/4$  e che  $V = h S$  (con  $h$  che rappresenta l'altezza del cilindro); nella realtà il cilindro è invece sagomato per ridurre le perdite di carico. Si avrà quindi:

$$p - p_0 = h g (\rho_c - \rho_f)$$

cioè il salto di pressione è costante e non dipende da  $y$ . Il teorema di Bernoulli, applicato tra la sezione generica  $y$  e la sezione 0, fornisce:

$$p + \frac{1}{2} \rho_f U^2(y) = p_0 + \frac{1}{2} \rho_f U_0^2, \quad p - p_0 = \frac{1}{2} \rho_f [U_0^2 - U^2(y)]$$

e la conservazione della massa:

$$U_0 A_0 = U(y) A(y) , \quad U_0 = \frac{U(y) A(y)}{A_0}$$

dove:

$$A_0 = \pi \left( \frac{d_t}{2} \right)^2 , \quad A(y) = \pi \left[ \left( \frac{d_t}{2} + y \operatorname{tg} \alpha \right)^2 - \left( \frac{d}{2} \right)^2 \right] \cong \pi \left[ \left( \frac{d_t}{2} + y \alpha \right)^2 - \left( \frac{d}{2} \right)^2 \right] ,$$

sono le aree delle sezioni (essendo  $\alpha$  abbastanza piccolo) e  $d_t$  è il diametro del tubo a monte del rotametro. Si ottiene

$$p - p_0 = \frac{1}{2} \rho_f U^2(y) \left[ \left( \frac{A(y)}{A_0} \right)^2 - 1 \right]$$

$$U(y) = \left( \frac{2hg(\rho_c - \rho_f)}{\rho_f \left[ \left( \frac{A(y)}{A_0} \right)^2 - 1 \right]} \right)^{1/2}$$

e la portata in massa é:

$$Q = \rho_f A(y) U(y) = A_0 \left[ \frac{2hg\rho_f(\rho_c - \rho_f)}{1 - (A_0/A(y))^2} \right]^{1/2},$$

La portata dipende dall'altezza  $y$  (poiché  $A(y)$  cresce con  $y$ , allora  $Q$  cresce con  $y$ ). Dalla misura della altezza  $y$  alla quale si posiziona il galleggiante si determina quindi la portata. In realtà, a causa della resistenza di attrito, del peso del fluido e del peso del galleggiante, la formula risulta più complessa ed é necessario tarare il rotametro.

Le formule trovate in precedenza, sia per il tubo di Venturi che per il rotametro, devono essere corrette con dei coefficienti che tengano conto delle *perdite di carico* in corrispondenza del restringimento della sezione (Venturi) o del divergente con il galleggiante (rotametro). Queste perdite sono a volte dello stesso ordine di grandezza o anche superiore a quelle dovute all'attrito (a meno che non si tratti di lunghi tubi rettilinei nei quali, ovviamente, il contributo maggiore é dovuto all'attrito). Il coefficiente di perdita,  $K$ , é quello che abbiamo già utilizzato nel capitolo 3 relativo agli impianti:

$$K = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho U^2}$$

(essendo  $\Delta p$  il salto in pressione tra le sezioni considerate e  $U$  la velocità di solito calcolata nella sezione a monte). Si definisce anche una altezza di carico equivalente:

$$h = K \frac{U^2}{2g}.$$

Come visto in precedenza,  $K$  dipende dalla geometria e dalla velocità:  $K = K(\text{geometria}, Re)$ .

Si può anche parlare di lunghezza equivalente, cioè di quella lunghezza del condotto che darebbe una perdita per attrito equivalente a quella localizzata nella sezione in esame

$$l_{eq} = \frac{Kd_t}{4C_d(Re)} = \frac{Kd_t}{\lambda(Re)}$$

con  $d_t$  che rappresenta il diametro del tubo e

$$\lambda(Re) = \left\{ \begin{array}{l} 64/Re \quad \text{per flussi laminari} \\ 0.046/Re^{0.25} \quad \text{per flussi turbolenti} \end{array} \right\}.$$

Il valore di  $K$  viene trovato empiricamente: alle pagine 492 e seguenti del Munson sono riportati i valori di  $K$  per espansioni e diffusioni di vario genere, gomiti, valvole (tabella 8.2).