ALGEBRA SUPERIOR

CAPÍTULO 1
Desigualdades

M.I. ISIDRO I. LÁZARO CASTILLO

Aplicación

- Un estudiante debe mantener un promedio final en cinco exámenes entre 80 y 90% para tener una nota final de B y mantener una beca universitaria. Si en los primeros cuatro exámenes obtuvo 96, 70, 81 y 95 ¿Qué calificación deberá obtener en el éxamen final para obtener una nota de B?

Para que sirven ?

- Una de las principales utilidades de las desigualdades es su aplicación a los problemas de decisión: se trata de programar una situación con el objetivo dedecidirse por una alternativa que sea óptima. En general, el proceso de optimizar consiste en lograr un resultado máximo o mínimo según convenga al problema planteado.

Introducción a la teoría de Conjuntos

- La primera formulación de la teoría de conjuntos aparece con los trabajos de George Cantor.
- La teoría de conjuntos trajo claridad y precisión en la exposición de muchas teorías y áreas de la matemática, como la teoría de las probabilidades, la topología, etc.

Conjuntos

- Es una colección bien definida de objetos de un mismo tipo. A los conjuntos se les denota con letras mayúsculas **A**, **B**, …
- Existen 2 formas para escribir los conjuntos:

1. Forma tabular o de extensión.
2. Constructiva o por compresión

- Para escribir un conjunto usando la forma tabular, se listan todos sus elementos separados por comas y encerrados entre llaves {….}.

Forma Tabular

- Se escribe el conjunto listado todos sus elementos.

  Ejemplo.- El conjunto de los primeros cinco números naturales se puede escribir como:

  $A=\{1,2,3,4,5\}$

Forma constructiva

- Para escribir un conjunto por compresión o método constructivo se elige un elemento arbitrario ***x*** y se señala que cumple la propiedad ***P***, de la forma siguiente.

$$A = \left\{ x \middle| p \right\}$$

- Esto se lee.- "A es el conjunto de todos los elementos *x* tales que cumplen la propiedad P".

Ejemplos

Ejemplo.- El conjunto de los primeros cinco números enteros se puede escribir como.-

A={ es uno de los primeros cinco enteros positivos}={$x \in N | x < 6$ }

Ejemplo.- Escribir el siguiente conjunto en su forma de compresión o abstracción.

A={ -2,2 }

Solución.- Obsérvese que se puede asociar esto a una raíz cuadrada.

A={ $x | x^2 = 4$ }

Cardinalidad

Hay conjuntos que tienen un número finito de elementos; estos se llaman conjuntos finitos en caso contrario se le llama conjunto infinito.

El número de elementos de un conjunto finita es lo que se llama la cardinalidad de dicho conjunto. La cardinalidad de un conjunto finito ***A*** se denota por Card(***A***).

Otros conjuntos

Conjunto vacío.- El conjunto vacío es aquel que carece de elementos y se denota por { }.

Conjunto unitario.- Un conjunto ***A*** es un conjunto unitario si tiene solo un elemento.

Conjunto universal.- En cualquier aplicación de la teoría de conjuntos, los elementos de todos los conjuntos pertenecen usualmente a un gran conjunto fijo llamado conjunto universal y se denota por ***U***.

Subconjuntos

- ***Subconjuntos***.- Si cada elemento ***A*** es también elemento de un conjunto ***B***, entonces se dice que ***A*** es un subconjunto de ***B***. Se dice también que ***A*** está contenido en ***B*** o que ***B*** contiene a ***A***. La relación de subconjunto viene dado por.-
- $A \subset B$ ó $B \supset A$

Ejemplo.- Sean los conjuntos y establecer algunas relaciones de subconjuntos entre ellos.

A={1,2,3}

B={2,3,1}

C={1,2,3,4,5,6}

D={ es entero positivo}

Solución.- Escribiendo ***D*** en forma tabular

D={1,2,3,4,…}

Así A=B A $\subseteq$B A$\subset$ C B$\subset$C C$\subset$ D

Números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales

- El conjunto de los números reales esta formado por varios conjuntos de números, en particular, los números reales se representan por símbolos como.-

  2,0,-5, , , 0.125, , , , 0.6666….

- Un número racional es aquel que se puede expresar como la razón de dos enteros de la forma a/b, donde a y b son enteros y b 0.

$$\frac{1}{2}, -\frac{4}{2}, \frac{0}{1}, \frac{3}{5}$$

- Un número irracional es aquel que no se puede expresar como la razón de dos enteros.

Números Reales R

Números Racionales X

Números Irracionales Y

Enteros Z={...-2,-1,0,1,2...}

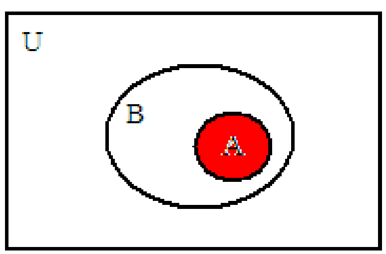
Fracciones -1/2, 3/2, 5/4

Números Aumentados W={0,1,2,3,4,...}

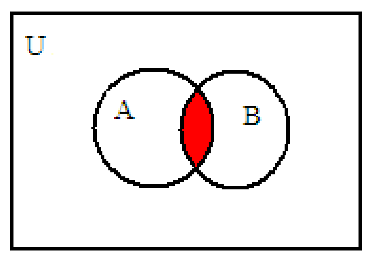
Naturales N={1,2,3,...}

Diagramas de Venn

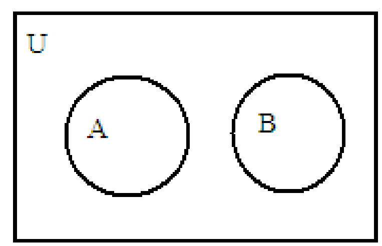
- Una representación gráfica de los conjuntos y de las relaciones entre ellos viene dada por los llamados diagramas de Venn.



$A \subset B$



A y B tienen elementos en común



A y B son disjuntos

Intersección de Conjuntos

- La intersección de dos conjuntos ***A*** y ***B*** es el conjunto formado por todos los elementos comunes a los dos conjuntos. La intersección de ***A*** y ***B*** se denota por ***A*** ∩ ***B*,** y en notación de conjuntos se escribe como

$$A \bigcap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Unión de Conjuntos

- La unión de dos conjuntos A y B consta de todos los elementos que pertenecen a A o a B, esta se denota como $A \cup B$.

$$A \cup B = \left\{ x \middle| x \in A \vee x \in B \right\}$$

Donde.- $\vee$ significa **o**

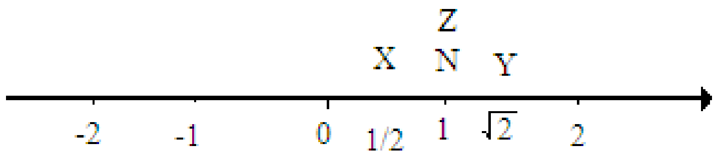
La recta numérica orden en los reales

La recta de los números reales los divide en tres clases:

Reales negativos.- Situados a la izquierda del origen.

Cero.- situado en el origen

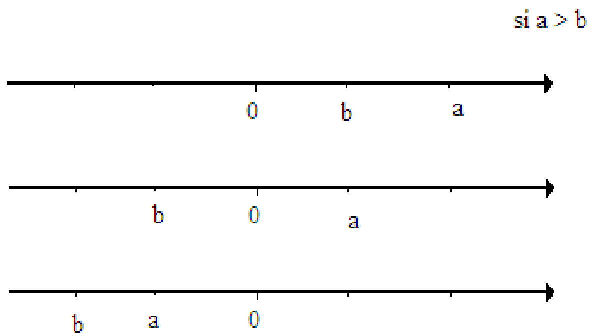
Reales positivos.- situados a la derecha del origen.



Orden en los reales

- Sean **a** y **b** dos números reales. Si la diferencia **a**-**b** es positiva, entonces decimos que **a** > **b** (a mayor de b).
- De manera similar si **a**-**b** es positivo, también podemos decir que **b** es menor que **a** y lo denotamos como **b** < **a**.
- Por lo tanto **a** > **b** y **b** < **a** son proporciones equivalentes.

- Sobre la recta de los números reales, si **a** > **b**, el punto con coordenada a está a la derecha del punto con coordenada **b**.



- Si la diferencia de dos números reales es positiva o cero, es decir, si a > b ó a = b, entonces decimos que **a** es mayor que o igual a **b** y escribimos $a \geq b$. De manera similar, si $a \geq b$, también podemos decir que $b \leq a$.

Definición de Desigualdad

- Una desigualdad es una proposición de acuerdo con la cual una cantidad real es mayor o menor que otra.
- Proposiciones de la forma **a** < **b** o **b** > **a** son denominadas desigualdades estrictas.
- Proposiciones de la forma $a \leq b$ o $b \geq a$ son desigualdades no estrictas.

Clasificación de desigualdades

- Desigualdad absoluta o incondicional: Esta es verdadera para todo número real.
- Y Desigualdades condicionales ó de inecuación: Está es verdadera sólo para los números de un subconjunto propio del conjunto de reemplazo.

$$x+2>x+1$$

$$x^2 \geq 0$$

Desigualdades absolutas

$$3x>7$$

$$x-7 \leq 5$$

Desigualdades condicionales

Propiedades de las desigualdades

1.- Axioma de tricotomía.- si **a** y **b R** entonces una y sólo una de las siguientes relaciones es válida [3].

2.- Axioma de transitividad.- Si **a**, **b** y **c R** tal que $a > b$ y $b < c$, entonces $a > c$.

3.- Axioma de adición.- Si **a**, **b** y **c R** tales que $a > b$, entonces:

4.- Axioma de multiplicación.- Si **a**, **b** y **c R** tales que $a > b$, entonces:

i) si $c > 0$ entonces $ac > bc$

ii) si $c < 0$ entonces $ac < bc$

Solución de desigualdades

- El procedimiento para resolver desigualdades consiste en transformar la desigualdad un paso a la vez hasta que el conjunto solución sea obvio.

1.- Se puede sumar el mismo número a ambos miembros de una desigualdad.

2.- Se pueden multiplicar ambos miembros de una desigualdad por un número positivo sin alterar la desigualdad, pero si se multiplica por un negativo entonces se debe de cambiar el sentido de la desigualdad, tal y como se mencionó en el axioma 3 inciso ii).

Representación de la solución

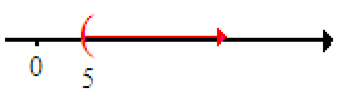
Notación de Conjuntos	Notación de Intervalos	Grafica
$\{x \mid a < x < b\}$	(a,b)	
$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	[a,b]	
$\{x \mid a \leq x < b\}$	[a,b)	
$\{x \mid a < x \leq b\}$	(a,b]	
$\{x \mid x \leq b\}$	(-∞,b]	
$\{x \mid x < b\}$	(-∞,b)	
$\{x \mid x \geq a\}$	[a, ∞)	
$\{x \mid x > a\}$	(a,∞)	
R	(-∞,+∞)	

Desigualdades Lineales

- Ejemplo.- Encontrar y dibujar la grafica del conjunto solución de la siguiente desigualdad.

$$3x - 8 > 7$$

Sumando 8 a ambos miembros de la desigualdad



$$3x - 8 + 8 > 7 + 8$$

$$3x > 15$$

Multiplicando por $\frac{1}{3}$

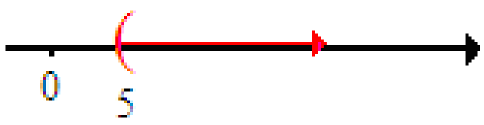
$$\frac{3x}{3} > \frac{15}{3}$$

$$x > 5$$

Representando la solución en notación de conjuntos.-

$$\left\{ x \in R \middle| x > 5 \right\}$$

En forma gráfica



- Ejemplo.- Resolver la siguiente desigualdad doble.-

$$-5 \le 2x + 6 < 4$$

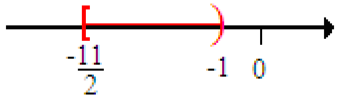
Sumando -6 a cada miembro de la misma

$$-5 - 6 \le 2x + 6 - 6 < 4 - 6$$

$$-11 \le 2x < -2$$

Multiplicando por $\frac{1}{2}$

$$-\frac{11}{2} \le x < -1$$



Desigualdades que incluyen la variable en el denominador

- Ejemplo.- Encuentre el conjunto solución de la desigualdad.

$$\frac{5}{x} > 2$$

En este caso debemos multiplicar ambos miembros de la desigualdad por ***x***, para ello debemos considerar dos casos, ya que el sentido de la desigualdad dependerá de que ***x*** sea positiva o negativa, por lo que al ser la incógnita deberá resolverse primero pensando en que ***x*** sea positiva y posteriormente en otro caso, obtener la solución cuando ***x*** es negativa

- Caso 1.- Si ***x*** es positiva, es decir, $x > 0$.

$$\frac{5}{x} > 2$$

Multiplicando por ***x***

$$5 > 2x$$

Multiplicando por $\frac{1}{2}$

$$\frac{5}{2} > x \quad o \quad x < \frac{5}{2}$$

- De esta forma una posible solución a esta desigualdad se encuentre realizando la intersección siguiente:
- Solución del Caso 1 = {Condición del caso 1} {Solución parcial del caso 1}

- Aplicando esto en notación de conjuntos.-

$$\{x > 0\} \cap \left\{ x < \frac{5}{2} \right\} = \left\{ 0 < x < \frac{5}{2} \right\}$$

- Caso 2.- Si ***x*** es negativa, es decir, $x<0$.

  Multiplicando a ambos miembros de la desigualdad por ***x*** e invirtiendo el sentido de la misma.

$$\frac{5}{x}>2$$

$$5<2x$$

Multiplicando por $\frac{1}{2}$

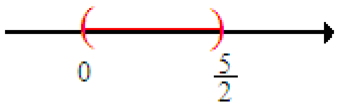
$$\frac{5}{2}<x \quad o \quad x>\frac{5}{2}$$

- El conjunto solución de la desigualdad para el caso 2 es.-

$$\{x<0\}\bigcap\left\{x>\frac{5}{2}\right\}=\{\varnothing\}$$

- El conjunto solución de la desigualdad dada es la unión de los conjuntos solución de los casos 1 y 2, el cual es:

$$\left\{0<x\frac{5}{2}\right\}\bigcup\{\varnothing\}=\left\{x\middle|0<x<\frac{5}{2}\right\}$$



Valor absoluto

- El valor absoluto de un número *x* se define como

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \quad es \quad positivo \\ -x & si \quad x \quad es \quad negativo \end{cases}$$

Propiedades

i) $-|x| \leq x \leq |x|$

ii) $|-x| = |x| \qquad |x-y| = |y-x|$

iii) $|x| = |y| \Rightarrow x = \pm y$

iv) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \qquad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad y \neq 0$

v) $|x+y| \leq |x| + |y| \quad desigualdad \quad del \quad triangulo$

Desigualdades que involucran valor absoluto

- Las desigualdades que incluyen la notación de valor absoluto también pueden escribirse en forma equivalente sin utilizar tal notación.

<u>Desigualades del tipo 1</u>.- A partir de la definición de valor absoluto.

$$|ax+b|>c \qquad si \quad c \geq 0$$

Tiene el mismo conjunto de solución que

$$-(ax+b)>c \qquad para \quad ax+b<0$$

ó

$$(ax+b)>c \qquad para \quad ax+b>0$$

Desigualdades del tipo 1 se convierte en dos desigualdades separadas, por lo que el conjunto solución de la desigualdad original es.-

{Solución de la desigualdad original}={Sol. de la primera} $\cup$ {Solución de la segunda}

- <u>Desigualdad del tipo 2.-</u> A partir de la definición de valor absoluto

$$|ax+b|<c \qquad (c>0)$$

Es equivalente $\quad (ax+b)<c \quad donde \quad ax+b<0 \quad$ (1)

Y $\quad ax+b<c \quad donde \quad ax+b>0 \quad$ (2)

Si se multiplica la ec. (1) por -1, tenemos:

$$(ax+b)>-c$$

Es equivalente a

$$-c<ax+b<c \qquad para \quad (c>0)$$

- Desigualdades del tipo 2 se convierte en una doble. Para obtener la solución total debe recordarse que la solución debe satisfacer ambas desigualdades (originalmente era una desigualdad doble), por lo que la solución será:
- {Sol. de la desigualdad doble}={Sol. de la primera}$\cap${Sol. de la segunda}

- Ejemplo.- Encuentre el conjunto solución de la desigualdad.

$$|2x-7| \leq 9$$

Obsérvese que corresponde a la desigualdad de tipo 2.

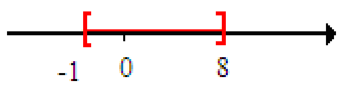
La desigualdad dada es equivalente a.-

$$-9 \leq 2x-7 \leq 9$$

$$-9+7 \leq 2x \leq 9+7$$

$$-2 \leq 2x \leq 16$$

$$-1 \leq x \leq 8$$



- Ejemplo.- Encuentre el conjunto solución de la desigualdad.

$$|3x-4| \geq 2$$

obsérvese que corresponde a una desigualdad del tipo 1.

De la primera

$$3x \geq 2+4$$
$$3x \geq 6$$
$$x \geq \frac{6}{3}$$
$$x \geq 2$$

De la segunda

$$3x \leq -2+4$$
$$3x \leq 2$$
$$x \leq \frac{2}{3}$$

- Por lo que el conjunto solución es

$$\left\{x \middle| x \leq \frac{2}{3}\right\} \cup \{x | x \geq 2\} = \left\{x \middle| x \leq \frac{2}{3} \quad o \quad x \middle| x \geq 2\right\}$$

Desigualdades polinomiales

- **Desigualdades cuadráticas**

- Una desigualdad equivalente a una de la forma, $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\geq 0$ ó $ax^2+bx+c\leq 0$ se llaman desigualdades cuadráticas.

- Ejemplo.- Encontrar la solución de la siguiente desigualdad.

$$x^2 + 2x > 15$$

El primer paso consiste en agrupar todos los términos de la desigualdad en un solo miembro de la misma, ya sea pasar todos los términos en el lado izquierdo o en el derecho, de tal manera que la expresión algebraica se compara con cero.

$$x^2 + 2x - 15 > 0$$

- A continuación se procede a factorizar la expresión

$$(x-3)(x+5)>0$$

Puede observarse que la desigualdad se satisface si el producto de ambos factores es mayor de cero, es decir si es positivo. Para que esto ocurra pueden darse dos combinaciones diferentes:

Caso 1.-

Si $x-3>0$ y $x+5>0$

Caso 2.-

Si $x-3<0$ y $x+5<0$

$x > 3$ y $x > -5$

$x < 3$ y $x < -5$

$$\{x | x > 3\} \cap \{x | x > -5\} = \{x | x > 3\}$$

$$\{x | x < 3\} \cap \{x | x < -5\} = \{x | x < -5\}$$

Finalmente el conjunto solución de la desigualdad original es la unión de las soluciones obtenidas en cada caso.

$$\{x | x < -5\} \cup \{x | x > 3\} = \{x | x > 3 \quad o \quad x < -5\}$$

Método alternativo para desigualdades polinomiales

- Ejemplo.- Considere la siguiente desigualdad.

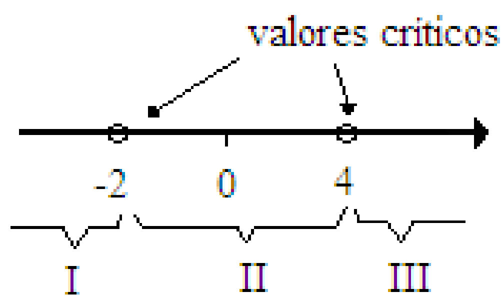
$$x^2 - 2x - 8 > 0$$

Esto se puede factorizar como

$$(x+2)(x-4) > 0$$

Esta desigualdad se verá satisfecha si los factores $(x+2)$ y $(x-4)$ son ambos positivos o ambos negativos.

- Primero se localizan los factores de cada factor.-



- Posteriormente llenamos la tabla,

	I	II	III
$(x+2)$	-	-	+
$(x-4)$	-	+	+
$(x+2)(x-4)$	+ si	- no	+ si

- Por lo tanto la solución es

$$(-\infty,-2)\cup(4,+\infty)$$

$$\{x|x<-2\}\cup\{x|x>4\}=\{x|x<-2 \quad o \quad x>4\}$$

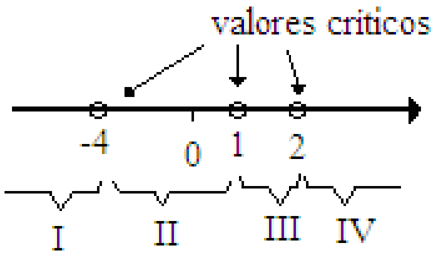
Desigualdad de orden superior

- Ejemplo.- Resolver la siguiente desigualdad.

$$(x-2)\left(x^2+3x-4\right)<0$$

Solución.- Factorizando el factor cuadrático

$$(x-2)(x-1)(x+4)<0$$



- Eligiendo valores de prueba y probando cada intervalo.

Intervalo	Valor para *x*	Resultado
I	-5	$(-5-2)(-5-1)(-5+4)=-42 \quad <0 \quad si$
II	0	$(-2)(-1)(4)=8<0 \quad no$
III	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}-2\right)\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}+4\right)=-\frac{11}{8}<0 \quad si$
IV	3	$(3-2)(3-1)(3+4)=14<0 \quad no$

Por lo tanto la solución es.-

$$\{x|x<-4\}\cup\{x|1<x<2\}=\{x|x<-4 \quad o \quad 1<x<2\}$$

Solución al problema inicial

- Un estudiante debe mantener un promedio final en cinco exámenes entre 80 y 90% para tener una nota final de B y mantener una beca universitaria. Si en los primeros cuatro exámenes obtuvo 96, 70, 81 y 95 ¿Qué calificación deberá obtener en el éxamen final para obtener una nota de B?

- Sacando el promedio de calificaciones

$$\frac{96+70+81+95+x}{5}$$

- Aplicando las condiciones del problema

$$80 \leq \frac{96+70+81+95+x}{5} \leq 90$$

- Resolviendo la desigualdad doble

$$400 \leq 342 + x \leq 450$$

$$400 - 342 \leq x \leq 450 - 342$$

$$58 \leq x \leq 108$$

Por lo tanto el estudiante debe sacar al menos 58 para mantener la beca

ALGEBRA SUPERIOR

CAPÍTULO 2

Números Complejos

M.I. ISIDRO I. LÁZARO
CASTILLO

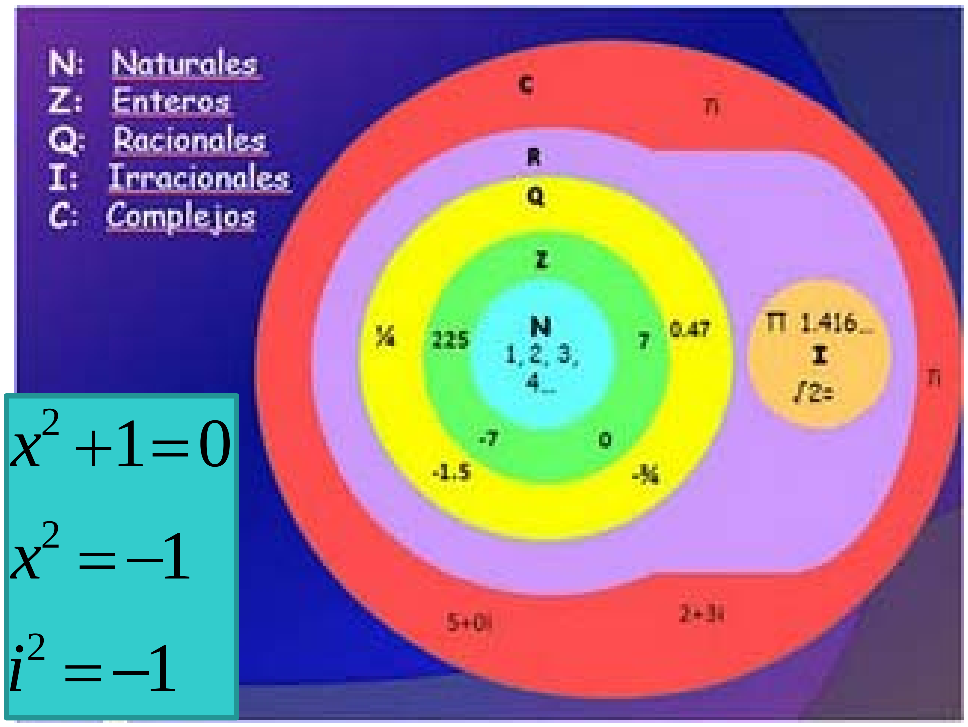
Porque estudiar Ingeniería?

http://solutionists.ieee.org/

http://www.metacafe.com/watch/6397638/ieee_solutionists_drive_innovation/

Aplicaciones de los números complejos

- Que es un número complejo

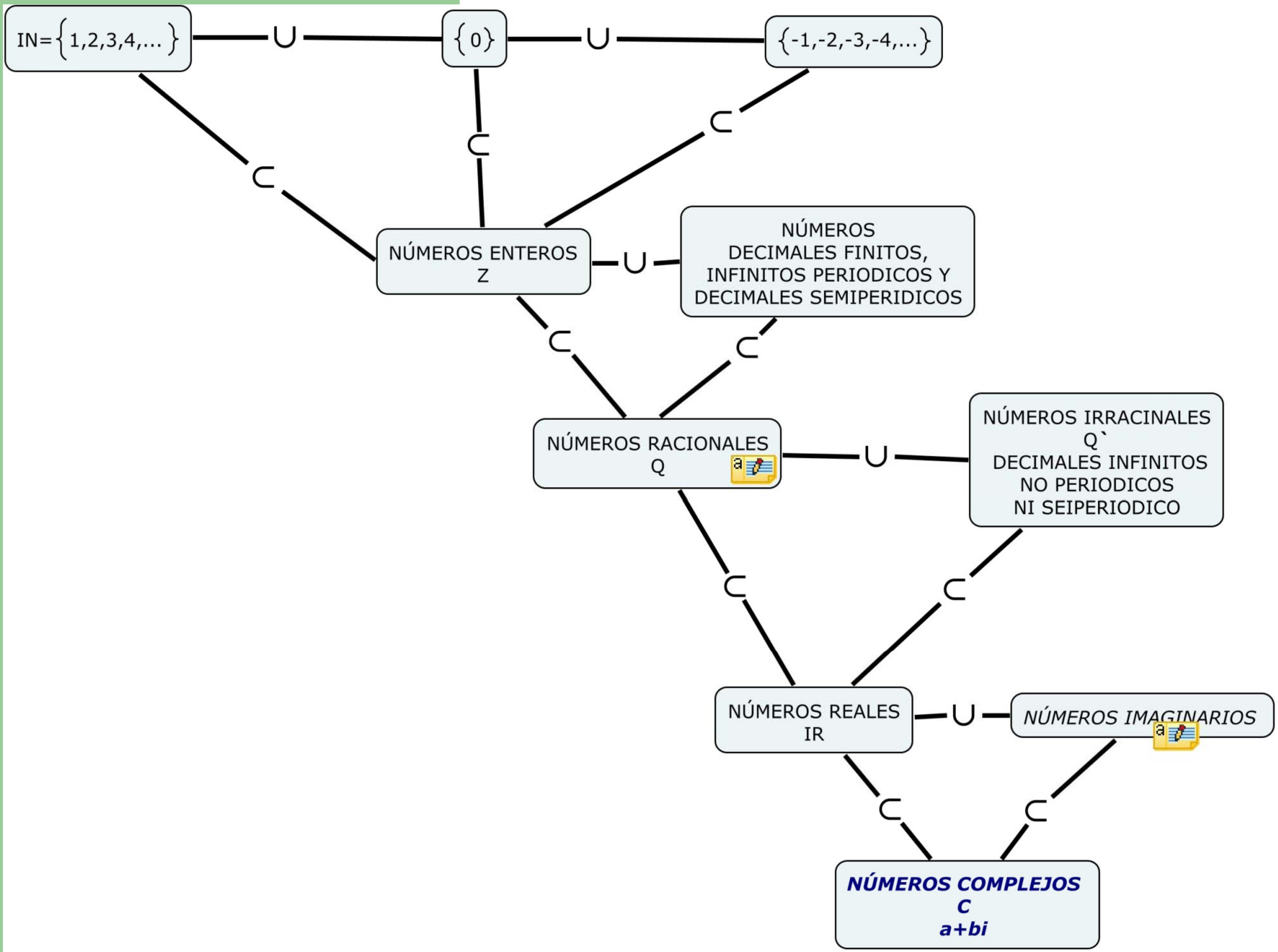


$$x^2+1=0$$

$$x^2=-1$$

$$i^2=-1$$

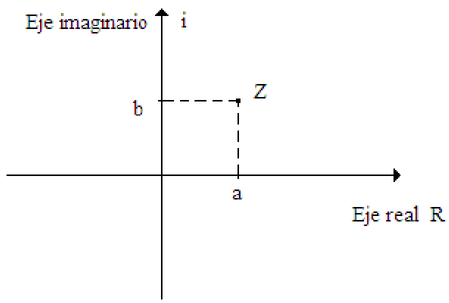
Diagrama de Árbol



Formas de representación

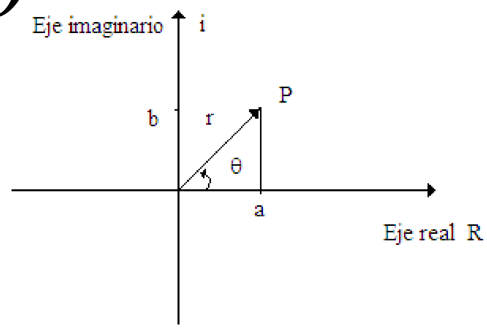
- Forma Rectangular

$$Z = \underbrace{a}_{parte\ real} + \underbrace{bi}_{parte\ imaginaria}$$



- Forma Polar

$$Z = a + bi = r\cos\theta + irsen\theta$$

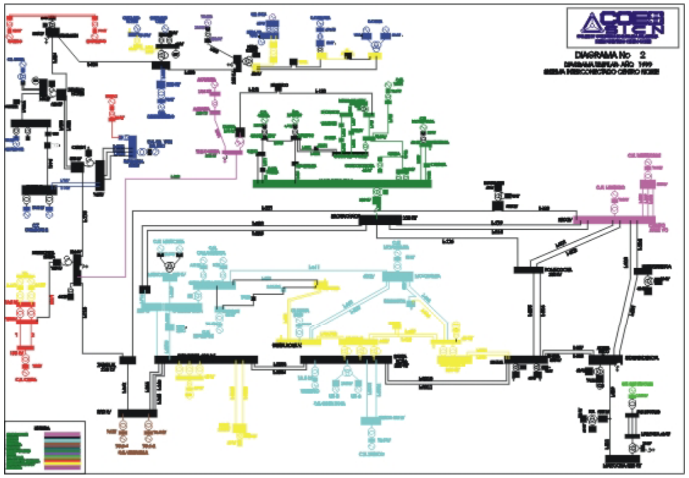


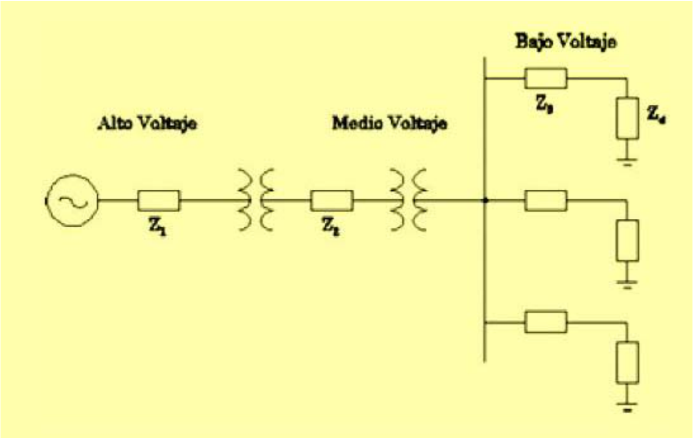
- Forma de Euler

$$Z = re^{j\theta}$$

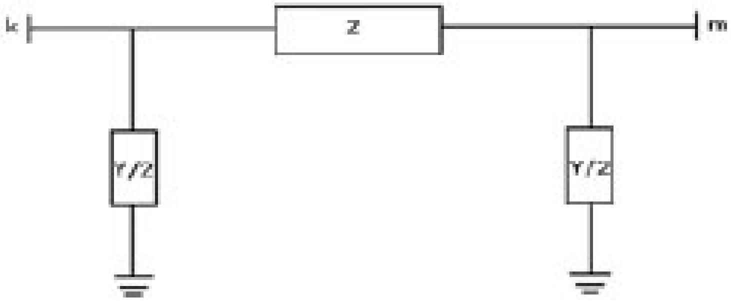
$$e^{j\theta} = Cos\theta + iSen\theta$$

Aplicaciones en los Sistemas Eléctricos de Potencia





Modelo de una línea de transmisión

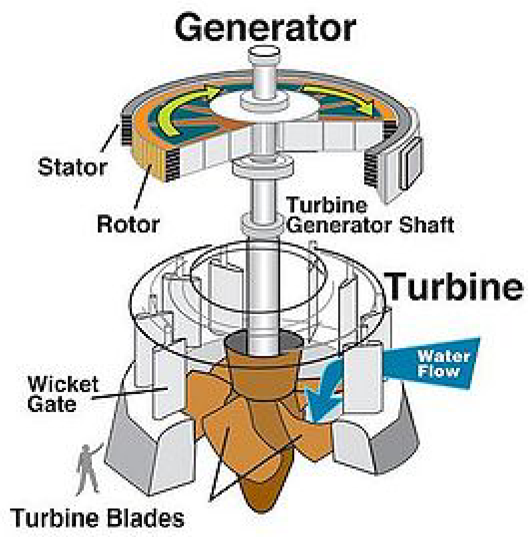


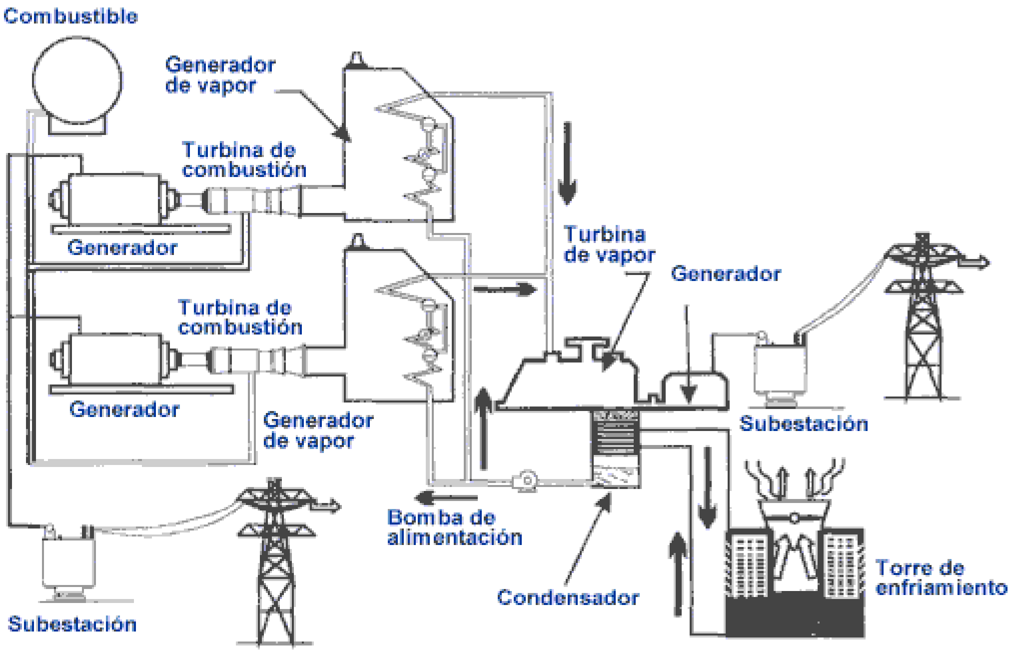
$$Z_L = R + iX_L$$

$$Z_L \cong X_L$$

$$X_L = \omega L$$

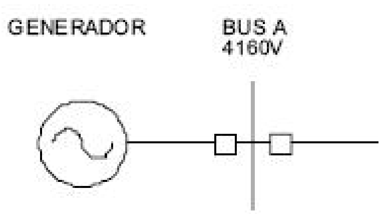
Generadores Eléctricos

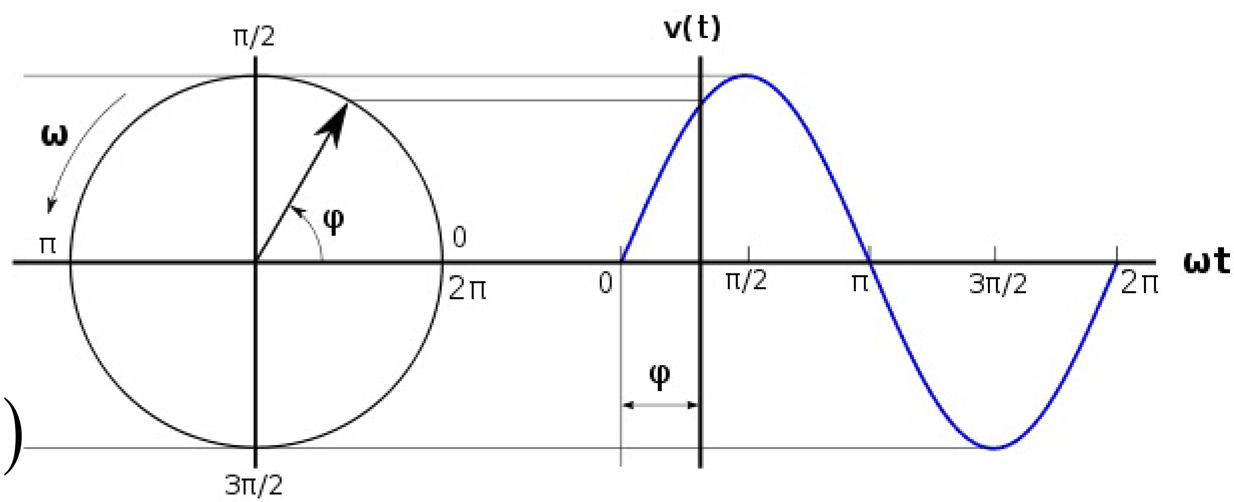




http://www.edumedia-sciences.com/es/a576-onda-sinusoidal-fasor

Modelo de generadores





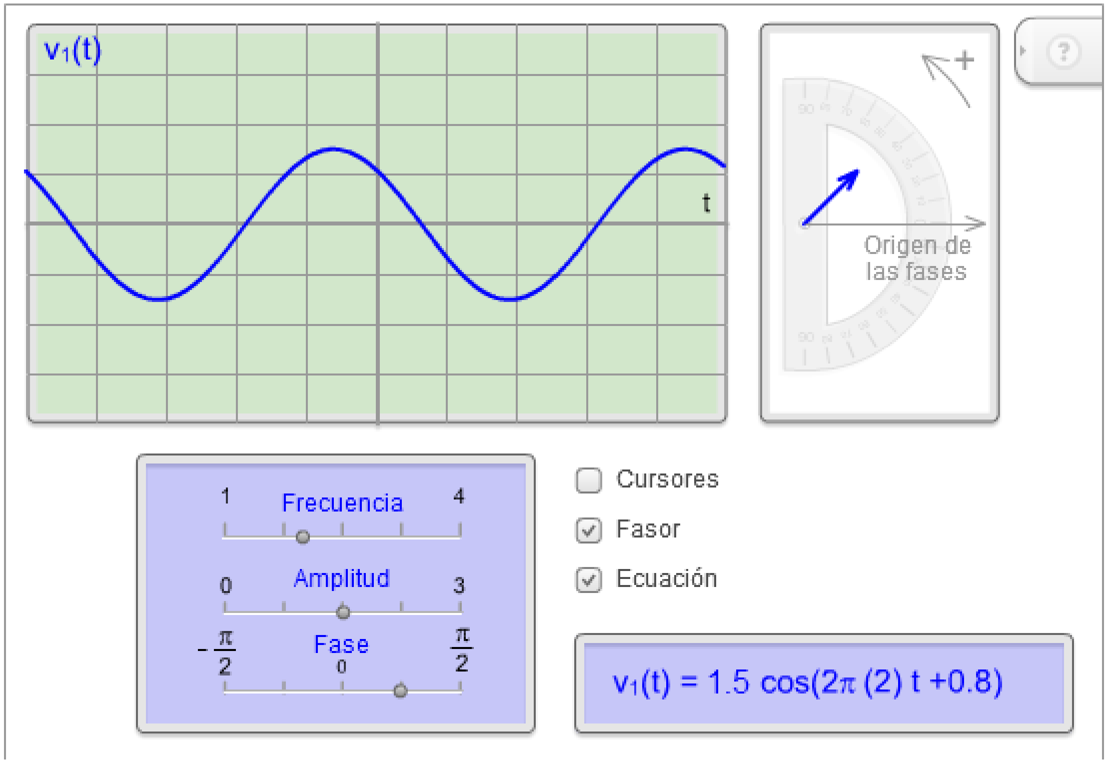
$$V = r\left(\cos\phi + i sen\phi\right)$$

$$V = r\angle\phi$$

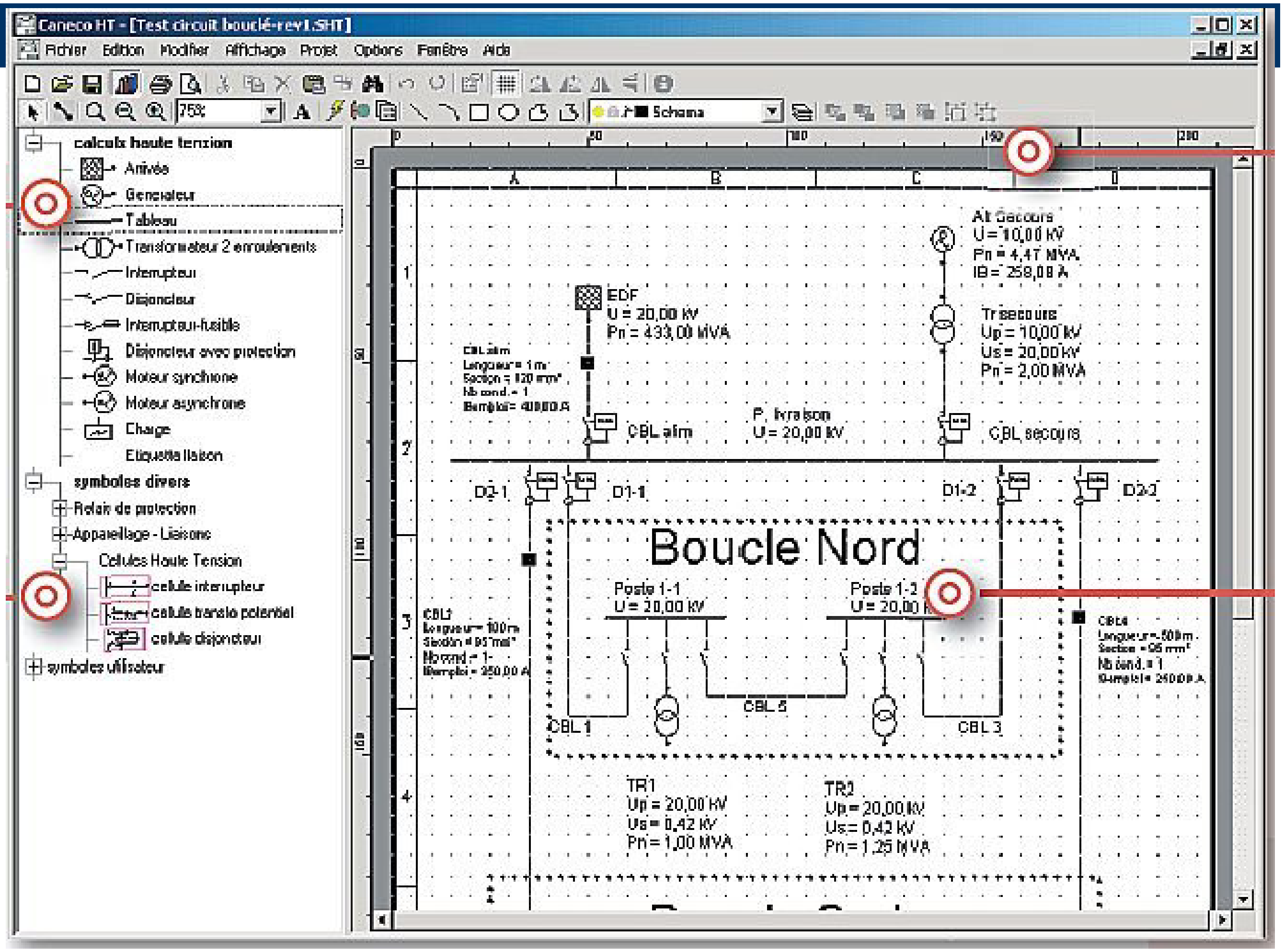
$$V = V_p\angle\phi$$

Fasor: animación

http://www.edumedia-sciences.com/es/a576-onda-sinusoidal-fasor

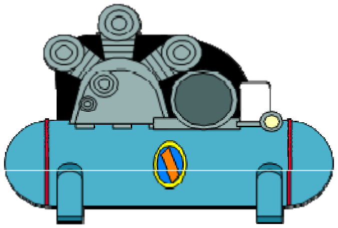


Ingeniería en Computación:
Diseño de Software para análisis redes

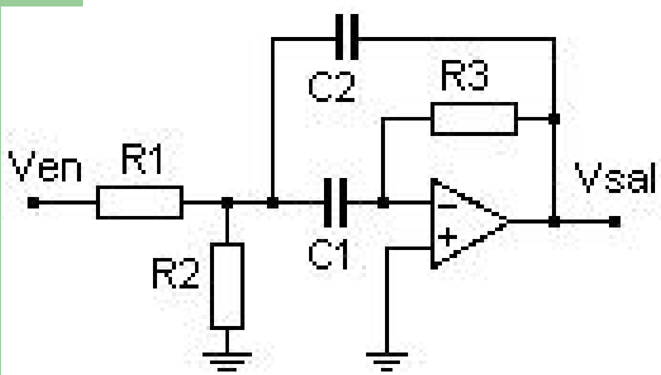


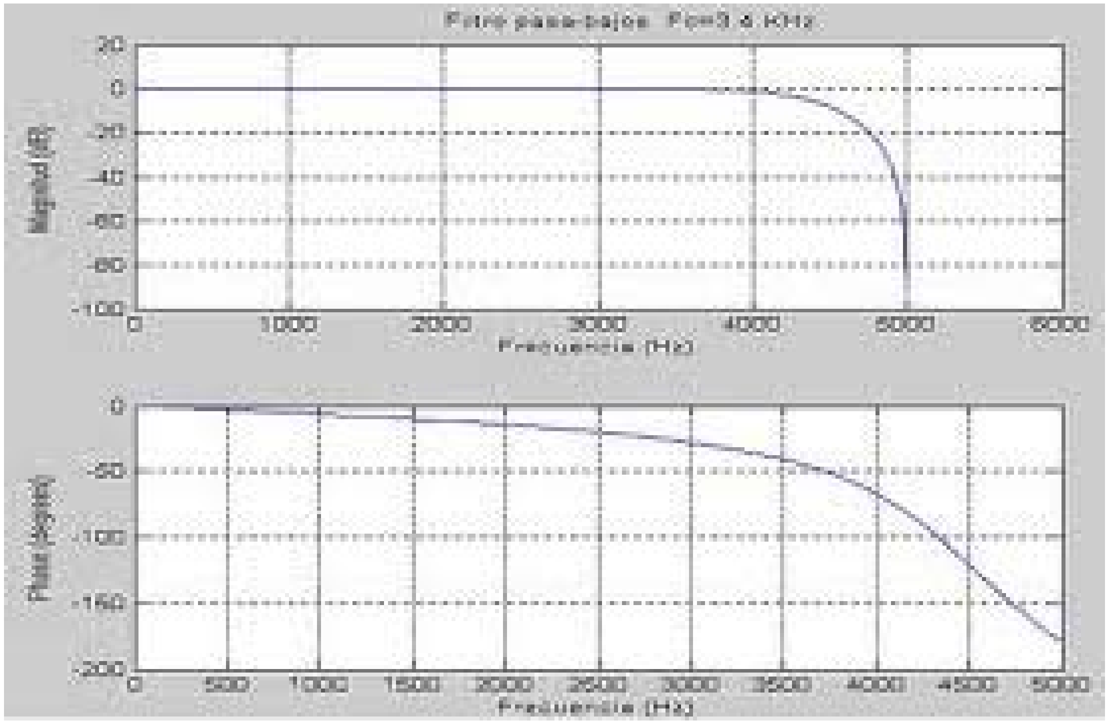
Aplicaciones en Electrónica de potencia

- Control de motores



Aplicaciones en Ingeniería Electrónica: Diseño de Filtros





El diagrama de Bode usa una representación en polar del voltaje de salida (módulo y ángulo)

Actividad # 1

- Responder las siguientes preguntas:

1. Porque quiero estudiar Ingeniería (Eléctrica, Electrónica o en Computación)..?
2. Que entiendo por un número complejo?
3. Que relación tienen los números complejos con la Ingeniería ……..?

- Realizar en una cuartilla (Entrega 27 de septiembre de 2011)

Definición de Números Complejos

- Un número de la forma *a+bi*, con *a* y *b* como constantes reales e $i=\sqrt{-1}$, es llamado número complejo

$$Z = \underbrace{a}_{parte \quad real} + \underbrace{bi}_{parte \quad imaginaria}$$

Si *a* es cero el número se reduce a un número imaginario puro.

$$Z = bi$$

Si *b*=0 se reduce a un número real

$$Z = a$$

Igualdad de dos números complejos

- Se dice que dos números complejos $a+bi$ y $c+di$ son iguales sí y sólo si.-

$$a=c \text{ y } b=d$$

Operaciones entre números complejos

Suma.- Si $Z_1 = a + bi$ y $Z_2 = c + di$

Entonces $Z_1 + Z_2 = (a+bi) + (c+di) = (a+c) + i(b+d)$

Resta.-Para restar dos números complejos, seguimos la regla

$$Z_1 - Z_2 = (a+bi) - (c+di) = (a-c) + i(b-d)$$

- Ejemplos.- Efectuar las siguientes operaciones entre números complejos.

a) $(3+5i)+(-2+3i)$

b) $(6+4i)-(3+6i)$

Solución.-

a) $(3+5i)+(-2+3i)=(3-2)+i(5+3)=1+8i$

b) $(6+4i)-(3+6i)=(6-3)+i(4-6)=3-2i$

- **Multiplicación**.-Para efectuar el producto de dos números complejos podemos seguir las reglas de la multiplicación de dos binomios.

$$Z_1 \bullet Z_2 = (a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

como $i^2 = -1$

$$Z_1 \bullet Z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Complejo Conjugado

- Si $Z = a + bi$ es un número complejo, entonces su conjugado, denotado por $\bar{Z} = \overline{a+bi} = a - bi$, también se utiliza el símbolo Z^*.

Por ejemplo.- Sea $Z = 2 + 3i$, encontrar Z^*

$$Z^* = (2+3i) = 2-3i$$

<u>Multiplicación de un número complejo por su conjugado</u>

Si $Z = a + bi$, entonces $Z \bullet Z^* = (a+bi)(a-bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2$

$$Z \bullet Z^* = a^2 + b^2$$

<u>División de números complejos</u>.-

Si $Z_1 = a + bi$ y $Z_2 = c + di$

Entonces $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a+bi}{c+di}$

multiplicando y dividiendo por el complejo conjugado de

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a+bi}{c+di} \times \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 + d^2} = \frac{(ac+bd) + i(bc-ad)}{c^2 + d^2}$$

Propiedad periódica de i

$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = i^2 i = -i$
$i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1$
$i^5 = i^4 i = i$
$i^6 = i^4 i^2 = -1$
$i^7 = i^6 i = -i$
$i^8 = i^6 i^2 = 1$

- Ejemplos.- Realizar las siguientes operaciones entre números complejos y exprese el resultado en la forma *a+bi*.

1) $(3+7i)+(5+3i)-(-2+9i)$

2) $(5+2i)^2$

3) $\dfrac{(2+3i)(3+2i)}{4+3i}$

- Solución

1.- $(3+7i)+(5+3i)-(-2+9i)=(3+5+2)+i(7+3-9)=10+i$

2.- $(5+2i)^2=(25+(2)(5)(2i)+4i^2=25+20i-4=21+20i$

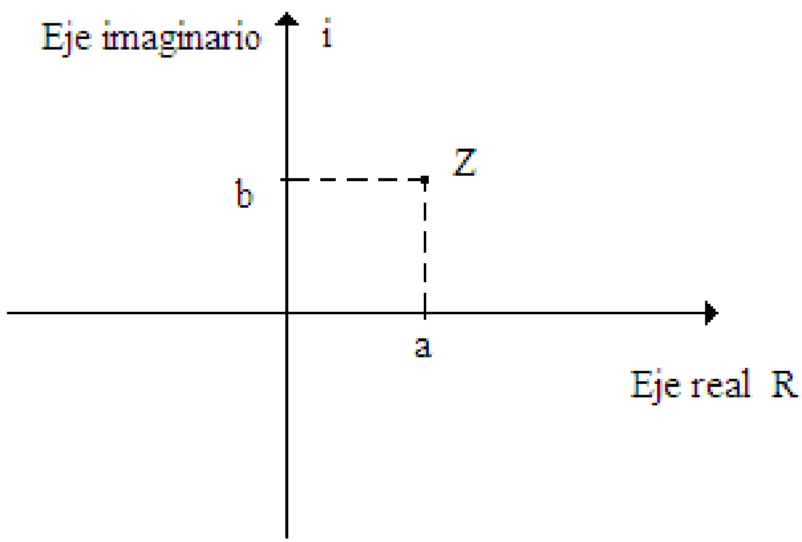
3.- $\dfrac{(2+3i)(3+2i)}{4-3i}=\dfrac{6+4i+9i+6i^2}{4-3i}=\dfrac{6-6+13i}{4-3i}=\dfrac{13i}{4-3i}$

multiplicando y dividiendo por el complejo conjugado de $4-3i$.

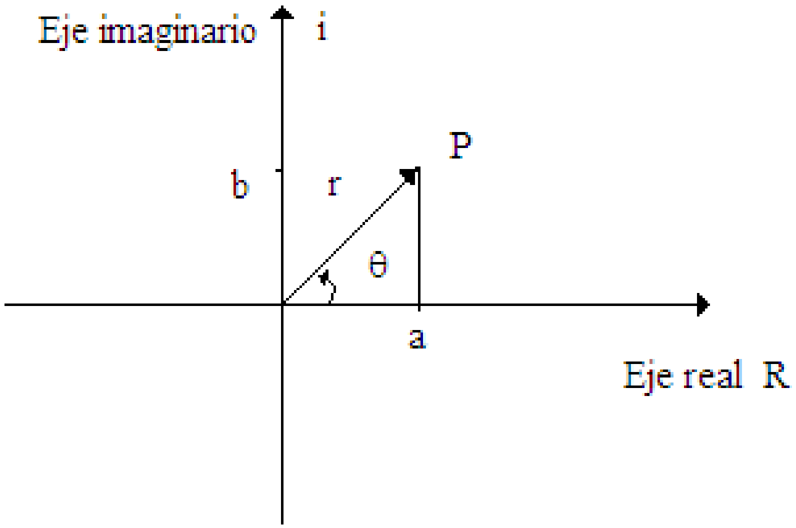
$$\left(\frac{13i}{4-3i}\right)\left(\frac{4+3i}{4+3i}\right)=\left(\frac{52i+39i^2}{4^2+3^2}\right)=\frac{-39+52i}{16+9}=\frac{-39}{25}+\frac{52i}{25}$$

Representación Gráfica de los Números Complejos

- Los números complejos se representan gráficamente como puntos en el plano de un sistema rectangular de coordenadas.



Forma trigonométrica de un número complejo



$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

En donde:

- La distancia **r** se le llama *valor absoluto* o *módulo* de *a+bi*

- El ángulo θ se llama *amplitud* o *argumento*

- Para pasar un número de su forma polar a rectangular.

$$a = r\cos\theta$$
$$b = rsen\theta$$

por lo tanto

$$Z = a + bi = r\cos\theta + irsen\theta$$

$$Z = r\left(\cos\theta + isen\theta\right)$$

A esta expresión se le llama forma trigonométrica de un número complejo

$$Z = rcis\theta \qquad Z = r\angle\theta$$

Ejemplo.- Exprese cada número complejo en su forma polar

a) $2-2i\sqrt{3}$

b) $2i$

c) $-8\sqrt{3}-8i$

- Solución.- Aplicando las fórmulas para convertir un número de rectangular a polar.

a) $2-2i\sqrt{3}$

utilizando $Z = r cis\theta$ y $\tan\theta = \frac{b}{a}$

Donde $a = 2$ y $b = 2\sqrt{3}$

tenemos:

$$r = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = 4$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-2\sqrt{3}}{2}\right) = \tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right) = -60^\circ$$

El ángulo también se puede escribir como positivo si se suman 360°, esto es

$$\theta = -60^\circ + 360^\circ = 300^\circ$$

- b) $2i$

  Obsérvese que este caso la conversión es muy simple puesto que se trata de un número puramente imaginario, por lo que su módulo es directamente el valor de *b* y su ángulo es si *b* es positivo y en caso que *b* sea negativo.

$$r = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{0}\right) = 90^\circ$$

$$Z = 2 cis 90^\circ$$

c) $-8\sqrt{3}-8i$

$$r=\sqrt{\left(-8\sqrt{3}\right)^2+\left(8\right)^2}=\sqrt{\left(8\right)^2\left(\left(\sqrt{3}\right)^2+1\right)}=\sqrt{\left(8\right)^2}\sqrt{4}=16$$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{-8}{-8\sqrt{3}}\right)=30^\circ+180^\circ=210^\circ$$

- Ejemplo.- Convertir el siguiente número complejo de su forma polar a rectangular.

$$Z = 5\left(\cos 150^\circ + isen150^\circ\right)$$

Solución.-

En este caso $r = 5$ y $\theta = 150^\circ$

Como se requiere convertir el número en su forma *z=a+bi*, entonces aplicamos la fórmula:

$$a = r\cos\theta \qquad b = rsen\theta$$

así tenemos:

$$a = 5\cos 150^{\circ}$$

$$b = 5 sen 150^{\circ}$$

por lo que

$$Z = -4.33 + 2.5i$$

Multiplicación y División de números Complejos en forma Polar

- **<u>Teorema</u>.-** El valor absoluto del producto de dos números complejos es igual al producto de sus valores absolutos. La amplitud del producto de dos números complejos es igual a la suma de sus amplitudes.
- Es decir, el producto de *n* números complejos está dado por.-

$$Z_1 \bullet Z_2 \bullet \ldots \bullet Z_n = r_1 \bullet r_2 \bullet \ldots \bullet r_n \left[Cos\left(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n\right) + iSen\left(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n\right) \right]$$

- **Teorema.-**
- El valor absoluto del cociente de dos números complejos es el cociente de sus valores absolutos. La amplitud del cociente es la amplitud del dividendo menos la amplitud del divisor.

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{r_1}{r_1}\left[Cos\left(\theta_1-\theta_2\right)+iSen\left(\theta_1-\theta_2\right)\right]$$

Ejemplos.- Realice las siguientes operaciones.

a) $$\frac{4\left(Cos225^{\circ}+iSen225^{\circ}\right)}{\left(2\left(Cos90^{\circ}+iSen90^{\circ}\right)\right)\left(3\left(Cos135^{\circ}+iSen135^{\circ}\right)\right)}$$

b) $$\frac{4i\left(5+5i\right)}{21\left(C\,os\,33^{\circ}+iSen33^{\circ}\right)}$$

Solución.-

a) $$\frac{4Cis225^\circ}{\left[2Cis90^\circ\right]\left[3Cis135^\circ\right]}=\frac{4Cis225^\circ}{2\times 3Cis\left(90^\circ+135^\circ\right)}=\frac{4Cis225^\circ}{6Cis225^\circ}=\frac{2}{3}Cis0^\circ$$

expresando el resultado en forma rectangular

$$\frac{2}{3}Cis0^\circ=\frac{2}{3}$$

b) $$\frac{4i(5+5i)}{21Cis33^\circ}=\frac{20i-20i^2}{21Cis33^\circ}=\frac{-20+20i}{21Cis33^\circ}$$

para efectuar la división realizamos una conversión del numerador a su forma polar

usando las relaciones

$$r=\sqrt{(-20)^2+(20)^2}=28.284$$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{-20}{20}\right)=135^\circ$$

- aplicando estos resultados

$$\frac{28.284Cis135^{\circ}}{21Cis33^{\circ}} = 1.346Cis102^{\circ}$$

o bien en forma rectangular

$$= -0.279 + 1.316i$$

Forma de Euler o Exponencial de un Número Complejo

Sea $Z = re^{j\theta}$

conocida como forma de Euler o Exponencial de un número complejo, donde:

r es el módulo

θ es la amplitud

$e^{j\theta} = Cos\theta + iSen\theta$ es la identidad de Euler

Interrelación entre las tres representaciones de un Número Complejo

Forma de Euler	Forma Polar	Forma Trigonométrica
$Z = re^{j\theta}$	$Z = rCis\theta$	$Z = a + bi$
$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$	$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$	$a = rCos\theta$
$r = \sqrt{a^2 + b^2}$	$r = \sqrt{a^2 + b^2}$	$b = rSen\theta$

Producto y Cociente en notación de Euler

Consideremos ahora dos números complejos representados en la forma de Euler y veamos la forma en que pueden multiplicarse y dividirse.

Sea $Z_1 = r_1 e^{j\theta_1}$ y $Z_2 = r_2 e^{j\theta_2}$

Realizando el producto

$$Z_1 \times Z_2 = r_1 e^{j\theta_1} r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

Esto significa que para multiplicar dos números complejos en forma exponencial es igual que en polar, es decir, hay que multiplicar los módulos y sumar los ángulos.

Consideremos ahora la división de $\frac{Z_1}{Z_2}$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

Por lo que concluimos que para dividir dos números complejos representados en forma de Euler basta dividir módulos y restar ángulos (igual que en polar).

Potencia de un número Complejo en Forma de Euler

- Consideremos ahora el caso de elevar un número complejo a una potencia *n*, para ello consideremos el número complejo *z*.

$$Z = re^{j\theta}$$

calculemos Z^n

$$Z^n = r^n \left(e^{j\theta}\right)^n = r^n e^{jn\theta}$$

Potencia de Números Complejos en forma Polar

- ***Teorema de Moivre***

Si $Z = r\left(Cos\theta + iSen\theta\right)$

Entonces

$$Z^n = r^n\left(Cos(n\theta) + iSen(n\theta)\right) = r^n \angle n\theta$$

- Ejemplo.- Encuentre las potencias indicadas en el siguiente problema. Exprese cada resultado en forma rectangular.

$$\frac{\left[2\left(Cos35^\circ + iSen35^\circ\right)\right]^3}{\left(Cos10^\circ + iSen10^\circ\right)^8}$$

Aplicando el teorema de Moivre tanto al numerador como al denominador

$$\frac{\left[2\left(Cos35^\circ + iSen35^\circ\right)\right]^3}{\left(Cos10^\circ + iSen10^\circ\right)^8} = \frac{2^3\left(Cos\left(3\times 35^\circ\right) + iSen\left(3\times 35^\circ\right)\right)}{1^8\left(Cos\left(8\times 10^\circ\right) + iSen\left(8\times 10^\circ\right)\right)} = \frac{8Cis105^\circ}{1Cis80^\circ}$$

- efectuando la división

$$= 8Cis\left(105^{\circ} - 80^{\circ}\right) = 8Cis25^{\circ}$$

realizando la conversión a rectangular

$$= 7.25 + i3.38$$

Raíz de un Número Complejo

Teorema

Un número complejo no nulo tiene *n* n-ésimas raíces dadas por la fórmula:

$$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r}\left(Cos\frac{\theta + k \times 360^{\circ}}{n} + iSen\frac{\theta + k \times 360^{\circ}}{n} \right)$$

donde *k= 0, 1 , 3, .., n-1*

Ejemplo.- Encontrar las 5 raíces del siguiente número Complejo.

$$\sqrt[5]{-16+16i\sqrt{3}}$$

Solución.- Expresando el número en forma polar, tenemos:

$$r=\sqrt{(-16)^2+\left(16\sqrt{3}\right)^2}=32$$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{16\sqrt{3}}{-16}\right)=-60^\circ+180^\circ=120^\circ$$

Las 5 raíces de $Z=-16+16i\sqrt{3}$ son:

$$\sqrt[5]{Z}=\sqrt[5]{32}\left(Cos\frac{120^{\circ}+k360^{\circ}}{5}+iSen\frac{120^{\circ}+k360^{\circ}}{5}\right)$$

Donde *k* = 0, 1,2 ,3 4 por ser 5 raíces, cuando se asigne una valor de k se obtendrá una de las 5 raíces.

Para *k* = 0

Para $k = 0$

$$Z_0 = 2\left(Cos\frac{120^\circ}{5} + iSen\frac{120^\circ}{5}\right) = 2\left(Cos24^\circ + iSen24^\circ\right) = 1.82 + 0.813i$$

Para k=1

$$Z_1 = 2\left(Cos\frac{120^\circ + 360^\circ}{5} + iSen\frac{120^\circ + 360^\circ}{5}\right) = 2\left(Cos96^\circ + iSen96^\circ\right) = -0.219 + i1.989$$

Para k=2

$$Z_2 = 2\left(Cos\frac{120^\circ + 2\times 360^\circ}{5} + iSen\frac{120^\circ + 2\times 360^\circ}{5}\right) = 2\left(Cos168^\circ + iSen168^\circ\right) = -1.956 + 0.415i$$

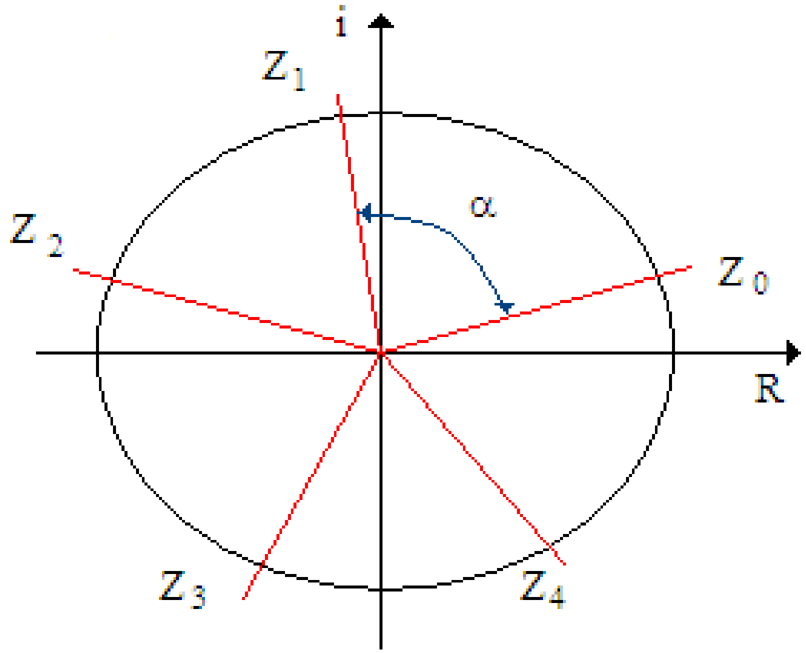
Para k=3

$$Z_3 = 2\left(Cos\frac{120^\circ + 3\times 360^\circ}{5} + iSen\frac{120^\circ + 3\times 360^\circ}{5}\right) = 2\left(Cos240^\circ + iSen240^\circ\right) = -1 - 732i$$

Para k=4

$$Z_4 = 2\left(Cos\frac{120^\circ + 4\times 360^\circ}{5} + iSen\frac{120^\circ + 4\times 360^\circ}{5}\right) = 2\left(Cos312^\circ + iSen312^\circ\right) = 1.338 - 1.486i$$

Representación gráfica de las raíces



$$\alpha = \frac{360^\circ}{n}$$

REFERENCIAS

[1] Algebra Elemental
Gordon Fuller
Ed. CECSA

[2] Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica
Walter Fleming
Prentice Hall
1991

[3] Precálculo
Michael Sullivan
Cuarta edición
1997

[4] Algebra
Max A. Sobel
Segunda Edición
Prentice Hall

ALGEBRA SUPERIOR

CAPÍTULO 3

Polinomios

M.I. ISIDRO IGNACIO LÁZARO CASTILLO

Para que sirven ?

- En la Física...

  Sabemos que al suspender un peso de un resorte, este se alarga, ¿podríamos determinar la ley que rige este alargamiento, al menos para un determinado intervalo? Sería como tratar de expresar el alargamiento del resorte en función del tiempo.

- En la Química...

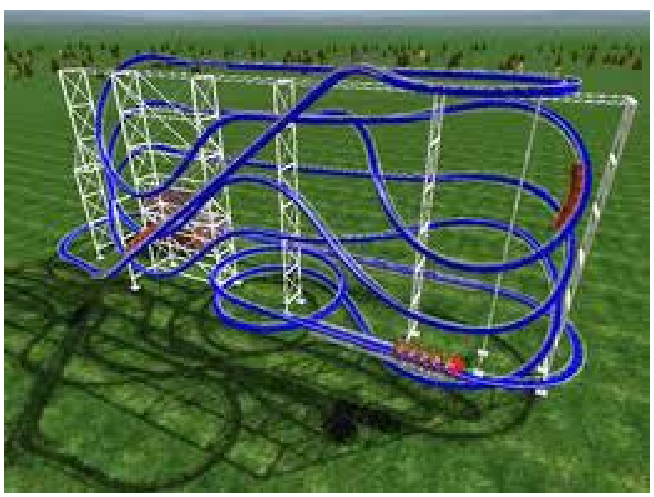
En el laboratorio de Química, ¿podemos estudiar la temperatura de una masa de agua con respecto al tiempo en que es sometida al calor? Se trata de relacionar la temperatura en función del tiempo.

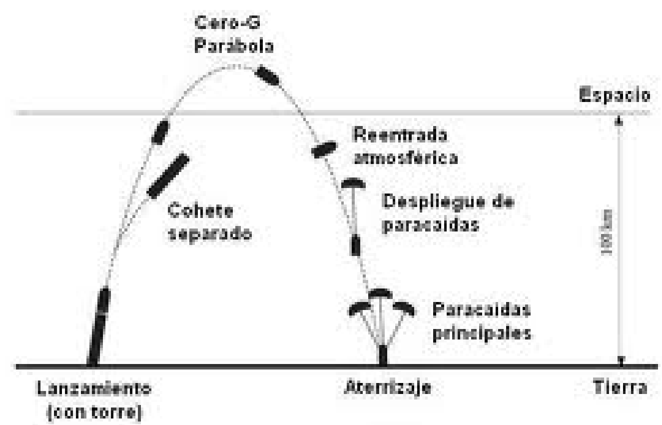
- En la Economía...

Un investigador suele expresar: el consumo en función del ingreso, también la oferta en función del precio, o el costo total de una empresa en función de los cambios de producción, entre otros muchos ejemplos donde se analiza cómo se comporta una variable en respuesta a los cambios que se producen en otras variables.

Aplicaciones en Ingeniería

- Las funciones polinomiales se pueden usar para describir la trayectoria de objetos tales como de una montaña rusa o un cohete.





Definición

- Un polinomio tiene la forma.-

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Donde los coeficientes a_0, a_1, …, a_n son números o constantes (estos números pueden ser reales, imaginarios o nulos) y los exponentes de las variables como *n, n-1*, *n-2*, etc. Son enteros no negativos.

Raíces

- Un valor de *x* que satisface a la ecuación es llamado una raíz o solución del polinomio. El valor de *n* especifica el grado del polinomio.

Teorema del residuo

- Si un número *r* se sustituye por *x* en el polinomio $y = f(x)$; el valor así obtenido *f(r)* es igual al valor del residuo al calcular el cociente

$$\frac{f(x)}{d(x)} = \frac{f(x)}{x - r}$$

- Ejemplo.- Determinar el residuo que se obtiene al dividir el polinomio $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$ entre $x - 2$.

podemos utilizar la división tradicional de polinomios para calcular el residuo.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 5x + 10 \\
\hline
x - 2 & x^3 + 3x^2 - 5 \\
 & \underline{-x^3 + 2x^2} \\
 & \quad 5x^2 \\
 & \quad \underline{-5x^2 + 10x} \\
 & \qquad 10x - 5 \\
 & \qquad \underline{-10x + 20} \\
 & \qquad\quad 15 \quad \text{Residuo}
\end{array}
$$

- Utilizando el teorema del residuo, el valor del residuo es el valor obtenido al evaluar la función en *f(r)*.

$$x - r = x - 2$$

$$\therefore r = 2$$

$$f(2) = 2^3 + 3\left(2\right)^2 - 5 = 8 + 12 - 5 = 15$$

Teorema del Factor

a) Si $f(x)$ es un polinomio; r un número, y $f(r)=0$, entonces $(x-r)$ es un factor de $f(x)$.

b) Si $(x-r)$ es un factor del polinomio $f(x)$, entonces $f(r)=0$.

- Ejemplo.- Determinar si (x+2) es un factor de $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x - 2$.

Utilizando el teorema del factor, evaluamos el polinomio en *x=-2*.

$$f(-2) = (-2)^3 + 4(-2)^2 + 3(-2) - 2$$
$$= -8 + 16 - 6 - 2 = 0$$

Como el residuo es 0, *x+2* es un factor de *f(x).*

División Sintética

- Es una operación ampliamente usada en la determinación de las raíces de un polinomio, es dividir un polinomio *f(x)* por una expresión lineal de la forma *x-r*.

Ejemplo .- Determinar si *(x-2)*es un factor de $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$

Utilizando el teorema del factor.

Por división sintética

El cociente es con *R=0*

$$\begin{array}{r|rrrr} \underline{2} & 1 & 3 & -6 & -8 \\ & & 2 & 10 & 8 \\ \hline & 1 & 5 & 4 & 0 \rightarrow \quad \text{Re}\,siduo \end{array}$$

- Ejemplo .- Demostrar que *2-3i* es una raíz de

$$x^4 - 10x^3 + 50x^2 - 130x + 169 = 0$$

Solución.- En este caso *r=2-3i.*

$$\begin{array}{c|ccccc} \underline{2-3i} & 1 & -10 & 50 & -130 & 169 \\ & & 2-3i & -25+18i & 104-39i & -169 \\ \hline & 1 & -8-3i & 25+18i & -26-39i & 0 \end{array}$$

- Como R=0 entonces 2-3i es una raíz del polinomio, el estudiante puede comprobar que 2+3i (complejo conjugado de 2-3i) también es raíz del polinomio.

Teoremas concernientes a raíces

- **Teorema 1**.- Cada polinomio *f(x)* de grado puede ser expresado como el producto de *n* factores lineales

Es decir si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ con $a_0 \neq 0$

Entonces *f(x)* lo podemos expresar como:

$$f(x) = a_0 \left(x - r_1\right)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$$

Los números r_1, r_2,... ,r_n (raíces del polinomio) pueden ser distintos ó incluso imaginarios. Además ciertos factores puede repetirse.

- **Teorema 2**.- Toda Ecuación polinomial $f(x)=0$ de grado n tiene exactamente n raíces.
- **Teorema 3**.- Si $f(x)$ es un polinomio con coeficientes reales y $a+bi$ (a,b números reales) es un cero (raíz) de $f(x)$, entonces $a-bi$ es también un cero de $f(x)$.

- **Teorema 4**.-
- Si un polinomio es de grado non (impar), debe tener al menos una raíz real.
- Si un polinomio es de grado par puede no tener raíces reales.

- Ejemplo.- Resolver la ecuación $f(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8$ si -4 y 1 son raíces del polinomio.

Solución.- Usando el teorema del factor, si *r = 1* es una raíz de *f(x)*, entonces *(x-1)* es un factor de *f(x).*

Aplicando división sintética.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
\underline{1} & 1 & 2 & -9 & -2 & 8 \\
 & & 1 & 3 & -6 & -8 \\
\hline
 & 1 & 3 & -6 & -8 & 0
\end{array}
$$

Donde $q(x)=x^3+3x^2-6x-8$ (cociente), así *f(x)* puede expresarse como.-

$$f(x)=(x-1)\left(x^3+3x^2-6x-8\right)$$

La otra raíz dada es -4; se deduce que (x+4) es un factor de f(x). Dado que $f(x)=(x-1)\left(x^3+3x^2-6x-8\right)=0$, $(x+4)$ será factor del polinomio $q(x)=x^3+3x^2-6x-8$.

- Aplicando la división sintética a la ecuación reducida.

$$\begin{array}{r|rrrr} \underline{-4} & 1 & 3 & -6 & -8 \\ & & -4 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

Así $q_2(x) = x^2 - x - 2$

Escribiendo *f(x)* en forma factorizada.-

$$f(x) = (x-1)(x+4)(x^2 - x - 2)$$

- Los otros 2 factores pueden obtenerse aplicando factorización a la ecuación cuadrática.

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

Finalmente:

$$f(x) = (x-1)(x+4)(x-2)(x+1)$$

Por lo que las raíces del polinomio son:

x = 1, x = -4, x = 2, x = -1

Métodos para determinar las raíces de un polinomio

- **Teorema de la raíz racional**

  Sea $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ $a_0 (\neq 0$) un polinomio de n-ésimo grado con coeficientes enteros. Si es una raíz racional de , donde está en la mínima expresión; entonces p es un factor de a_0 y q es un factor de a_n .

- Ejemplo.- Encontrar las raíces racionales de:

$$f(x) = 4x^3 - 16x^2 + 11x + 10 = 0$$

Factores de p $\{\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 5, \quad \pm 10$

Factores de q $\{\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 4$

Por lo que las posibles raíces racionales son

$$\frac{p}{q} = \left\{\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 5, \quad \pm 10, \quad \pm\frac{1}{2} \quad \pm\frac{5}{2} \quad \pm\frac{1}{4} \quad \pm\frac{5}{4}\right.$$

Ordenando las posibles raíces racionales

$$\frac{p}{q} = \left\{\pm\frac{1}{4}, \quad \pm\frac{1}{2}, \quad \pm 1, \quad \pm\frac{5}{4}, \quad \pm 2, \quad \pm\frac{5}{2}, \quad \pm 5, \quad \pm 10\right.$$

- Iniciando la búsqueda del lado negativo

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-\frac{1}{4} & 4 & -16 & 11 & 10 \\
 & & -1 & \frac{17}{6} & -\frac{61}{16} \\
\hline
 & 4 & -17 & \frac{61}{4} & \frac{99}{16}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-\frac{1}{2} & 4 & -16 & 11 & 10 \\
 & & -2 & 9 & -10 \\
\hline
 & 4 & -18 & 20 & 0
\end{array}
$$

- Como se ha determinado una raíz en $x=-\frac{1}{2}$, se puede usar el polinomio reducido para determinar las otras dos raíces.

$$q(x)=4x^2-18x+20$$

De aquí tenemos:

$$f(x)=(x+\frac{1}{2})(4x^2-18x+20)$$

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x-4)(2x-5)$$

- Raíces

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2} \\ x_2 = 2 \\ x_3 = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Regla de Descartes

- **Teorema.-** Regla de los signos de Descartes.

1. El número de raíces de una ecuación polinomial $f(x) = 0$ es igual al número de variaciones de signo en $f(x)$ o es menor de ese número y difiere de él por un entero par positivo.
1. El número de raíces negativas de $f(x) = 0$ es igual al número de variaciones de signo en *f(-x)* o es menor que este número y difiere de él en un entero par positivo.

- Ejemplo.- Determinar el número de posibles raíces positivas y negativas del siguiente polinomio $f(x)=x^3+3x^2-2x+1$.

Solución.-

Para determinar el número de posibles raíces positivas contamos el número de variaciones de signo en *f(x).*

$$f(x)=x^3+\underbrace{+3x^2-}_{1}\underbrace{2x+}_{2}1$$

- Por lo tanto al existir dos variaciones de signo concluimos que:

Núm. de raíces positivas posibles $\begin{cases} 2 \\ ninguna \end{cases}$

Para determinar el número de posibles raíces racionales negativas evaluamos el polinomio en –x, esto es *f(-x)*, lo cual produce:

$$f(-x) = (-x)^3 + 3(-x)^2 - 2(-x) + 1$$

$$f(-x) = -x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

- Contabilizando el número de posibles raíces negativas:

$$f(-x) = \underbrace{-x^3}_{1} + 3x^2 + 2x + 1$$

Por lo tanto:

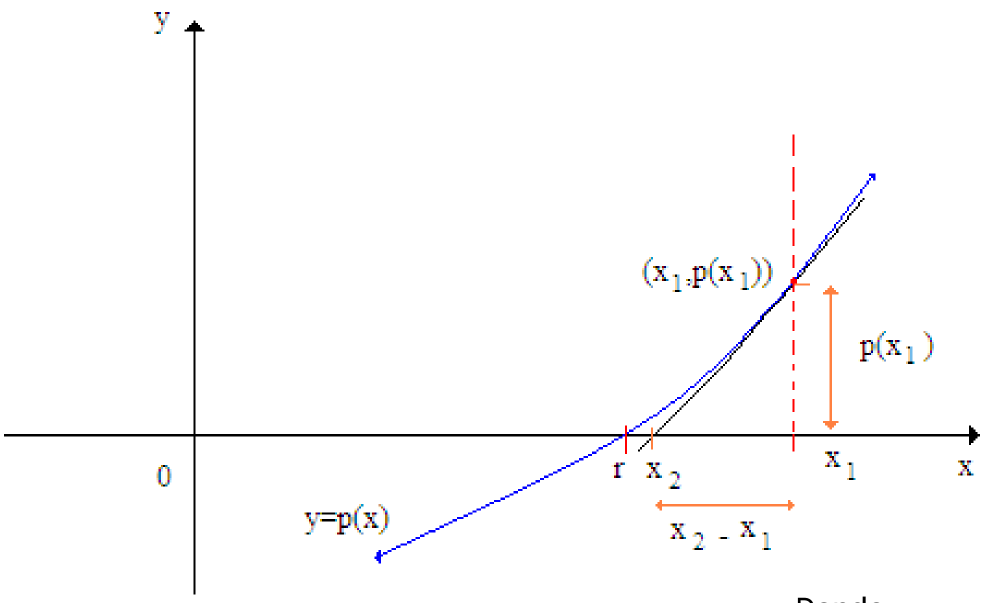
Núm. de raíces negativas $\begin{cases} 1 \\ ninguna \end{cases}$

Cotas superior e inferior de un polinomio

- **Teorema.-** Sea *f(x)* un polinomio con coeficientes reales.
- Regla a.- Dividir *f(x)* entre *(x-r),* donde *r > 0* para obtener $f(x)=(x-r)q(x)+R$. Si los coeficientes de los términos de *q(x)* y el residuo R son todos positivos, entonces no existe raíz de *f(x)* mayor que *r*; es decir, *r* es una cota superior de las raíces de *f(x).*
- Regla b.- Dividir *f(x)* entre *(x-r),* donde *r < 0* para obtener $f(x)=(x-r)q(x)+R$. Si los coeficientes de los términos de *q(x)* y el residuo R alternan en signo, entonces no existe raíz de *f(x)* menor que *r*; es decir, *r* es una cota inferior de las raíces de *f(x).*

Método de Newton-Raphson

- Sea $p(x)=0$ una ecuación polinomial con coeficientes reales. Supóngase que por método gráfico se descubre que tiene una solución real r que se supone esta cerca de $x_{1.}$
- Entonces como se muestra en la figura, una mejor aproximación a r es x_2, el punto en el que la recta tangente a la curva en x_1 cruza con el eje x.



$$x_{k+1} = x_k - \frac{p(x_k)}{p'(x_k)}$$

Donde
x_k es el valor inicial
$p(x_k)$ es el polinomio evaluado en x_k
$p'(x_k)$ es la derivada del polinomio evaluado en x_k

- Ejemplo.- Considérese la ecuación polinomial.

$$p(x) = x^3 - 3x - 5 = 0$$

Para encontrar una de las raíces, conviene primero determinar el valor inicial, para ello podemos basarnos en encontrar un intervalo en donde la función cambia de signo, por ejemplo consideremos la evolución de *p(x)* en *x=0* y en *x=3*.

$p(x)$	x
-5	0
13	3

- Por lo que existe una raíz entre 0 y 3, tomando como valor inicial $x_0=3$ y aplicando el algoritmo newton-Raphson, para resolver el problema usamos 4 cifras significativas y un error de para considerar que un valor es raíz.
- La derivada de *p(x)* es.-

$$p'(x) = 3x^2 - 3$$

- Así tomando el valor inicial, encontramos una mejor aproximación a la raíz.

$$x_1 = x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)} = 3 - \frac{13}{24} = 2.458$$

$$x_2 = x_1 - \frac{p(x_1)}{p'(x_1)} = 2.458 - \frac{p(2.458)}{p'(2.458)} = 2.458 - \frac{2.476}{15.125} = 2.294$$

$$x_3 = x_2 - \frac{p(x_2)}{p'(x_2)} = 2.294 - \frac{p(2.294)}{p'(2.294)} = 2.294 - \frac{0.190}{12.787} = 2.292$$

$$x_4 = x_3 - \frac{p(x_3)}{p'(x_3)} = 2.292 - \frac{p(2.292)}{p'(2.292)} = 2.292 - \frac{0.164}{12.759} = 2.279$$

$$x_5 = x_4 - \frac{p(x_4)}{p'(x_4)} = 2.279 - \frac{p(2.279)}{p'(2.279)} = 2.279 - \frac{-0.00023}{12.581} = 2.27901$$

- Una vez que se ha determinado una raíz dado que el polinomio es de orden 3 podemos aplicar el teorema del residuo con este valor y usar el polinomio reducido para determinar las otras dos raíces

$$\begin{array}{r|rrrr} \underline{2.279} & 1 & 0 & -3 & -5 \\ & & 2.279 & 5.193 & 4.999 \\ \hline & 1 & 2.279 & 2.193 & 0.001 \end{array}$$

Así el polinomio reducido es.-

$$q(x) = x^2 + 2.279x + 2.913 = \left(x - (-1.1395 + 0.945i)\right)\left(x - (-1.1395 - 0.945i)\right)$$

Finalmente las raíces del polinomio son.-

$$\begin{aligned} x_1 &= 2.279 \\ x_2 &= -1.139 + 0.945i \\ x_3 &= -1.139 - 0.945i \end{aligned}$$

REFERENCIAS

[1] Algebra Superior

Louis Leithold

Ed. Noriega

[2] Algebra Elemental

Gordon Fuller

Ed. CECSA

[3] Algebra con Aplicaciones Técnicas

C. E. Goodson

S. L. Miertschin

Ed. Limusa

[4] Precálculo

R. Larson

R. Hostetler

Ed. Reverté

[5] Álgebra

J. Kaufmann

K. Schwitters

Ed. CENAGE LEARNING

ALGEBRA SUPERIOR

CAPÍTULO 4

Fracciones Parciales

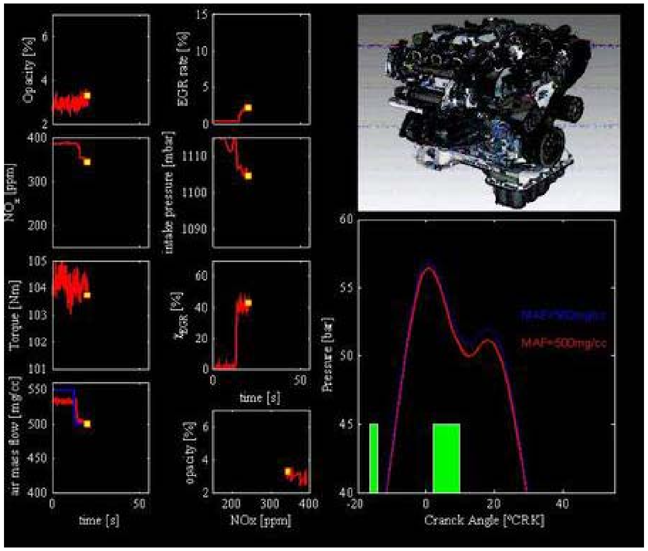
Para que sirven?

- Las fracciones parciales son útiles para analizar el comportamiento de una función racional. Por ejemplo, se pueden analizar las temperaturas de gases de emisión de un motor diesel empleando fracciones parciales.

- Termodinámica.- La magnitud del rango, R, de las temperaturas de los gases de combustión (en grados Fahrenheit) en un motor diesel experimental se aproxima mediante el modelo.

$$R = \frac{2000(4-3x)}{(11-7x)(7-4x)}, \quad 0 \le x \le 1$$

Donde x es la carga relativa en lb-ft.



Funciones Racionales, Definición y Clasificación

- Una función racional se define como aquella que se puede expresar como la razón de dos polinomios de la forma $P(x)/Q(x)$, donde $P(x)$ es un polinomio de grado m y $Q(x)$ de grado n.

- Si el grado del polinomio del numerador es menor al grado del polinomio del denominador, la fracción es llamada fracción propia. De otra manera, la fracción es llamada fracción impropia.

Es decir.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

Es fracción impropia si m n, y es propia si ocurre que m<n.

- Ejemplo.-

$$\frac{2x^3 - 5x^2 - 3x + 10}{x^2 - 2x + 4} = 2x - 1 + \overbrace{\frac{-13x + 14}{x^2 - 2x + 4}}^{fraccion\_propia}$$

- Siempre que se tenga una fracción propia deberá realizarse la división de polinomios y trabajar con la fracción propia resultante para proponer su expansión en fracciones parciales.

Teorema sobre la descomposición de una función racional en fracciones simples

- **Teorema de expansión en fracciones parciales**

I.- Por cada factor lineal $ax+b$ del denominador habrá una fracción parcial.

$$\frac{A}{ax+b}$$

donde .- A es una constante

II.- Por cada factor lineal repetido $(ax+b)^k$ del denominador habrá *k* fracciones parciales.

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(ax+b)^k}$$

donde: A_1, A_2, ...,A_k son constantes.

III.- Si $ax^2 + bx + c$ es un factor del denominador, que no es producto de dos factores lineales, entonces correspondiendo a este factor cuadrático habrá una fracción parcial.

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

Donde : A y B son constantes.

IV.- Si $ax^2 + bx + c$ es un factor del denominador, que no es producto de dos factores lineales, entonces correspondiendo al factor repetido del factor del denominador habrá *K* fracciones parciales.

$$\frac{A_1 x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2 x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_K x + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

Donde: A_1, B_1, $A_2, B_2, \ldots, A_k, B_k$. son constantes no nulas con A_k y B_k no simultáneamente nulos.

Métodos para calcular las constantes

Para calcular las constantes existen varios métodos entre ellos podemos citar:

* Sustitución
* Igualación de Coeficientes

Método de sustitución

- **Caso I: Factores Lineales no repetidos**

 Para ejemplificar este caso tomemos las siguiente fracción propia

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2 + 23x - 18}{(x-1)(x+2)(2x-1)} = \frac{x^2 + 23x - 18}{(x^2 + x - 2)(2x-1)}$$

De acuerdo con el apartado I del Teorema.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2 + 23x - 18}{\left(x^2 + x - 2\right)\left(2x-1\right)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{2x-1}$$

- Multiplicando por Q(x) a ambos miembros de la ec.

$$x^2 + 23x - 18 = A(x-2)(2x-1) + B(x-1)(2x-1) + C(x-1)(x+2)$$

Para resolver el cálculo de las constantes, emplearemos el método de sustitución, el cual consiste en sustituir en la ec. los valores de x que permitan calcular una constante a la vez.

- Evaluando en x=1 para calcular A.

$$(1)^2+23(1)-18=A(1+2)(2(1)-1)+B(1-1)(2(1)-1)+C(1-1)(1+2)$$

$$1+23-18=A(3)(1)=3A$$

$$A=\frac{6}{3}=2$$

- Evaluando para B en x=-2.

$$(-1)^2+23(-2)-18=A(-2+2)(2(-2)-1)+B(-2-1)(2(-2)-1)+C(-2-1)(-2+2)$$

$$4-46-18=B(-3)(-5)$$

$$B=\frac{-60}{15}=-4$$

- Para calcular C evaluamos en x= ½

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 23\left(\frac{1}{2}\right) - 18 = A\left(\frac{1}{2}+2\right)\left(2\left(\frac{1}{2}\right)-1\right) + B\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(2\left(\frac{1}{2}\right)-1\right) + C\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)$$

$$\frac{1}{4} + \frac{23}{2} - 18 = -\frac{C}{2}\frac{5}{2}$$

$$\frac{1+46-72}{4} = -\frac{5C}{4}$$

$$C = -\frac{25}{-5}$$

$$C = 5$$

- Por lo tanto

$$\frac{x^2+23x-18}{(x-1)(x+2)(2x-1)}=\frac{2}{x-1}-\frac{4}{x+2}+\frac{5}{2x-1}$$

Solución por igualación de coeficientes.

Podemos calcular las constantes A,B y C en la Ec. usando el hecho de que los coeficientes de potencias iguales de x en los dos miembros de la ecuación son iguales.

$$x^2+23x-18=A(x+2)(2x-1)+B(x-1)(2x-1)+C(x-1)(x+2)$$
$$=A(2x^2-x+4x-2)+B(2x^2-x-2x+1)+C(x^2+2x-x-2)$$
$$=x^2(2A+2B+C)+x(3A-3B+C)+(-2A+B-C)$$

por igualación de coeficientes, obtenemos:

$$1=2A+2B+C$$
$$23=3A-3B+C$$
$$-18=-2A+B-2C$$

- Resolviendo este sistema de ecuaciones

$$C = 5$$

$$B = -4$$

$$A = 2$$

Caso II Factores Lineales Repetidos

- Ejercicio.- Resolver $\frac{4x^2-13x}{(x+3)(x-2)^2}$ en fracciones parciales.

  proponiendo la expansión en fracciones parciales.

$$\frac{4x^2-13x}{(x+3)(x-2)^2}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{\left(x-2\right)^2}$$

Eliminado el denominador, tenemos:

$$4x^2-13x=A(x-2)^2+B(x+3)(x-2)+C(x+3)$$

Encontramos primeramente A y C evaluando en x=-3 y x=2

Para A evaluamos en x=-3

$$4(-3)^2 - 13(-3) = A(-3-2)^2 + B(0) + C(0)$$

$$36 + 39 = 25A$$

$$A = \frac{75}{25} = 3$$

mientras que para C usamos x=2, así

$$4(2)^2 - 13(2) = A(0) + B(0) + C(2+3$$

$$16 - 26 = 5C$$

$$C = \frac{-10}{5} = -2$$

- Para calcular B se formar una ecuación asignado a x cualquier valor arbitrario que no sea raíz de Q(x).
- El valor más sencillo de asignar es x=0.

$$4(0)^2 - 13(0) = A(-2)^2 + B(3)(-2) + C(3)$$

$$0 = 4A - 6B + 3C$$

- sustituyendo el valor de A y C.

$$6B = 4(3) + 3(-2)$$

$$6B = 12 - 6$$

$$B = \frac{6}{6} = 1$$

Por lo tanto

$$\frac{4x^2 - 13x}{(x+3)(x-2)^2} = \frac{3}{x+3} + \frac{1}{x-2} - \frac{2}{(x-2)^2}$$

Caso III: Factores Cuadráticos Distintos

- Ejemplo.- Resolver la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3 - 25x^2 + 21x - 45}{(x-3)(x+2)(2x^2 - x + 3)}$

Lo primero que podemos verificar es que el factor cuadrático que aparece en Q(x) tiene raíces imaginarias, pues el radical $\sqrt{b^2 - 4ac} < 0$.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3 - 25x^2 + 21x - 45}{(x-3)(x+2)(2x^2 - x + 3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx + D}{2x^2 - x + 3}$$

$$x^3 - 25x^2 + 21x - 45 = A(x+2)(2x^2 - x + 3) + B(x-3)(2x^2 - x + 3) + (Cx + D)(x-3)(x+2)$$

Para determinar A, B, C y D vamos a combinar el método de sustitución con el método de igualación de coeficientes.

Para encontrar A y B evaluamos en x=3 y x=-2.

Para x=3

$$(3)^3 - 25(3)^2 + 21(3) - 45 = A(3+2)(2(3)^2 - 3 + 3) + B(0) + C(0)$$

$$27 - 225 + 63 - 45 = 5A(18)$$

$$-180 = 90A$$

$$A = \frac{-180}{90} = -2$$

- Para x=-2

$$\left(-2\right)^3 - 25(-2)^2 + 21(-2) - 45 = A(0) + B(-2-3)(2(-2)^2 - 2(-2) + 3) + C(0)$$

$$-8 - 100 - 42 - 45 = -5B(8+2+3)$$

$$-195 = -65B$$

$$B = \frac{195}{65} = 3$$

- Para obtener D evaluamos en x=0

$$-45 = A(0+2)(2(0)^3 - 0 + 3) + B(0-3)(2(0)^2 - 0 + 3)$$

$$-45 = 6A - 9B - 6D$$

- Como A=-2 y B=3

$$-45 = 6(-2) - 9(3) - 6D$$

$$6D = -12 - 27 + 45$$

$$D = \frac{-39+45}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

- Por igualación de coeficientes obtenemos el valor de C.

$$x^3 - 25x^2 + 21x - 45 = A(2x^3 - x^2 + 3x + 4x^2 - 2x + 6) + B(2x^3 - x^2 + 3x - 6x^2 + 3x - 9)$$

$$+ (Cx^2 - 3cx + Dx - 3D)(x + 2)$$

$$= A(2x^3 + 3x^2 + x + 6) + B(2x^3 - 7x^2 + 6x - 9) + Cx^3 - 3Cx^2 + Dx^2 - 3Dx + 2Cx^2 - 6Cx + 2Dx - 6D$$

$$= x^3(2A + 2B + C) + x^2(3A - 7B - C + D) + x(A + 6B - 3D - 6C + 2D) - 6D + 6A - 9B$$

- igualando los coeficientes de x^3

$$1 = 2A + 2B + C$$
$$C = 1 - 2A - 2B$$
$$C = 1 - 2(-2) - 2(3)$$
$$C = 1 + 4 - 6 = -1$$

- Por lo tanto

$$\frac{x^3 - 25x^2 + 21x - 45}{(x-3)(x+2)(2x^2 - 2 + 3)} = \frac{-2}{x-3} + \frac{3}{x+2} + \frac{1-x}{2x^2 - x + 3}$$

Caso IV: Factores Cuadráticos Repetidos.

Ejemplo.- Considere la siguiente fracción propia.

$$\frac{x^3+4x^2+5x+3}{(x+1)(x^2+x+1)^2}$$

Expresando en fracciones parciales más simples

$$\frac{x^3+4x^2+5x+3}{(x+1)(x^2+x+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{(x^2+x+1)}+\frac{Dx+E}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

de aquí tenemos

$$x^3+4x^2+5x+3=A(x^2+x+1)^2+(Bx+C)(x+1)(x^2+x+1)+(Dx+E)(x+1)$$

- En este caso, es posible calcular el valor de A por la presencia del factor lineal distinto, para ello empleamos el método de sustitución.
- Valuando en x=-1

$$(-1)^3 + 4(-1) + 5(-1) + 3 = A((-1)^2 + (-1) + 1)^2 + 0 + 0$$

$$-1 + 4 - 5 + 3 = A(1 - 1 + 1)^2$$

$$A = 1$$

- Por igualación de coeficientes obtenemos los valores de B, C, D y E.

$$x^3+4x^2+5x+3=A(x^4+2x^3+3x^3+2x+1)+(Bx^2+Bx+Cx+C)(x^2+x+1)+(Dx^2+Dx+Ex+E)$$

$$x^3+4x^2+5x+3=A(x^4+2x^3+3x^2+2x+1)+Bx^4+Bx^3+Bx^2+Bx^3+Bx^2+Bx$$

$$+Cx^3+Cx^2+Cx+C+Dx^2+Dx+Ex+E$$

$$=x^4(A+B)+x^3(2A+B+B+C)+x^2(3A+B+B+C+C+D)+x(2A+B+C+C+D+E)+(A+C+E)$$

- Igualando coeficientes

$$
\begin{aligned}
&A + B = 0 \\
&2A + 2B + C = 1 \\
&3A + 2B + 2C + D = 4 \\
&A + C + E = 3 \\
&2A + B + 2C + D + E = 5
\end{aligned}
$$

Como A=1

De la primera ecuación tenemos:

B=-A=1

de la segunda

C=1-2A-2B

C=1-2(1)-2(-1)

C=1

de la cuarta

E=3-A-C

E=3-1-1

E=1

de la tercera

- D=4-3A-2B-2C
- D=4-3(1)-2(-1)-2(1)
- D=4-3+2-2
- D=1

La última ecuación nos sirve para verificar resultados.

2A+B+2C+D+E=5

2(1)-1+2(1)+1+1=5

5=5

Por lo tanto

$$\frac{x^3+4x^2+5x+3}{(x+1)(x^2+x+1)^2}=\frac{1}{x+1}+\frac{-x+1}{x^2+x+1}+\frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}$$

REFERENCIAS

[1] Algebra Elemental
Gordon Fuller
Ed. CECSA
[2] Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica
Walter Fleming
Prentice Hall
1991
[3] Precálculo
Michael Sullivan
Cuarta edición
1997
[4] Algebra
Max A. Sobel
Segunda Edición
Prentice Hall

[5] Señales y sistemas
Alan V. Oppenheim
Alan S. Willsky
Ed. Prentice Hall 1983
[6] Precálculo
R. Larson
R. Hostetler
Ed. Reverté
[7] Álgebra
J. Kaufmann
K. Schwitters
Ed. CENAGE LEARNING

ALGEBRA SUPERIOR

CAPÍTULO 5

Sistemas de Ecuaciones Lineales, Matrices y Determinantes

M.I. ISIDRO IGNACIO
LÁZARO CASTILLO

Para que sirven ?

- Los sistemas de ecuaciones se pueden emplear para modelar y resolver problemas de la vida real.

- Los sistemas de ecuaciones se pueden emplear para determinar las combinaciones de jugadas para distintos deportes como el fútbol americano.

Aplicación en Deportes

- En el super tazón I, disputado el 15 de Enero de 1967, los empacadores de green bay derrotaron a los jefes de Kansas City por un marcador de 35 a 10. El total de puntos anotados fueron producto de 13 jugadas de puntuaciones distintas, una combinación de anotaciones, puntos extra y goles de campo. Se consiguieron el mismo número de anotaciones y puntos extra. Hubo seis veces más anotaciones que goles de campo. Cuantos puntos de cada forma se anotaron en el juego?

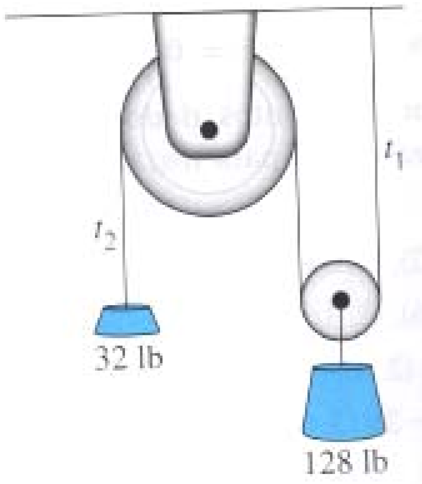
Aplicaciones en Física

- Un sistema de poleas esta cargado con pesas de 128 kg y 32kg. Las tensiones t1 y t2 en la soga y la aceleración a del peso de 32kg se determinan por medio del sistema e ecuaciones:

$$t_1 - 2t_2 = 0$$

$$t_1 - 2a = 128$$

$$t_2 + a = 32$$

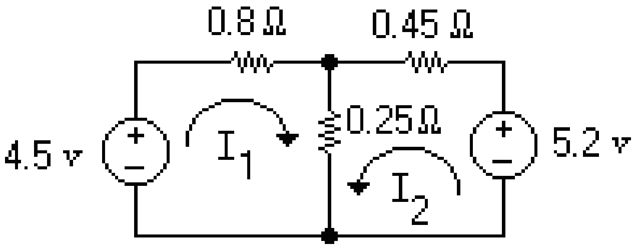


En la Ingeniería

- Ejemplo.- La ley de Kirchhoff establece que en cualquier red de un circuito, la suma algebraica de las elevaciones y caídas de voltaje debe ser igual a cero.

$$1.05I_1 + 0.25I_2 = 4.5 \qquad (1)$$

$$0.25I_1 + 0.7I_2 = 5.2 \qquad (2)$$



Definición de una Ecuación Lineal

- **Una ecuación lineal es una igualdad entre dos expresiones; Esas expresiones se llaman miembros de la ecuación, si el grado o exponente de la variable es uno se llama ecuación lineal.**

$$x - 3 = 4 \quad \textit{Ecuación} \quad \textit{lineal}$$

$$x^2 + 2x - 1 = 0 \quad \textit{Ecuación} \quad \textit{no} \quad \textit{lineal}$$

Donde x es la variable independiente o incógnita de la ecuación

Una ecuación con *n* variables es lineal si es equivalente a una de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde.-

$a_1, a_2, ..., a_n$ son constantes

$x_1, x_2, ..., x_n$ son variables

b término independiente

Los números que al sustituir a las variables hacen iguales a los dos miembros de la ecuación se dice que satisfacen o son solución de la ecuación.

Definición de Sistemas de Ecuaciones Lineales

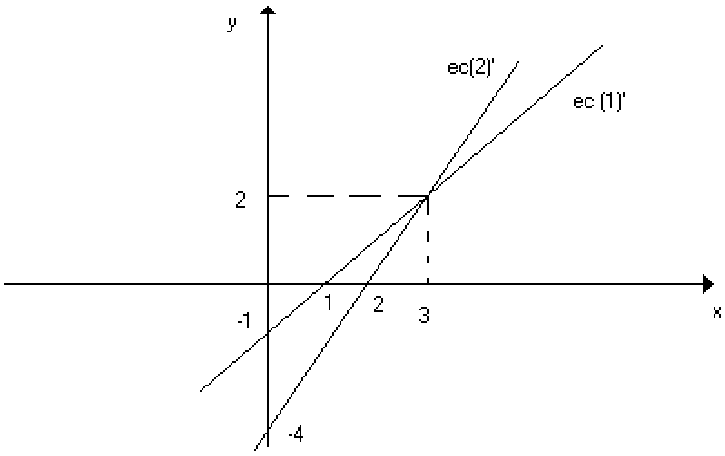
- Un sistema de ecuaciones es una colección de dos o más ecuaciones lineales, cada una de las cuales contiene una o más variables.
-
- Una solución de un sistema de ecuaciones consta de valores para las variables, para los cuales cada ecuación del sistema se satisface.

Interpretación Gráfica para Sistemas de dos Variables

- Ejemplo 1.- Caso 1: Las rectas se cortan o intersectan en un solo punto.

1) $x - y = 1$

2) $2x - y = 4$

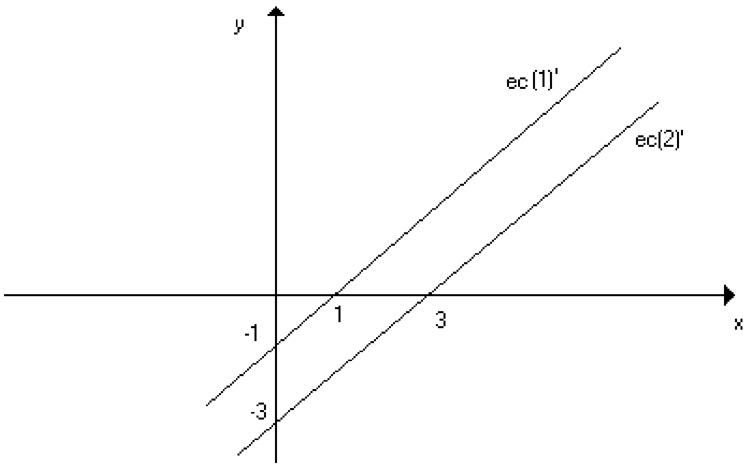


Ejemplo.- Caso 2 Las rectas no se cortan, rectas paralelas.

Consideremos una modificación al sistema de ecs. Anterior.

$x\text{-}y = 1 \qquad (1)$

$x\text{-}y = 3 \qquad (2)$



Ejemplo.- Caso 3 las rectas son idénticas.

Consideremos ahora el siguiente sistema de ecuaciones.

x-$y = 1$ (1)

$2x$-$2y = 2$ (2)

- Note que se trata de rectas son idénticas porque $m_1 = m_2$ y además $b_1 = b_2$.

Clasificación de la Solución.

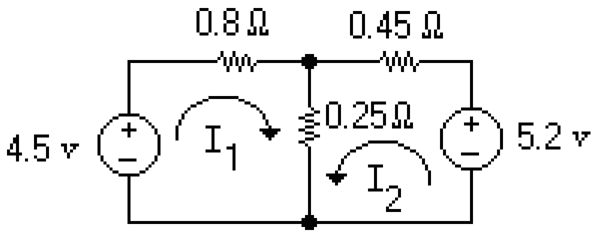
Caso	Tipo de solución	Interpretación
Sistema de ecs. Consistente e independiente	Solución única	Si n=2 las rectas se cortan
Sistema de ecs. Inconsitente	No existe solución	Si n=2 las rectas son paralelas
Sistema de ecs. Dependiente	Existe una infinidad de soluciones	Si n=2 *las rectas son coincidentes*

Solución de Sistemas de Ecuaciones por Métodos Algebraicos

-Eliminación por Sumas y restas.- En este método se elige la variable más fácil de eliminar y mediante una suma o resta de amabas ecuaciones, se resuelve para la incógnita que queda..

-Eliminación por sustitución.- En este se despeja una variable de una ecuación y se sustituye en la otra, finalmente se resuelve está última.

- Ejemplo.- La ley de Kirchhoff establece que en cualquier red de un circuito, la suma algebraica de las elevaciones y caídas de voltaje debe ser igual a cero.



El siguiente sistema de ecuaciones resulta de la aplicación de dicha ley al circuito eléctrico de la figura.

$$1.05I_1 + 0.25I_2 = 4.5 \qquad (1)$$

$$0.25I_1 + 0.7I_2 = 5.2 \qquad (2)$$

Resolviendo por sumas y restas, multiplicamos la ecuación (1) por 0.25 y la (2) por 1.05, así:

$$0.2625I_1+0.0625I_2 = 1.125 \qquad (1)'$$

$$-\quad \underline{0.2625I_1+0.735I_2 = 5.46} \qquad (2)'$$

$$-\ 6725I_2 = -4.335$$

$$I_2 = \frac{4.335}{0.6725} = 6.44 \quad Amp$$

Para eliminar I_2 multiplicamos la ec. (1) por 0.7 y la (2) por 0.25, así tenemos:

$$0.735I_1+0.175I_2 = 3.15 \qquad (1)'$$

$$- \quad \underline{0.0625I_1+0175I_2 \ = 1.3} \qquad (2)'$$

$$0.6725I_1 \qquad = \ 1.85$$

por lo tanto

$$I_1 = \frac{1.85}{0.6725} = 2.75 \quad Amp$$

Al resolver un sistema de ecuaciones por métodos algebraicos podemos tener los siguientes casos:

1.- Una solución única.

2.- Ninguna solución.- Ocurre cuando obtenemos una proposición falsa, tal y como: 0 =7, 0= a donde a 0.

3.- Soluciones infinitas: Ocurre cuando llegamos a una proposición verdadera sin incógnitas, 0 = 0.

Definición de una Matriz.

- Una matriz *A* es un arreglo o disposición rectangular de números.

$$A=\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}_{n\times m}}_{colmunas} \leftarrow renglones$$

Definiciones y Tipos de Matrices.

- Una matriz se denomina cuadrada si su número de renglones es igual a su número de columnas, es decir si $m=n$. Se dice que una matriz es de orden n.
- En una matriz cuadrada se dice que las componentes $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ están en la diagonal principal de A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

- Una matriz a menudo se llama vector venglón *m*-dimensional (o simplemente vector renglón o matriz renglón).

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 107 \end{bmatrix}_{1\times 2} \qquad D = \begin{bmatrix} 2-2i & \sqrt{3} & 4 \end{bmatrix}_{1\times 3}$$

- Una matriz se llama vector columna *m-dimensional* (o simplemente vector columna o matriz columna).

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{2\times 1} \qquad Y = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

- La matriz denotada como , cuyos componentes son todos cero, se llama matriz nula o matriz cero.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Representación Matricial de los Sistemas de Ecuaciones

- Como se mostró anteriormente los procedimientos algebraicos pueden ser tediosos y complicados, en especial cuando se aplican a sistemas lineales más grandes. A continuación se muestra otro método más eficientes, que fácilmente se aplica a sistemas mayores.

- Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$x + 4y = 14$$
$$3x - 2y = 0$$

- si optamos por no escribir los símbolos utilizados para las variables.

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{ccc} \overbrace{\ }^{x} & \overbrace{\ }^{y} & \overbrace{\ }^{constantes} \end{array} \\ \begin{array}{l} renglón \quad 1 \\ renglón \quad 2 \end{array} & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 14 \\ 3 & -2 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Los corchetes se utilizan para denotar una matriz.

Una matriz es un arreglo rectangular de números, cuya estructura general es.-

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \overbrace{\text{columna } 1} & & & & & \overbrace{\text{columna } m} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{renglón } 1 \\ \text{renglón } 2 \\ \vdots \\ \text{renglón } i \\ \vdots \\ \text{renglón } n \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & a_{im} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}_{n\times m} \end{array}$$

Cada número a_{ij} de la matriz tiene dos índices: índices de renglón i e índice de columna j. La matriz tiene *n* renglones y *m* columnas.

Ejemplo.- Escribir la matriz aumentada de cada sistema de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + z = 1 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

escribiendo la matriz aumentada.

a) $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & -6 \\ 2 & -3 & -5 \end{array}\right]$ b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \end{array}\right]$

Operaciones Elementales

Las operaciones elementales realizadas en la matriz aumentada son operaciones elementales por renglón. De estas existen tres básicas.

1.- Intercambio de dos renglones cualesquiera.

2.- Reemplazo de un renglón por un múltiplo distinto de ese renglón.

3.- Reemplazo de un renglón por la suma de ese renglón y un múltiplo constante de algún otro renglón.

Ejemplo.- Resolver el sistema de ecuaciones.

$$4x + 3y = 11$$
$$x - 3y = -1$$

escribiendo el sistema utilizando notación matricial

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 11 \\ 1 & -3 & -1 \end{array}\right]$$

intercambiando renglones

$$\begin{array}{c} \times -4 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ 4 & 3 & 11 \end{array}\right]$$

- Realizando operaciones

$$R1+R2\left[\begin{array}{cc|c}-4 & 12 & 4\\ 4 & 3 & 11\end{array}\right]\times\frac{-1}{4}\ \sim\ \times\frac{1}{15}\left[\begin{array}{cc|c}1 & -3 & -1\\ 4 & 3 & 11\end{array}\right]$$

$$\sim\ \times\frac{1}{15}\left[\begin{array}{cc|c}1 & -3 & -1\\ 4 & 3 & 11\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}1 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right]$$

así

$$(1) \quad x - 3y = -1$$

$$(2) \quad y = 1$$

sustituyendo (2) en (1)

$$x - 3(1) = -1$$

$$x = -1 + 3$$

$$x = 2$$

Eliminación Gaussina

- Este método se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones de orden superior mediante una transformación algebraica del sistema de la forma:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x + b_{12}y + c_{13}z &= d_1 \\
a_{21}x + b_{22}y + c_{23}z &= d_2 \\
a_{31}x + b_{32}y + c_{33}z &= d_3
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
x_1 + k_1 y + k_2 z &= p_1 \\
y + k_3 z &= p_2 \\
z &= p_3
\end{aligned}
$$

Ejemplo.- Resolver el sistema de ecuaciones siguiente.

$$x - y + z = 8$$

$$2x + 3y - z = -2$$

$$3x - 2y - 9z = 9$$

Paso 1.- La matriz aumentada es.-

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 8 \\ 2 & 3 & -1 & \vdots & -2 \\ 3 & -2 & -9 & \vdots & 9 \end{bmatrix}$$

Paso 2.- En este caso el elemento (1,1) ya es uno.

Paso 3.- Hacemos cero los elementos (2,1) y (3,1), utilizando el primer renglón mediante las operaciones: $R_2=-2r_1+r_2$ y $R_3=-3r_1+r_3$

$$\begin{array}{c} \times -2 \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 8 \\ 2 & 3 & -1 & \vdots & -2 \\ 3 & -2 & -9 & \vdots & 9 \end{bmatrix} R1-R2 \sim \begin{array}{c} \times -\frac{1}{2} \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & \vdots & 16 \\ 0 & 5 & -3 & \vdots & -18 \\ 3 & -2 & -9 & \vdots & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \times -3 \\ \\ R1-R3 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 5 & -3 & \vdots & -18 \\ 3 & -2 & -9 & \vdots & 9 \end{bmatrix}^{\times \frac{-1}{3}} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 5 & -3 & \vdots & -18 \\ 0 & 1 & -12 & \vdots & -15 \end{bmatrix}$$

Paso 4.- Hacemos 1 el elemento (2,2)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 5 & -3 & \vdots & -18 \\ 3 & -2 & -9 & \vdots & 9 \end{bmatrix}$$

realizamos un intercambio del renglón 2 por 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 1 & -12 & \vdots & -15 \\ 0 & 5 & -3 & \vdots & -18 \end{bmatrix}$$

- Ahora hacemos cero los elementos situados debajo del elemento (2,2), es decir, el (2,3) usando para ello el renglón 2 mediante la operación $R_3=-5r_2+r_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 1 & -12 & \vdots & -15 \\ 0 & 5 & -3 & \vdots & -18 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 1 & -12 & \vdots & -15 \\ 0 & 0 & 57 & \vdots & 57 \end{bmatrix}$$

Paso 5.- Hacer igual a 1 el elemento (3,3), multiplicando por el tercer renglón.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \times\dfrac{1}{57} \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 1 & -12 & \vdots & -15 \\ 0 & 0 & 57 & \vdots & 57 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 1 & -12 & \vdots & -15 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

Por último el sistema de ecs. que representa la matriz escalonada es.-

$$\begin{aligned} x - y + z &= 8 \quad (a) \\ y - 12z &= -15 \quad (b) \\ z &= 1 \quad (c) \end{aligned}$$

de donde $z = 1$

de (b) $y = -15 + 12z = -15 + 12 = -3$

de (a) $x = 8 + y - z = 8 - 3 - 1 = 4$

así, el conjunto solución es.-

$$x = 4$$
$$y = -3$$
$$z = 1$$

Método de Gauss-Jordan

- Es posible extender el método de eliminación de modo que las ecuaciones reduzcan a una forma en que la matriz del coeficientes del sistema sea diagonal y ya no se requiera la sustitución regresiva. Los pivotes se eligen como en el método de eliminación gaussiana; pero a diferencia de este, en la eliminación gauss-jordan deben eliminarse los elementos arriba y abajo del pivote.

Ejemplo.- Resolver el siguiente sistema utilizando el método de Gauss-Jordan.

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \qquad (1)$$

$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \qquad (2)$$

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \qquad (3)$$

formando la matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & \vdots & 18 \\ 4 & 5 & 6 & \vdots & 24 \\ 3 & 1 & -2 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$$

Paso 1.- hacer uno el elemento pivote (1,1).

$$\times\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & \vdots & 18 \\ 4 & 5 & 6 & \vdots & 24 \\ 3 & 1 & -2 & \vdots & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 9 \\ 4 & 5 & 6 & \vdots & 24 \\ 3 & 1 & -2 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$$

- paso 2.- Hacer cero todos los que están debajo del elemento pivote.

$$\times -4\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \sim R1+R2 \begin{bmatrix} -4 & -8 & -12 & \vdots & -36 \\ 4 & 5 & 6 & \vdots & 24 \\ 3 & 1 & -2 & \vdots & 4 \end{bmatrix} \times \frac{-1}{4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 9 \\ 0 & -3 & -6 & \vdots & -12 \\ 3 & 1 & -2 & \vdots & 4 \end{bmatrix} \sim \times -3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 9 \\ 0 & -3 & -6 & \vdots & -12 \\ 3 & 1 & -2 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R1+R3}{\sim} \begin{bmatrix} -3 & -6 & -9 & -27 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \times \frac{-1}{3} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 9 \\ 0 & -3 & -6 & \vdots & -12 \\ 0 & -5 & -11 & \vdots & -23 \end{bmatrix}$$

paso 3.- Hacer uno el elemento (2,2) y posteriormente usando este elemento pivote cero los que están arriba y debajo de este.

$$\times\frac{-1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 9 \\ 0 & -3 & -6 & \vdots & -12 \\ 0 & -5 & -11 & \vdots & -23 \end{bmatrix} \sim \times 5\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 9 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 4 \\ 0 & -5 & -11 & \vdots & -23 \end{bmatrix}$$

$$R2+R3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 9 \\ 0 & 5 & 10 & \vdots & 20 \\ 0 & -5 & -11 & \vdots & -23 \end{bmatrix} \times\frac{1}{5} \sim \times 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 9 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & -3 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{array}{c}R2-R1\\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 2 & 3 & 9\\ 0 & 2 & 4 & 8\\ 0 & 0 & -1 & -3\end{array}\right]\begin{array}{c}\\ \times\frac{1}{2}\\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc:c}-1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & -1 & -3\end{array}\right]
$$

Paso 4.-

$$
\begin{array}{c}\times -1\\ \\ \times -2\end{array}\left[\begin{array}{cccc}-1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right] \sim \begin{array}{c}\\ R3+R2\\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & -2 & -6\end{array}\right]\begin{array}{c}\\ \\ \times\frac{-1}{2}\end{array}
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{cccc}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right] \sim \begin{array}{c}R3+R1\\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right]\begin{array}{c}\\ \\ \times -1\end{array}
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right]
$$

- así la solución es.-

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = -2$$

$$x_3 = 3$$

Operaciones entre Matrices

Igualdad entre Matrices.

Se dice que dos matrices y son iguales si son del mismo tamaño (esto es mismo orden) y sus componentes correspondientes son iguales.

Suma

Sean A y B dos matrices del mismo orden, la suma de las dos matrices es la matriz .

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{m1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix}$$

Teorema.- Sean *A*, *B*, y *C* matrices del mismo orden. Sea O la matriz nula , entonces.-

a) *A+0=A* (Identidad aditiva)

b) *A+B=B+A* (Conmutatividad de la adición)

c) *A+(B+C)=(A+B)+C* (Asociatividad de la adición)

Resta

La resta entre matrices se puede definir usando la negativa de una matriz, esta se define como una matriz de la orden $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$, representada por medio de *–A,* que se define de la forma:

$$-A = \left[-a_{ij} \right]$$

En otras palabras, la negativa de una matriz se forma reemplazando cada elemento de *A* por su inverso aditivo. Por eso, como:

$$a_{ij} + (-a_{ij}) = 0$$

Multiplicación de una Matriz por un escalar

El producto de una matriz por un escalar, e una matriz en la que cada elemento está multiplicado por el escalar, es decir, para una matriz *A* y un escalar *K*, tenemos

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1m} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

Multiplicación de Matrices

- Si *A* es una matriz de orden y *B* es una matriz de orden . Entonces el producto de *A* por *B*, denotado como , (que se lee "*A* posmultiplicada por *B*" o "*B* premultiplicada por *A*"), es la matriz para la cual el elemento del renglón *i* y la columna *j* es la suma de los productos formados al multiplicar a cada elemento del renglón *i* de *A* por el correspondiente elemento de la columna *j* de *B.*

- Para ejemplificar este procedimiento consideremos las matrices *A* y *B*, calculando el producto A*B.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{bmatrix}$$

Ejemplo.- Sean las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Encontrar $A \cdot B$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(3)+(-3)(-2) & 2(0)+(-3)(-2) & 2(-4)+(-3)(-1) \\ 4(3)+(-1)(-2) & 4(0)+(-1)(2) & (4)(-4)+(-1)(-1) \\ 1(3)+(5)(-2) & 1(0)+(5)(2) & (1)(-4)+(5)(-1) \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 6+6 & -6 & -8+3 \\ 12+2 & -2 & -16+1 \\ 3-10 & 10 & -4-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -6 & -5 \\ 14 & -2 & -15 \\ -7 & 10 & -9 \end{bmatrix}$$

Matrices Especiales.

- Matriz diagonal

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Matriz Identidad

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Transpuesta de una Matriz

- Si se intercambian los renglones y columnas de una matriz *A* de orden , la matriz resultante es denominada transpuesta de la matriz *A* y se denota como A^t.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}_{n\times m} \qquad A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

Representación Matricial de un Sistema de Ecuaciones en la forma $Ax = B$

- Un sistema de ecuaciones lineales de la forma :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_n \end{aligned}$$

- puede escribirse usando un producto matricial como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

En forma compacta

$$A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{B}$$

donde

A – Es la matriz de coeficientes de orden

$\underset{\sim}{x}$ - Matriz columna de incógnitas de orden

$\underset{\sim}{B}$ - Matriz columna de términos independientes de orden

Matriz Inversa

- Sea *A* una matriz cuadrada de orden *n* e *I* la matriz identidad correspondiente. Si existe una matriz cuadrada A^{-1}, también de orden *n*, *tal que* $A \cdot A^{-1} = I$ y $A^{-1} A = I$, entonces A^{-1} se llama la inversa multiplicativa de *A* o inversa de *A*.

- Entonces para resolver un sistema de ecuaciones escrito de la forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

- En forma compacta $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{B}$

$$A^{-1}A\underset{\sim}{x} = A^{-1}\underset{\sim}{B}$$

$$I\underset{\sim}{x} = A^{-1}\underset{\sim}{B}$$

$$\underset{\sim}{x} = A^{-1}\underset{\sim}{B}$$

Obtención de la matriz inversa por operaciones elementales

- Para encontrar la inversa de la matriz se agrega una matriz identidad de dimensión adecuada al lado de la matriz original.

$$(A|I = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- Apliquemos este procedimiento a la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

- Para calcular A^{-1} tenemos:

$$\begin{array}{r} \times -3 \\ \times 5 \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{array}{r} \times -\frac{1}{3} \\ R1 + R2 \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} -15 & -6 & -3 & 0 \\ 15 & -5 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

$$
= \begin{array}{c} \\ \times \frac{2}{11} \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -3 & 5 \end{array}\right] = R2 + R1 \left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{-6}{11} & \frac{10}{11} \end{array}\right]
$$

$$
= \begin{array}{c} \times \frac{1}{5} \\ \times \frac{-1}{2} \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & \frac{5}{11} & \frac{10}{11} \\ 0 & -2 & \frac{-6}{11} & \frac{10}{11} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & 1 & \frac{3}{11} & \frac{-5}{11} \end{array}\right]
$$

- por lo tanto

$$
A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{-5}{11} \end{bmatrix}
$$

Solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales por medio de la Matriz inversa

- Ejemplo.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

$$x - 4y + 5z = -4$$

$$x + 3y + z = 6$$

$$2x - 3y + 2z = -6$$

- representando el sistema en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- calculando A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{matrix} R1 - R2 \\ \times \frac{-1}{2} \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = R1 + R3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} \times \frac{-1}{7} \\ \times \frac{2}{5} \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{-5}{2} & 4 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} \end{array}\right] = R2 + R3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{7} & \frac{-1}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{8}{5} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{-1}{5} \end{array}\right] \times 7$$

$$
\begin{array}{r} = \\ \times 9 \\ \times 35 \end{array}
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 7 & -4 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & \frac{36}{35} & \frac{9}{36} & \frac{1}{7} & \frac{-1}{5}
\end{array}\right]
= R3+R2
\begin{array}{r} \times 7 \\ \\ \\ \end{array}
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 63 & -36 & -9 & 9 & 0 \\
0 & 0 & 36 & 9 & 5 & -7
\end{array}\right]
$$

$$
\times \frac{4}{9}
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
7 & -28 & 35 & 7 & 0 & 0 \\
0 & 63 & 0 & 0 & 14 & -7 \\
0 & 0 & 36 & 9 & 5 & -7
\end{array}\right]
= R2+R1
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
7 & -28 & 35 & 7 & 0 & 0 \\
0 & 28 & 0 & 0 & \frac{56}{9} & -\frac{28}{9} \\
0 & 0 & 36 & 9 & 5 & -7
\end{array}\right]
\times \frac{1}{28}
$$

$$
\begin{array}{r} \times 9 \\ \\ \times 35 \end{array}
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
7 & 0 & 35 & 7 & \frac{56}{9} & -\frac{28}{9} \\
0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} \\
0 & 0 & 36 & 9 & 5 & -7
\end{array}\right]
=
\begin{array}{r} \times -4 \\ \\ \\ \end{array}
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
63 & 0 & 315 & 63 & 56 & -28 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\
0 & 0 & 1260 & 315 & 175 & -245
\end{array}\right]
$$

$$
= \xrightarrow{R3+R1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -252 & 0 & -1260 & -252 & -224 & 112 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1260 & 315 & 175 & -245 \end{array}\right]
$$

$$
= \frac{1}{1260} \times \left[\begin{array}{ccc|ccc} -252 & 0 & 0 & 63 & -49 & -133 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} \\ 0 & 0 & 1260 & 315 & 175 & -245 \end{array}\right] \begin{array}{l} \times \frac{-1}{252} \\ \times \frac{22}{28} \\ \\ \end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-63}{252} & \frac{49}{252} & \frac{133}{252} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{56}{252} & \frac{-28}{252} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{315}{1260} & \frac{175}{1260} & \frac{-245}{1260} \end{array}\right] \times \frac{1}{5} \; \frac{1}{5} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-63}{252} & \frac{49}{252} & \frac{133}{252} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{56}{252} & \frac{-28}{252} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{63}{252} & \frac{35}{252} & \frac{-49}{252} \end{array}\right]
$$

- Así

$$A^{-1} = \frac{1}{252}\begin{bmatrix} -63 & 49 & 133 \\ 0 & 56 & -28 \\ 63 & 35 & -49 \end{bmatrix} = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} -9 & 7 & 19 \\ 0 & 8 & -4 \\ 9 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

- entonces la solución del sistema dada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} -9 & 7 & 19 \\ 0 & 8 & -4 \\ 9 & 5 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} 36+42-114 \\ 48+24 \\ -36+30+42 \end{bmatrix} = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} -36 \\ 72 \\ 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Determinantes y Regla de Cramer

- La regla de Cramer es un método algebraico que permite la solución de sistemas de ecuaciones lineales de dos o tres incógnitas es por medio de determinantes.
- Defiendo la siguiente ordenación de cuatro números como un determinante de segundo orden.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \Delta$$

determinante de los coeficientes

De manera similar los términos restantes los podemos obtener de:

$$\begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix} = md - bn = \Delta_x$$

$$\begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix} = an - cm = \Delta_y$$

Por lo tanto para obtener la solución del sistema de ecuaciones hacemos:

$$ax + by = m$$
$$cx + dy = n$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

- De manera similar podemos demostrar que para un sistema de 3 ecuaciones de la forma:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

Cuya solución esta dada por.-

$$x = \frac{N_x}{\Delta} \qquad y = \frac{N_y}{\Delta} \qquad z = \frac{N_z}{\Delta}$$

Donde:

N_x - determinar del numerador para el valor de *x*

N_y - determinar del numerador para el valor de y

N_z - determinante del numerador para el valor de z

Δ - determinar de los coeficientes

$$\Delta = \begin{vmatrix} \overbrace{a_1}^{x} & \overbrace{b_1}^{y} & \overbrace{c_1}^{z} \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

- Para encontrar los determinantes N_x, N_y y N_z , se sustituye la columna de los coeficientes de la incógnita (*x*,*y* ó *z*) por la columna de los términos constantes.

$$N_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad N_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad N_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Cálculo de determinantes de orden superior

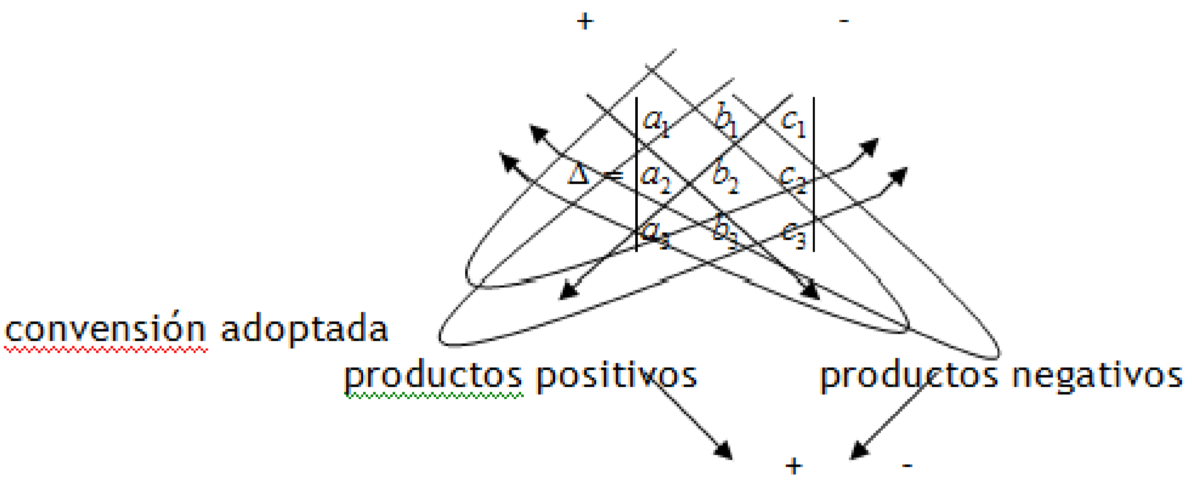
- Para encontrar el valor del determinante, se deben repetir las dos primeras columnas.

$$\begin{array}{cccccc} + & + & + & - & - & - \end{array}$$

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right.$$

$$\Delta = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3$$

- otro método para evaluar un determinante de tercer orden es el siguiente



- Desarrollo por renglón o columna para determinar un determinante de orden *n*.

Este método es general pues permite evaluar un determinante de orden *n*, el método consiste en reducir el determinante a uno de orden (*n-1*), y el lugar de calcular un determinante de orden *n* se calculan *n* determinantes de orden (*n-1*). Esto es para un determinante de orden 3 se requieren calcular 3 determinantes de orden 2. Este desarrollo puede ser por renglón o por columna.

- Para ejemplificar el método de desarrollo por columnas consideremos un determinante de orden 3.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

- Tabla de signos

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

i) Tachar la primera columna y el primer renglón

$$\Delta = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{array} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} +$$

i) ii) Tachar la segunda columna y el primer renglón

$$\Delta = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{array} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} +$$

iii) Continuar con este procedimiento hasta llegara a la última columna.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \overset{+}{a_1} & \overset{-}{b_1} & \overset{+}{c_1} \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

es decir

$$\Delta = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Método de Cofactores

- **Teorema**.- Suponga que A es la Matriz Cuadrada de orden *n*.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- y que A_{ij} es el cofactor del elemento a_{ij} el cual se calcula como:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

donde:

M_{ij} es el menor (el cual es un determinante de orden *n-1* obtenido al tachar el renglón *i* y la columna *j*).

Entonces si el Determinante $A \neq 0$, la inversa de *A* se puede calcular como:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^t$$

Para el caso de una matriz cuadrada de orden 2

- Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

- Entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ a_{-21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

- Ejemplo.- Calcular el determinante de la siguiente matriz compleja.

$$A = \begin{bmatrix} 1-i & i \\ 2i & 5 \end{bmatrix}$$

- usando cofactores para calculara la inversa de *A*, tenemos.-

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} 5 & -i \\ -2i & 1-i \end{bmatrix}$$

- donde:

$$\det A = 5(1-i) - (-i)(-2i)$$

$$\det A = 5 - 5i - 2i^2 = 5 + 2 - 5i = 7 - 5i$$

- Así

$$A^{-1} = \frac{1}{7-5i}\begin{bmatrix} 5 & -i \\ -2i & 1-i \end{bmatrix}$$

REFERENCIAS

[1] Algebra Elemental
Gordon Fuller
Ed. CECSA

[2] Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica
Walter Fleming
Prentice Hall
1991

[3] Precálculo
Michael Sullivan
Cuarta edición
1997

[4] Algebra
Max A. Sobel
Segunda Edición
Prentice Hall

[5] Señales y sistemas
Alan V. Oppenheim
Alan S. Willsky
Ed. Prentice Hall 1983
[6] Precálculo
R. Larson
R. Hostetler
Ed. Reverté
[7] Álgebra
J. Kaufmann
K. Schwitters
Ed. CENAGE LEARNING