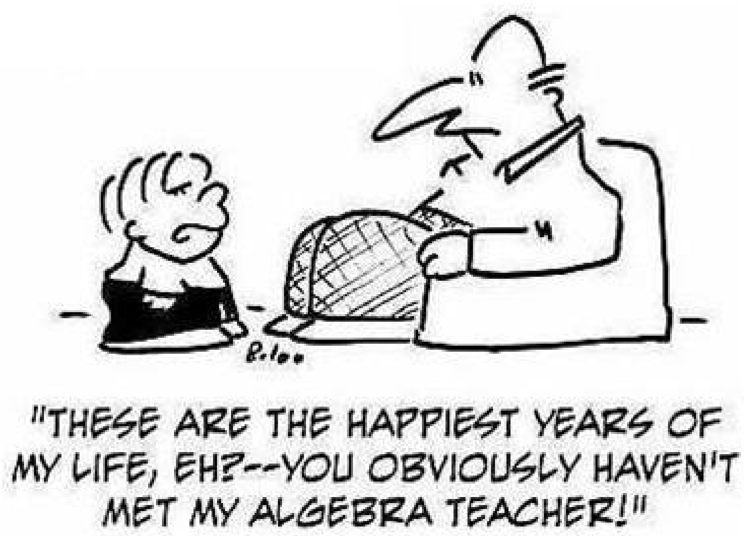
Faculté des sciences Université Saint-Joseph

Algèbre linéaire

AGLML2-AGLIL2-AGLPL2

Année universitaire 2014-2015



Joanna BODGI TARAZI

Table des matières

Chapitre 1

Espaces vectoriels

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (parfois $\mathbb{Q}$).

1.1 Lois de composition et rappels de structures algébriques

Définitions 1 :

1. Une *loi de composition interne* (lci) sur un ensemble E est une application de $E \times E$ dans E, notée en général $*$ (ou $\top$, $\perp$, $\circ$, $+$, $\cdot$, $-$) :

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x * y \end{array}$$

2. La loi $*$ est dite associative, si

$$\forall x,\ y,\ z \in E,\ (x * y) * z = x * (y * z)$$

3. On dit que $*$ est *commutative* si :

$$\forall x,\ y \in E,\ x * y = y * x$$

4. On dit que $e \in E$ est un *élément neutre* pour $*$ si

$$\forall x \in E,\ e * x = x \text{ et } x * e = x$$

5. On dit que $a \in E$ est *régulier (ou simplifiable)* si :

$$\forall x,\ y \in E,\ [(a * x = a * y \Longrightarrow x = y) \text{ et } (x * a = y * a \Longrightarrow x = y)]$$

6. On dit que x est *symétrisable*, s'il existe $y \in E$ tel que $x * y = e = y * x$. Dans ce cas, y s'appelle le symétrique de x.

   Notations :

   Si la loi est notée $+$, y s'appelle l'opposé de x et sera noté $-x$.

   Si la loi est notée $\cdot$, y s'appelle l'inverse de x et sera noté x^{-1}.

Définition 2 :
Un *groupe* est un couple $(E, *)$, où E est un ensemble et $*$ une lci sur E tels que :
· la loi $*$ est associative.
· la loi $*$ possède un élément neutre e.
· tout élément de E est symétrisable :

$$\forall x \in E,\ \exists x' \in E\ ;\ x * x' = x' * x = e$$

On dit que le groupe est *abélien* (ou commutatif) si la loi $*$ est commutative.

Propriété 3 :
Dans un groupe, tout élément est régulier.

Définition 4 :
Une *loi de composition externe* (lce) sur un ensemble E est une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\alpha, x) & \longmapsto & \alpha.x \end{array}$$

1.2 Structure d'espaces vectoriels

Soit E un ensemble non vide muni d'une lci notée "+" et d'une loi de composition externe (lce) notée "·".

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\alpha, x) & \longmapsto & \alpha.x \end{array}$$

Définition 5 :
On dit que $(E, +, .)$ est un espace vectoriel (ev) sur $\mathbb{K}$ ou un $\mathbb{K}$-ev si :

1. $(E, +)$ est un groupe abélien :
   $+$ est commutative, associative, admet un élément neutre noté 0_E et tout $x \in E$ est symétrisable de symétrique $-x$ appelé opposé de x.
2. La lce · vérifie
   (E_1) $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in E,\ \alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$
   (E_2) $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ (\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$
   (E_3) $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ (\alpha\beta).x = \alpha.(\beta.x) = \beta.(\alpha.x)$
   (E_4) $\forall x \in E,\ 1.x = x$

Les éléments de E sont appelés vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires.

◇ *Exemples :*

1. $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-ev (la loi interne est l'addition dans $\mathbb{K}$, la loi externe est la multiplication dans $\mathbb{K}$).
2. $(\mathbb{K}[X], +, .)$ est un $\mathbb{K}$-ev, $\mathbb{K}[X]$ étant l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \ ; \ \forall i \in \mathbb{N}_n, \ x_i \in \mathbb{K}\}$ est un $\mathbb{K}$-ev pour les lois suivantes :
   $\forall (x_1, \ldots, x_n), \ (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n, \ (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$
   $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \ \alpha (x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$.
4. Si E est un ensemble non vide et F un $\mathbb{K}$-ev, $F^E = \{\text{applications de } E \text{ dans } F\}$ est un $\mathbb{K}$-ev pour les lois suivantes :
   $\forall f, g \in F^E, \quad \begin{array}{rccl} f+g: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & (f+g)(x) = f(x) + g(x) \end{array}$
   $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \forall f \in F^E, \quad \begin{array}{rccc} \alpha f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \end{array}$
   Le zéro de l'espace est l'application nulle, et l'opposé de f est :
   $$\begin{array}{rccc} -f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & -f(x) \end{array}$$
5. Cas particuliers : $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ est un $\mathbb{K}$-ev, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-ev, $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-ev, mais $\mathbb{R}$ n'est pas un $\mathbb{C}$-ev.

$\star$ *Remarque :*
Un $\mathbb{C}$-ev est un $\mathbb{R}$-ev mais la réciproque n'est pas vraie en général.

Propriétés 6 :
Règles de calcul : Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

1. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \alpha 0_E = 0_E$.
2. $\forall x \in E, \ 0x = 0_E$.
3. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \forall x \in E, \ [\alpha x = 0_E \Longrightarrow (\alpha = 0 \text{ ou } x = 0_E)]$.
4. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \forall x \in E, \ \alpha(-x) = -(\alpha x) = (-\alpha)x$.
   En particulier :
   $\forall x \in E, \ -x = (-1)x = 1(-x)$.

Preuve :

1. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$
   Pour tout $x \in E$, on a
   $\alpha(x + 0_E) = \alpha x + \alpha 0_E \Longrightarrow \alpha x = \alpha x + \alpha 0_E \Longrightarrow \alpha 0_E = 0_E$.
2. Soit $x \in E$.
   Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on a
   $(0 + \alpha)x = 0x + \alpha x \Longrightarrow \alpha x = 0x + \alpha x \Longrightarrow 0x = 0_E$.
3. Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in E$. Supposons que $\alpha x = 0_E$.
   Comme $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $\alpha = 0$ ou $\alpha \neq 0$.
   Si $\alpha \neq 0$, α^{-1} existe.

$$\begin{aligned} \alpha x = 0_E &\implies \alpha^{-1}(\alpha x) = \alpha^{-1} 0_E \\ &\implies \left(\alpha^{-1}\alpha\right) x = 0_E \\ &\implies 1x = 0_E \\ &\implies x = 0_E \end{aligned}$$

4. Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in E$.

$$\begin{aligned} &0x = 0_E \Longrightarrow (\alpha + (-\alpha))\, x = 0_E \Longrightarrow \alpha x + (-\alpha)x = 0_E \Longrightarrow (-\alpha)x = -(\alpha x) \\ &\alpha 0_E = 0_E \Longrightarrow \alpha\,(x + (-x)) = 0_E \Longrightarrow \alpha x + \alpha(-x) \Longrightarrow \alpha(-x) = -(\alpha x) \end{aligned}$$

Notations :
Pour $x,\ y \in E$, $x + (-y)$ sera noté $x - y$. En particulier, pour $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$.

1.3 Sous-espaces vecoriels (sev)

Définition 7 :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $F \subset E$. On dit que F est un $\mathbb{K}$-sev de E si :
∘ F est un sous-groupe de $(E, +)$ *i.e.*

$$\begin{cases} 0_E \in F \\ \forall x,\ y \in F,\ x - y \in F \end{cases}$$

∘ $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall x \in F,\ \alpha.x \in F$ (stabilité pour la loi $\cdot$).

∗ *Conséquences :*
Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

1. $\{0_E\}$ et E sont des sev (triviaux).
2. Un sev F de E est un $\mathbb{K}$-ev pour les lois :
   $\begin{array}{ccc} F \times F & \longrightarrow & F \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times F & \longrightarrow & F \\ (\alpha, x) & \longmapsto & \alpha.x \end{array}$

Propriété 8 :
Caractérisation d'un sev
Soit E un $\mathbb{K}$-ev $F \subset E$.

$$\begin{aligned} F \text{ est un sev de } E &\iff \begin{cases} 0_E \in F \\ \forall x,\ y \in F,\ x + y \in F \\ \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall x \in F,\ \alpha.x \in F \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} F \neq \emptyset \\ \forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{K},\ \forall x,\ y \in F,\ \alpha.x + \beta.y \in F \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 0_E \in F \\ \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall x,\ y \in F,\ \alpha.x + y \in F \end{cases} \end{aligned}$$

◇ *Exemple :*

1. $E = \mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}$-ev).
   $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x - 2y + 3z = 0\right\}$. F est-il un sev de E ?
   $0_E = (0, 0, 0) \in F$ car $0 - 2.0 + 3.0 = 0$.
   $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x = (x_1, y_1, z_1), y = (x_2, y_2, z_2) \in F,\ \alpha x + y = (\alpha x_1 + y_1, \alpha x_2 + y_2, \alpha x_3 + y_3)$.
   $\alpha x_1 + y_1 - 2\left(\alpha x_2 + y_2\right) + 3\left(\alpha x_3 + y_3\right) = \alpha\left(x_1 - 2x_2 + 3x_3\right) + y_1 - 2y_2 + 3y_3 = 0$.
   Par suite, $\alpha x + y \in F$.
   D'où F est un sev de E.
2. $n \in \mathbb{N},\ \mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \ ; \ deg\ P \leq n\}$ est un sev de $\mathbb{K}[X]$.

Sev engendré par une partie :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

Théorème 9 :
Toute intersection de sev de E est un sev de E.

Preuve :
Soit I une famille d'indices, $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sev de E et $F = \bigcap_{i \in I} F_i$

On a :

$$\forall i \in I,\ 0_E \in F_i \Longrightarrow 0_E \in F$$

Soient $\alpha \in \mathbb{K},\ x,\ y \in F$,

$$x,\ y \in F \Longrightarrow \forall i \in I,\ x,\ y \in F_i \Longrightarrow \forall i \in I,\ \alpha x + y \in F_i \Longrightarrow \alpha x + y \in F$$

D'où F est un sev de E.

Définition-proposition 10 :
Soit X une partie non vide de E. L'intersection de tous les sev de E contenant X est un sev de E. C'est le plus petit sev de E (pour l'inclusion) qui contient X. On le note $Vect(X)$ et on l'appelle le sev engendré par X :

$$Vect(X) = \bigcap_{\substack{F \text{ sev de } E \\ X \subset F}} F$$

Propriétés 11 :

1. $\forall X,\ Y \subset E,\ (X \subset Y \Longrightarrow Vect(X) \subset Vect(Y))$.
2. Soit $X \subset E$.
   X est un sev de E si, et seulement si, $Vect(X) = X$.

Définitions 12 :

1. Soit $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ une partie finie de E. On appelle combinaison linéaire d'éléments de X tout vecteur de la forme
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$
où pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$.
2. Si X est infini, une combinaison linéaire d'éléments de X est de la forme
$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$$
où $m \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $i \in \mathbb{N}_m$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$ et $x_i \in X$.

Théorème 13 :
Soit X une partie non vide de E.
$$Vect(X) = \{\text{Combinaisons linéaires d'éléments de } X\}$$

Preuve :
La démonstration sera faite dans le cas où X est une partie finie de E. Posons $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et notons $F = \{\text{Combinaisons liéaires d'éléments de } X\}$. Pour démontrer que $F = Vect(X)$, il faut démontrer :

1. F est un sev de E.
2. $X \subset F$.
3. Si H est un sev de E tel que $X \subset H$, alors $F \subset H$.

1. F est un sev de E :
   - $0_E = 0.x_1 + \ldots + 0.x_n \in F$.
   - Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x,\ y \in F$. Il existe donc pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$ et $\beta_i \in \mathbb{K}$, tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,\ y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$.
   $$\alpha x + y = \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha.\alpha_i + \beta_i)\, x_i$$
   avec pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\alpha.\alpha_i + \beta_i \in \mathbb{K}$, donc $\alpha x + y \in F$.
2. $X \subset F$:
   $\forall i \in \mathbb{N}_n,\ x_i = 0.x_1 + \ldots + 0x_{i-1} + 1.x_i + 0x_{i+1} + \ldots + 0x_n \in F$.
3. Soit H un sev de E tel que $X \subset H$. Démontrons que $F \subset H$:
   Soit $x \in F$. Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, il existe $\alpha_i \in \mathbb{K}$, tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,\ \alpha_i \in \mathbb{K},\ x_i \in X$.

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \alpha_i \in \mathbb{K},\ x_i \in X \subset H \Longrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_n,\ \alpha_i x_i \in H\ (H \text{ sev}) \Longrightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in H$$

Donc $F \subset H$.

Somme de sev :

Définitions 14 :

1. Soient F et G des sev de E. Le sev somme de F et G est le sev noté et défini par :

$$F + G = Vect\,(F \cup G)$$

2. Soient $F_1, \ldots, F_n$ des sev de E. La somme de F_1,...,F_n, est le sev noté et défini par

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = Vect\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)$$

Proposition 15 :
Caractérisation de la somme

1. Soient F et G des sev de E,

$$F + G = \{z \in E \ ; \ \exists (x, y) \in F \times G, \ z = x + y\}$$

2. Soient $F_1, \ldots, F_n$ des sev de E,

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = \left\{ z \in E \ ; \ \exists\,(x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} F_i, \ z = \sum_{i=1}^{n} x_i \right\}$$

Preuve :

1. On pose $H = \{z \in E \ ; \ \exists (x, y) \in F \times G, \ z = x + y\}$. Démontrons que $H = Vect(F \cup G)$.
   - H est un sev de E :
     $0 = 0 + 0 \in H$, car $0 \in F$ et $0 \in G$.
     Soient $\alpha \in \mathbb{K}$, $z_1, \ z_2 \in H$. Donc $z_1 = x_1 + y_1, \ z_2 = x_2 + y_2$, avec $x_1, \ x_2 \in F$ et $y_1, \ y_2 \in G$.

     $$\alpha z_1 + z_2 = \alpha\,(x_1 + y_1) + x_2 + y_2 = (\alpha x_1 + x_2) + (\alpha y_1 + y_2) \in H$$

     puisque $\alpha x_1 + x_2 \in F$ (sev) et $\alpha y_1 + y_2 \in G$ (sev).
   - $F \cup G \subset H$:
     $\forall x \in F, \ x = x + 0 \in H \ (0 \in G)$.
     Donc $F \subset H$. On démontre de même que $G \subset H$.
   - Soit A un sev tel que $F \cup G \subset A$. Démontrons que $H \subset A$:
     Soit $z \in H$, donc $z = x + y$, avec $x \in F$ et $y \in G$.
     Or $F \subset F \cup G \subset A$, donc $x \in A$
     $G \subset F \cup G \subset$, donc $y \in A$
     A étant un sev de E, on a $z = x + y \in A$.
     Donc $H \subset A$.

2. Par récurrence sur $n \geq 2$ et en utilisant la propriété pour $n = 2$.

Somme directe de sev :

Définitions 16 :

1. Soient F et G des sev de E. $F+G$ est dite directe si
$$\forall z \in F+G,\ \exists!(x,y) \in F \times G\ ;\ z = x+y$$
On note $F \oplus G$.
2. Soient $F_1, \ldots, F_n$ des sev de E. $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est dite directe si
$$\forall z \in \sum_{i=1}^{n} F_i,\ \exists!\,(x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} F_i\ ;\ z = \sum_{i=1}^{n} x_i$$
On note $\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.

Propositions 17 :
Caractérisation d'une somme directe

1. Soient F et G des sev de E.
$$\begin{aligned} F+G = F \oplus G &\iff F \cap G = \{0_E\} \\ &\iff \forall (x,y) \in F \times G,\ [x+y=0 \Longrightarrow (x=0 \text{ et } y=0)] \end{aligned}$$
2. Soient $F_1, \ldots, F_n$ des sev de E.
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} F_i = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i &\iff \forall j \in \mathbb{N}_n,\ F_j \cap \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} F_i \right) = \{0_E\} \\ &\iff \left[\forall\,(x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} F_i,\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Longrightarrow (\forall i \in \mathbb{N}_n,\ x_i = 0) \right) \right] \end{aligned}$$

Preuve :

1. (a) Démontrons que
$$F+G = F \oplus G \iff F \cap G = \{0_E\}$$
   · Démontrons que
$$F+G = F \oplus G \Longrightarrow F \cap G = \{0_E\}$$

$$x \in F \cap G \Longrightarrow (x \in F \text{ et } x \in G) \Longrightarrow (x = x + 0_E \in F + G \text{ et } x = 0_E + x \in F + G)$$

Comme la somme est directe, x admet une écriture unique, donc

$$x = 0_E \text{ et } F \cap G \subset \{0_E\}$$

Or $\{0_E\} \subset F \cap G$ car F et G sont des sev de E, d'où l'égalité.

· Démontrons que

$$F \cap G = \{0_E\} \Longrightarrow F + G = F \oplus G$$

Supposons que $F \cap G = \{0_E\}$, et soit $z \in F + G$.
Supposons que $z = x_1 + y_1$ avec $x_1 \in F$ et $y_1 \in G$, et $z = x_2 + y_2$ avec $x_2 \in F$ et $y_2 \in G$.
Donc

$$\begin{aligned} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 &\Longrightarrow x_1 - x_2 = y_2 - y_1 \in F \cap G = \{0_E\} \\ &\Longrightarrow x_1 - x_2 = 0_E \text{ et } y_2 - y_1 = 0_E \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2 \text{ et } y_1 = y_2 \end{aligned}$$

Donc l'écriture est unique :

$$\forall z \in F + G,\ \exists!(x, y) \in F \times G \ ;\ z = x + y$$

Donc $F + G = F \oplus G$.

(b) Démontrons que

$$F + G = F \oplus G \Longleftrightarrow (\forall (x, y) \in F \times G,\ x + y = 0_E \Longrightarrow (x = 0_E \text{ et } y = 0_E))$$

· Démontrons que

$$F + G = F \oplus G \Longrightarrow (\forall (x, y) \in F \times G,\ (x + y = 0_E \Longrightarrow x = 0_E \text{ et } y = 0_E))$$

On a

$$x + y = 0_E = 0_E + 0_E$$

Par unicité de l'écriture, $x = y = 0_E$.

· Démontrons que

$$(\forall (x, y) \in F \times G,\ (x + y = 0_E \Longrightarrow x = 0_E \text{ et } y = 0_E)) \Longrightarrow F + G = F \oplus G$$

Supposons que $z = x_1 + y_1,\ x_1 \in F,\ y_1 \in G$ et $z = x_2 + y_2,\ x_2 \in F,\ y_2 \in G$.
Donc $(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 0_E$ avec $x_1 - x_2 \in F$ et $y_1 - y_2 \in G$.
Donc $x_1 - x_2 = 0_E,\ y_1 - y_2 = 0_E$, et $x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$.

2. Par récurrence sur $n \geq 2$.

Sev supplémentaires :

Définition 18 :
Soient F et G des sev de E. F et G sont dits supplémentaires dans E si, et seulement si $E = F \oplus G$

Proposition 19 :
Soient F et G des sev de E.

$$E = F \oplus G \Longleftrightarrow \begin{cases} E \subset F + G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$$

1.4 Espaces vectoriels de dimension finie

Dans tout ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$-ev.

Terminologie :
Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. On dit que cette famille est de cardinal p si on a p indices différents (mais si $i \neq j$, on peut avoir $x_i = x_j$). Dans certains livres, on confond famille et partie $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Familles libres - Familles liées :

Définitions 20 :
Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ famille de vecteurs de E.

1. On dit que B est libre si :

$$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}, \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0_E \Longrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_n,\ \alpha_i = 0 \right)$$

2. On dit que B est liée si elle n'est pas libre.

$$B \text{ est liée } \Longleftrightarrow \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} \ ; \left(\exists j \in \mathbb{N}_n,\ \alpha_j \neq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0_E \right)$$

3. Une famille infinie X est dite libre si, et seulement si, toute sous-famille finie de X est libre.
4. Une famille infinie X est dite liée si, et seulement si, il existe une sous-famille de X qui est liée.

Terminologie :

- Les vecteurs d'une famille libre (resp. liée) s'appellent des vecteurs linéairement indépendants (resp. linéairement dépendants).
- Deux vecteurs liés sont dits colinéaires *i.e.* $u,\ v \in E$ sont colinéaires s'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $u = \alpha v$ ou $v = \alpha u$.

⋄ *Exemples :*

1. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev. Dans cet espace, $(1, i)$ est libre car

$$\forall a,\ b \in \mathbb{R},\ (a.1 + bi = 0 \Longrightarrow a = 0 \text{ et } b = 0)$$

Dans $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{C}$-ev, $(1, i)$ sont colinéaires car $(-i).1 + i = 0$.

2. Dans $\mathbb{K}^n = \{(x_1, \dots, x_n)\ ;\ \forall i \in \mathbb{N}_n,\ x_i \in \mathbb{K}\}$ considéré comme un $\mathbb{K}$-ev, la famille $(e_1, \dots, e_n)$, où $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ...)$,..., $e_n = (0, ..., 0, 1)$ est libre.
   En effet, soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0 &\Longrightarrow \alpha_1(1, 0, ..., 0) + \alpha_2(0, 1, 0, \dots) + ... + \alpha_n(0, ..., 0, 1) = (0, ..., 0)\\ &\Longrightarrow (\alpha_1, 0, ..., 0) + (\alpha_2, 1, 0, \dots) + ... + (\alpha_n, ..., 0, 1) = (0, ..., 0)\\ &\Longrightarrow (\alpha_1, 0, ..., 0) + (\alpha_2, 1, 0, \dots) + ... + (\alpha_n, ..., 0, 1) = (0, ..., 0)\\ &\Longrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0, ..., 0)\\ &\Longrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_n,\ \alpha_i = 0\end{aligned}$$

3. $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X]\ ;\ deg\ P \leq n\}$ est un $\mathbb{K}$-ev. La famille $(1, X, \dots, X^n)$ est libre car

$$\forall \alpha_1, \dots . \alpha_n \in \mathbb{K},\ \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X^i = 0 \Longrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_n,\ \alpha_i = 0\right)$$

   (polynôme nul)

4. On considère dans $\mathbb{R}^3$, la famille (u, v, w) où $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, 0, 1)$, $w = (0, 1, 1)$. (u, v, w) est libre car pour tous $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 &\Longrightarrow (\alpha + \beta, \alpha + \gamma, \beta + \gamma) = (0, 0, 0)\\ &\Longrightarrow \begin{cases}\alpha + \beta = 0\\ \alpha + \gamma = 0\\ \beta + \gamma = 0\end{cases}\\ &\Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0\end{aligned}$$

5. Soient, dans $\mathbb{R}^3$, $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, 0, 0)$, et $w = (0, 1, 0)$. (u, v, w) est liée car $u = v + w$.
   $\star$ *Remarque :*

$$u = v + w \Longleftrightarrow u + (-1)v + (-1)w = 0$$

$\star$ *Remarques :*

1. La famille $\emptyset$ est libre (convention).
2. La famille (x) est libre si, et seulement si, $x \neq 0_E$. En effet, si $x \neq 0$, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\alpha x = 0_E \Longrightarrow \alpha = 0$$

   Réciproquement, si $x = 0$, alors $1.x = 0$. donc la famille (x) est liée. D'où, par contraposition, si (x) est libre alors $x \neq 0$.
3. Toute famille contenant 0_E est liée $(0.x_1 + \dots + 1.0_E + \dots + 0.x_n = 0_E)$.
4. Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
5. Toute sur-famille d'une famille liée est liée.

Théorème 21 :
Caractérisation d'une famille liée
Soit $B = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille de E. B est liée si, et seulement si, l'un de ses vecteurs est une combinaison linéaire de tous les autres.

Preuve :
B est liée si, et seulement si, il existe $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls t.q. $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0_E$.

Ces scalaires n'étant pas tous nuls, il existe $j \in \mathbb{N}_n$, tel que $\alpha_j \neq 0$. Par suite, $x_j = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} x_i$

Réciproquement, supposons que l'un des vecteurs de B est une combinaison linéaires des autres vecteurs. Sans manque de généralité, supposons qu'il s'agit de x_1. Alors il existe $\lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$x_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i x_i$$

D'où

$$1.x_1 - \lambda_2 x_2 - ... - \lambda_n x_n = 0$$

Comme $1 \neq 0$, alors B est liée.

Familles génératrices :

Définition 22 :
Soit X une famille de vecteurs de E. On dit que X est une famille génératrice de E (ou que X engendre E) si, et seulement si, $E = Vect(X)$.

◇ *Exemples :*

1. Dans $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{R}$-ev, $(1, i)$ engendre E car

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \exists a,\ b \in \mathbb{R}\ ;\ z = a + ib$$

Ainsi,

$$\forall z \in \mathbb{C},\ z \in Vect(1, i)$$

D'où $\mathbb{C} \subset Vect(1, i)$. De plus, comme $(1, i) \subset \mathbb{C}$ qui est un espace vectoriel, alors

$$Vect(1, i) \subset \mathbb{C}$$

D'où

$$\mathbb{C} = Vect(1, i)$$

2. Dans le $\mathbb{K}$-ev, $\mathbb{K}^n$, $B = (e_1, ..., e_n)$ engendre $\mathbb{K}^n$ car

$$\begin{aligned}\forall u=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{K}^n,\ u &= x_1(1,0,...,0)+x_2(0,1,0,...,0)+...+x_n(0,0,...,1)\\ &= x_1e_1+...+x_ne_n\in Vect\ B\end{aligned}$$

D'où $\mathbb{K}^n \subset Vect\ B$. De plus, $B\subset\mathbb{K}^n$, et $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel, donc $Vect\ B\subset\mathbb{K}^n$. D'où

$$\mathbb{K}^n = Vect\ B$$

3. Soient $u=(1,2,0)$, $v=(-1,3,2)$, $w=(5,0,-1)$. (u,v,w) engendre-t-elle $\mathbb{R}^3$?
   Soit $h=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}h=\alpha u+\beta v+\gamma w &\iff (x,y,z)=(\alpha-\beta+5\gamma,2\alpha+3\beta,2\beta-\gamma)\\ &\iff \begin{cases}x=\alpha-\beta+5\gamma\\ y=2\alpha+3\beta\\ z=2\beta-\gamma\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}\alpha=\frac{1}{5}(-x+3y-5z)\\ \beta=\frac{1}{15}(2x-y+10z)\\ \gamma=\frac{1}{15}(4x-2y+5z)\end{cases}\end{aligned}$$

   Il existe donc $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in\mathbb{R}$ tels que $h=\alpha u+\beta v+\gamma w$. D'où $h\in Vect(u,v,w)$. Ainsi

$$\mathbb{R}^3\subset Vect(u,v,w)$$

   Comme de plus, $(u,v,w)\subset\mathbb{R}^3$ qui est un espace vectoriel, alors

$$Vect(u,v,w)\subset\mathbb{R}^3$$

   D'où $\mathbb{R}^3=Vect(u,v,w)$ et (u,v,w) engendre $\mathbb{R}^3$.

Définition 23 :
Espace vectoriel de dimension finie
E étant un $\mathbb{K}$-ev, on dit que E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie, *i.e.* il existe ,$(e_1,...,e_n)$, une famille de E avec $n\in\mathbb{N}^*$, t.q.

$$E=Vect\,(e_1,...,e_n)$$

Ainsi,

$$E=Vect\,(e_1,...,e_n)\iff\left(\forall x\in E,\exists\alpha_1,..,\alpha_n\in\mathbb{K}\ ;\ x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i\right)$$

◇ *Exemples :*

1. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie car il est engendré par $(1,i)$.
2. $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie car (1) engendre $\mathbb{K}$.
3. $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie car $(1,X,...,X^n)$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$.

4. L'ensemble des polynômes $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension infinie.

Définition 24 :
Base
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et B une famille de vecteurs de E. On dit que B est une base de E, si B est à la fois une famille libre et génératrice de E.

◇ *Exemples :*

1. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev, $B = (1, i)$ est une base.
2. $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-ev, $B = (e_1, ..., e_n)$ avec $e_1 = (1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, ..., 0, 1)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ dite canonique.
3. $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-ev, $B = (1, X, ..., X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ dite canonique.

Théorème 25 :
Théorème fondamental
Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie admettant une famille génératrice de cardinal $n \geq 1$, alors toute famille libre de E a un cardinal $p \leq n$.

∗ *Conséquence :*
Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie admettant une famille génératrice de cardinal $n \geq 1$, alors toute famille de cardinal $p > n$ est nécessairement liée.

Lemme :
Soit E est un ev de dimension finie et $x \in E$. Si L est une famille libre de E et si $L \cup \{x\}$ est liée alors $x \in Vect(L)$.

Preuve :
Comme E est de dimension finie et L est une famille libre de E, alors L est une famille finie de E. Notons alors $L = (e_1, ..., e_n)$. $L \cup \{x\}$ est liée, alors, il existe $\alpha, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls, tels que

$$\alpha x + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$$

Si $\alpha = 0$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$$

L étant libre,

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \ \lambda_i = 0$$

ce qui est en contradiction avec $\alpha, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls.

Donc $\alpha \neq 0$ et

$$x = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha^{-1} \lambda_i\right) e_i \Longrightarrow x \in Vect(L)$$

Théorème 26 :
Existence d'une base
Tout $\mathbb{K}$-ev de dimension finie non nulle possède au moins une base. De plus toutes les bases de E ont le même cardinal.

Preuve :
Soit $E \neq \{0\}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et soit $A = \{card\ L\ ;\ L \text{ libre de } E\}$.

$$E \neq \{0\} \Longrightarrow \exists x \in E\ ;\ x \neq 0$$

Donc (x) est libre et $1 \in A$. Donc $A \neq \emptyset$.

De plus E est de dimension finie donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille génératrice de E de cardinal n. D'après le théorème fondamental, A est majorée par n, donc elle admet un pge noté n_0. Donc il existe une famille L_0 libre dans E tel que $Card\ L_0 = n_0$.

Démontrons que L_0 engendre E.

On a que $Vect\ L_0 \subset E$. Démontrons que $E \subset Vect\ L_0$.

Soit $x \in E$, donc $x \in L_0$ ou $x \in E - L_0$.

Si $x \in L_0$, alors $x \in Vect L_0$.

Si $x \in E - L_0$, alors $Card\ (L_0 \cup \{x\}) = n_0 + 1 > n_0$ Donc $Card\ (L_0 \cup \{x\}) \notin A$.

D'où $L_0 \cup \{x\}$ est liée. Donc $x \in Vect\ L_0$ car L_0 est libre.

Par suite, $E \subset Vect\ L_0$, et $E = Vect\ L_0$.

Ainsi, L_0 est une base de E

De plus si B et B_0 sont deux bases de E, alors on a :

B est libre et B' engendre E, donc $Card\ B \leq Card\ B'$.

B' est libre et B engendre E, donc $Card\ B' \leq Card\ B$.

Donc $Card\ B = Card\ B'$.

Définitions 27 :

1. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. On appelle dimension de E et on note $dim_{\mathbb{K}} E$ (ou $dim\ E$) le cardinal d'une base quelconque de E.
2. Par définition $dim_{\mathbb{K}}\ \{0_E\} = 0$ et $\emptyset$ est une base de $\{0_E\}$.

◇ *Exemples :*

1. $dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, $dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$.
2. $dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$.
3. $dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[X] = n + 1$

⋆ *Remarque :*
Si $dim_{\mathbb{C}}E = n$, alors $dim_{\mathbb{R}}E = 2n$

Théorème 28 :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geq 1$.

1. Toute famille libre de E est de cardinal inférieur ou égal à n.
2. Toute famille libre de E de cardinal n est une base de E.
3. Toute famille génératrice de E est de cardinal supérieur ou égal à n.
4. Toute famille génératrice de cardinal n est une base de E.

Preuve :

1. découle du théorème fondamental.
2. Soit B une base de E, $Card\ B = n$. On pose $B = (e_1, ..., e_n)$ et on a que B est libre.
   Soit $x \in E$.
   Si $x \in B$, alors $x \in Vect(B)$.
   Si $x \in E - B$, alors
   $$Card\,(B \cup \{x\}) = n + 1 > n$$
   donc $B \cup \{x\}$ est liée, d'où $x \in Vect(B)$.
   Par suite $E \subset Vect(B)$. D'où $E = Vect(B)$.
3. Soit B une base de E et L une famille génératrice de E de cardinal m. B étant libre, $Card\ B \leq Card\ L$. Donc $n \leq m$.
4. Soit $G = (g_1, ..., g_n)$ une famille génératrice. Si G est liée, l'un de ses vecteurs est une combinaison linéaire des autres. Supposons que $g_1 = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i g_i$. Alors
   $$\forall x \in E = Vect(G),\ x \in Vect\,(g_2, .., g_n)$$
   Donc $(g_2, .., g_n)$ engendre E et est de cardinal $n - 1$. Contradiction avec la propriété 3. Donc G est libre et par suite c'est une base de E.

Théorème 29 :

1. De toute famille génératrice on peut extraire une base.
2. *Théorème de la base incomplète :* Toute famille libre (de cardinal p) de E (de dimension n) peut être complétée en une base de E (en lui ajoutant $n-p$ vecteurs choisis parmi les vecteurs d'une base donnée de E).

⋄ *Exemple :*
Compléter le vecteur $u = (1, 2, 3)$ en une base de $\mathbb{R}^3$.

Comme $u \neq 0$ alors (u) est libre, et on peut le compléter en une base de $\mathbb{R}^3$. (u, e_1, e_2) est-elle libre ? Soit $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ t.q. $\alpha u_1 + \beta e_1 + \gamma e_2 = 0$.

$(\alpha, 2\alpha, 3\alpha) + (\beta, 0, 0) + (0, \gamma, 0) = (0, 0, 0)$

$(\alpha + \beta, 2\alpha + \gamma, 3\alpha) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + \gamma = 0 \\ 3\alpha = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Donc (u, e_1, e_2) est libre et de cardinal $3 = dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

$*$ *Conséquences :*
Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

1. Une base de E est une famille libre maximale.
2. Une base de E est une famille génératrice minimale.

Coordonnées (ou composantes) d'un vecteur :

Définition 30 :
Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geq 1$, $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $x \in E$. Alors

$$\exists!\,(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n \ ; \ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Les x_i s'appellent les coordonnées (ou composantes) de x dans la base B.

$\star$ *Remarque :*
L'unicité des composantes vient du fait que B est libre.

$\diamond$ *Exemples :*

1. Dans $\mathbb{R}^3$, lorsque l'on écrit $u = (1, 2, 3)$, $(1, 2, 3)$ sont les coordonnées de u dans la base canonique.
2. Soit $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ une autre base de $\mathbb{R}^3$: $e'_1 = (0, 1, 1)$, $e'_2 = (1, 0, 1)$, $e'_3 = (1, 1, 0)$. Trouver les coordonnées de u dans la base B'.
   $u = xe'_1 + ye'_2 + ze'_3$.
   $(1, 2, 3) = (0, x, x) + (y, 0, y) + (z, z, 0)$
   $$(1, 2, 3) = (y+z, x+z, x+y) \Longleftrightarrow \begin{cases} y + z = 1 & (1) \\ x + z = 2 & (2) \\ x + y = 3 & (3) \end{cases} \Longrightarrow 2x+2y+2z = 6 \Longrightarrow x+y+z = 3 \ \ (4)$$
   $(4) - (1) \Longrightarrow x = 2$
   $(4) - (2) \Longrightarrow y = 1$
   $(4) - (3) \Longrightarrow z = 0$
   D'où $u = 2e'_1 + e'_2$.

Dimensions de quelques espaces vectoriels de dimension finie :

Dimension d'un sev

Théorème 31 :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 1$ et F un sev de E. Alors F est de dimension finie et $dim\ F \leq dim\ E$. On a l'égalité si, et seulement si, $F = E$.

Preuve :
Supposons que $F \neq \{0\}$ (sinon le résultat est évident). Alors F contient des familles libres. Soit B une famille libre maximale de F. Donc B est libre dans E et $Card\ B \leq n$. Notons $F' = Vect(B)$ (B est une base de F').

Démontrons que $F = F'$.

$$B \subset F \Longrightarrow Vect(B) \subset F$$

Donc $F' \subset F$.

Soit $x \in F - F'$, $B \cup \{x\}$ est liée dans F. Donc $x \in Vect(B) = F'$ absurde. Donc $F = F'$.

Donc F est de dimension finie et

$$dim\ F = Card\ B \leq dim\ E$$

Supposons que $dim\ F = dim\ E$. Soit B une base de F. B est donc libre dans E avec $Card\ B = dim\ E$. Donc B est une base de E. D'où

$$E = Vect(B) = F$$

Dimension de la somme de deux sev

$\star$ *Remarque :*
Si $B_F = (f_1, ..., f_p)$ est une base de F, et $B_G = (g_1, ..., g_q)$ est une base de G, alors

$B = B_F \cup B_G$ engendre $F + G$. Donc on peut en extraire une base de $F + G$.

B est une base de $F + G$ si la somme est directe.

Théorème 32 :
$dim\,(F \oplus G) = dim\ F + dim\ G$.

Preuve :
Soit $B_F = (f_1, ..., f_p)$ et $B_G = (g_1, ..., g_q)$ des bases respectives de F et G. On pose $B = B_F \cup B_G$.

Soit $z \in F + G$

$$\exists!(x, y) \in F \times G\ ;\ z = x + y$$

Comme $x \in F$ et $y \in G$, on a

$$x = \sum_{i=1}^{p} x_i f_i, \; y = \sum_{j=1}^{q} y_j g_j$$

Donc

$$z = x + y = \sum_{i=1}^{p} x_i f_i + \sum_{j=1}^{q} y_j g_j \in Vect(B)$$

Donc $F + G = Vect(B)$ (car $B \subset F + G$).

Démontrons que B est libre.

Soient $\alpha_1, ..., \alpha_p, \beta_1, ..., \beta_q \in \mathbb{K}$, tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j g_j = 0$$

Donc on a :

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i = \sum_{j=1}^{q} (-\beta_j)\, g_j \in F \cap G = \{0\}$$

D'où

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i = 0$$

et comme $(f_1, ..., f_p)$ est libre

$$\forall i \in \mathbb{N}_p, \; \alpha_i = 0$$

On démontre de même que

$$\forall j \in \mathbb{N}_q, \; \beta_j = 0$$

Donc B est libre et par conséquent c'est une base de $F + G$, et on a :

$$dim\,(F + G) = Card\ B = Card\ B_F + Card\ B_G = dim\ F + dim\ G$$

Théorème 33 :

Existence d'un supplémentaire

E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Tout sev de E admet (au moins) un supplémentaire dans E.

Preuve :

Soient $n = dim\ E$, F un sev de E de dimension $p \leq n$, et $B_1 = (e_1, ..., e_p)$ une base de F. Alors B_1 est libre dans E. Elle peut être complétée en une base $B = (e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_n)$ de E.

Posons $B_2 = (e_{p+1}, ..., e_n)$ et $G = Vect\,(B_2)$.

$B_2 \subset B$, donc B_2 est libre et c'est une base de G. $B = B_1 \cup B_2$ étant libre, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Donc

$$Card\ B = Card\ B_1 + Card\ B_2$$

et

$$dim\ E = dim\ F + dim\ G$$

D'où $E = F \oplus G$.

Théorème 34 :
Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, F et G des sev de E. Alors

$$dim(F + G) = dim\ F + dim\ G - dim\,(F \cap G)$$

Preuve :
$F \cap G$ est un sev de F. Donc $F \cap G$ admet un supplémentaire F_1 dans F. $F = F_1 \oplus (F \cap G)$ et $dim\ F = dim\ F_1 + dim(F \cap G)$.

On démontre que $F + G = F_1 \oplus G$.

On aura

$$dim(F + G) = dim\,(F_1 \oplus G) = dim\ F_1 + dim\ G = dim\ F - dim(F \cap G) + dim\ G$$

⋆ *Remarques :*

1. $dim\ \bigoplus_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} dim\ F_i$.
2. Si E et F sont 2 $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, alors $E \times F$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et

   $$dim_{\mathbb{K}}\,(E \times F) = dim_{\mathbb{K}}E + dim_{\mathbb{K}}F$$

   Si $E_1, ..., E_n$ sont des $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, alors

   $$dim \prod_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} dim\ E_i$$

   En particulier,

   $$dim\ E^n = n\ dim\ E$$

Propriétés 35 :
Soient F et G deux sev d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie $n \geq 1$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $E = F \oplus G$
2. $dim\ E = dim\ F + dim\ G$ et $F \cap G = \emptyset$
3. $dim\ E = dim\ F + dim\ G$ et $E = F + G$.

Preuve :

· Supposons que $E = F \oplus G$.

$$E = F \oplus G \Longrightarrow F \cap G = \emptyset$$

et

$$dim\ E = dim\ F + dim\ G$$

· Supposons que $dim\ E = dim\ F + dim\ G$ et $F \cap G = \emptyset$
$E + F$ est un sev de E. On a

$$dim(F + G) = dim\ F + dim\ G - dim(F \cap G)$$

Or

$$dim\,(F \cap G) = dim\ \emptyset = 0$$

Donc

$$dim(F + G) = dim\ F + dim\ G = dim\ E$$

et $E = F + G$.

· Supposons que $dim\ E = dim\ F + dim\ G$ et $E = F + G$.
On a $E = F + G$. Il reste à démontrer que $F \cap G = \emptyset$.

$$\begin{aligned} E = F + G &\Longrightarrow dim\ E = dim\ F + dim\ G - dim\,(F \cap G) = dim\ E - dim\,(F \cap G) \\ &\Longrightarrow dim\,(F \cap G) = 0 \Longrightarrow F \cap G = \emptyset. \end{aligned}$$

Rang d'un système de vecteurs :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geq 1$ et $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.

Définition 36 :
Soit $X = (x_1, ..., x_p)$ une famille de vecteurs de E. On appellera rang de X l'entier naturel noté et défini par $rg(X) = dim\,Vect(X)$.

⋆ *Remarques :*

1. $rg(X) \leq inf(p, n)$).
2. $rg(X)$ est le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants extraits de X.

Règles :

1. $rg(X)$ ne change pas lorsque l'on permute les vecteurs de X.
2. $rg(X)$ ne change pas lorsque l'on supprime un vecteur lié à d'autres vecteurs de X (en particulier 0_E).
3. $rg(X)$ ne change pas lorsque l'on multiplie l'un des vecteurs de X par un scalaire non nul *i.e.* si $\alpha \neq 0$
$$rg\,(x_1, ..., x_p) = rg\,(\alpha x_1, ..., x_p)$$
4. $rg(X)$ ne change pas si l'on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres vecteurs :
$$rg\,(x_1, ..., x_p) = rg\left(x_1 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i, ..., x_p\right)$$

Famille échelonnée :
Soient $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, $p \leq n$ et $X = (x_1, ..., x_p)$:

$$x_1 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{i1} e_i$$
$$x_2 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{i2} e_i$$
$$\vdots$$
$$x_j = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{ij} e_i$$
$$\vdots$$
$$x_p = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{ip} e_i$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & x_1 & x_2 & \dots & x_p \\
e_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1p} \\
e_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2p} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
e_p & \alpha_{p1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{pp} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
e_n & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{np}
\end{array}$$

Définition 37 :
On dit X est échelonnée si $\alpha_{11} \neq 0$,...,$\alpha_{pp} \neq 0$ et

$$\forall i < j, \ \alpha_{ij} = 0$$

Les α_{ii} s'appellent les Pivots.

Propriété 38 :
Toute famille échelonnée est libre.

Méthode du pivot de Gauss :
La méthode consiste à transformer une famille X en une famille échelonnée qui a le même rang, en utilisant les règles indiquées précédamment.

⋄ *Exemple :*
*Déterminer dans $\mathbb{R}^3$ le rang de la famille (u, v, w, t), avec $u = e_1 + 2e_2 + 3e_3$, $v = -2e_1 + 5e_3$, $w = 3e_1 + e_2 - e_3$, $t = -e_1 + e_2$.

$$rg(u, v, w, t) \ = \ rg \begin{pmatrix} u & v & w & t \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \ = \ rg \begin{pmatrix} u & v' = v + 2u & w' = w - 3u & t' = t + u \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 3 \\ 3 & 11 & -10 & 3 \end{pmatrix} \ =$$

$$rg\begin{pmatrix} u & v' & w''=5v'+4w' & t''=3v'-4t' \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 11 & 15 & 21 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} u & v' & w'' \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 11 & 15 \end{pmatrix} = 3$$

w'' et t'' sont liés car $21w'' - 15t'' = 0$ (1)

On peut donc supprimer l'un d'eux. Le rang de la famille est 3 car (u, v', w'') est échelonnée, donc libre (3 pivots).

*Déterminer une relation de dépendance linéaire entre les 4 vecteurs.

D'aprè (1), on a

$$\begin{aligned}
&7w'' - 5t'' = 0 \\
&7(5v' + 4w') - 5(3v' - 4t') = 0 \\
&20v' + 28w' + 20t' = 0 \\
&5v' + 7w' + 5t' = 0 \\
&5(v + 2u) + 7(w - 3u) + 5(t + u) = 0 \\
&-6u + 5v + 7w + 5t = 0
\end{aligned}$$

$\star$ *Remarque :*

On note $F = Vect(u, v, w, t)$.

$dim\ F = 3 = rg(u, v, w, t)$. (u, v', w'') et (u, v', t'') sont les vecteurs libres, donc (u, v, w) et (u, v, t) sont deux bases de F.

Chapitre 2

Applications linéaires

2.1 Définitions et généralités

Définition 1 :
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est linéaire (ou est un morphisme d'espaces vectoriels) si :

$$\begin{cases} \forall x, y \in E,\ f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall \alpha \in \mathbb{K},\ x \in E,\ f(\alpha x) = \alpha f(x) \end{cases}$$

Proposition 2 :
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. f est linéaire si, et seulement si,

$$\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{K},\ \forall x,\ y \in E,\ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

2. f est linéaire si, et seulement si,

$$\begin{cases} f\left(0_E\right) = 0_F \\ \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall x,\ y \in E,\ f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y) \end{cases}$$

◇ *Exemples :*

1. Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Id_E est une application linéaire bijective.
2. *L'injection canonique :*
   Soient E un $\mathbb{K}$-ev et F un sev de E, l'application

$$j : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

   est une application linéaire injective.

3. *Homothétie de rapport λ :*

$$\begin{array}{rccc} h_\lambda: & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$

est une application linéaire. En effet :

$$h_\lambda\left(0_E\right) = \lambda 0_E = 0_E$$

et

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall x,\ y \in E,\ h_\lambda\left(\alpha x + y\right) &= \lambda\left(\alpha x + y\right) \\ &= \lambda\left(\alpha x\right) + \lambda y \\ &= \alpha\left(\lambda x\right) + \lambda y \\ &= \alpha h_\lambda(x) + h_\lambda(y) \end{aligned}$$

4. L'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, x+z) \end{array}$$

est linéaire, en effet :
$f\left(0_{\mathbb{R}^3}\right) = f\left(0,0,0\right) = \left(0,0\right) = 0_{\mathbb{R}^2}$
$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall u_1 = \left(x_1, y_1, z_1\right),\ u_2 = \left(x_2, y_2, z_2\right) \in \mathbb{R}^3,$

$$\begin{aligned} f\left(\alpha u_1 + u_2\right) &= f\left(\alpha x_1 + x_2, \alpha y_1 + y_2, \alpha z_1 + z_2\right) \\ &= \left(\alpha x_1 + x_2 + \alpha y_1 + y_2, \alpha x_1 + x_2 + \alpha z_1 + z_2\right) \\ &= \alpha\left(x_1 + y_1, x_1 + z_1\right) + \left(x_2 + y_2, x_2 + z_2\right) \\ &= \alpha f\left(u_1\right) + f\left(u_2\right). \end{aligned}$$

Propriétés 3 :
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors on a les propriétés suivantes :

1. $f\left(0_E\right) = 0_E$
2. $\forall x \in E,\ f(-x) = -f(x)$
3. $\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in E,\ f(nx) = nf(x)$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K},\ \forall x_1, ..., x_n \in E,\ f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f\left(x_i\right)$

Dans toute la suite, E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Notations et terminologies :

1. On note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F) = \{$applications linéaires de E dans $F\}$.
2. Une application linéaire de E dans E s'appelle un endomorphisme de E.
   On note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E) = \{$endomorphismes de $E\}$.

3. Une application linéaire bijective de E dans F s'appelle un isomorphisme de E dans F. On dit dans ce cas que E et F sont isomorphes. On note

$$E \simeq^f F$$

et

$$Isom_{\mathbb{K}}(E,F) = \{\text{isomorphismes de } E \text{ dans } F\}$$

4. Un endomorphisme bijectif de E s'appelle un automorphisme de E et on note :

$$GL(E) = Aut_{\mathbb{K}}(E) = \{\text{automorphismes de } E\}$$

L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$:

Proposition 4 :
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev. Alors $\mathcal{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-ev.

Preuve :
On démontre que $\mathcal{L}(E,F)$ est un sev de F^E.

- 0_{F^E} est linéaire, donc $0_{F^E} \in \mathcal{L}(E,F)$.
- Soient $\alpha \in \mathbb{K}$, et $f,\ g \in \mathcal{L}(E,F)$. Démontrons que

$$\alpha f + g \in \mathcal{L}(E,F)$$

$\forall \beta,\ \gamma \in \mathbb{K},\ \forall x,\ y \in E,$

$$\begin{aligned}(\alpha f + g)(\beta x + \gamma y) &= \alpha f(\beta x + \gamma y) + g(\beta x + \gamma y)\\ &= \alpha\beta f(x) + \alpha\gamma f(y) + \beta g(x) + \gamma g(y)\\ &= \beta\left(\alpha f(x) + g(x)\right) + \gamma\left(\alpha f(y) + g(y)\right)\\ &= \beta\left(\alpha f + g\right)(x) + \gamma\left(\alpha f + g\right)(y)\end{aligned}$$

donc $\alpha f + g \in \mathcal{L}(E,F)$.

Proposition 5 :
Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-ev.

1. Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.
2. Si f est un isomorphisme d'ev de E dans F, alors f^{-1} est un isomorphisme d'ev de F dans E.

Preuve :

1. $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{K},\ \forall x,\ y \in E,$

$$\begin{aligned}g \circ f(\alpha x + \beta y) &= g\left(f(\alpha x + \beta y)\right) = g\left(\alpha f(x) + \beta f(y)\right)\\ &= \alpha g\left(f(x)\right) + \beta g\left(f(y)\right) = \alpha g \circ f(x) + \beta g \circ f(y).\end{aligned}$$

$g \circ f$ est donc linéaire.

2. Il suffit de démontrer que f^{-1} est linéaire.
   Si $x \in E$, et $y \in F$, alors
$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$$
   Soient $\alpha,\ \beta \in \mathbb{K},\ y_1,\ y_2 \in F$. f étant bijective :
$$\exists x_1,\ x_2 \in E\ ;\ y_1 = f\left(x_1\right)$$
   et
$$y_2 = f\left(x_2\right)$$
   Donc
$$x_1 = f^{-1}\left(y_1\right)$$
   et
$$x_2 = f^{-1}\left(y_2\right)$$
   f étant linéaire,
$$f\left(\alpha x_1 + \beta x_2\right) = \alpha f\left(x_1\right) + \beta f\left(x_2\right) = \alpha y_1 + \beta y_2$$
   Appliquons f^{-1} :
$$\begin{array}{l} f^{-1}\left(f\left(\alpha x_1 + \beta x_2\right)\right) = f^{-1}\left(\alpha y_1 + \beta y_2\right) \Longrightarrow \\ \alpha x_1 + \beta x_2 = f^{-1}\left(\alpha y_1 + \beta y_2\right) \Longrightarrow \\ \alpha f^{-1}\left(y_1\right) + \beta f^{-1}\left(y_2\right) = f^{-1}\left(\alpha y_1 + \beta y_2\right) \end{array}$$
   f^{-1} est donc linéaire.

$*$ *Conséquences :*

1. $(GL(E), \circ)$ est un groupe appelé *groupe linéaire* de E : id_E est l'élément neutre et pour tout $f \in GL(E),\ f^{-1} \in GL(E)$.
2. $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau et $(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev.
   $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$.
   On dit que $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre : anneau+ $\mathbb{K}$-ev + $(f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h)$.

2.2 Image et noyau d'une application linéaire

Dans la suite de ce paragraphe, E et F sont des $\mathbb{K}$-ev.

Définition 6 :
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. On appelle image de f la partie de F notée et définie par
$$Im\ f = \{y \in F\ ;\ \exists x \in E,\ y = f(x)\}$$
2. On appelle noyau de f la partie de E notée et définie par
$$Ker\ f = f^{-1}\left(\{0_F\}\right) = \{x \in E\ ;\ f(x) = 0_F\}$$

Proposition 7 :
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors

1. Si V est un sev de E, alors $f(V)$ est un sev de F.
2. Si W est un sev de F, alors $f^{-1}(W)$ est un sev de E.

Preuve :

1. V étant un sev de E, alors $0_E \in V$.
   f est linéaire, donc $f(0_E) = 0_F$.
   Par suite $0_F \in f(V)$.
   Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $y_1,\ y_2 \in F(V)$. Il existe donc $x_1,\ x_2 \in V$ tels que
   $$y_1 = f(x_1) \text{ et } y_2 = f(x_2)$$
   On a
   $$\alpha y_1 + y_2 = \alpha f(x_1) + f(x_2) = f(\alpha x_1 + x_2)$$
   car f est linéaire et comme V est un sev alors $\alpha x_1 + x_2 \in V$. Par suite
   $$\alpha y_1 + y_2 = f(\alpha x_1 + x_2) \in f(V)$$
   $f(V)$ est donc un sev de F.
2. W est un sev de F. Par suite $0_F \in W$. Or f étant linéaire, on sait que
   $$f(0_E) = 0_F$$
   Par suite
   $$0_E \in f^{-1}(W)$$
   Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x,\ y \in f^{-1}(W)$. Par suite
   $$f(x),\ f(y) \in W$$
   De plus, d'après la linéarité de f,
   $$f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$$
   W étant un sev, on a
   $$\alpha f(x) + f(y) \in W$$
   D'où
   $$f(\alpha x + y) \in W$$
   Ainsi,
   $$\alpha x + y \in f^{-1}(W)$$
   $f^{-1}(W)$ est donc un sev de E.

Corollaire 8 :
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. $Im(f) = f(E)$ est un sev de F.
2. $Ker\ f = f^{-1}(\{0_F\})$ est un sev de E.

Proposition 9 :
$f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. f est injective si, et seulement si, $Ker\ f = \{0_E\}$.
2. f est surjective si, et seulement si, $Im\ f = F$.

⋆ *Remarque :*
Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors

$$g \circ f = 0 \Longleftrightarrow Im\ f \subset Ker\ g$$

En effet,

$$\begin{aligned} Im\ f \subset Ker\ g &\Longleftrightarrow \forall y \in Im\ f,\ y \in Ker\ g \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in E,\ f(x) \in Ker\ g \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in E,\ g(f(x)) = 0_F \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in E,\ g \circ f(x) = 0_F \\ &\Longleftrightarrow g \circ f = 0 \end{aligned}$$

2.3 Applications linéaires en dimension finie

Théorème 10 :
Existence d'une application linéaire
Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 1$, $B = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E, F un $\mathbb{K}$-ev quelconque et $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de vecteurs de F. Alors il existe une application linéaire et une seule f de E dans F vérifiant

$$\forall i \in \mathbb{N}_n,\ f(e_i) = y_i$$

Preuve :
Soit

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i & \longmapsto & f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \end{array}$$

f est une application car B étant une base de E, l'écriture de x est unique dans B.

On peut facilement démontrer que f est linéaire.

De plus, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$,

$$f\left(e_i\right) = f\left(0.e_1 + ... + 1.e_i + ... + 0.e_n\right) = 1y_i = y_i$$

Supposons qu'il existe une application g vérifiant ces mêmes propriétés, alors pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, on a

$$\begin{aligned} g(x) &= g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i g(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Par suite $g = f$, d'où l'unicitée de la fonction.

Théorème 11 :
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $B = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E et $f(B) = \left(f\left(e_1\right), ..., f\left(e_n\right)\right)$. Alors on a les propriétés suivantes :

1. f est injective si, et seulement si, $f(B)$ est libre dans F.
2. f est surjective si, et seulement si, $f(B)$ engendre F.
3. f est bijective si, et seulement si, $f(B)$ est une base de F.

⋆ *Remarque :*
Si B engendre E, alors $f(B)$ engendre $Im\ f$.

En effet,

Soit $y \in Im\ f$, alors il existe $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in E$, tel que $y = f(x)$. Par suite,

$$y = f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f\left(e_i\right) \in Vect\left(f(B)\right)$$

D'où

$$Im\ f \subset Vect\left(f(B)\right)$$

De plus, on a

$$f(B) \subset Im\ f$$

$Im\ f$ étant un sev de F, alors

$$Vect\left(f(B)\right) \subset Im\ f$$

D'où

$$Im\ f = Vect\left(f(B)\right)$$

Corollaire 12 :
$f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec E et F de dimension finies.

1. f est un isomorphisme d'ev si, et seulement si, pour toute base B de E, $f(B)$ est une base de F.
2. Si $dim\ E = n \geq 1$, alors $E \simeq \mathbb{K}^n$.
3. Deux ev ont la même dimension si, et seulement si, ils sont isomorphes.

Preuve :
On démontrera uniquement le deuxième point.

Soient $B = (e_i)$ une base de E et $B' = (a_i)$ une base de $\mathbb{K}^n$. Il existe une unique application linéaire $f : E \longrightarrow \mathbb{K}^n$, telle que

$$\forall i \in \mathbb{N}_n,\ f(e_i) = a_i$$

Ainsi,

$$B' = f(B)$$

et f est un isomorphisme d'après 1.

2.4 Rang d'une application linéaire

Soient E et F des $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

⋆ *Remarque :*
Si E est de dimension finie, alors $Im\ f$ est de dimension finie.

En effet, soit B est une base de E, alors $f(B)$ engendre $Im\ f$ et $Card(f(B)) \leq Card\ B$.

Donc $Im\ f$ est de dimension finie.

Définition 13 :
Si E est de dimension finie, on appelle rang de f, la dimension de $Im\ f$. On note

$$rg(f) = dim\,(Im\ f)$$

⋆ *Remarque :*
Si B est une base de E, alors $f(B)$ engendre $Im\ f$. D'où

$$rg(f) = dim\ Im\ f = dim\ Vect\,(f(B)) = rg\,(f(B))$$

Ainsi, dans la pratique, pour calculer $rg(f)$, on calcule le rang de $f(B)$ par la méthode de Pivot-Gauss.

Théorème 14 :
Théorème du rang (ou théorème du noyau-image)
Si E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, alors

$$dim\ E = dim\ Im\ f + dim\ Ker\ f = rg\ f + dim\ Ker\ f$$

Corollaire 15 :
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de même dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est injective
2. f est surjective
3. f est bijective
4. $Ker\ f = \{0_E\}$
5. $Im\ f = F$.

Preuve :
On a déjà les équivalences suivantes :
· f est injective si, et seulement si, $Ker\ f = \{0_E\}$.
· f est surjective si, et seulement si, $Im\ f = F$.
Démontrons que f est injective si, et seulement si, f est surjective.

· Si f injective, alors $Ker\ f = \{0_E\}$. Par suite,

$$dim\ Ker\ f = 0$$

D'où, d'après le théorème du rang

$$dim\ E = dim\ Im\ f$$

De plus, $Im\ f$ est un sev de F. Ainsi,

$$Im\ f = F$$

f est donc surjective.
· On démontre de même que si f est surjective alors elle est injective

L'équivalence entre f est injective et f est surjective implique l'équivalence de ces propriétés avec f est bijective.

Cas particulier : Si E est de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est injective
2. f est surjective
3. $f \in GL(E)$

Chapitre 3

Matrices

3.1 Calcul matriciel

Définition 1 :
On appelle matrice de type $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$ à termes dans $\mathbb{K}$, toute application
$$A: \begin{array}{ccc} \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (i,j) & \longmapsto & a_{ij} \end{array}.$$
On note $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$.
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$
Si $m = n$, on dit que A est une matrice carrée d'ordre n. Dans ce cas, a_{11},...,a_{nn} s'appellent les éléments de la diagonale principale.

Notations :
On note $M_{m,n}(\mathbb{K}) = \{\text{matrices de type } (m,n) \text{ et à termes dans } \mathbb{K}\}$.

On note $M_n(\mathbb{K}) = \{\text{matrices carrées d'ordre } n\}$.

Définitions 2 :
1. On appelle matrice ligne (resp. colonne), toute matrice de type $(1,n)$ (resp. $(m,1)$) : $(a_{11}...a_{1,n})$ (resp. $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$).
2. On appelle matrice nulle de type (m,n) une matrice dont tous les termes sont nuls. On la note $0_{m,n}$ ou 0.

Quelques matrices carrées pariculières :

1. Matrice unité d'ordre n : $I_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, $a_{ii} = 1$, $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.
2. Matrice diagonale : $D = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. On la note $D = (a_{11}, \dots, a_{nn})$.
3. Matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) :
   $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$, resp. $\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.
   $\forall i,\ j \in \mathbb{N}_n,\ i > j \Longrightarrow a_{ij} = 0$ (resp. $\forall i,\ j \in \mathbb{N}_n,\ i < j \Longrightarrow a_{ij} = 0$).

Notations :
$D_n(\mathbb{K}) = \{$matrices diagonales d'ordre $n\}$

$T_n^s(\mathbb{K}) = \{$matrices triangulaires supérieures d'ordre $n\}$

$T_n^i(\mathbb{K}) = \{$matrices triangulaires inférieures d'ordre $n\}$

Opérations sur les matrices :

Egalité : $A = (a_{ij})\ ,\ B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.

$A = B \Longleftrightarrow \forall (i,j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n,\ a_{ij} = b_{ij}$.

◇ *Exemple :*
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\ ,\ \ B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \\ u & v \end{pmatrix}$

$$A = B \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \\ t = 4 \\ u = 5 \\ v = 6 \end{cases}$$

Addition : $A = (a_{ij})\ ,\ B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.

On appelle matrice somme de A et B, et on note $A + B$ la matrice $(c_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ telle que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.

Propriété 3 :
$(M_{m,n}(\mathbb{K}),+)$ est un groupe abélien d'élément neutre $0_{m,n}$ et

$$\forall A=(a_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{K}),\ -A=(-a_{ij})$$

Multiplication par un scalaire : $\lambda\in\mathbb{K}$ et $A=(a_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{K})$.

$\lambda A=(\lambda a_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{K})$

Propriétés 4 :
Soient $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, $A,\ B\in M_{m,n}(\mathbb{K})$.

1. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
2. $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$
3. $\lambda\left(\mu A\right)=\left(\lambda\mu\right)A=\mu\left(\lambda A\right)$
4. $1_{\mathbb{K}}A=A$
5. En particulier $(-1)A=-A$

$*$ *Conséquence :*
$(M_{m,n}(\mathbb{K}),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie mn.

Preuve :
Soit $E_{ik}=(e_{kl})\in M_{m,n}(\mathbb{K})$ telle que

$$e_{ij}=1 \text{ et } \forall(k,l)\neq(i,j),\ e_{kl}=0$$

La famille $(E_{kl})_{\substack{1\leq k\leq m\\1\leq l\leq n}}$ est une base de $M_{m,n}(\mathbb{K})$ appelée la base canonique.

$\diamond$ *Exemple :*

$$\begin{aligned}A=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}&=a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\\&\quad+d\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}+e\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=a.E_{11}+b.E_{12}+c.E_{13}+d.E_{21}+e.E_{22}+f.E_{23}\end{aligned}$$

Multiplication de deux ou plusieurs matrices :

Définition 5 :
Soit $A=(a_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B=(b_{ij})\in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle matrice produit de A et B la matrice $AB=(c_{ij})\in M_{m,p}(\mathbb{K})$, où $c_{ij}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$.

⋆ *Remarque :*
La multiplication des matrices n'est pas commutative. Parfois AB est définie sans que BA ne soit définie.

⋄ *Exemple :*
$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$
$$AB = \begin{pmatrix} a+2b+3c & -a+2c & 3a+4b-2c \\ d+2e+3f & -d+2f & 3d+4e-2f \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{K})$$

Propriétés 6 :
On suppose que les produits considérés sont définis.

1. $A.0_{n,p} = 0$ et $0_{p,m}A = 0$.
2. Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, $A.I_n = I_n.A = A$.
   Si $A \in M_{m,n}(K)$, $A.I_n = A$.
3. La multiplication des matrices est associative et distributive par rapport à l'addition.

∗ *Conséquences :*

1. $(M_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau d'unité I_n ($\times$ étant la multiplication entre matrices).
2. $(M_n(\mathbb{K}), +, \cdot, \times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre ($\times$ étant la multiplication entre matrices et $\cdot$ étant la multiplication par un scalaire).

⋆ *Remarque :*
$(M_n(\mathbb{K}), +, \times)$ n'est pas un corps car il admet des diviseurs de 0.

⋄ *Exemple :*
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Propositions 7 :

1. $D_n(\mathbb{K}) = \{\text{matrices diagonales d'ordre } n\}$ est une sous-$\mathbb{K}$-algèbre de $M_n(\mathbb{K})$ de dimension n. De plus $D_n(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^n$.
2. $T_n^s(\mathbb{K})$ et $T_n^i(\mathbb{K})$ sont des sous-$\mathbb{K}$-algèbres de $M_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

◇ *Exemple :*
Pour $n = 2$.
$T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = aE_{11} + bE_{12} + cE_{22}.$
(E_{11}, E_{12}, E_{22}) est une base de $T_2^s(\mathbb{K})$.

Transposée d'une matrice :

Définition 8 :
$A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A, la matrice ${}^tA = (a_{ji}) \in M_{n,m}(\mathbb{K})$.

◇ *Exemple :*
$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \\ e & f \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{K})$, ${}^tA = \begin{pmatrix} x & z & e \\ y & t & f \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{K})$

Propriétés 9 :

1. ${}^t(A+B) =^t A +^t B$.
2. ${}^t(\lambda S) = \lambda^t A$.
3. ${}^t(AB) =^t B^t A$.
4. L'application
$$\begin{array}{cccc} t: & M_{m,n}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_{n,m}(\mathbb{K}) \\ & A & \longmapsto & {}^tA \end{array}$$
est linéaire. De plus, c'est un isomorphisme.
5. ${}^t\left({}^tA\right) = A$ (*i.e.* $t \circ t = id$)

Définitions 10 :

1. $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ est dite symétrique si, et seulement si, ${}^tA = A$ *i.e.*
$$\forall i, j \in \mathbb{N}_n,\ a_{ij} = a_{ji}$$
2. $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ est dite antisymétrique si, et seulement si, ${}^tA = -A$ *i.e.*
$$\forall i, j \in \mathbb{N}_n,\ a_{ij} = -a_{ji})$$

⋆ *Remarque :*
Si A est antisymétrique, alors
$$\forall i \in \mathbb{N}_n,\ a_{ii} = 0$$

Propriétés 11 :
Si $\lambda \in \mathbb{K}$, et si A et B sont symétriques, alors il en est de même de $A+B$ et de λA.
AB n'est pas symétrique en général car ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A = BA \neq AB$ en général.

Notation :
On note $S_n(\mathbb{K})$ (resp. $A_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) d'ordre n.

Proposition 12 :
$S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont deux sev supplémentaires de $M_n(\mathbb{K})$.

Preuve :
Il est facile de démontrer que $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont deux sev de $M_n(\mathbb{K})$.

Démontrons que

$$S_n(\mathbb{K}) \cap A_n(\mathbb{K}) = \{0\}$$

On a

$$(A \in S_n(\mathbb{K}) \text{ et } A \in A_n(\mathbb{K})) \Longrightarrow \left({}^tA = A \text{ et } {}^tA = -1\right) \Longrightarrow A = -A \Longrightarrow A = 0$$

D'où

$$S_n(\mathbb{K}) \cap A_n(\mathbb{K}) \subset \{0\}$$

Or $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ étant deux sev de $M_n(\mathbb{K})$,

$$\{0\} \subset S_n(\mathbb{K}) \cap A_n(\mathbb{K})$$

Ainsi,

$$S_n(\mathbb{K}) \cap A_n(\mathbb{K}) = \{0\}$$

et la somme est directe.

Démontrons que

$$M_n(\mathbb{K}) \subset S_n(\mathbb{K}) + A_n(\mathbb{K})$$

On a

$$A \in M_n(\mathbb{K}) \Longrightarrow A = \frac{1}{2}\left(A +^t A\right) + \frac{1}{2}\left(A -^t A\right)$$

On pose $S = \frac{1}{2}\left(A +^t A\right)$. On a

$${}^tS = \frac{1}{2}\left({}^tA + A\right) = S \Longrightarrow S \in S_n(\mathbb{K})$$

On pose $T = \frac{1}{2}\left(A -^t A\right)$. On a

$${}^tS = \frac{1}{2}\left({}^tA - A\right) = -T \Longrightarrow T \in A_n(\mathbb{K})$$

D'où

$$M_n(\mathbb{K}) \subset S_n(\mathbb{K}) + A_n(\mathbb{K})$$

Or $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ étant deux sev de $M_n(\mathbb{K})$,

$$S_n(\mathbb{K}) + A_n(\mathbb{K}) \subset M_n(\mathbb{K})$$

Ainsi,

$$M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) + A_n(\mathbb{K})$$

⋆ *Remarque :*

$dim\ S_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $dim\ A_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

⋄ *Exemple :*

$S = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a' & d \\ c & d & a'' \end{pmatrix} \in S_3(\mathbb{K})$

$S = aE_{11} + b\,(E_{12} + E_{21}) + c\,(E_{13} + E_{31}) + d\,(E_{23} + E_{32}) + a'E_{22} + a''E_{33}$.

$dim\ S_3(\mathbb{K}) = \dfrac{3(3+1)}{2} = 6$

Matrices inversibles :

Définition 13 :
$A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = BA = I_n$. Dans ce cas, B s'appelle l'inverse de A et sera noté $B = A^{-1}$.

⋆ *Remarques :*

1. A est inversible si, et seulement si, elle l'est à gauche ou à droite.
2. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$, A est inversible si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$.

⋄ *Exemple :*

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Vérifions si A est inversible et déterminons dans ce cas A^{-1}. Soit $B \in M_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} AB = I_2 &\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} a+2c = 1 \\ b+2d = 0 \\ 3a+4c = 0 \\ 3b+4d = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = \dfrac{3}{2} \\ d = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

⋆ *Remarques :*

1. L'inverse d'une matrice, lorsqu'il existe, est unique.
2. Si $A,\ B \in M_n(\mathbb{K})$ sont inversibles, il en est de même de AB et on a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Définition-proposition 14 :
L'ensemble $GL_n(\mathbb{K}) = \{\text{matrices inversibles d'ordre } n\}$ est un groupe pour la multiplication des matrices (sous-groupe de $(M_n(\mathbb{K}), \times)$), appelé le groupe linéaire de degré n.

3.2 Matrices et applications linéaires

Définition 15 :
On considère E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et m, et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Soit $B = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E, et $B' = (e'_i)_{1\leq i\leq m}$ une base de F. On appelle matrice de f dans les bases B et B' (ou matrice représentative de f) la matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ notée $M(f; B, B')$ et définie par :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

où $\left(\alpha_{1j}, \alpha_{2j,\dots,\alpha_{mj}}\right)$ sont les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base B'.

Cas particulier : Si $E = F$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et si $B' = B$, alors $M(f; B, B')$ sera notée $M(f, B)$.

◇ *Exemple :*

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (y + z, x + z, x + y) \end{array}$$

Soient $B_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B = (e'_1, e'_2, e'_3)$ une autre base de $\mathbb{R}^3$, avec $e'_1 = (-1, 1, 1)$, $e'_2 = (1, -1, 1)$, $e'_3 = (1, 1, -1)$. Déterminer $M(f; B_0)$ et $M(f; B, B_0)$.

Propriétés 16 :
Soient E, F et G des espaces vectories de dimensions finies respectives n, m et p, et soient B_E, B_F et B_G des bases respectives de E, F et G.

1. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$, alors
$$M(u+v; B_E, B_F) = M(u; B_E, B_F) + M(v; B_E, B_F)$$
(car pour tout $x \in E$, $(u+v)(x) = u(x) + v(x)$).
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors
$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ M(\lambda u; B_E, B_F) = \lambda M(u; B_E, B_F)$$
(car pour tout $x \in E$, $(\lambda u)(x) = \lambda u(x)$).
3. $$M(0_{\mathcal{L}(E,F)}; B, B') = 0_{m,n}$$
4. $$M(id_E; B) = I_n$$
5. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$, et
$$M(v \circ u; B_E, B_G) = M(v; B_F, B_G).M(u; B_E, B_F)$$
6. Si $u : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme (dans ce cas $m = n$), alors $A = M(u; B_E, B_F)$ est inversible et
$$A^{-1} = M(u^{-1}; B_F, B_E)$$

Isomorphisme entre $M_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont des espaces vectoriels tels que dim $E = n$ et dim F

Soit B une base de E et B' une base de F.

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & M_{m,n}(\mathbb{K}) \\ & u & \longmapsto & M(u; B; B') \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \psi : & M_{m,n}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,F) \\ & A = (a_{ij}) & \longmapsto & u \end{array}$$

où
$$\forall j \in \mathbb{N}_n,\ \ u(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i$$
i.e.
$$A = M(u; B, B')$$

φ est linéaire. Elle est bijective car
$$\varphi \circ \psi = id_{M_{m,n}(\mathbb{K})} \text{ et } \psi \circ \varphi = id_{\mathcal{L}(E,F)}$$

L'isomorphisme est dit canonique si $E = \mathbb{K}^n$, $F = \mathbb{K}^m$, et B et B' sont les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et de $\mathbb{K}^m$ respectivement.

Cas particulier :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \simeq & M_n(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & M(u,B) \end{array}$$

où $dim\ E = n$ et B une base de E. Par exemple $E = \mathbb{K}^n$.

Formule fondamentale :

Propriété 17 :
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev tels que $dim\ E = n$ et $dim\ F = m$. On note $B = (e_i)$ une base de E et $B' = (e'_i)$ une base de F.
Soient $x \in E,\ y \in F$ et $A = M(u; B; B') = (a_{ij})$.
On a

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ et } y = \sum_{i=1}^{m} y_i e'_i$$

où

$$(\forall i \in \mathbb{N}_n,\ x_i \in \mathbb{K}) \text{ et } (\forall i \in \mathbb{N}_m,\ y_i \in \mathbb{K})$$

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ les coordonnées de x dans B et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ les coordonnées de y dans B'.
Alors

$$y = u(x) \Longleftrightarrow Y = AX$$

Preuve :

$$\forall j \in \mathbb{N}_n,\ u(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i$$

Donc

$$u(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j u(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} \right) e'_i$$

Or

$$u(x) = y = \sum_{i=1}^{m} y_i e'_i \Longleftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_m,\ y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij}$$

D'autre part,

$$AX = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} \right)_{1 \leq i \leq m}$$

Donc

$$Y = AX \Longleftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_m,\ y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} \Longleftrightarrow y = u(x)$$

Changement de base et matrices de passage :

Définition 18 :
Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 1$, $B = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ et $B' = (e'_i)_{1\leq i\leq n}$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de B à B' la matrice carrée d'ordre n :

$$P_{B,B'} = M(id_E; B', B)$$

$\diamond$ *Exemple :*
Soient $E = \mathbb{R}^3$, $B_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique et $B = (u_1, u_2, u_3)$ où $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 0)$ une autre base de $\mathbb{R}^3$.

$$P_{B_0B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u_1 = e_2 + e_3 \\ u_2 = e_1 + e_3 \\ u_3 = e_1 + e_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}(-u_1 + u_2 + u_3) \\ e_2 = \frac{1}{2}(u_1 - u_2 + u_3) \\ e_3 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2 - u_3) \end{cases} \Longrightarrow P_{BB_0} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Propriétés 19 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

1. Si B est une base de E, alors
$$P_{BB} = M(id_E, B) = I_n$$
2. Soient B et B' deux bases de E, alors $P_{BB'}$ est inversible et son inverse est $P_{B'B}$.
3. Soient B, B' et B'' trois bases de E, alors
$$P_{BB'}P_{B'B''} = P_{BB''}$$

Preuve :

1. Evident.
2. Soient $u = id_E : E(B) \longrightarrow E(B')$ et $v = id_E : E(B') \longrightarrow E(B)$.

$$id_E = v \circ u : E(B) \longrightarrow E(B) \Longrightarrow M(id_E; B) = M(v; B'; B).M(u; B; B') \Longrightarrow I_n = P_{BB'}P_{B'B}$$

D'où le résultat.

3. Soient $u = id_E : E(B'') \longrightarrow E(B')$ et $v = id_E : E(B') \longrightarrow E(B)$.

$$id_E = v \circ u : E(B'') \longrightarrow E(B) \Longrightarrow M(id_E; B''; B) = M(v; B'; B).M(u; B''; B') \Longrightarrow P_{BB''} = P_{BB'}P_{B'B''}$$

Formule de changement de coordonnées :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $B = (e_i)$ et $B' = (e'_i)$ deux bases de E, et $x \in E$.
$x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$.
On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ et $P = P_{BB'} \in M_n(\mathbb{K})$.
Alors $X = P_{BB'}X'$

Formule de changement de matrices :

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $dim\ E = n$, $dim\ F = m$, B et B_1 deux bases de E, B' et B'_1 deux bases de F.
On note $P = P_{BB_1}$ et $Q = P_{B'B'_1}$.
Alors $M(u; B_1; B'_1) = Q^{-1}M(u; B; B')P$
Cas particulier : $F = E$, $B = B'$ et $B_1 = B'_1$, alors $M(u, B_1) = P^{-1}M(u, B)P$.

◇ *Exemple :*
$E = \mathbb{K}_2[X]$, $B_0 = (1, X, X^2)$ et $B = (1, X-1, (X-1)^2)$ une autre base de E.
$\begin{array}{rccc} u: & E & \longrightarrow & E \\ & P & \longmapsto & P' \end{array}$, $u \in \mathcal{L}(E)$. Déterminer $M(u, B_0)$, en déduire $M(u, B)$.

Rang d'une matrice :

Rappel : $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E de dimension finie. $rg(u) = dim\ Im\ u = rg\,(u(B))$.

Définition 20 :
Soit $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. On appelle rang de A, l'entier naturel $rg(A)$ qui est le rang des vecteurs colonnes de A.

⋆ *Remarques :*
1. On peut déterminer le rang de A en utilisant la méthode du Pivot de Gauss.
2. $rg(A) \leq inf(m, n)$.
3. $rg(A) = 0 \Longleftrightarrow A = 0$.

◇ *Exemple :*
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. $rg(A) = 3$.

Propriété 21 :
Caractéristiques du rang de A
Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ et $u : E \longrightarrow F$ l'unique application linéaire associée à A relativement aux bases B de E et B' de F. Alors $rg\ A = rg\ u$.

$*$ *Conséquences :*

1. Le rang de A est égal au rang de l'application linéaire représentée par A dans des bases quelconques.
2. Le rang d'une application linéaire u est égal au rang de la matrice représentative de u dans des bases quelconques.
3. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geq 1$ et $F = (y_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de vecteurs de E. Alors rang de F est égal au rang de la matrice dont les colonnes sont formées par les coordonnées de y_i dans une base quelconque B de E.

Proposition 22 :
$A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, , et seulement si, $rg\ A = n$.

Preuve :
Soit u l'unique endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ associé à A dans la base canonique B_0 de $\mathbb{K}^n$. Les propriétés siovantes sont équivalentes :

1. $A = M(u, B_0)$ est inversible
2. u est un automorphisme de $\mathbb{K}^n$
3. $Im\ u = \mathbb{K}^n$
4. $rg\ u = n$
5. $rg\ A = n$.

Matrices équivalentes :

Définition 23 :
Soient A, $A' \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. On dit que A et A' sont équivalentes s'il existe deux matrices inversibles $P \in M_n(\mathbb{K})$ et $Q \in M_m(\mathbb{K})$ telles que $A' = Q^{-1}AP$.
Définition équivalente :
A et A' sont équivalentes si, et seulement si, elles représentent la même application linéaire dans des bases différentes : $A = M(u; B; B')$ et $A' = M(u; B_1; B'_1)$.

$\star$ *Remarque :*
La relation “est équivalent à” est une relation d'équivalence. On la notera $\sim$.

Proposition 24 :
$A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ est de rang r, si, et seulement si, elle est équivalente à $J_{m,n}(r) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$ où $I_r \in M_r(\mathbb{K})$ est la matrice unité.

Corollaire 25 :
Deux matrices sont équivalentes si, et seulement si, elles ont le même rang.

Preuve :
Si $A \sim A'$, alors A et A' représentent la même application linéaire u. et par définition $rg\ A = rg\ u = rg\ A'$.

Si $rg\ A = rg\ A' = r$, alors $A \sim J_{m,n}(r)$ et $A' \sim J_{m,n}(r)$. D'où $A \sim A'$.

Matrices semblables :

Définition 26 :
$A,\ A' \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A et A' sont semblables s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A' = P^{-1}AP$.

⋆ *Remarques :*

1. Si A et A' sont semblables alors A et A' sont équivalentes ($Q = P$).
2. La relation "est semblable à" dans $M_n(\mathbb{K})$ est une relation d'équivalence.
3. Si A est semblable à A', alors ${}^tA$ est semblable à ${}^tA'$.
   $\left[A' = P^{-1}AP \Longrightarrow^t A' =^t P^t A^t \left(P^{-1}\right) = Q^{-1t}AQ \text{ avec } Q = P^{-1}\right]$.
4. Si $A' = P^{-1}AP$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A'^n = P^{-1}A^nP$.
   (Par récurrence : pour $n = 2$, $A'^2 = \left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}A^2P$).

Définition équivalente :
A et A' sont semblables si, et seulement si, elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

∗ *Conséquence :*
Deux matrices semblables ont le même rang. La réciproque n'est pas toujours vraie.

Trace d'une matrice :

Définition 27 :
Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de A le scalaire $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Propriétés 28 :
$A, B \in M_n(\mathbb{K}),\ \lambda \in \mathbb{K}$.

1. $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$.
2. $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$.
3. $\begin{array}{rccc} tr: & M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & A & \longmapsto & tr(A) \end{array}$ est une application linéaire.
4. $tr(AB) = tr(BA)$

$*$ *Conséquence :*
Deux matrices semblables ont la même trace.

Preuve :
Soient A et A' deux matrices semblabes de $M_n(\mathbb{K})$. Il existe alors $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A' = P^{-1}AP$.

$$A' = P^{-1}AP = \left(P^{-1}A\right)P \Longrightarrow tr(A') = tr\left(\left(P^{-1}A\right)P\right) = tr\left(P\left(P^{-1}A\right)\right) = tr(A)$$

Définition 29 :
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle trace de u et on note $tr(u)$ la trace de la matrice qui représente u dans une base quelconque.

Chapitre 4

Déterminants et systèmes linéaires

4.1 Permutations

$N_n = \{1, ..., n\}$.

Définition 1 :
Une permutation σ de $\mathbb{N}_n$ est une bijection de $\mathbb{N}_n$ dans lui-même notée :
$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$.
On note $S_n = \{\text{permutations de } \mathbb{N}_n\}$. $Card\ S_n = n!$.

Définition 2 :
On appelle transposition τ_{ij} de $\mathbb{N}_n$ toute permutation qui échange deux éléments i et j de $\mathbb{N}_n$ et laisse tous les autres invariants :$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & i & ... & j & ... & n \\ 1 & 2 & ... & j & ... & i & ... & n \end{pmatrix}$.

Théorème 3 :
Toute permutation est la composée d'un nombre fini de tanspositions : $\sigma = \tau_1 \circ ... \circ \tau_k$.

Définition 4 :
Inversion et signature

1. Soit $\sigma \in S_n$. On appelle inversion de σ tout couple $(\sigma(i), \sigma(j))$ tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.
2. On note $I(\sigma)$ le nombre de ces inversions. On appelle signature de σ l'entier $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$.
3. On dit que la permutation est paire (resp. impaire) si $\varepsilon(\sigma) = 1$ (resp. $\varepsilon(\sigma) = -1$)

◇ *Exemple :*
$n = 5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Les inversions de σ sont : $(2,1),\ (3,1),\ (4,1),\ (5,1),\ (5,4)$.
$I(\sigma) = 5$, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^5 = -1$. La permutation est impaire.

Propriétés 5 :

1. Si $e = id_{\mathbb{N}}$, $\varepsilon(e) = (-1)^0 = 1$.
2. Si τ est une transposition, $\varepsilon(\tau) = -1$.
3. $\varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$.
4. $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$.

4.2 Déterminant d'une matrice

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$.

Définition 6 :
On appelle déterminant de A le scalaire noté $|A|$ ou $det(A)$ et défini par :

$$det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}$$

C'est une somme de $n!$ termes et chaque terme est un produit de n éléments de A. (Parmi ces $n!$ termes il y a le produit des éléments de la diagonale principale)

◇ *Exemple :*

1. $n = 2$ $N_2 = \{1,2\}$. On a 2 permutations possibles :

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   $det(A) = \varepsilon(e) a_{e(1),1} a_{e(2),2} + \varepsilon(\tau) a_{\tau(1),1} a_{\tau(2),2} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
   Donc si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $det(A) = ad - bc$.

2. $n = 3$, On a 6 permutations possibles :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \varepsilon(\sigma_1) = 1; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \varepsilon(\sigma_2) = 1; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \varepsilon(\sigma_3) = 1;$$
$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ \varepsilon(\sigma_4) = -1; \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ \varepsilon(\sigma_5) = -1; \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \varepsilon(\sigma_6) = -1.$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Propriétés 7 :
Soient $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$

1. $det(I_n) = 1$.
2. $det(AB) = det(A)det(B) = det(BA)$.
3. Si A est inversible, alors $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$.
4. Deux matrices semblables ont le même déterminant ($A' = P^{-1}AP$).
5. $det({}^tA) = det(A)$.
6. Si A est triangulaire $det(A) = a_{11} \dots a_{nn}$.

Déterminant d'un endomorphisme et d'une famille de n vecteurs :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

Définition 8 :

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle déterminant de u et on note $det(u)$ le déterminant de la matrice qui représente u dans une base quelconque : soit B une base quelconque de E, alors
$$det(u) = det\left(M(u; B)\right)$$
2. Soient $B = (e_i)$ base de E et $(x_1, ..., x_n)$ une famille de n vecteurs de E. On appelle déterminant de $(x_1, ..., x_n)$ dans B, et on note $det_B(x_1, ..., x_n)$ le déterminant de la matrice formée par les composantes de $(x_1, ..., x_n)$ dans la base B.

Propriété 9 :
Propriété fondamentale
$(x_1, ..., x_n)$ est libre si et seulement si $det_B\left(x_1, ..., x_n\right) \neq 0$

Théorème 10 :
Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. Alors $det(A) = det\left(C_1, ..., C_n\right)$ où les C_j sont les vecteurs colonnes de A (exprimés dans la base canonique B_0 de $\mathbb{K}^n$).

4.3 Calcul d'un déterminant

Propriétés 11 :

1. $det(A)$ ne change pas si on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes :
$$det\,(C_1,...,C_n) = det\left(C_1,...,C_{i-1},C_i+\sum_{j=1,\,j\neq 1}^{n}\alpha_j C_j, C_{i+1},...,C_n\right).$$
2. $\forall\lambda\in\mathbb{K},\ det\,(C_1,...,C_{i-1},\lambda C_i,C_{i+1},...,C_n) = \lambda det\,(C_1,...,C_n)$.
Donc $det(\lambda A) = det\,(\lambda C_1,...,\lambda C_n) = \lambda^n det\,(C_1,...,C_n) = \lambda^n det(A)$.
3. $det(A)=0$ si et seulement si $(C_1,...,C_n)$ est liée (en particulier si l'une des colonnes est nulles ou deux colonnes sont colinéaires).
4. Si l'on permute deux colonnes de A, le déterminant change de signe.
5. A est inversible si et seulement si $det(A)\neq 0$.

⋆ *Remarque :*
Comme $det\left({}^tA\right) = det(A)$, toutes les propriétés concernant les colonnes d'une matrice restent valables pour les lignes.

Définition 12 :
Soit $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{K})$.

1. On appelle mineur de a_{ij} le déterminant de la matrice d'ordre $n-1$ obtenue à partir de A en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. On le note Δ_{ij}.
⋄ *Exemple :*
$$A=\begin{pmatrix}1&3&0\\-2&5&7\\4&0&8\end{pmatrix},\ \Delta_{23}=\begin{vmatrix}1&3\\4&0\end{vmatrix}-12.$$
2. On appelle cofacteur de a_{ij}, le scalaire $cof\,(a_{ij}) = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.
⋄ *Exemple :*
Dans l'exemple précédent, $cof\,(a_{23}) = cof(7) = (-1)^{2+3}(-12) = 12$

Formule (développement selon la $i^{\text{ème}}$ ligne) :

$$det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}cof(a_{ik}) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}\Delta_{ik}$$

Formule (développement selon la $j^{\text{ème}}$ colonne) :

$$det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}cof(a_{kj}) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}a_{kj}\Delta_{kj}$$

◇ *Exemples :*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$, $det(A) = -126$.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}$, $det(A) = (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)$.

Tableau des signes de $(-1)^{i+j}$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

4.4 Applications des déterminants

4.4.1 Calcul de l'inverse d'une matrice

Théorème 13 :
$A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $det(A) \neq 0$.

Définition 14 :
Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$.

1. On appelle comatrice de A, la matrice $com(A) = (cof(a_{ij})) \in M_n(\mathbb{K})$.
2. On appelle matrice complémenatire de A, la matrice $\tilde{A} =^t com(A)$.

◇ *Exemple :*

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$cof(1) = (-1)^2\Delta_{11} = 4,\ cof(3) = (-1)\Delta_{12} = 2,\ cof(2) = -\Delta_{21} = -3,\ cof(4) = (+1)\Delta_{22} = 1.$

$com(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Théorème 15 :
$\forall A \in M_n(\mathbb{K}),\ A\tilde{A} = det(A)I_n$

∗ *Conséquence :*

Si A est inversible alors $det(A) \neq 0$, $A\left(\dfrac{1}{det(A)}\tilde{A}\right) = I_n$. Donc $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)}\tilde{A}$.

⋄ *Exemple :*

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $det(A) = 4 - 6 = -2 \neq 0$, donc A est inversible. $A^{-1} = -\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

4.4.2 Caractérisation du rang d'une matrice

Définition 16 :

Soit $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. On appelle mineur d'ordre p de A, le déterminant d'une matrice carrée d'ordre p extraite de A (en éliminant $m-p$ ligne et $n-p$ colonnes). Le nombre de mineurs d'ordre p est $C_m^p \times C_n^p$.

⋄ *Exemple :*

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -6$, $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -6$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$ sont des mineurs d'ordre 2.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ n'est pas un mineur.

Théorème 17 :

Le rang d'une matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ est le plus grand entier naturel $p \leq min(m,n)$ tel qu'il existe un mineur d'ordre p de A non nul.

Explication :

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Supposons que $n \leq m$. Donc $min(m,n) = n$.

On regarde les mineurs d'ordre n. Si l'un d'entre eux est non nul, alors $rg(A) = n$. Si tous sont nuls, on regarde les mineurs d'ordre $n-1$.

Si l'un d'eux est non nul, $rg(A) = n-1$, sinon on regarde les mineurs d'ordre $n-2$.

⋮

⋄ *Exemples :*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4,3}(\mathbb{K})$. $rg(A) \leq 3$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5(0-2) = -10 \neq 0, \text{ donc } rg(A) = 3.$$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $rg(A) \leq 2$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 \neq 0, \text{ donc } rg(A) = 2.$$

4.4.3 Systèmes linéaires

Définition 18 :
On appelle équation linéaire toute équation de la forme $u(x) = b$ où $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $x \in E$ et $b \in F$. Cette équation admet des solutions lorsque $b \in Im\ u$.

Définition 19 :
On appelle système d'équations linéaires de m équations à p inconnues tout système de la forme :

$$(I) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mp}x_p = b_m \end{cases}$$

Les a_{ij} s'appellent les coefficients du système, $x_1, ..., x_p$ s'appellent les inconnues du système, et $b_1, ..., b_m$ s'appellent les éléments du second membre.

Equation linéaire :

$$(I) \Longleftrightarrow u(x) = b \ \ (II)$$

où $x = (x_1, .., x_p)$, $b = (b_1, ..., b_p)$, et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^m)$.

Expression matricielle :

On note $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mp} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

$$(I) \Longleftrightarrow AX = B \ \ (III)$$

Définition 20 :

1. A s'appelle la matrice du système.
2. On dit que le système est homogène si $B = 0$.
3. On dit que le système est compatible (resp. incompatible) s'il admet des solutions (resp. n'admet pas de solutions).

Condition de compatibilité :

On pose $r = rg(A)$.

Premier cas : $r = m$ (m étant le nombre d'équations)

Dans ce cas u est surjective et le système est compatible. En effet,

$$rg(A) = m \Longrightarrow rg(u) = m = dim\ \mathbb{K}^m \Longrightarrow dim\ Im\ u = dim\ \mathbb{K}^m \Longrightarrow Im\ u = \mathbb{K}^m$$

Cas particulier, si $r = m = p$:

Dans ce cas, A est inversible et le système s'appelle système de Cramer. Il admet une solution unique obtenue par :

$$\forall i \in \mathbb{N}_m,\ x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

où $\Delta = det(A)$ et Δ_i est le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la $i^{ème}$ colonne de A par

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Deuxième cas : $r < m$

Il existe un mineur d'ordre r non nul extrait de A (tous les mineurs d'ordre $> r$ sont nuls).

Supposons que $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & & \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$

Δ s'appelle le déterminant principal. Avec ce choix de Δ, les r premières équations s'appellent les équations principales, et les r premières inconnues s'appellent les inconnues principales (il y a $m - r$ équations non principales et $p - r$ incommues non principales).

Définition 21 :
On appelle déterminant caractéristique associé à l'équation non principale numéro j, le déterminant d'ordre $r+1$ obtenu de la manière suivante :

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} & & b_1 \\ & \Delta & \vdots \\ & & b_r \\ a_{j1} \ldots a_{jr} & & b_j \end{vmatrix}$$

Il existe $m-r$ déterminants caractéristiques.
(On ajoute à Δ la ligne formée par les coefficients des inconnues principales de l'équation j, et la colonne formée par les seconds membres des équations principales et de l'équation j,)

Théorème 22 :
Le système (I) est compatible si et seulement si tous les déterminants caractéristiques sont nuls.

Résolution du système dans le cas où il est compatible :

On résoud le système formé par les équations principales aux inconnues principales :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1,p}x_p \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2,p}x_p \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{r,p}x_p \end{cases}$$

La matrice de ce système a comme déterminant $\Delta \neq 0$, d'où le système obtenu est un système de Cramer.

On note que $x_1, ..., x_r$ dépendent de $x_{r+1}, ..., x_p$, et que donc il existe une infinité de solutions.

4.4.4 Diagonalisation d'une matrice

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, $u \in \mathcal{L}\mathbb{K}$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Définitions 23 :
Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K})$.

1. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre (vp) de u (resp. de A) s'il existe $x \neq 0_E$ (resp. $X \neq 0$) tel que $u(x) = \lambda x$ (resp. $AX = \lambda X$)
2. On appelle vecteur propre de A associée à λ, tout $X \in (\mathbb{K}^n)^*$ tel que $AX = \lambda X$ (resp. $u(x) = \lambda x$), *i.e.* tout $X \in (\mathbb{K}^n)^*$ tel que $X \in Ker(A - \lambda I_n)$ (resp. $x \in Ker(u - \lambda id_E)$).
3. On appelle spectre de u (resp. A) et on note $Sp(u)$ (resp. $Sp(A)$) l'ensemble des vp de u (resp. A).
$$Sp(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_t\}$$
4. On appelle sous-espace propre de A (resp. u) associé à λ le sev de $\mathbb{K}^n$ noté et défini par $SEP(A, \lambda) = E_\lambda(A) = Ker(A - \lambda I_n)$ (resp.$SEP(u, \lambda) = E_\lambda(u) = Ker(u - \lambda Id_E)$).

Définition-proposition 24 :
On appelle polynôme caractéristique de A (resp. u)le polynôme de degré n noté et défini par $\Pi_A(X) = det(A - XI)$ (resp. $det(u - Xid_E)$).

Proposition 25 :
Les valeurs propre de A (resp. u)sont les racines du polynôme caractéristique de A (resp. u).

Définition 26 :
Soit λ une vp de u (resp. A). On appelle ordre de multiplicité de λ, son ordre de multiplicité en tant que racine de π_u (resp. π_A).

⋆ *Remarque :*
Si E est un ev de dimension finie n et de base B, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = M(u, B)$, alors :

- $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u si et seulement si λ est une valeur propre de A.
- $x \in E$ est un vecteur propre de u associé à λ si et seulement si $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ est un vecteur propre de A associé à λ, X étant le vecteur colonne formé des composantes de x dans la base B.

Définition 27 :

1. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.
2. Un endomorphisme u de E est dit diagonalisable si sa matrice dans une base quelconque est diagonalisable, ou de manière équivalente s'il existe une base B dans laquelle $M(u, B)$ soit diagonale. De manière équivalente, u est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.

Proposition 28 :
Soient B une base de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = M(u; B)$. Alors u est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable.

Théorème 29 :
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in M_n(\mathbb{K})$). On note pour tout $\lambda \in Sp(u)$ (resp. $Sp(A)$), d_λ l'ordre de multiplicité de la vp λ. Alors : u (resp. A est diagonalisable si, et seulement si,

$$\begin{cases} \pi_u \text{ (resp. } \pi_A) \text{ est scindé} \\ \forall \lambda \in Sp(u) \text{ (resp. } Sp(u)),\ dim\ E_\lambda(u) = d_\lambda \text{ (resp. } dim\ SEP(A, \lambda) = d_\lambda) \end{cases}$$

Proposition 30 :

Si les valeurs propres de A sont simples (racines simples de $\Pi_A(X)$), alors A admet n valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ deux à deux distinctes.
Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, on note x_i une valeur propre associée à λ_i. Alors $B = (x_1, ..., x_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ et A est semblable à une matrice diagonale $A' = P^{-1}AP$, avec $P = P_{B_0B}$, B_0 étant la base canonique de $\mathbb{K}^n$.