Capítulo IV

ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS

4.1 INTRODUCCIÓN

Para el análisis de estructuras se consideran tres categorías amplias de estructuras de ingeniería.

1. *Armaduras*, las cuales están diseñadas para soportar cargas y por lo general son estructuras estacionarias que están totalmente restringidas. Las armaduras consisten exclusivamente de elementos rectos que están conectados en nodos localizados en los extremos de cada elemento. Por tanto, los elementos de una armadura son *elementos sujetos a dos fuerzas*, esto es, elementos sobre los cuales actúan dos fuerzas iguales y opuestas que están dirigidas a lo largo del elemento.

2. *Bastidores*, los cuales están diseñados para soportar cargas, se usan también como estructuras estacionarias que están totalmente restringidas. Sin embargo, los armazones contienen por lo menos un *elemento sujeto a varias fuerzas*, esto es, un elemento sobre el cual actúan tres o más fuerzas que, en general, no están dirigidas a lo largo del elemento.

3. *Máquinas*, las cuales están diseñadas para transmitir y modificar fuerzas, son estructuras que contienen partes en movimiento. Las máquinas, al igual que los armazones, siempre contienen por lo menos un elemento sujeto a varias fuerzas.

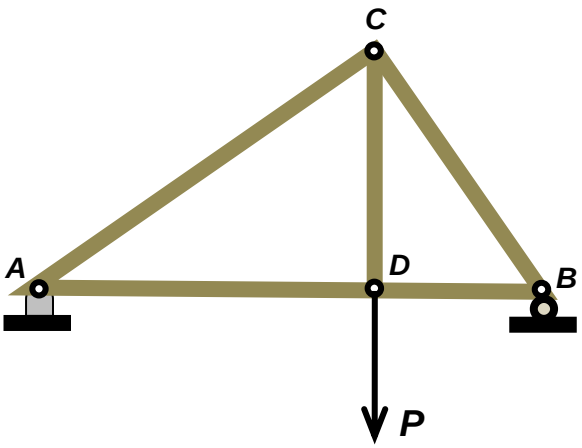
4.2. ARMADURAS

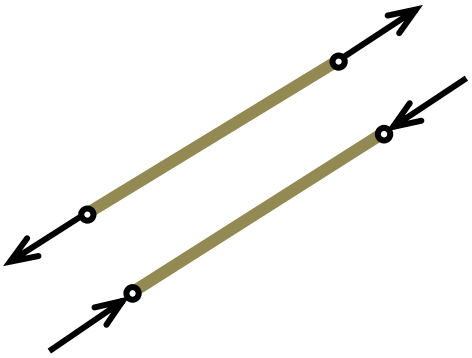
Son estructuras generalmente estacionarias que se hallan constituidas por elementos rectos sujetos a dos fuerzas, dirigidas a lo largo del eje del elemento, que están conectados únicamente en sus extremos mediante pernos. Como los elementos son delgados e incapaces de soportar cargas laterales, todas las cargas deben estar aplicadas en las uniones o nodos. La mayoría de las estructuras reales están hechas a partir de varias armaduras unidas entre sí para formar una armadura espacial. Cada armadura está diseñada para soportar aquellas cargas que actúan en su plano y, por tanto, pueden ser tratadas como estructuras bidimensionales.

La armadura es uno de los principales tipos de estructuras que se usan en la ingeniería. Ésta proporciona una solución práctica y económica para muchas situaciones de ingeniería, en especial para el diseño de puentes y edificios.

***** Se dice que una armadura es *rígida* si está diseñada de modo que no se deformará mucho o se colapsará bajo la acción de una carga pequeña.

A continuación se muestra una armadura sometida a una carga **P** y a un elemento individual sujeto a dos fuerzas.



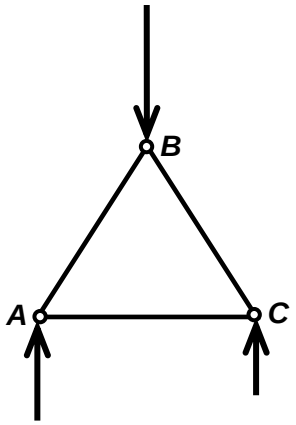


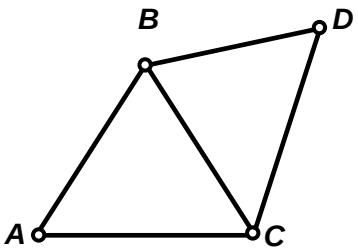
Sobre un elemento individual pueden actuar fuerzas, como las que se muestran en la figura. En el primer caso tienden a estirar al elemento y éste está en tensión; en la segunda figura tienden a comprimir al elemento y el mismo está en compresión.

4.2.1 ARMADURAS SIMPLES

Son aquellas armaduras que se obtienen a partir de una armadura triangular rígida, agregándole dos nuevos elementos y conectándolos en un nuevo nodo.

Una armadura triangular constituida por tres elementos conectados en tres nodos es una armadura rígida. Si a una armadura triangular rígida le agregamos dos nuevos elementos y los conectamos en un nuevo nodo (ver figura), también se obtiene una estructura rígida. Las armaduras que se obtienen repitiendo este procedimiento reciben el nombre de armaduras simples. Se puede comprobar que en una armadura simple el número total de elementos es $m = 2n - 3$, donde n es el número total de nodos.





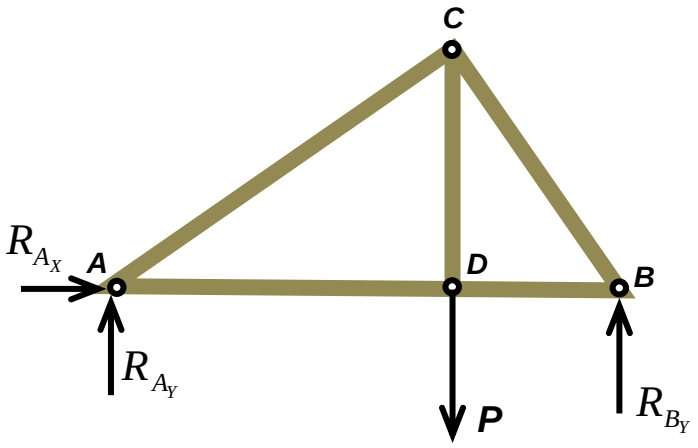
4.2.2 ANÁLISIS DE ARMADURAS POR EL MÉTODO DE LOS NODOS

El método de los nodos nos permite determinar las fuerzas en los distintos elementos de una armadura simple. Consiste en:

1ro. Obtener las reacciones en los apoyos a partir del DCL de la armadura completa.

2do. Determinar las fuerzas en cada uno de los elementos haciendo el DCL de cada uno de los nodos o uniones. Se recomienda empezar analizando aquellos nodos que tengan no más de dos incógnitas. Como los elementos que constituyen a la armadura son elementos rectos sujetos a dos fuerzas, la fuerza ejercida por un elemento sobre el perno está dirigida a lo largo de dicho elemento, y, por tanto, sólo se desconoce su magnitud.
En el caso de una armadura simple, siempre se pueden dibujar los diagramas de cuerpo libre de los pernos en un orden tal que únicamente se incluyen dos incógnitas en cada diagrama. Estas fuerzas se obtienen a partir de las dos ecuaciones de equilibrio correspondientes o –si sólo están involucradas tres fuerzas– a partir del triángulo de fuerzas correspondiente. **Si la fuerza ejercida por un elemento sobre un perno está dirigida hacia el perno, dicho elemento está en *compresión*; si la fuerza ejercida por un elemento sobre el perno está dirigida hacia fuera de éste, dicho elemento está en tensión**. Algunas veces se puede simplificar el análisis de una armadura si se identifican primero los *nodos que se encuentran bajo condiciones especiales de carga*.

Aplicando el método de los nodos en el caso de la armadura sometida a una carga P, su DCL completo es el que se muestra a continuación. A partir de este DCL obtenemos las reacciones en los apoyos aplicando primero suma de momentos en el punto A y luego, suma de fuerzas igual a cero.



Para calcular las fuerzas en los elementos que constituyen la armadura, analizo primero el nodo A (de aquí hallo la fuerza en los elementos *AC* y *AD*), luego analizo los nodos *C* y *B* para hallar la fuerza en los elementos *CD*, *CB* y *BD*.

4.2.3 ARMADURAS EN EL ESPACIO O ESPACIALES

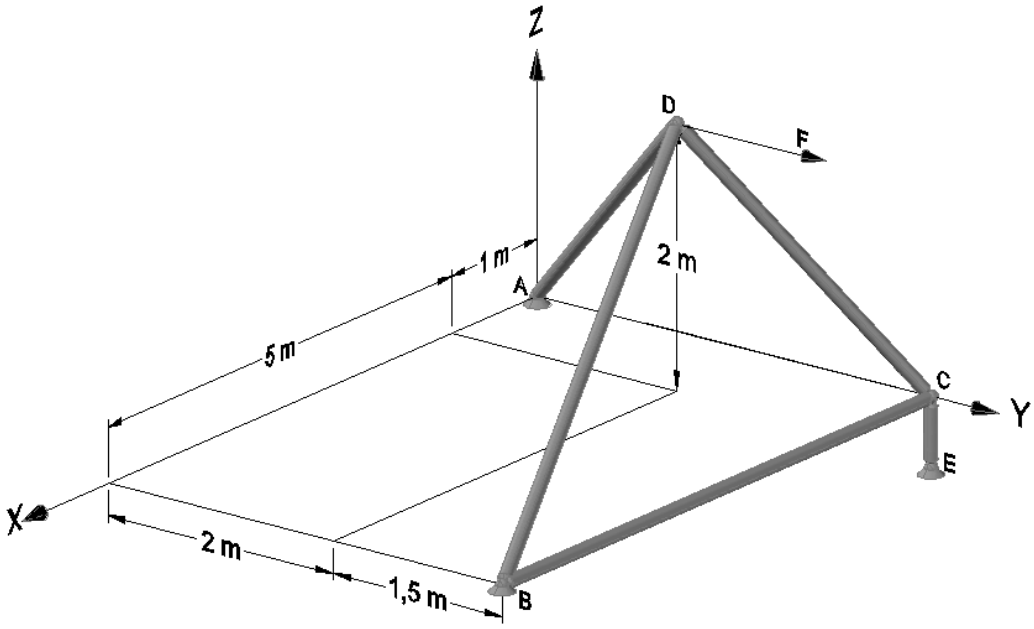
Son aquellas armaduras que se obtienen cuando varios elementos rectos se unen en sus extremos para formar una configuración tridimensional.

La armadura rígida básica en el espacio está constituida por seis elementos unidos en sus extremos para formar los lados de un tetraedro. Si se agregan tres elementos a esta configuración básica, uniéndolos a los tres nodos existentes y conectándolos en un nuevo nodo, se puede obtener una estructura rígida más grande, la cual se define como una armadura simple en el espacio. Además, como el tetraedro básico tiene seis elementos y cuatro nodos y que cada vez que se agregan tres elementos el número de nodos se incrementa en uno, se concluye que en una armadura espacial simple el número total de elementos es $m = 3n - 6$, donde n es el número total de nodos.

Si una armadura espacial debe tener restricción completa y si las reacciones en sus apoyos deben ser estáticamente determinadas, los apoyos deben consistir en una combinación de bolas, rodillos y rótulas que proporcionen un total de seis reacciones desconocidas. Estas reacciones desconocidas se determinan al resolver las seis ecuaciones escalares que expresan que la armadura tridimensional está en equilibrio.

A pesar de que los elementos de una armadura en el espacio están unidos por conexiones soldadas o remachadas, se supone que cada nodo consiste en una reacción tipo rótula. Por tanto no se aplicará ningún par a los elementos de la armadura y cada elemento puede tratarse como un elemento sometido a la acción de dos fuerzas. Las condiciones de equilibrio para cada nodo estarán expresadas por las tres ecuaciones $\sum F_x = 0,\ \sum F_y = 0,\ \sum F_z = 0$. Entonces, en el caso de una armadura simple en el espacio que contiene n nodos, escribir las condiciones de equilibrio para cada nodo proporcionará un total de $3n$ ecuaciones. Como $m = 3n - 6$, estas ecuaciones serán suficientes para determinar todas las fuerzas desconocidas (las fuerzas en los m elementos y las seis reacciones en los apoyos). Sin embargo, para evitar la necesidad de resolver ecuaciones simultáneas, se debe tener cuidado en seleccionar nodos en un orden tal que ninguno involucre más de tres fuerzas desconocidas.

En la figura mostrada a continuación se tiene una armadura espacial apoyada en A y B por rótulas esféricas, mientras que CE es un enlace corto.



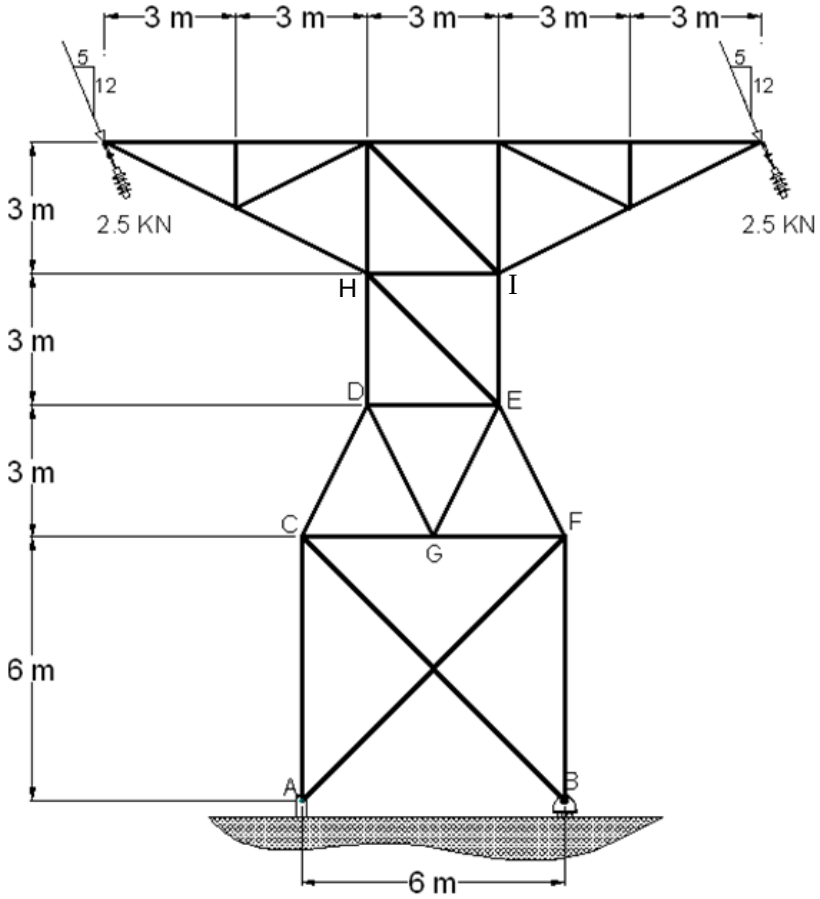
4.2.4 ANÁLISIS DE ARMADURAS POR EL MÉTODO DE SECCIONES

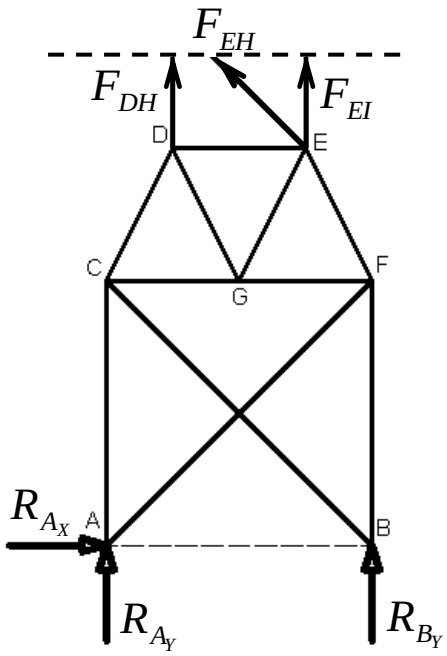
Éste método es más eficaz que el método de los nodos cuando únicamente se desea determinar la fuerza en un solo elemento o en muy pocos elementos de una armadura.

Pasos a seguir:

1. Se hace el DCL de la armadura completa y se usa dicho diagrama para calcular las reacciones en los apoyos.
2. Se pasa una sección a través de tres o más elementos de la armadura cuyas fuerzas ejercidas se desea determinar.
3. Se hace el DCL de una de las dos porciones de la armadura que resulta después de pasar la sección. La porción de armadura seleccionada para el análisis debe ser aquella que nos permita resolver el problema con mayor facilidad, es decir no debe tener más de tres incógnitas.

Por ejemplo, para determinar la fuerza en los elementos *DH, EH y EI* de la armadura de la figura siguiente, se *pasa una sección* a través de estos tres elementos, se remueven dichos elementos y se usa la porción inferior de la armadura como un cuerpo libre (ver figura). Si se escribe $\sum M_E = 0$, se determina la magnitud de la fuerza $\vec{F}_{DH}$, la cual representa la fuerza en el elemento *DH*. Un signo positivo indica que el elemento está en *tensión*; un signo negativo indica que el elemento está en *compresión*. Si se escribe $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$ se determinan las magnitudes de las fuerzas $\vec{F}_{EH}$ y $\vec{F}_{EI}$.

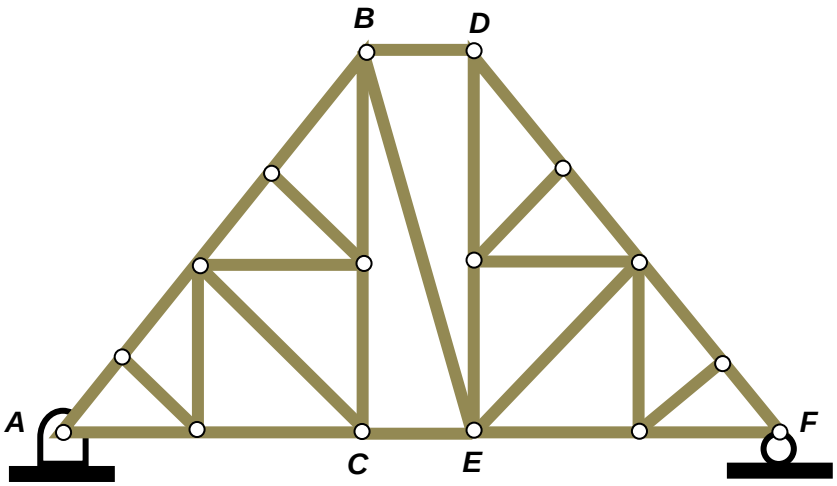

3 m
3 m
3 m
3 m
3 m
5
12
5
12
2.5 KN
2.5 KN
3 m
3 m
3 m
6 m
H
I
D
E
C
F
G
A
B
6 m


F_{EH}
F_{DH}
F_{EI}
D
E
C
F
G
R_{A_X}
A
B
R_{A_Y}
R_{B_Y}

4.2.5 ARMADURAS COMPUESTAS

Son armaduras que no se pueden construir a partir de la armadura triangular básica, pero que se obtienen conectando rígidamente varias armaduras simples. Si las armaduras simples que constituyen a la armadura compuesta han sido conectadas en forma apropiada (por medio de un perno y un eslabón o por medio de tres eslabones que no son concurrentes ni paralelos) y si la estructura resultante está bien apoyada (por medio de un perno y un rodillo), la armadura compuesta será *estáticamente determinada*, *rígida y completamente restringida*. Entonces se satisface la siguiente condición necesaria –pero no suficiente- : $m + r = 2n$, donde m es el número de elementos, r es el número de incógnitas que representan a las reacciones en los apoyos y n es el número de nodos.

En la figura se muestra una armadura compuesta.



4.3 BASTIDORES Y MÁQUINAS

Los bastidores y máquinas son estructuras que contienen elementos sujetos a fuerzas múltiples, sobre los cuales actúan tres o más fuerzas. Los bastidores están diseñados para soportar cargas y usualmente son estructuras estacionarias totalmente restringidas. Las máquinas están diseñadas para transmitir o modificar fuerzas y siempre contienen partes móviles.

4.3.1 ANÁLISIS DE UN BASTIDOR

Para analizar bastidores que contienen uno o más elementos sujetos a la acción de fuerzas múltiples se deben seguir los siguientes pasos:

1. Hacer el DCL del bastidor completo y utilizar este diagrama para calcular, en la medida de lo posible, las reacciones en los apoyos.
2. Desensamblar el bastidor y hacer el DCL para cada uno de sus elementos.

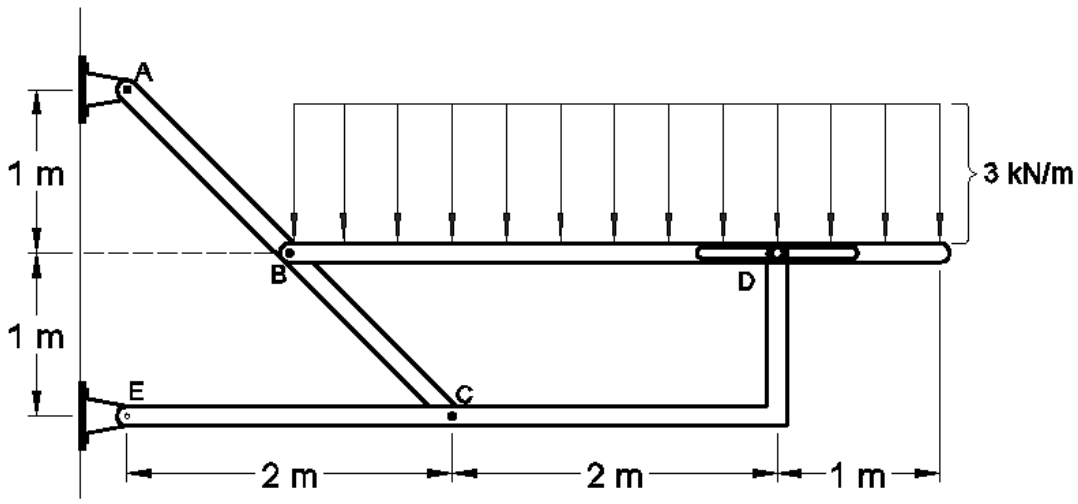
3. Considerar primero a los elementos sujetos a dos fuerzas. Estas fuerzas iguales y opuestas se aplican a cada uno de los elementos en los puntos en que éstos se conectan a otro elemento. Si el elemento sujeto a dos fuerzas es un elemento recto, dichas fuerzas están dirigidas a lo largo del eje del elemento.
4. Después se consideran los elementos sujetos a fuerzas múltiples. Para cada uno de estos elementos se grafican todas las fuerzas que actúan sobre dicho elemento.
5. Se determinan las fuerzas internas, al igual que aquellas reacciones que aún no se han determinado.

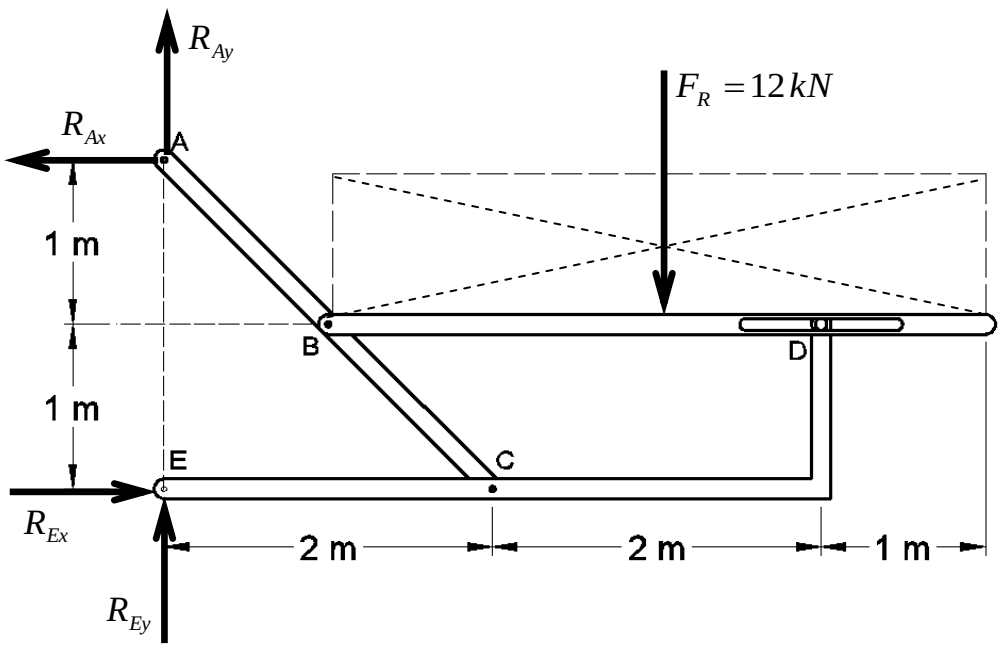
Nota. En el punto donde un elemento sujeto a fuerzas múltiples está conectado a otro elemento sujeto a fuerzas múltiples, se usan componentes horizontales y verticales para representar a las fuerzas internas que actúan sobre ese punto.

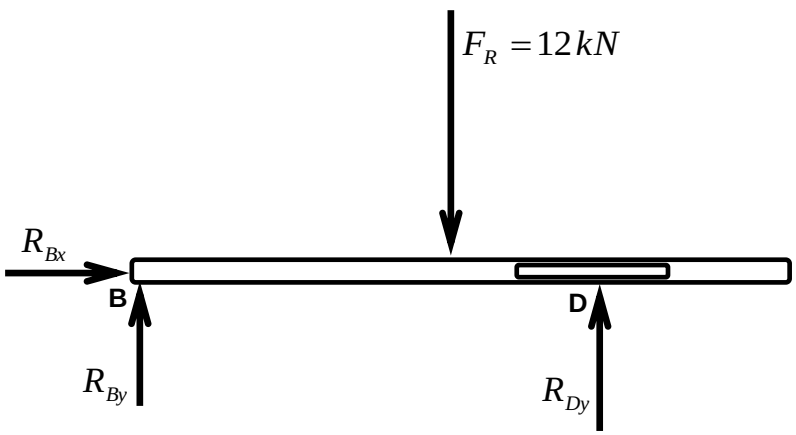
ELEMENTOS SUJETOS A FUERZAS MÚLTIPLES

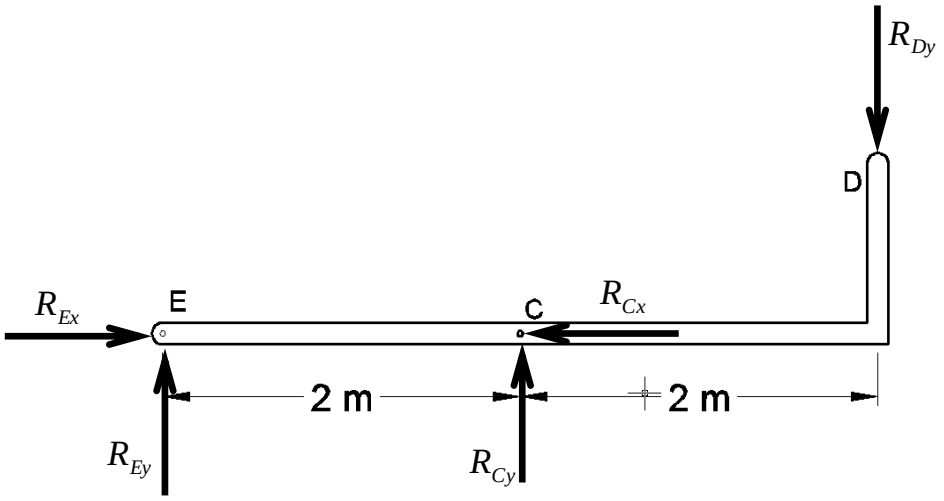
Cuando se *desensambla el bastidor* y se identifican los diversos elementos que lo constituyen como elementos sujetos a dos fuerzas o elementos sujetos a fuerzas múltiples, se supone que los pernos forman una parte integral de uno de los elementos que éstos conectan. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de cada uno de los elementos sujetos a fuerzas múltiples, observando que cuando dos elementos sujetos a fuerza múltiples están conectados al mismo elemento sujeto a dos fuerzas, este último actúa sobre los elementos sujetos a fuerzas múltiples con *fuerzas iguales y opuestas de magnitud desconocida pero cuya dirección es conocida*. Cuando dos elementos sujetos a fuerzas múltiples están conectados por un perno, éstos ejercen entre sí *fuerzas iguales y opuestas cuya dirección es desconocida*, las cuales se deben representar por *dos componentes desconocidas*. Entonces se puede resolver las ecuaciones de equilibrio obtenidas a partir de los diagramas de cuerpo libre de los elementos sujetos a fuerzas múltiples para determinar las distintas fuerzas internas. También pueden emplearse las ecuaciones de equilibrio para completar la determinación de las reacciones en los apoyos. De hecho, si el bastidor es *estáticamente determinado y rígido*, los diagramas de cuerpo libre de los elementos sujetos a fuerzas múltiples pueden proporcionar un número de ecuaciones igual al número de fuerzas desconocidas (incluyendo las reacciones). Sin embargo, como se sugirió, es conveniente considerar primero el diagrama de cuerpo libre para el bastidor completo con el fin de minimizar el número de ecuaciones que se deben resolver de manera simultánea.

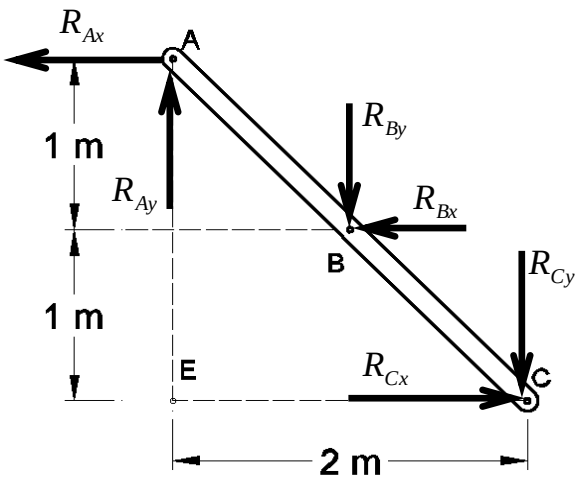
En la figura se muestra un bastidor sometido a una carga distribuida, y los diagramas de cuerpo libre del bastidor completo y de los tres elementos que resultan al desensamblar dicho bastidor.


A
1 m
1 m
B
D
E
C
3 kN/m
2 m
2 m
1 m


R_{Ay}
$F_R = 12\,kN$
R_{Ax}
A
1 m
B
D
1 m
E
C
R_{Ex}
2 m
2 m
1 m
R_{Ey}


$F_R = 12\,kN$
R_{Bx}
B
D
R_{By}
R_{Dy}





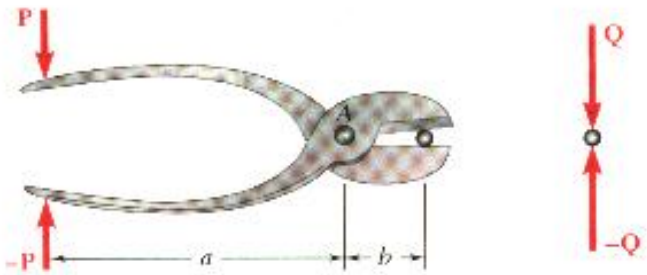
4.3.2 ANÁLISIS DE UNA MÁQUINA

Las máquinas son estructuras diseñadas para transmitir y modificar fuerzas. No importa si éstas son herramientas simples o incluyen mecanismos complicados, su propósito principal es transformar fuerzas de entrada en fuerzas de salida.

Para analizar una máquina se siguen los siguientes pasos:

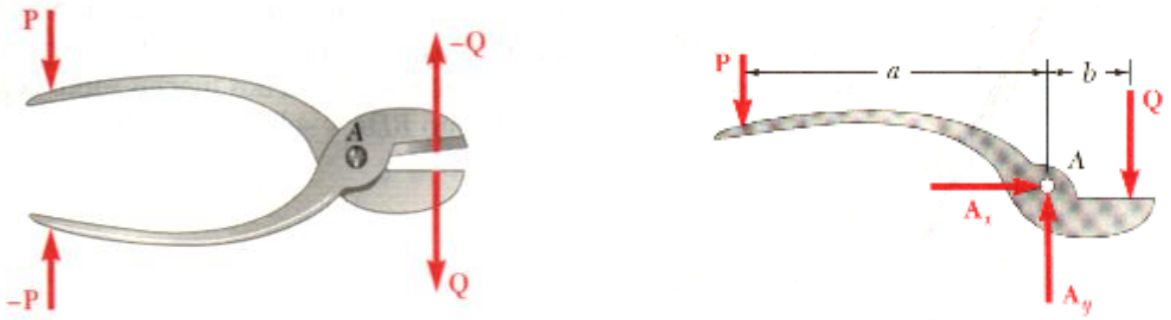
1. Hacer el DCL de la máquina completa y utilizarlo para determinar tantas fuerzas desconocidas ejercidas sobre la máquina como sea posible.
2. Desensamblar la máquina y hacer el DCL para cada uno de los elementos que la constituyen.
3. Considere primero a los elementos sujetos a dos fuerzas.
4. Después se considera a los elementos sujetos a fuerzas múltiples.
5. Aplicar las ecuaciones de equilibrio en los DCL que se han determinado y hallar las incógnitas solicitadas.

Por ejemplo, considere unas pinzas de corte que se emplean para cortar un alambre (ver figura). Si se aplican dos fuerzas iguales y opuestas **P** y **–P** sobre sus mangos, éstas ejercerán dos fuerzas iguales y opuestas **Q** y **–Q** sobre el alambre. Para conocer la magnitud Q de las fuerzas de salida cuando se conoce la magnitud P de las fuerzas de entrada (o a la inversa, para determinar P cuando se conoce Q), se dibuja un diagrama de cuerpo libre de las pinzas por sí solas, mostrando las fuerzas de entrada **P** y **–P** y las reacciones **Q** y **–Q** que el alambre ejerce sobre las pinzas.



Fuente: Beer F. y Johnston E. Mecánica vectorial para ingenieros. Estática. Octava edición

Sin embargo, como las pinzas forman una estructura que no es rígida, se debe utilizar una de las partes que la constituyen como un cuerpo libre para poder determinar las fuerzas desconocidas. Por ejemplo, en la figura *a*, si se toman momentos con respecto a A, se obtiene la relación $Pa = Q\,b$, la cual define a la magnitud de Q en términos de P o a la magnitud de P en términos de Q. Se puede utilizar el mismo diagrama de cuerpo libre para determinar las componentes de la fuerza interna en A; de esta forma se obtiene que $A_X = 0$ y $A_y = P + Q$.

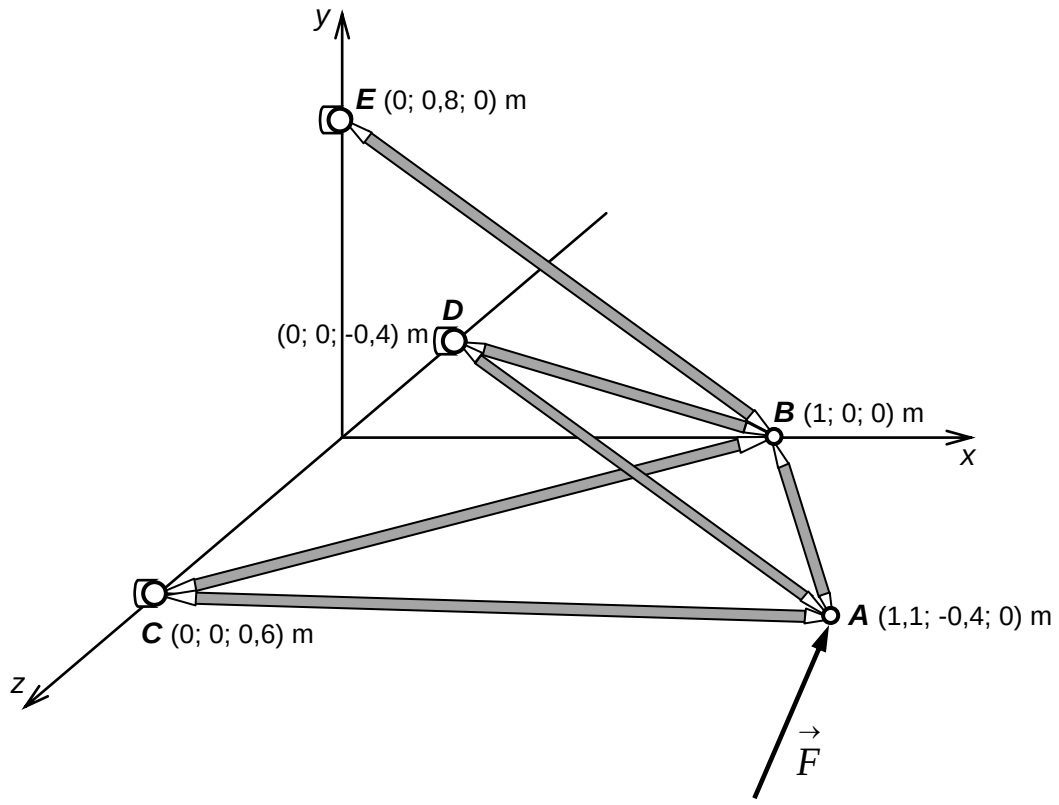


Fuente: Beer F. y Johnston E. Mecánica vectorial para ingenieros. Estática. Octava edición

4.4 PROBLEMAS RESUELTOS DE ESTRUCTURAS

PROBLEMA Nº 1

La armadura espacial mostrada representa el tren de aterrizaje de un avión. Tiene soportes de bola y cuenca en C, D y E. Si la fuerza ejercida en A por la rueda es $\vec{F} = 10\,\hat{i} + 60\,\hat{j} + 20\,\hat{k}$ (kN), ¿cuál es la magnitud de las fuerzas axiales en los elementos BC, BD y BE?, ¿cuáles son las fuerzas de reacción en los soportes C, D y E?



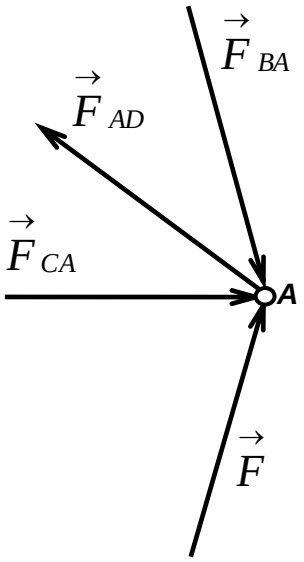
Resolución

Observando la figura dada concluimos que el problema se puede resolver aplicando el método de los nodos. Para ello, se analiza primero el nodo ***A*** porque en dicho punto actúan cuatro fuerzas y como una de ellas es conocida, entonces se pueden hallar las otras tres fuerzas. A continuación se analiza el nodo ***B*** y se calculan la magnitud de las fuerzas en los elementos *BC, BD y BE*. Finalmente se analiza los puntos ***C***, ***D*** y ***E*** y se calcula las reacciones en los soportes que están ubicados en dichos puntos.

Análisis del Nodo "A"

Al analizar el Nodo "A" se observa que sobre el actúan cuatro fuerzas: ***la fuerza aplicada*** $\vec{F}$ ***y las fuerzas en los elementos AC, AB y AD***. En la figura siguiente estamos asumiendo que la fuerza en el elemento *AD* es de TRACCIÓN y la fuerza en los elementos *AB* y *AC* es de COMPRESIÓN. A continuación se muestra el **DCL** del Nodo "A", la expresión vectorial de cada una de las cuatro fuerzas que actúan sobre el Nodo "A" y los cálculos de las fuerzas en los elementos *AB, AD y AC.*

DCL DEL NODO "A"



EXPRESIÓN VECTORIAL DE LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE EL NODO "A"

✓ $\vec{F} = (10;\ 60;\ 20)\,kN$

✓ $\vec{F}_{BA} = F_{BA}\,\hat{\mu}_{BA} \quad ; \quad \hat{\mu}_{BA} = \dfrac{(0{,}1;\ -0{,}4;\ 0)}{\sqrt{0{,}17}}$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{BA} = \left(\frac{0{,}1}{\sqrt{0{,}17}} F_{BA};\ -\frac{0{,}4}{\sqrt{0{,}17}} F_{BA};\ 0 \right)$$

✓ $\vec{F}_{AD} = F_{AD}\,\hat{\mu}_{AD} \quad ; \quad \hat{\mu}_{AD} = \dfrac{(-1{,}1;\ 0{,}4;\ -0{,}4)}{\sqrt{1{,}53}}$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{AD} = \left(\frac{-1{,}1}{\sqrt{1{,}53}} F_{AD};\ \frac{0{,}4}{\sqrt{1{,}53}} F_{AD};\ -\frac{0{,}4}{\sqrt{1{,}53}} F_{AD} \right)$$

✓ $\vec{F}_{CA} = F_{CA}\,\hat{\mu}_{CA} \quad ; \quad \hat{\mu}_{CA} = \dfrac{(1{,}1;\ -0{,}4;\ -0{,}6)}{\sqrt{1{,}73}}$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{CA} = \left(\frac{1{,}1}{\sqrt{1{,}73}} F_{CA};\ -\frac{0{,}4}{\sqrt{1{,}73}} F_{CA};\ -\frac{0{,}6}{\sqrt{1{,}73}} F_{CA} \right)$$

Para el equilibrio se cumple que: $\sum \vec{F}_{\left(\substack{EN\ EL \\ NODO\ A}\right)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F} + \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{AD} + \vec{F}_{CA} = 0$

Aplicando las tres ecuaciones escalares de equilibrio de fuerzas para el Nodo "A", tenemos:

$$\sum F_x = 0 \ \Rightarrow\ 10\,kN + \frac{0{,}1}{\sqrt{0{,}17}} F_{BA} - \frac{1{,}1}{\sqrt{1{,}53}} F_{AD} + \frac{1{,}1}{\sqrt{1{,}73}} F_{CA} = 0 \qquad \ldots \textbf{(1)}$$

$$\sum F_y = 0 \ \Rightarrow\ 60\,kN - \frac{0{,}4}{\sqrt{0{,}17}} F_{BA} + \frac{0{,}4}{\sqrt{1{,}53}} F_{AD} - \frac{0{,}4}{\sqrt{1{,}73}} F_{CA} = 0 \qquad \ldots \textbf{(2)}$$

$$\sum F_z = 0 \ \Rightarrow\ 20\,kN - \frac{0{,}4}{\sqrt{1{,}53}} F_{AD} - \frac{0{,}6}{\sqrt{1{,}73}} F_{CA} = 0 \qquad \ldots \textbf{(3)}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (1), (2) y (3), obtenemos:

$$F_{BA} = 72{,}154\,kN \quad ; \quad F_{AD} = 43{,}293\,kN \quad ; \quad F_{CA} = 13{,}153\,kN$$

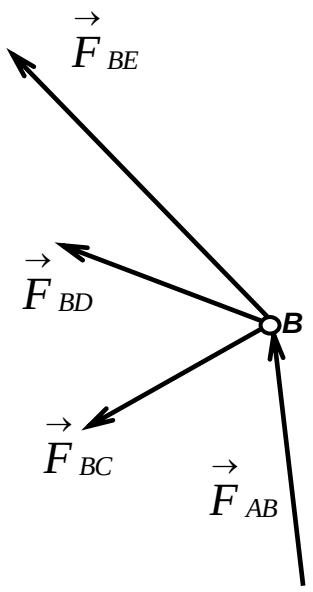
Además, como las fuerzas halladas tienen signo positivo, entonces los sentidos asumidos son correctos. Luego se cumple que, el *elemento AD* está sometido a *TRACCIÓN* y los elementos *AB y AC* están sometidos a *COMPRESIÓN*.

<u>Análisis del Nodo "B"</u>

Del análisis al Nodo "B" observamos que sobre el actúan cuatro fuerzas: ***las fuerzas en los elementos AB, BC, BD y BE***. En la figura siguiente estamos asumiendo que la fuerza en los elementos *BC, BD y BE* es de TRACCIÓN. Además, se halló que la fuerza en el elemento *AB* es de COMPRESIÓN.

A continuación se muestra el **DCL** del Nodo "B", la expresión vectorial de cada una de las cuatro fuerzas que actúan sobre el Nodo "B" y los cálculos de las fuerzas en los elementos *BC, BD y BE.*

DCL DEL NODO "B"



EXPRESIÓN VECTORIAL DE LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE EL NODO "B"

✓ $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} = \left(-\frac{0,1}{\sqrt{0,17}} F_{BA};\ \ \frac{0,4}{\sqrt{0,17}} F_{BA};\ \ 0 \right)$

✓ $\vec{F}_{BC} = F_{BC}\,\hat{\mu}_{BC} \quad ; \quad \hat{\mu}_{BC} = \frac{(-1;\ 0;\ 0,6)}{\sqrt{1,36}}$

$\Longrightarrow \quad \vec{F}_{BC} = \left(-\frac{1}{\sqrt{1,36}} F_{BC};\ \ 0;\ \ \frac{0,6}{\sqrt{1,36}} F_{BC} \right)$

✓ $\vec{F}_{BD} = F_{BD}\,\hat{\mu}_{BD} \quad ; \quad \hat{\mu}_{BD} = \frac{(-1;\ 0;\ -0,4)}{\sqrt{1,16}}$

$\Longrightarrow \quad \vec{F}_{BD} = \left(\frac{-1}{\sqrt{1,16}} F_{BD};\ \ 0;\ \ -\frac{0,4}{\sqrt{1,16}} F_{BD} \right)$

✓ $\vec{F}_{BE} = F_{BE}\,\hat{\mu}_{BE} \quad ; \quad \hat{\mu}_{BE} = \frac{(-1;\ 0,8;\ 0)}{\sqrt{1,64}}$

$\Longrightarrow \quad \vec{F}_{BE} = \left(-\frac{1}{\sqrt{1,64}} F_{BE};\ \ \frac{0,8}{\sqrt{1,64}} F_{BE};\ \ 0 \right)$

Para el equilibrio se cumple que: $\sum \vec{F}_{\substack{(EN\ EL \\ NODO\ B)}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BC} + \vec{F}_{BD} + \vec{F}_{BE} = 0$

Aplicando las tres ecuaciones escalares de equilibrio de fuerzas para el Nodo "B", tenemos:

$$\sum F_x = 0 \ \Rightarrow -\frac{0,1}{\sqrt{0,17}} F_{BA} - \frac{1}{\sqrt{1,36}} F_{BC} - \frac{1}{\sqrt{1,16}} F_{BD} - \frac{1}{\sqrt{1,64}} F_{BD} = 0 \qquad \ldots \textbf{(4)}$$

$$\sum F_y = 0 \ \Rightarrow \frac{0,4}{\sqrt{0,17}} F_{BA} + \frac{0,8}{\sqrt{1,64}} F_{BE} = 0 \qquad \ldots \textbf{(5)}$$

$$\sum F_z = 0 \;\Rightarrow\; \frac{0,6}{\sqrt{1,36}} F_{BC} - \frac{0,4}{\sqrt{1,16}} F_{BD} = 0 \qquad \ldots \textbf{(6)}$$

Reemplazando $F_{BA} = 72,154\,kN$ y resolviendo el sistema de ecuaciones (4), (5) y (6), obtenemos:

$$F_{BE} = -112,05\,kN \quad ; \quad F_{BC} = 32,65\,kN \quad ; \quad F_{BD} = 45,23\,kN$$

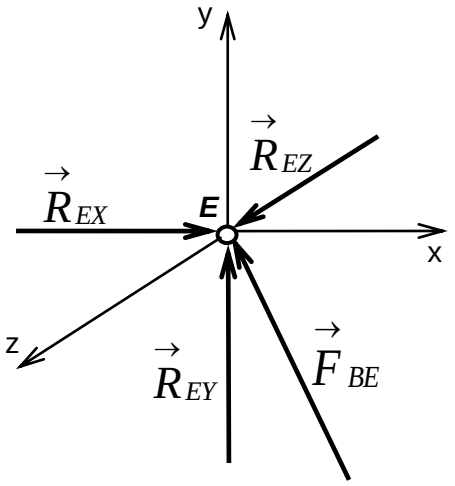
Como las fuerzas F_{BC} y F_{BD} tienen signo positivo, entonces los sentidos asumidos son correctos. Por lo tanto los *elementos BC y BD* están sometidos a *TRACCIÓN*. En cambio, el elemento *BE* está sometido a *COMPRESIÓN* porque la fuerza F_{BE} resultó con signo negativo.

<u>Análisis del Nodo "E"</u>

Analizando el Nodo "E" notamos que sobre el actúan ***las tres componentes de la fuerza de reacción debido al apoyo ubicado en el punto E y la fuerza en el elemento BE***. En la figura siguiente estamos asumiendo que las tres componentes de la fuerza de reacción son positivas. Se halló además (ver cálculo anterior) que la fuerza en el elemento *BE* es de COMPRESIÓN y tiene una magnitud de 112,05 kN.

A continuación se muestra el **DCL** del Nodo "E", la expresión vectorial de cada una de las fuerzas que actúan sobre el Nodo "E" y los cálculos de las componentes de la fuerza de reacción debido al apoyo ubicado en el punto E.

DCL DEL NODO "E"



EXPRESIÓN VECTORIAL DE LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE EL NODO "E"

✓ $\vec{F}_{BE} = \left(-\frac{1}{\sqrt{1,64}} F_{BE} ;\; \frac{0,8}{\sqrt{1,64}} F_{BE} ;\; 0 \right)$

$\Rightarrow$ $\vec{F}_{BE} = (-87,496\,kN;\; 69,997\,kN;\; 0)$

✓ $\vec{R}_E = (R_{Ex} ;\; R_{Ey} ;\; R_{Ez})$

Para el equilibrio se cumple que: $\sum \vec{F}_{(EN\ EL\ NODO\ E)} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{F}_{BE} + \vec{R}_E = 0$

Aplicando las tres ecuaciones escalares de equilibrio de fuerzas para el Nodo "E", tenemos:

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; -87,496\,kN + R_{Ex} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_{Ex} = 87,496\,kN$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; 69{,}997\,kN \;+\; R_{Ey} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_{Ey} = -69{,}997\,kN$$

$$\sum F_z = 0 \;\Rightarrow\; 0 \;+\; R_{Ez} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_{Ez} = 0$$

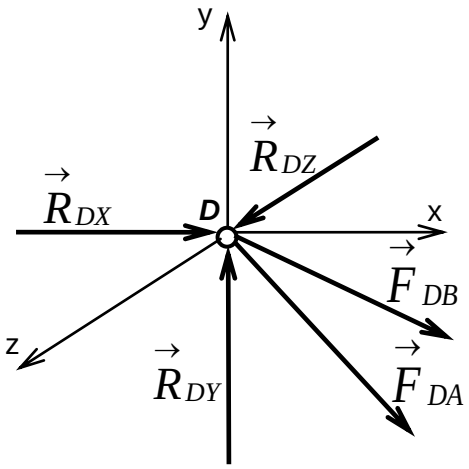
Luego, la fuerza de reacción en el apoyo *E* es: $\vec{R}_E = (87{,}496\,kN;\quad -69{,}997\,kN;\quad 0)$

<u>Análisis del Nodo "D"</u>

Analizando el Nodo "D" notamos que sobre el actúan ***las tres componentes de la fuerza de reacción debido al apoyo ubicado en el punto D y las fuerzas en los elementos AD y BD***. En la figura siguiente estamos asumiendo que las tres componentes de la fuerza de reacción son positivas. Se halló además (ver cálculos anteriores) que las fuerzas en los elementos *AD y BD* son de TRACCIÓN y tiene una magnitud de 43,293 kN y 45,23 kN, respectivamente.

A continuación se muestra el **DCL** del Nodo "D", la expresión vectorial de cada una de las fuerzas que actúan sobre el Nodo "D" y los cálculos de las componentes de la fuerza de reacción debido al apoyo ubicado en el punto D.

DCL DEL NODO "D"



EXPRESIÓN VECTORIAL DE LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE EL NODO "D"

✓ $\vec{F}_{DB} = -\vec{F}_{BD} = \left(\frac{1}{\sqrt{1{,}16}} F_{BD};\quad 0;\quad \frac{0{,}4}{\sqrt{1{,}16}} F_{BD} \right)$

$\Rightarrow \vec{F}_{DB} = (41{,}995\,kN;\quad 0;\quad 16{,}798\,kN)$

✓ $\vec{F}_{DA} = -\vec{F}_{AD} = \left(\frac{1{,}1}{\sqrt{1{,}53}} F_{AD};\quad -\frac{0{,}4}{\sqrt{1{,}53}} F_{AD};\quad \frac{0{,}4}{\sqrt{1{,}53}} F_{AD} \right)$

$\Rightarrow \vec{F}_{DA} = (38{,}498\,kN;\quad -13{,}999\,kN;\quad 13{,}999\,kN)$

✓ $\vec{R}_D = (R_{Dx};\; R_{Dy};\; R_{Dz})$

Para el equilibrio se cumple que: $\sum \vec{F}_{\substack{(EN\ EL \\ NODO\ D)}} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{F}_{DB} + \vec{F}_{DA} + \vec{R}_D = 0$

Aplicando las tres ecuaciones escalares de equilibrio de fuerzas para el Nodo "D", tenemos:

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; 41{,}995\,kN \;+\; 38{,}498\,kN \;+\; R_{Dx} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_{Dx} = -80{,}493\,kN$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; -13{,}999\,kN \;+\; R_{Dy} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_{Dy} = 13{,}999\,kN$$

$$\sum F_z = 0 \;\Rightarrow\; 16{,}798\,kN \;+\; 13{,}999\,kN \;+\; R_{Ez} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_{Ez} = -30{,}797\,kN$$

Luego, la fuerza de reacción en el apoyo *D* es:

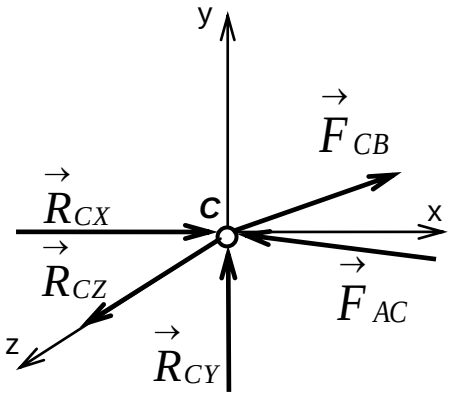
$$\vec{R}_D = (-80{,}493\ kN;\;\; 13{,}999\ kN\ ;\;\; -30{,}797\,kN)$$

Análisis del Nodo "C"

Analizando el Nodo "C" notamos que sobre el actúan ***las tres componentes de la fuerza de reacción debido al apoyo ubicado en el punto C y las fuerzas en los elementos AC y BC***. En la figura siguiente estamos asumiendo que las tres componentes de la fuerza de reacción son positivas. Se halló además (ver cálculos anteriores) que la fuerza en el elemento *AC* es de COMPRESIÓN y tiene una magnitud de 13,153 kN, mientras que la fuerza en el elemento *BC* es de TRACCIÓN y tiene una magnitud 32,65 kN.

A continuación se muestra el **DCL** del Nodo "C", la expresión vectorial de cada una de las fuerzas que actúan sobre el Nodo "C" y los cálculos de las componentes de la fuerza de reacción debido al apoyo ubicado en el punto C.

DCL DEL NODO "C"



EXPRESIÓN VECTORIAL DE LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE EL NODO "C"

✓ $\vec{F}_{CB} = -\vec{F}_{BC} = \left(\frac{1}{\sqrt{1{,}36}} F_{BC};\quad 0;\quad -\frac{0{,}6}{\sqrt{1{,}36}} F_{BC} \right)$

$\Rightarrow \vec{F}_{CB} = (27{,}997\,kN;\quad 0;\quad -16{,}798\,kN)$

✓ $\vec{F}_{AC} = -\vec{F}_{CA} = \left(-\frac{1{,}1}{\sqrt{1{,}73}} F_{CA};\quad \frac{0{,}4}{\sqrt{1{,}73}} F_{CA};\quad \frac{0{,}6}{\sqrt{1{,}73}} F_{CA} \right)$

$\Rightarrow \vec{F}_{AC} = (-10{,}998\,kN;\ 3{,}999\,kN;\quad 5{,}999\,kN)$

✓ $\vec{R}_C = (R_{Cx};\ R_{Cy};\ R_{Cz})$

Para el equilibrio se cumple que: $\sum \vec{F}_{\left(\substack{EN\ EL \\ NODO\ C}\right)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{CB} + \vec{F}_{AC} + \vec{R}_C = 0$

Aplicando las tres ecuaciones escalares de equilibrio de fuerzas para el Nodo "C", tenemos:

$$\sum F_x = 0 \ \Rightarrow\ 27{,}997\,kN - 10{,}998\,kN + R_{Cx} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_{Cx} = -16{,}999\,kN$$

$$\sum F_y = 0 \ \Rightarrow\ 3{,}999\,kN + R_{Cy} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_{Cy} = -3{,}999\,kN$$

$$\sum F_z = 0 \ \Rightarrow\ -16{,}798\,kN + 5{,}999\,kN + R_{Cz} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_{Cz} = 10{,}799\,kN$$

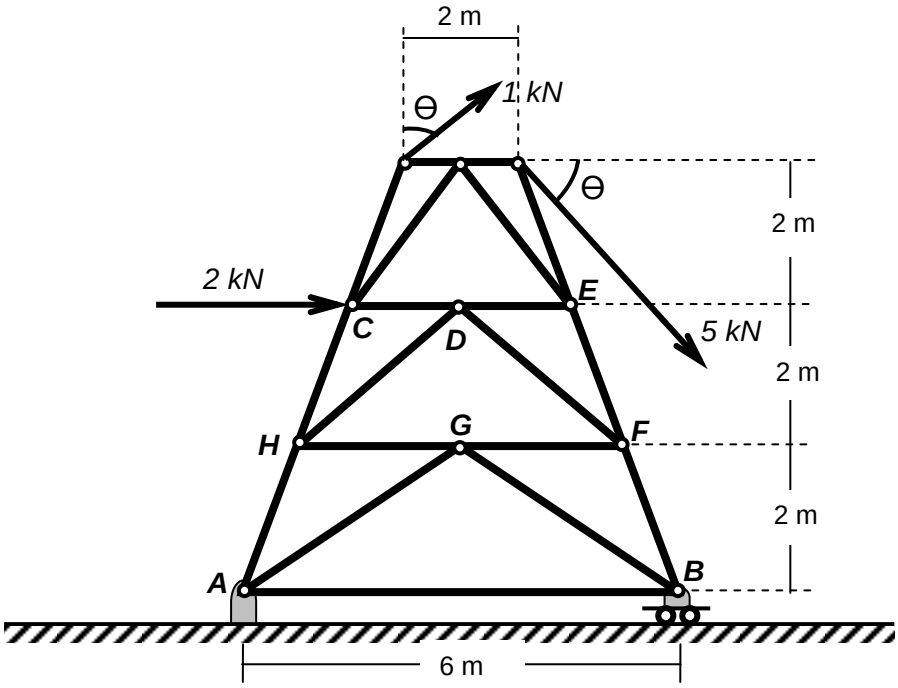
Luego, la fuerza de reacción en el apoyo *C* es:

$$\vec{R}_C = (-16{,}999\,kN;\quad -3{,}999\,kN;\ 10{,}799\,kN)$$

PROBLEMA Nº 2

Calcule la magnitud de las fuerzas en los miembros *CH, DF* y *EF* de la armadura representada en la figura. Señale asimismo si dichos miembros se hallan en tracción o en compresión.

Considere que: $\tan\theta = 4/3$



Resolución

Cuando en un problema de armaduras nos piden la fuerza sólo en algunos miembros de dicha armadura, el problema se puede resolver aplicando el método de las secciones. De acuerdo con este método, primero hacemos el DCL de la armadura completa y hallamos las reacciones en los apoyos. A continuación se traza una sección que pase a través de los miembros cuyas fuerzas ejercidas queremos determinar y se calcula dichas fuerzas analizando una de las dos partes que resulta después de pasar la sección. Si fuera necesario se pasa convenientemente una segunda sección para determinar las incógnitas que faltan.

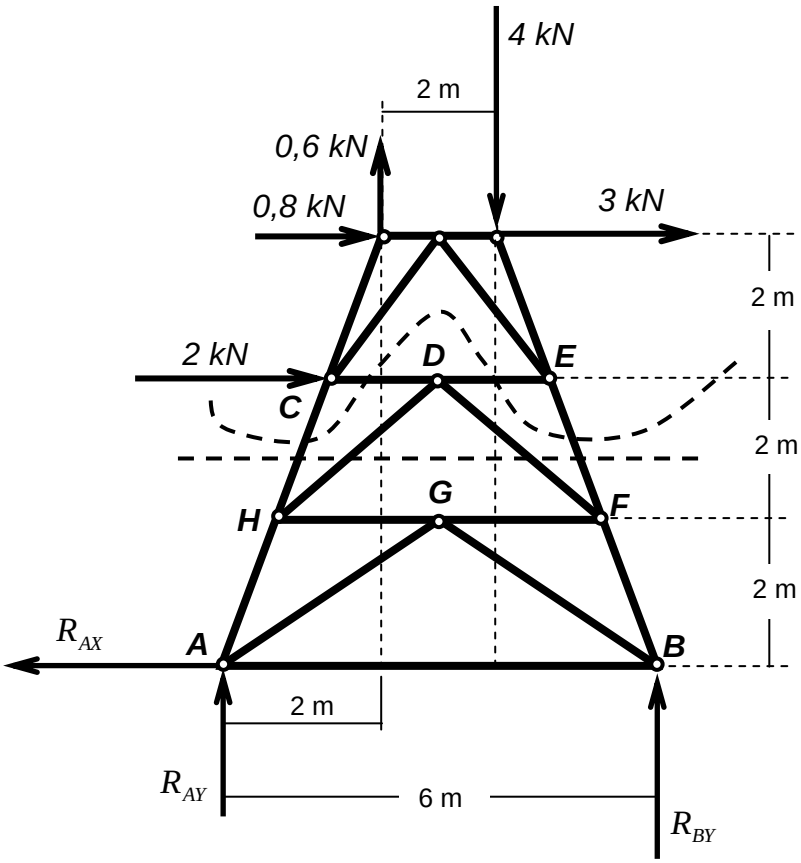
Como el problema está en el plano, es suficiente trabajar con la ecuación escalar de suma de momentos, respecto a un punto, igual a cero, y las dos ecuaciones escalares de suma de fuerzas igual a cero.

Análisis de la armadura completa

Para analizar la armadura completa, primero hacemos su DCL (ver figura siguiente) y luego aplicamos las ecuaciones de equilibrio para hallar las reacciones en los apoyos *A* y *B*.

Note que en el DCL de la armadura completa, las cargas aplicadas de 1 y 5 kN se han descompuesto en sus componentes horizontales y verticales. Esto nos permite facilitar los cálculos.

DCL de la Armadura completa:



Aplicando la ecuación escalar de suma de momentos, respecto al punto A, igual a cero, tenemos:

$$\boxed{\sum M_A^{TOTALES} = 0}$$

Luego:

$$+R_{BY}(6m) - 3kN(6m) - 4kN(4m) + 0{,}6kN(2m) - 0{,}8kN(6m) - 2kN(4m) = 0$$

$$R_{BY} = 7{,}6\,kN$$

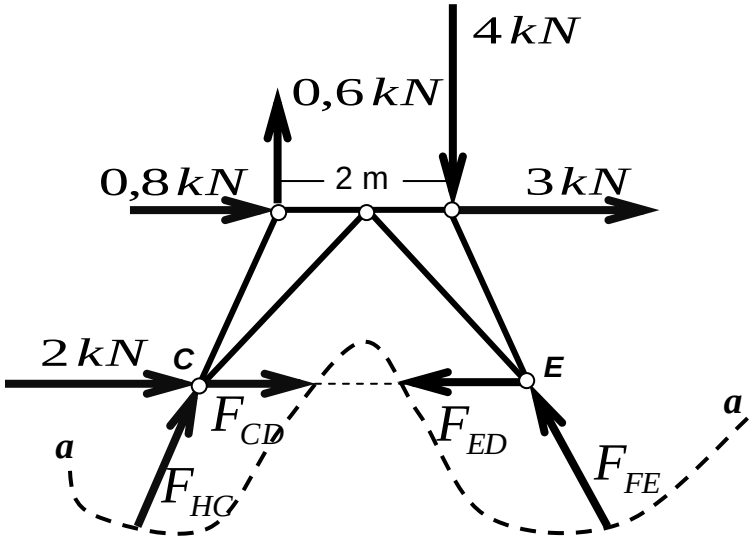
Aplicando las dos ecuaciones escalares de suma de fuerzas igual a cero, tenemos que:

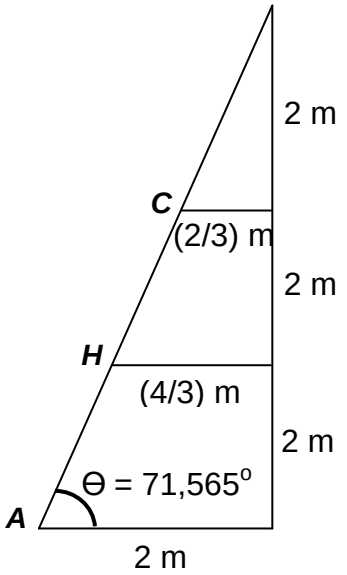
$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad 3kN + 0{,}8kN + 2kN - R_{AX} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{AX} = 5{,}8kN$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{AY} + R_{BY} + 0{,}6kN - 4kN = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{AY} = -4{,}2kN$$

Trazo de sección (o secciones) y cálculo de las magnitudes de las fuerzas en los miembros CH, DF y EF de la armadura

Para trazar la sección correcta debemos tener en cuenta que ésta debe atravesar uno o más miembros cuya fuerza ejercida se desea calcular. En nuestro caso conviene primero trazar la sección ***aa*** y analizar la porción superior de la armadura (ver figura siguiente). De esta forma podemos determinar la magnitud de la fuerza en los miembros ***CH*** y ***EF***, para ello aplicamos las ecuaciones escalares de suma de momentos y de suma de fuerzas iguales a cero.





$$\sum M_C^{TOTALES} = 0 \quad +$$

$$F_{FE} Sen\theta \left(\frac{2}{3} m + 2m + \frac{2}{3} m \right) - 0{,}8\, kN(2m) + 0{,}6\, kN \left(\frac{2}{3} m \right) - 4\, kN \left(2m + \frac{2}{3} m \right) - 3\, kN(2m) = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{FE} = 5{,}65\, kN$$

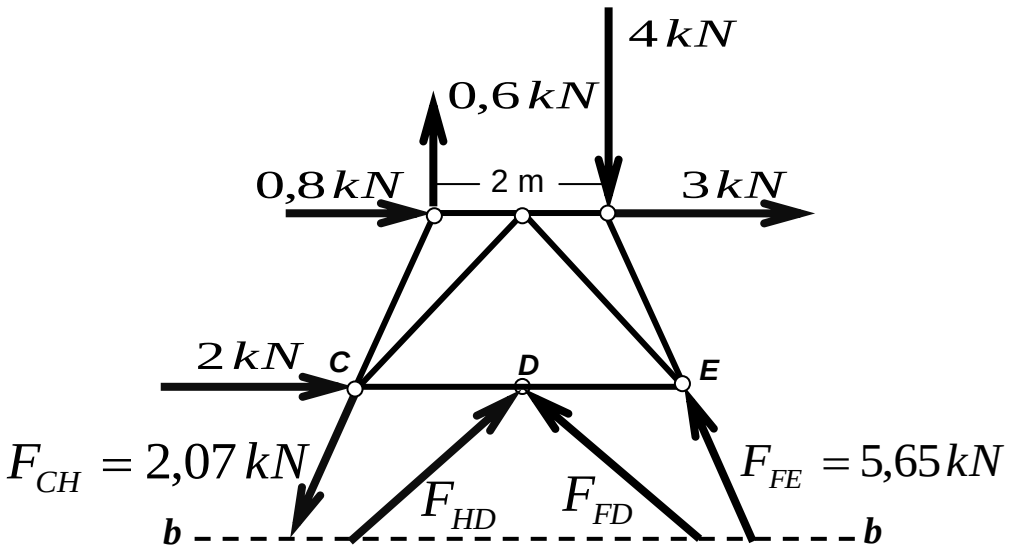
Respuesta: $F_{FE} = 5{,}65\, kN \ (COMPRESION)$

$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{HC}\, Sen\theta + 0{,}6\, kN - 4\, kN + F_{FE} Sen\theta = 0$; donde: $F_{FE} = 5{,}65\, kN$

Despejando F_{HC} tenemos: $F_{HC} = -2{,}07\, kN$

Respuesta: $F_{HC} = 2{,}07\, kN \ (TRACCION)$

A continuación trazamos la sección ***bb*** , analizamos la porción superior de la armadura (ver la figura mostrada a continuación) y calculamos la magnitud de la fuerza en el miembro ***DF***.



Si en este DCL aplicamos las dos ecuaciones escalares de equilibrio de fuerzas se obtiene que:

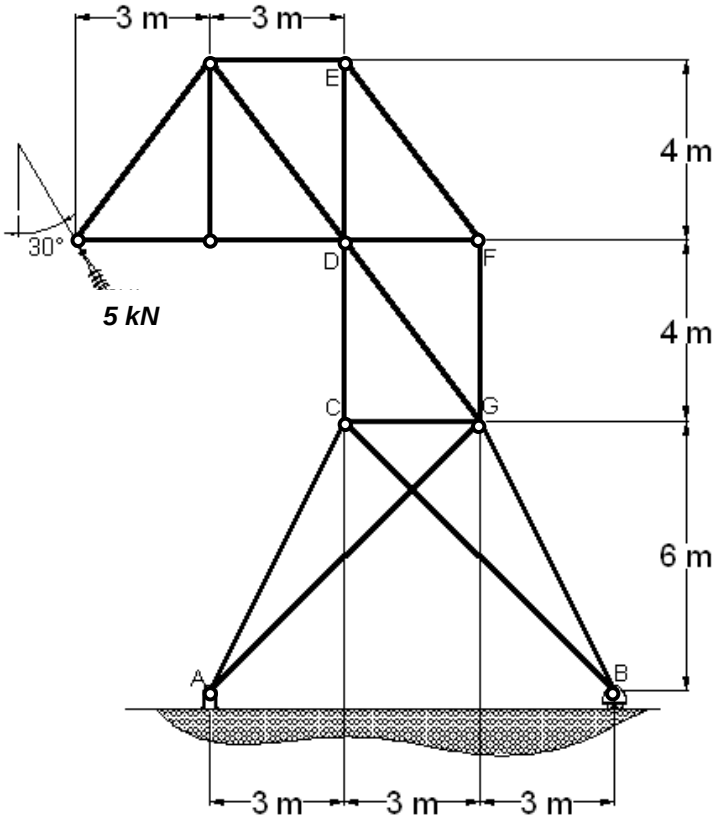
$$F_{FD} = 2{,}21\,kN$$

Respuesta: $F_{FD} = 2{,}21\,kN\,(COMPRESION)$

<u>Nota</u>: también se puede aplicar suma de momentos en el punto ***H*** igual a cero y hallar la magnitud de la fuerza F_{FD}.

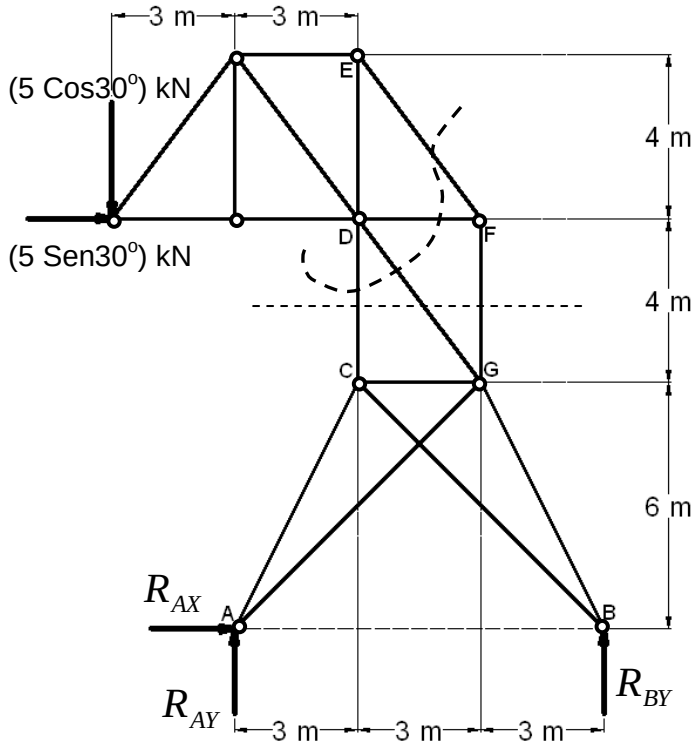
<u>PROBLEMA Nº 3</u>

Halla las fuerzas en los miembros CD, DF y EF de la armadura de línea de transmisión representada en la figura siguiente. Además señalar si dichos miembros se hallan sometidos a tracción o compresión.



Resolución

Primero hacemos el DCL de la armadura completa y aplicamos las ecuaciones de equilibrio para calcular las reacciones en los apoyos.



$$\sum M_A^{TOTALES} = 0$$

$$+R_{BY}(9m) + 5Cos30\,kN(3m) - 5Sen30\,kN(10m) = 0$$

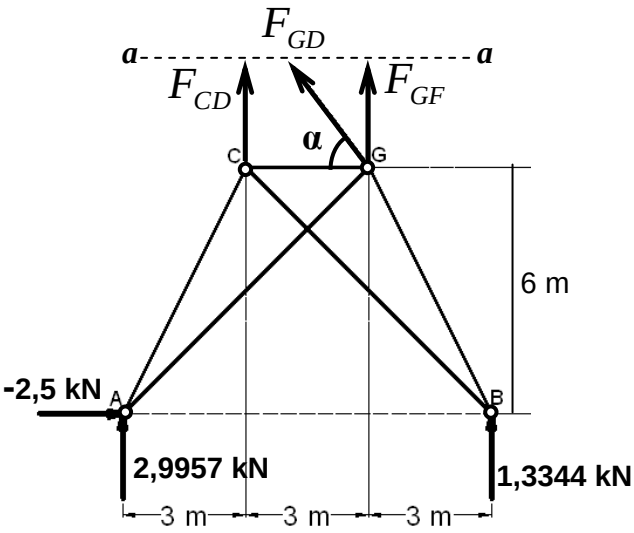
$$R_{BY} = 1{,}3344\,kN$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow R_{AX} = -2{,}5\,kN$$

* Recuerde que el signo negativo indica que la fuerza esta en sentido contrario.

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow R_{AY} = 2{,}9957\,kN$$

A continuación trazamos la sección ***aa*** y analizamos la porción inferior de la armadura. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio hallamos la magnitud de la fuerza en el miembro CD. También se puede hallar la magnitud de la fuerza en los miembros DG y FG.



$$\sum M_G^{TOTALES} = 0$$

$$+1{,}3344\,kN(9m) - 2{,}9957\,kN(6m) - 2{,}5\,kN(6m) - F_{CD}(3m) = 0$$

$$\Rightarrow F_{CD} = -9{,}657\,kN$$

Por lo tanto:

$$F_{CD} = 9{,}657\,kN\,(COMPRESION)$$

Además, al aplicar $\sum F_X = 0$ y $\sum F_Y = 0$, obtenemos:

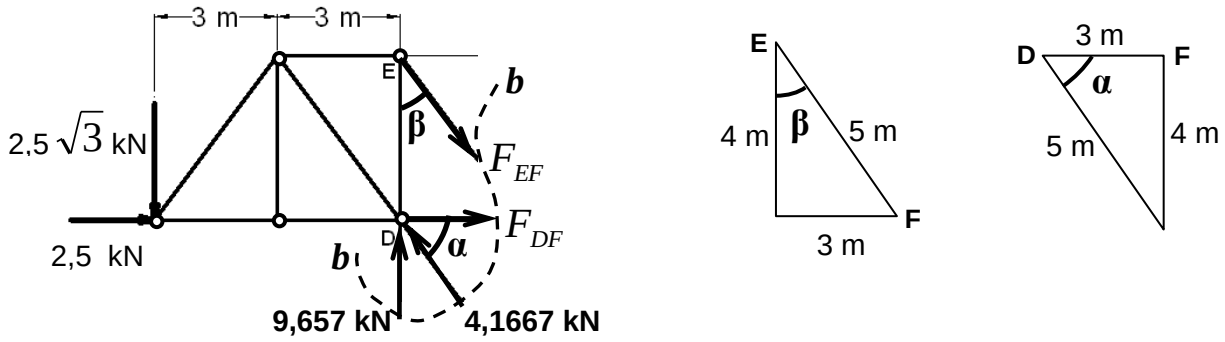
$$F_{GD} = -4{,}1667\,kN \quad \text{y} \quad F_{GF} = 8{,}6603\,kN$$

Luego:

$$F_{GD} = 4{,}1667\,kN\,(COMPRESION)$$

$$F_{GF} = 8{,}6603\,kN\,(TRACCION)$$

Para hallar F_{DF} y F_{EF} trazamos la sección ***bb*** y analizamos la porción superior de la armadura.



Aplicando las ecuaciones escalares de equilibrio de fuerzas, tenemos:

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad 2{,}5\,kN + F_{DF} - (4{,}1667\,Cos\alpha)\,kN + F_{EF}\,Sen\beta = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad -2{,}5\sqrt{3}\,kN + 9{,}657\,kN + (4{,}1667\,Sen\alpha)\,kN - F_{EF}\,Cos\beta = 0$$

Resolviendo estas ecuaciones, obtenemos:

$$F_{EF} = 10{,}825033\,kN \quad \text{y} \quad F_{DF} = -6{,}495\,kN$$

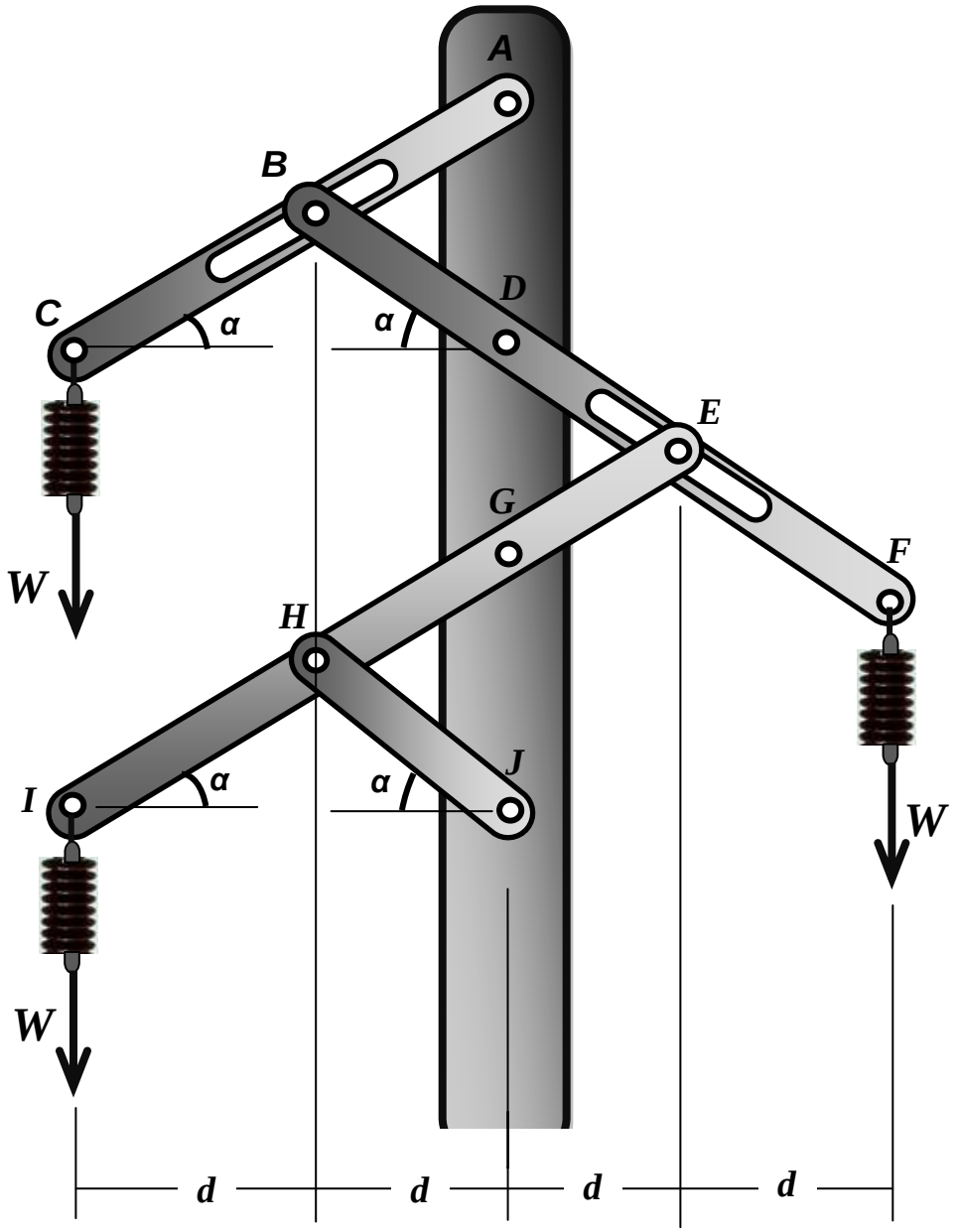
Luego, es cierto que:

$$F_{EF} = 10{,}825033\,kN \quad (TRACCION)$$

$$F_{DF} = 6{,}495\,kN \ (COMPRESION)$$

PROBLEMA Nº 4

El bastidor mostrado en la figura se usa para soportar cables de alta tensión. Si d = 3 pies, α = 30º y W = 200 lbf, ¿cuál es la magnitud de la fuerza axial en el elemento *HJ*?

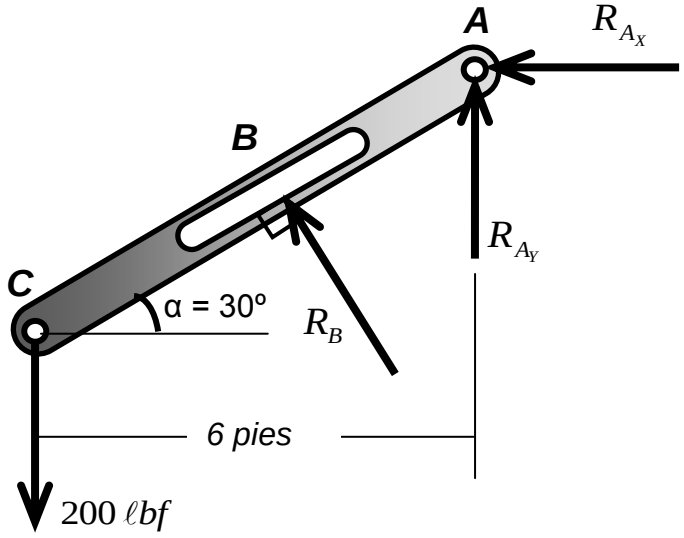


Resolución

Para resolver este problema primero desensamblamos el bastidor. Al hacer esto obtenemos cuatro elementos o piezas: *ABC, BDEF, EGHI y HJ* .Observando la figura concluimos que primero se debe analizar el elemento *ABC*, luego se analiza el elemento *BDEF* y finalmente analizamos el elemento *EGHI*.

ANÁLISIS DEL ELEMENTO *ABC*

Para analizar el elemento *ABC* primero se hace su DCL y luego se aplican las ecuaciones de equilibrio.



$$\sum M_A^{Totales} = 0$$

$$200\,\ell bf\,(6\,pies) - R_B\,(d_{AB}) = 0$$

De la figura mostrada en el lado izquierdo se concluye que:

$$d_{AB} = 2\sqrt{3}\ pies$$

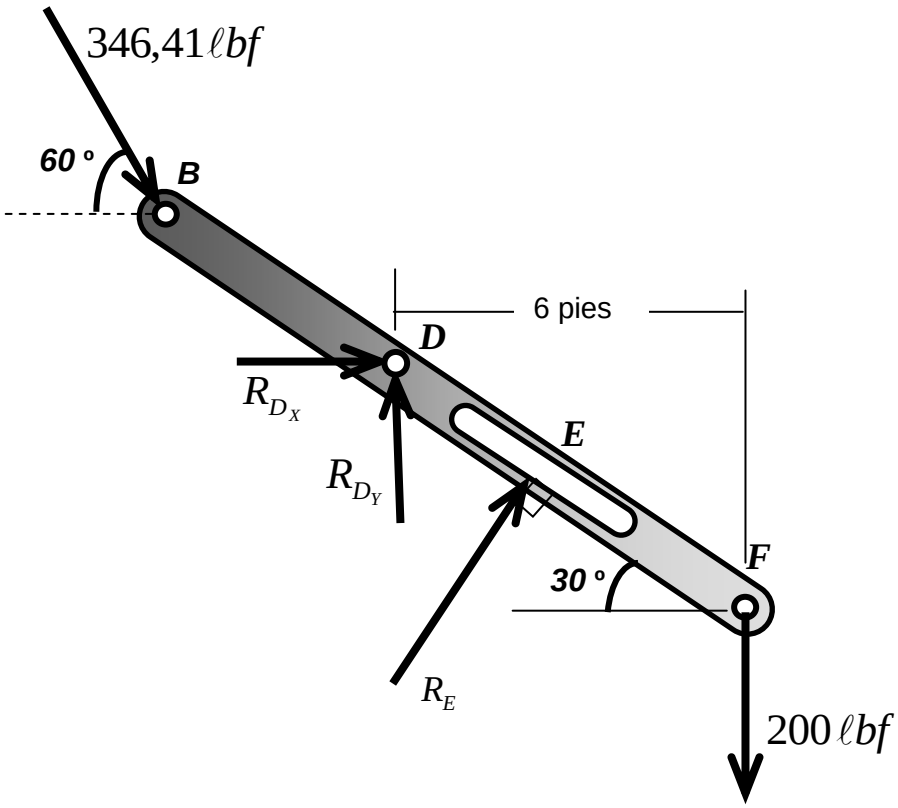
Reemplazando esta distancia en la ecuación anterior y despejando obtenemos:

$$R_B = 346{,}41\,\ell bf$$

***** La reacción R_B (la que ejerce el elemento *BDEF* en el punto B) es perpendicular a la ranura porque esta se comporta como una superficie lisa.

ANÁLISIS DEL ELEMENTO *BDEF*

De manera similar al análisis anterior, primero hago el DCL del elemento *BDEF* y luego aplicamos las ecuaciones de equilibrio.



Para calcular R_E aplicamos suma de momentos en el punto D igual a cero. Es decir:

$$\sum M_D^{Totales} = 0$$

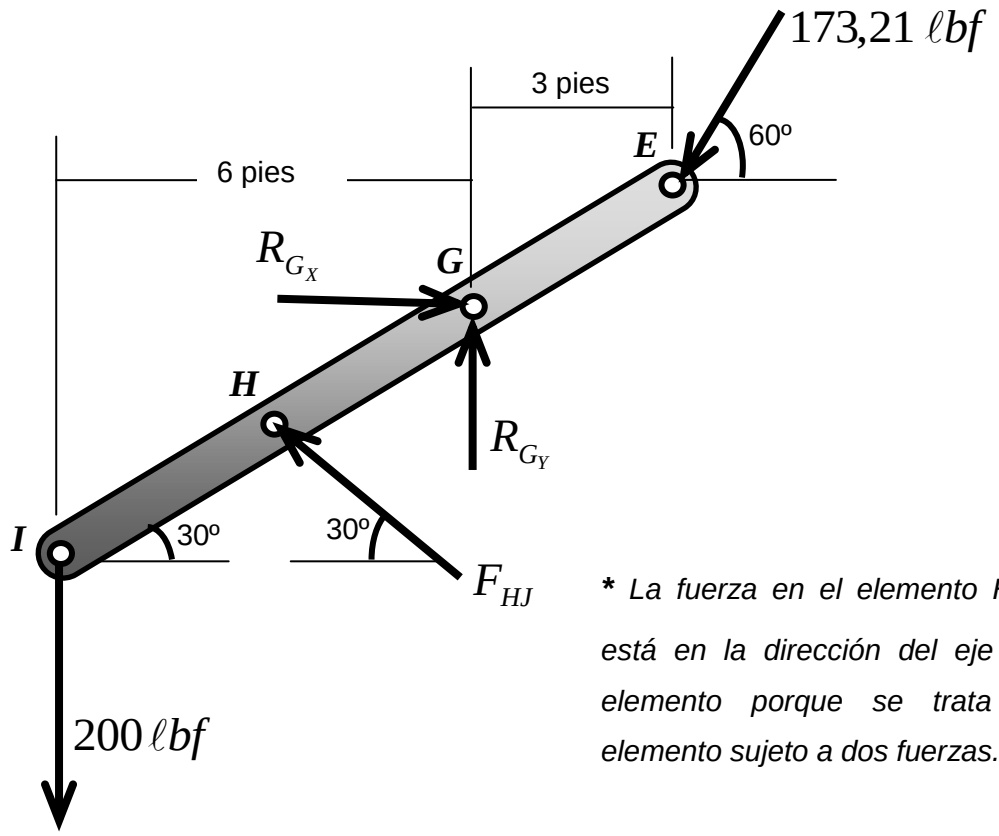
$$-200\,\ell bf\,(6\ pies) + R_B\,(2\sqrt{3}\ pies) + 346{,}41\,\ell bf\,(\sqrt{3}\ pies) = 0$$

Despejando obtenemos:

$$R_E = 173{,}21\,\ell bf$$

ANÁLISIS DEL ELEMENTO *EGHI*

De manera similar a los análisis anteriores, primero se hace el DCL del elemento $EGHI$ y luego aplicamos las ecuaciones de equilibrio.



***** *La fuerza en el elemento HJ (F_{HJ}) está en la dirección del eje de este elemento porque se trata de un elemento sujeto a dos fuerzas.*

Para calcular F_{HJ} aplicamos suma de momentos en el punto G igual a cero. Es decir:

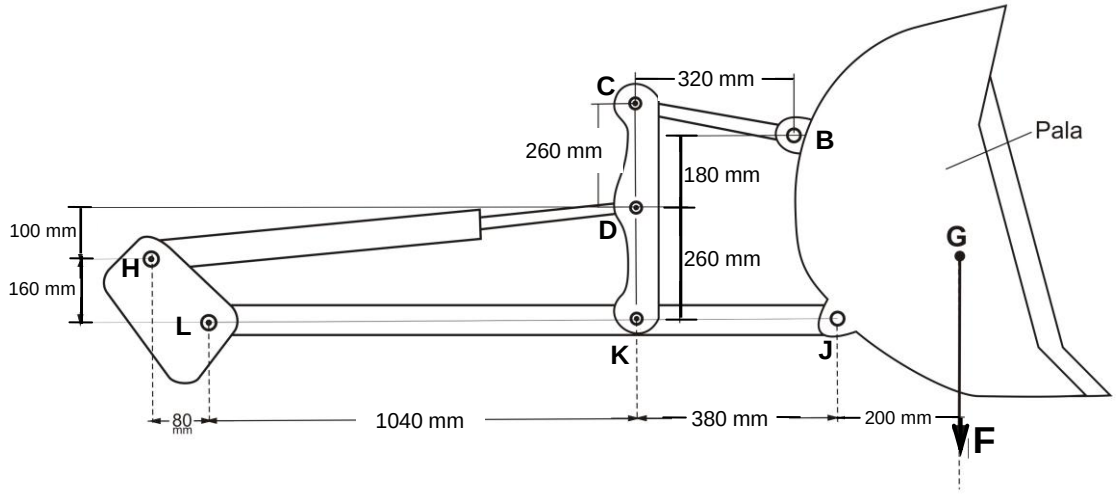
$$\sum M_G^{Totales} = 0$$

$$200\,\ell bf\,(6\ pies) - F_{HJ}\,(\sqrt{3}/2)(2\sqrt{3}\ pies) - 173{,}21\,\ell bf\,(1/2)(2\sqrt{3}\ pies) = 0$$

$$F_{HJ} = 300\,\ell bf$$

PROBLEMA Nº 5

La estructura mostrada en el diagrama (una de las dos estructuras idénticas que sostienen la cuchara de una excavadora) soporta una fuerza descendente de magnitud **F** = 1800 N en **G**. Los elementos BC y DH pueden tratarse como elementos de dos fuerzas. Determine la fuerza de reacción sobre el elemento CDK en K.

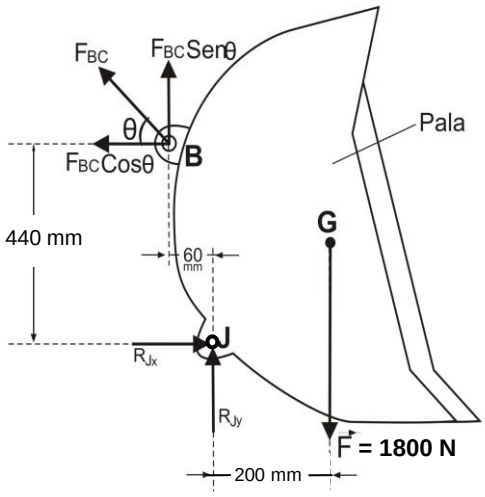


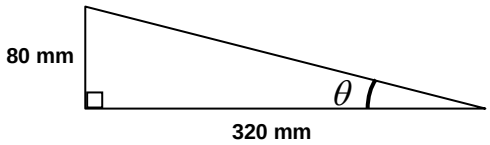
Resolución

Para resolver este problema primero desensamblamos la estructura dada y luego analizamos los elementos o piezas que sean necesarias. En este caso, analizamos primero el elemento BGJ (pala) porque conocemos el valor de la fuerza **F**. A continuación analizamos el elemento CDK y calculamos las componentes horizontal y vertical de la fuerza de reacción en K.

Análisis del elemento BGJ *(pala)*

Al analizar las fuerzas que actúan sobre el elemento BGJ (pala), concluimos que son tres: la fuerza descendente **F** que actúa en **G**, la fuerza de reacción sobre **J** (que se descompone en $\mathbf{R_{Jx}}$ y $\mathbf{R_{Jy}}$) y la fuerza $\mathbf{F_{BC}}$ que actúa en **B** (que se descompone en $\mathbf{F_{BC}}$ **Cosθ** y $\mathbf{F_{BC}}$ **Senθ**).





$$Sen\,\theta = \frac{80}{\sqrt{80^2 + 320^2}}$$

$$Cos\,\theta = \frac{320}{\sqrt{80^2 + 320^2}}$$

* Por condición del problema, el elemento BC es un elemento sujeto a dos fuerzas, por lo tanto la fuerza $\mathbf{F_{BC}}$ está dirigida a lo largo del eje de este elemento (su dirección es **ɵ**, respecto a la horizontal).

Aplicando suma de momentos igual a cero, respecto al punto J, tenemos:

$$\boxed{\sum M_J^{TOTALES} = 0} \quad \overset{+}{\circlearrowleft}$$

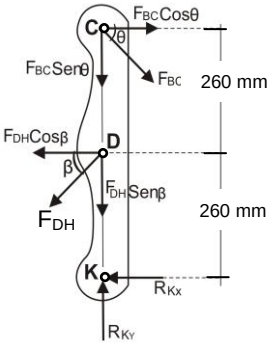
$$-F(200\,mm) - F_{BC}\ Sen\theta\,(60\,mm) + F_{BC}\ Cos\theta\,(440\,mm) = 0$$

Reemplazando los valores de F, $Sen\theta$ y $Cos\theta$, y despejando F_{BC}, obtenemos:

$$F_{BC} = 873{,}127\ N\ \ (Tracción)$$

***Análisis del elemento* CDK**

Sobre el elemento CDK actúan tres fuerzas: la fuerza $\mathbf{F_{BC}}$ que actúa sobre el punto **C** (esta fuerza se descompone en $\mathbf{F_{BC}}$ **Cosɵ** y $\mathbf{F_{BC}}$ **Senɵ**), la fuerza $\mathbf{F_{DH}}$ que actúa sobre el punto **D** (esta fuerza se descompone en $\mathbf{F_{DH}}$ **Cosβ** y $\mathbf{F_{DH}}$ **Senβ**), y la fuerza de reacción sobre el punto K (que se descompone en $\mathbf{R_{Kx}}$ y $\mathbf{R_{Ky}}$).



$$Cos\beta = \frac{1120}{\sqrt{100^2 + 1120^2}} \quad , \quad Sen\beta = \frac{100}{\sqrt{100^2 + 1120^2}}$$

* Por condición del problema, el elemento DH es un elemento sujeto a dos fuerzas, por lo tanto la fuerza $\mathbf{F_{DH}}$ está dirigida a lo largo del eje de este elemento (su dirección es β, respecto a la horizontal).

Aplicando suma de momentos igual a cero, respecto al punto K, tenemos:

$$\boxed{\sum M_K^{TOTALES} = 0} \quad \overset{+}{\circlearrowleft}$$

$$F_{DH}\ Cos\beta\,(260\,mm) - F_{BC}\ Cos\theta\,(520\,mm) = 0$$

Reemplazando los valores de F_{BC} , $Cos\beta$ y $Cos\theta$, y despejando F_{DH} , obtenemos:

$$F_{DH} = 1700{,}849\ N\ \ (Tracción)$$

Aplicando suma de fuerzas igual a cero, respecto a los ejes *x* e *y*, tenemos:

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow F_{BC}\, Cos\theta - F_{DH} Cos\beta - R_{K_X} = 0 \quad \therefore \quad R_{K_X} = -847{,}052\, N$$

* Recuerde que el signo negativo significa que R_{K_X} tiene sentido contrario al que asumimos inicialmente.

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow R_{K_Y} - F_{CB}\, Sen\theta - F_{D_H}\, Sen\beta = 0 \quad \therefore \quad R_{K_Y} = 363{,}025\, N$$

Por lo tanto, la reacción sobre el elemento CDK en K es igual a:

$$\vec{R}_K = (847{,}052\, N \;;\; 363{,}025\, N)$$