ANÁLISIS DE UNA ESTRATEGIA DE ENSEÑANZA EN EL CONTEXTO DE LA GEOMETRÍA PLANA

MARÍA DEL PILAR CUBILLOS
2003140015

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2007

ANÁLISIS DE UNA ESTRATEGIA DE ENSEÑANZA EN EL CONTEXTO DE LA GEOMETRÍA PLANA

MARIA DEL PILAR CUBILLOS

Monografía como requisito parcial para optar
por el título de Licenciado en matemáticas.

Asesora
CARMEN SAMPER DE CAICEDO
Profesora titular Dpto. de Matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2007

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios, mi familia, amigos y todas las personas que estuvieron a mi lado durante estos últimos años, por apoyarme en cada una de las metas que me he planteado, ya que son una parte indispensable para mi desarrollo como persona y parte esencial de mi proyecto de vida.

También agradezco todo el apoyo brindado en el desarrollo de este trabajo a la profesora Carmen Samper, quien ha enriquecido mi formación como docente y me ha ayudado a forjar mis primeros conocimientos en el área de la investigación, permitiéndome ser parte del grupo de investigación Æ · G (Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría), experiencia de gran valor para mi futuro papel como docente en Matemáticas.

DEDICATORIA

Dedico este trabajo de grado y el logro de cada una de mis metas a mi familia, por estar a mi lado apoyándome siempre, y a mi hermano, que aunque ya no está a mi lado siempre lo tendré en mi corazón y mente, por haber compartido conmigo tantos momentos de alegría, y haberse sentido orgulloso de mí hasta el último día que pude disfrutar de su compañía.

CONTENIDO

LISTA DE CUADROS

1. RESUMEN ANALÍTICO RAE

TIPO DE DOCUMENTO: Trabajo de Grado

ACCESO AL DOCUMENTO: Universidad Pedagógica Nacional

TITULO DEL DOCUMENTO: Análisis de una estrategia de enseñanza en el contexto de la geometría plana.

AUTOR: Cubillos Díaz María del Pilar

PUBLICACIÓN: Bogotá, D.C., 2007

PALABRAS CLAVES: Comunidad de práctica de indagación, desarrollo teórico, geometría dinámica, sistema axiomático local, desarrollo teórico.

DESCRIPCIÓN

Este trabajo se basa en una experiencia de aula desarrollada con estudiantes del curso de Geometría Plana, del programa de formación inicial de profesores de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, durante el primer semestre de 2006. Con éste se busca mostrar evidencias de cómo se puede llegar a construir un sistema axiomático local, cuando la teoría no depende de un texto sino de los aportes que los estudiantes ofrecen, a partir de la resolución de una situación problema, relacionada con el tema de cuadriláteros, para la cual era necesario hacer uso de un programa de geometría dinámica. En el curso se trabajó con el software *Cabri*, ya que se contaba con calculadoras que tenían instalado este programa.

También se pretende dar respuesta a la pregunta *¿Cómo es la organización teórica en un curso cuando la teoría surge como respuesta a las necesidades creadas al tratar de resolver una situación problema?* Para ello se realiza un análisis descriptivo de la propuesta de enseñanza, en donde se muestran evidencias de cómo fue el desarrollo teórico para la construcción del sistema axiomático, enfatizando en los conceptos, definiciones, teoremas, construcciones, y procedimientos que surgieron como resultado a necesidades teóricas que se presentaron a medida que se resolvió la situación.

FUENTES

ARIAS, J. *Aprendizaje Cooperativo*. 2ª Edición. Bogotá: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, 2005.

CLEMENS, R.y O'DAFFER, G. Geometría. Prentice Hall. México, 1998.

DE LA ROSA A. La calculadora como instrumento de mediación. En:Correo del maestro. Núm. 56. Enero, 2001.

GUTIÉRREZ, A. Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de Geometría dinámica. En: Investigación en educación matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM. Septiembre, 2005.

HEALY, L. Identifying and explaining geometrical relationships. Interactions with robust and soft Cabri constructions. Proceedings of PME 24, Hiroshima, Giapponi, 2000. Págs, 103 – 117.

LABORDE, C.. Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. En: Educational Studies in Mathematics 44. Netherlands, 2000.

-------- Robust and soft constructions: two sides of the use of dynamic geometry environments. En: Electronic Proceedings of the 10th Asian Technology Conference in Mathematics. December 12-19, 2005, South Korea, 2006.

MOISE, E. y DOWNS, F. Geometría moderna. Addison Wesley Iberoamericano SA. 1964.

MORENO L. Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. Centro de investigaciones y estudios avanzados del IPN. México, 1999.

PONTE, J. A., et. al. Didáctica de la matemática. Lisboa: Ministerio de Educación. Departamento de Encino Secundario. Portugal, 1997.

SAMPER C., LEGUIZAMÓN, C. y CAMARGO, L. Como promover el razonamiento en el aula de por medio de la geometría. Universidad Pedagógica Nacional. Bogota, D.C., 2003.

SAMPER, C., PERRY, P. y CAMARGO, L. Geometría plana: un espacio de aprendizaje. (DMA-006-05). Reporte de Investigación, Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, 2006.

CONTENIDO

- Objetivos
- Marco teórico
- Aspectos metodológicos
- Descripción del contexto y caracterización del grupo
- Análisis descriptivo de la propuesta
- Conclusiones
- Bibliografía

METODOLOGÍA

El trabajo presenta un análisis cualitativo, en el que se identifican algunos aspectos y características de la experiencia. La metodología empleada para hacer el análisis condujo, en primer lugar, a identificar cómo y por qué surgían los elementos teóricos que se iban incorporando al sistema axiomático en construcción, y el momento en el que se institucionalizaban. En segundo lugar permitió buscar aspectos que identificaban cómo la profesora gestionaba la clase para enriquecer la construcción del sistema axiomático, cómo era el uso de la calculadora, y cómo fue el desarrollo teórico para la construcción del sistema axiomático local.

CONCLUSIONES

- La experiencia permitió abordar casi todos los elementos teóricos presentados en los libros de texto, referentes al tema de cuadriláteros. Se entreve la riqueza del ambiente de aprendizaje forjado, cómo el problema propuesto propicia la generación de conjeturas, y cómo el uso de la geometría dinámica posibilita la exploración para determinar dependencias y generalizaciones.

- El trabajo con la geometría dinámica posibilitó el descubrimiento de hechos geométricos a través de la exploración de construcciones realizadas, obteniendo resultados que se convirtieron en elementos esenciales para el desarrollo teórico de la clase, al validar o rechazar cada una de las conjeturas propuestas.

- Durante la aplicación de la propuesta se generó un ambiente en el aula, en donde los estudiantes actuaron como comunidad académica en la que se construye conocimiento, siendo Cabri el dinamizador de la actividad matemática generada. Los miembros de la comunidad (profesora y estudiantes) construyeron colectivamente su sistema axiomático local, siendo la profesora guía del proceso.

- Al analizar las subtareas que la profesora propuso y las acciones que generó para direccionar las clases, fue posible observar que el papel de la profesora, en esta experiencia, es el de una docente comprometida con el aprendizaje de sus estudiantes, lo que la llevó a considerar en sus preparaciones los posibles aportes de los estudiantes ante las preguntas que diseñaba para indagar sobre su conocimiento, y así saber de antemano la dirección que posiblemente podía tomar el desarrollo teórico.

- El desarrollo de este análisis fue impórtate para mi formación, ya que el papel de la profesora que aquí se evidencia es muy diferente a el que he podido observar, durante mi formación como docente, en muchos de los cursos. Mi visión de lo que debe ser un docente pasó de una concepción tradicionalista a una en la cual el papel del profesor es el de proponer tareas y gestionar propuestas que propicien la construcción social del conocimiento. Además, pude evidenciar el potencial de la geometría dinámica dentro de la actividad matemática como instrumento mediador para la construcción del conocimiento.

- Trabajos como el realizado, presentan una evidencia de que la pedagogía va más allá de la teoría, como muchos estudiantes piensan, ya que todo depende del compromiso del profesor, los ambientes de aprendizaje que genera, y la gestión que hace en el aula con miras a la construcción del conocimiento.

FECHA ELABORACIÓN RESUMEN: 30 /04 /2007

2. INTRODUCCIÓN

El trabajo que se presenta en este documento se basa en una experiencia de aula desarrollada con estudiantes del curso de Geometría Plana, del programa de formación inicial de profesores de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, durante el primer semestre de 2006. La línea de geometría de este programa, cuenta con cuatro materias en el ciclo de Fundamentación. En el primer curso, Elementos de Geometría, se hace un acercamiento informal a distintos tópicos de la geometría. Le sigue en la línea Geometría Plana, curso en el cual se hace un tratamiento formal de la geometría euclidiana. Este trabajo se justifica, a partir del interés del grupo de investigación *Æ · G, Aprendizaje y enseñanza de la geometría,* del cual hace parte la profesora del curso con el que se realizó la experiencia, por mostrar evidencias de cómo se puede llegar a construir un sistema axiomático local, cuando la teoría no depende de un texto sino de los aportes que los estudiantes ofrecen a partir de la resolución de una situación problema, relacionada con el tema de cuadriláteros, para la cual era necesario hacer uso de un programa de Geometría Dinámica. En el curso se trabajó con el software *Cabri*, ya que se contaba con calculadoras que tenían instalado este programa.

La monografía pretende dar respuesta a la pregunta *¿Cómo es la organización teórica en un curso cuando la teoría surge como respuesta a las necesidades creadas al tratar de resolver una situación problema?* Para ello se realiza un análisis descriptivo de la propuesta de enseñanza, en donde se muestran evidencias de cómo fue el desarrollo teórico para la construcción del sistema axiomático, enfatizando en los conceptos, definiciones, teoremas, construcciones, y procedimientos que surgieron como resultado a necesidades teóricas que se presentaron a medida que se resolvió la situación.

El trabajo consta de un marco conceptual, dividido en tres partes. En la primera, se hace una caracterización del ambiente de aprendizaje, enfatizando en lo qué es una comunidad de práctica de indagación. En la segunda, se encuentra una caracterización de la geometría dinámica, y las definiciones de algunos conceptos que son relevantes al trabajar con este programa. Y en la tercera se muestra el desarrollo teórico propuesto en dos libros de texto, sobre el tema que se trabajó en la experiencia. Posteriormente, se presenta la metodología de investigación seguida y la descripción del grupo de estudiantes con que se trabajó la propuesta. Por último, se expone el análisis de la propuesta, iniciando con la descripción de la preparación que hizo la profesora para cada clase, tanto aquellas en que se abordan los resultados que obtuvieron los estudiantes de la exploración de la situación, como aquellas en las que se desarrolló la propuesta, enfatizando en los elementos teóricos que surgen. Luego se describe la gestión que realiza la profesora para guiar el trabajo de los estudiantes. Se esquematiza el desarrollo teórico que surgió, comparándolo con la propuesta de los libros de texto. Se listan las tareas y subtareas que la profesora propone. Por último, se muestran algunos ejemplos del uso de la geometría dinámica, como instrumento mediador, que se evidencia en la experiencia.

Se espera que cada profesor de geometría que lea esta monografía pueda identificar la riqueza que tiene el ambiente de aprendizaje generado a partir de la aplicación de situaciones problema y el uso de la geometría dinámica en el aula. Solo queda el reto de, en mi futura labor como docente, ampliar y mejorar la propuesta analizada, con miras a fomentar un mejor aprendizaje de la geometría plana.

3. OBJETIVOS

3.1 GENERAL

Describir el desarrollo teórico logrado con la implementación de una estrategia de enseñanza usada en el curso de geometría plana.

3.2 ESPECÍFICOS

- Describir la organización teórica que se desarrolla a partir de los aportes de los estudiantes.
- Analizar las transcripciones de las clases para poder reportar la ruta de la teoría que se desarrolló a partir del problema.
- Establecer la organización temática que la profesora propone, teniendo en cuenta los resultados que los estudiantes obtienen en el desarrollo de la situación problema.
- Analizar cómo y por qué se diseñan subtareas en el proceso de construcción de la temática involucrada en la situación.

4. MARCO TEÓRICO

A continuación se recogen algunas ideas que caracterizan el trabajo que se desarrolló en el espacio en el cual se aplicó la estrategia de enseñanza. La primera de ellas es acerca del ambiente de aprendizaje, en donde se hace énfasis en el ambiente que se generó en el grupo. Luego sobre la geometría dinámica como instrumento de mediación del conocimiento, que permitió hacer descubrimientos, formular y validar conjeturas, y buscar contraejemplos, con miras a la construcción del sistema axiomático local. Finalmente, se muestra el marco matemático, en donde se listan los teoremas y definiciones presentados en dos libros de geometría, sobre la temática que se estudió en la experiencia "Cuadriláteros".

4.1 AMBIENTE DE APRENDIZAJE

Aceptando que el aprendizaje ocurre cuando la experiencia o un hecho causa un cambio en la conducta o el conocimiento de un individuo, entendiendo como experiencia la interacción de una persona con su entorno, es importante mirar cómo es el ambiente de aprendizaje en el que se aborda el estudio de cierto concepto, ya que sus características influyen en los resultados de aprendizaje que se obtienen. Según Arias (2005), "los ambientes de aprendizaje están estructurados por las características de la interacción entre el profesor y los estudiantes"[1]. Por lo tanto, la forma como se establece el tipo de interacción entre los actores del proceso de aprendizaje (profesora-estudiantes y estudiante-estudiante) define un ambiente específico, en el cual el estudiante debe apropiarse del correspondiente rol, para que alcance el nivel de aprendizaje esperado Dos de esas formas de interacción son la comunicación y la negociación de significados. Para

[1] ARIAS, J. (2005) Aprendizaje Cooperativo. 2a Edición. Bogotá: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

Ponte (1997), la comunicación se refiere a la interacción que se da por medio del lenguaje, que para el caso del estudio de objetos matemáticos, es una mezcla entre lenguaje cotidiano y lenguaje matemático. En cuanto a la negociación de significados, Ponte considera que es la manera en que la profesora y los estudiantes presentan la forma de ver los conceptos y procesos matemáticos, los perfeccionan y ajustan al conocimiento matemático.

Desde esta perspectiva, el ambiente de aprendizaje que se genere en el aula es un factor determinante en los resultados del nivel de aprendizaje en el estudio de objetos matemáticos, para nuestro caso el estudio de objetos geométricos. La forma como se genere este ambiente, hace que el trabajo que se realice en clase tenga un significado mayor o menor para cada estudiante, dependiendo la forma de interacción de cada uno de ellos con el entorno en el aula. Conocer y establecer normas de interacción es importante para la comunicación de ideas, realización de tareas, y para las relaciones entre los miembros de una comunidad, entre otras. Además, determina la formalidad con que se aborda el estudio de los conceptos, las tareas y subtareas que se proponen para cumplir las metas propuestas por el profesor.

Según Ponte (1997), existen principalmente dos ambientes en las clases de matemáticas: uno donde el contenido es introducido por el profesor y los alumnos son receptores de la información; y otro, en el que el conocimiento es construido a partir de la actividad matemática realizada en el aula, en donde los alumnos participan activamente y el profesor dinamiza y organiza las ideas para lograr el aprendizaje. Este segundo se ajusta al ambiente de aprendizaje que se genera en el grupo donde se desarrolla la propuesta a estudiar, el cual se caracteriza por los siguientes aspectos:

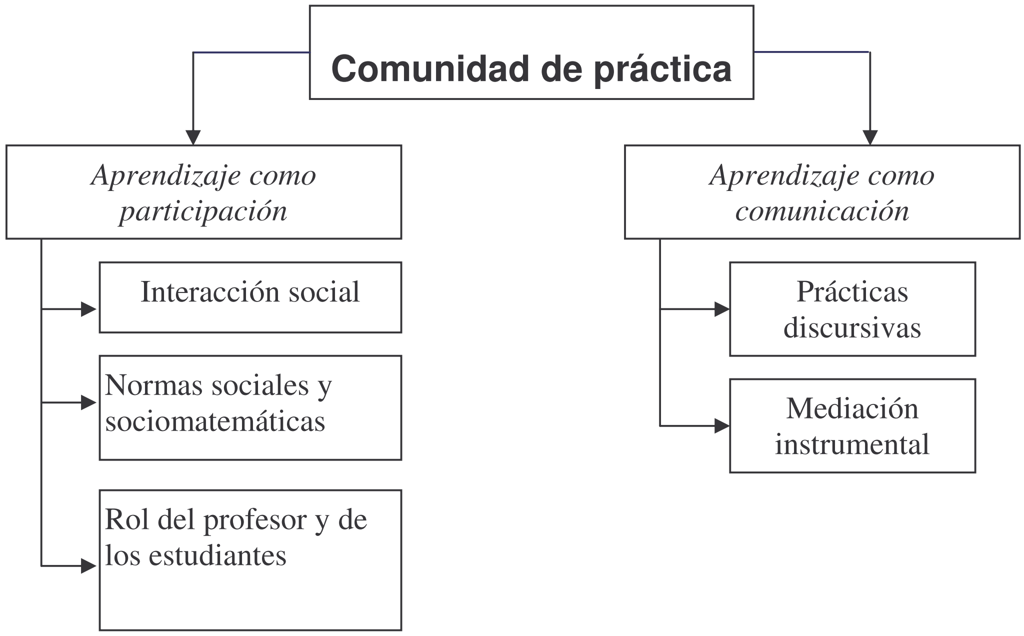
- Se determina un tiempo para que los estudiantes exploren y den solución a la situación problema propuesta por la profesora.
- Se usa la calculadora como herramienta que media el aprendizaje.
- Se usa proyector de acetatos y view screen para facilitar la comunicación entre los miembros de la comunidad.

- Se valoran y estudian las ideas de los estudiantes, con el fin de contribuir a la formación de un sistema axiomático.
- La profesora indaga constantemente sobre las afirmaciones de los estudiantes, con el fin dar sentido a la actividad matemática generada en el aula. Ellos deben justificar cada una de las afirmaciones realizadas utilizando argumentos matemáticos.
- Los estudiantes deben analizar críticamente las propuestas de sus compañeros y profesor.

En este ambiente, el uso de la calculadora permite generar un contexto en el que los estudiantes participen activamente en la aceptación o no de las ideas de sus compañeros, en relación con los objetos geométricos trabajados, permitiendo así que el estudiante forme una actitud crítica e investigadora y fortalezca su capacidad de comunicación. El ambiente descrito es denominado "Comunidad de práctica de indagación". En él, las clases se organizan de tal forma para que los estudiantes propongan ideas que respondan a los argumentos matemáticos de sus compañeros, o formulen conjeturas como respuestas a situaciones problema propuestas por la profesora. Otras actividades que le corresponden a la profesora son organizar el discurso, diseñar las tareas y subtareas, de tal forma que se facilite el aprendizaje de los alumnos, entendiendo por subtareas, todas aquellas tareas que la profesora propone durante el análisis de las soluciones que los estudiantes dan a la tarea propuesta. El realizar estas actividades, le exige, a la profesora, que valore las ideas, observe, escuche, respete las diferencias y dificultades, realice preguntas y proponga tareas que desarrollen la comprensión de los estudiantes.

Según Samper, Camargo y Perry (2006), una comunidad de práctica de indagación se refiere a un grupo de personas que comparten una experiencia de aprendizaje, dentro de un ambiente dirigido a la "investigación matemática" en donde a partir de la exploración, formulación de conjeturas y demostraciones se producen y valoran argumentos matemáticos. En este ambiente los marcos conceptuales, perspectivas y recursos llegan a formar parte del conocimiento común, lo que genera un compromiso con la actividad de aprendizaje, haciendo que cada uno de los miembros reconozca su importancia y se identifique dentro de la comunidad.

Dentro de una comunidad de práctica de indagación matemática son *la participación y la comunicación* como perspectivas de aprendizaje (Ver cuadro 1), las que dan sentido al conocimiento que se construye. La primera se refiere al aprendizaje como participación y su relación con las interacciones que se generan en el proceso, las normas que se establecen y los roles que cada uno desempeña; la segunda hace referencia al aprendizaje como comunicación, valiéndose de la construcción de discursos y del uso de instrumentos de mediación con los cuales un aprendiz se involucra en la construcción de significados. (ver, Samper, Camargo y Perry, 2006)



Cuadro 1. Perspectivas centrales del aprendizaje dentro de una comunidad de práctica de indagación (Tomado de Samper, Camargo y Perry 2006)

4.2 LA GEOMETRÍA DINÁMICA

Los instrumentos que se usan en el aula pueden tener efecto sobre el aprendizaje dentro de una comunidad de práctica de indagación, específicamente en el aprendizaje de la demostración, si las actividades que requieren de su uso están bien diseñadas. Es importante resaltar el papel que pueden jugar los programas de geometría dinámica, para nuestro caso el software *Cabri*, como instrumento de mediación del conocimiento dentro del desarrollo de tareas que inviten a la resolución de problemas y potencien la exploración dirigida al descubrimiento, la formulación de conjeturas, la generalización y la búsqueda de ejemplos y contraejemplos. Según Ponte (1997), el trabajo con las calculadoras puede, llevar a los estudiantes a formular conjeturas, y además, estimular una actitud investigadora, un pensamiento critico y creativo, y enriquecer el tipo de razonamiento y de argumentos que utilizan para la actividad matemática.

Como observan Samper, Camargo y Perry (2006), las diferentes herramientas de mediación instrumental, como los programas de geometría dinámica, favorecen entornos de aprendizaje, dentro de la concepción del aprendizaje como construcción social del conocimiento, que permiten organizar las acciones en clase alrededor de la actividad demostrativa. Se potencia una dinámica interactiva entre tareas de construcción geométrica y la práctica de la justificación.

Para tener una mayor visión sobre el uso de la geometría dinámica, enfatizando en el software Cabri como instrumento de mediación del conocimiento, a continuación se presentan algunas ventajas de su uso, los diferentes tipos de arrastre y construcciones que se pueden lograr, y el uso que se le da en el curso en donde se desarrollo la experiencia que con este trabajo se reporta., ya que la geometría dinámica, fue un instrumento valioso en el desarrollo de ésta.

4.2.1 Algunas ventajas del uso de la geometría dinámica

Para el estudio de la geometría son de gran importancia las representaciones gráficas y la percepción visual de esas representaciones. Existen varias herramientas que pueden ayudar a la construcción de éstas, entre las que se encuentra el compás, la regla, el transportador, etc., pero las representaciones que se logran sólo permiten estudiar una en particular, mirar las características y propiedades geométricas a partir de una figura con medidas determinadas, careciendo de elementos suficientes para generalizar resultados. Pero el uso de los diferentes software geométricos (Cabrí, Regla y compás, etc), para representar situaciones, en la pantalla de una calculadora o computador, abren la posibilidad de realizar análisis figurativos[2], ya que se pueden estudiar los objetos geométricos atendiendo a la forma que tienen y las propiedades que cumplen, independientemente de las cualidades del objeto, como medidas de las longitudes de sus lados, de perímetros, áreas, etc. Esto es una de las principales ventajas que tiene el trabajo con la geometría dinámica.

Una segunda ventaja, es la facilidad de mover puntos, segmentos y otros elementos de una figura, para poder observar cambios o invariantes[3] en la representación, haciendo que la geometría dinámica se convierta en instrumento poderoso para el aprendizaje de la geometría. Para representar un objeto geométrico con las herramientas proporcionadas por un ambiente computacional, se debe hacer uso de las propiedades geométricas del objeto, lo que obliga a seleccionar los comandos adecuados para hacer la construcción, llevando a la exploración del ambiente virtual, y al desarrollo de percepción visual. A partir de la interacción con el software se impulsa la construcción de nuevo conocimiento.

Otra de las grandes ventajas, citada por Gutiérrez (2005), de un software de geometría dinámica es "la facilidad y rapidez con que los estudiantes pueden realizar mediciones y disponer de un gran número de ejemplos tan variados como quieran"[4]. Esto permite que a partir de representaciones particulares, los estudiantes puedan llegar a generalizar algunas propiedades de los objetos estudiados, para formular y verificar conjeturas, que surjan de

---

[2] El *análisis figurativo* se realiza cuando el estudio del objeto geométrico se centra en su forma y propiedades, independientemente del tamaño o cualquier otra cualidad del objeto. (Tomado de SAMPER C., et al. (2003).)

[3] Los *invariantes* en una representación geométrica, son las características o propiedades que el objeto geométrico siempre se va a mantener sin importar su tamaño o posición en el plano. Por ejemplo, los ángulos del cuadrado son rectos sin importar el tamaño ni posición en que éste se represente. (Tomado de SAMPER C., et al. (2003).)

[4] *GUTIÉRREZ, A.* (Septiembre, 2005) Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de Geometría dinámica. En: Investigación en educación matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM.

los problemas propuestos. El test del arrastre, herramienta que brinda la posibilidad de revisar las construcciones hechas, permite verificar si la construcción cumple las propiedades obligadas, y si aquellas que descubren y parecen ser consecuencia lógica de las construidas, realmente lo son.

4.2.2 La acción del arrastre

La finalidad que tiene un estudiante cuando arrastra algún elemento de la construcción realizada con la geometría dinámica, para realizar una exploración de ésta, puede variar. Por ello, varios investigadores han catalogado el uso del arrastre. Entre los citados por Gutiérrez (2005) se encuentra los siguientes:

Test de arrastre: Este arrastre se hace para comprobar si la construcción conserva las condiciones del problema; es decir, si la figura creada sigue manteniendo las propiedades o no exigidas en el problema.

Arrastre errático: Es el arrastre que se hace de forma aleatoria con la finalidad de modificar un dibujo sin importar como es esa modificación. Este tipo de arrastre es muy frecuente cuando, luego de haberse construido una figura que se ajusta al enunciado de un problema, el estudiante empieza a explorar la figura buscando invariantes matemáticos, sin tener alguna idea previa de qué relación pueda existir entre las partes de la figura representada.

Arrastre guiado: Se arrastra un punto u otro objeto con el fin de obtener un caso particular de una figura construida. Un caso frecuente de este arrastre es cuando el estudiante ha construido un cuadrilátero general, y modifica el dibujo para que ese cuadrilátero se transforme en un cuadrilátero específico.

4.2.3 Diferentes tipos de construcción

Teniendo en cuenta diferentes investigaciones sobre el uso de geometría dinámica en la educación matemática, Laborde (2006) y Healy (2000) distinguen dos tipos de construcciones dinámicas, realizadas con ayuda de software: construcciones robustas y construcciones blandas.

Construcciones blandas: son aquellas construcciones que a través del arrastre permiten acomodar una figura para que visualmente cumpla las condiciones del problema propuesto. Este tipo de construcciones suelen ser el primer acercamiento del estudiante al problema y le ayuda a identificar relaciones de dependencia entre las características del objeto geométrico construido. Además, también son utilizadas en la enseñanza de las matemáticas, para ayudarles a los estudiantes a entender mejor nociones como dependencia entre propiedades de una figura, la implicación, hipótesis y conclusión, entre otras.

Construcciones robustas: son aquellas construcciones que se hacen teniendo en cuenta las definiciones o características de los objetos y relaciones geométricas exigidas en el problema dado. Por tanto, las propiedades se mantienen invariantes en el momento de realizar el test del arrastre.

Cada tipo de construcción lleva a que los estudiantes propongan conjeturas diferentes para una misma tarea propuesta.

4.2.4 Uso de Cabri en el curso de Geometría Plana

Teniendo en cuenta la importancia que tiene la calculadora en el aprendizaje de la geometría, particularmente en el curso donde se desarrolló la experiencia, es necesario resaltar algunos usos de Cabri que ilustran su papel como herramienta en la construcción del conocimiento. El grupo de investigación Æ · G (Aprendizaje y Enseñanza de la

Geometría)[5], ha identificado diferentes aspectos del papel de la geometría dinámica en el curso de Geometría Plana, los cuales se listan y describen a continuación.

1. *Uso de Cabri para entender que el cumplimiento de la tesis de un enunciado "si… entonces…" depende de todas las condiciones de la hipótesis.*

En ocasiones es interesante estudiar las consecuencias de eliminar algunas condiciones de la hipótesis de un teorema, o las propiedades de algunas definiciones, para comprender el papel que cumple cada una de ellas, y así poder captar mejor las condiciones exigidas tanto en las definiciones como en los teoremas. En estas situaciones, con Cabri se pueden hacer diversas construcciones que ilustran cómo la ausencia de alguna condición cambia los resultados que se esperan.

2. *Uso de Cabri para descubrir relaciones geométricas entre las partes de figuras que podrían involucrarse en la demostración.*

En el estudio de diversas situaciones geométricas, en las que no se tiene representación grafica, las construcciones que se pueden realizar en Cabri, con las propiedades que exigen las condiciones establecidas en la hipótesis, permiten que a través de la exploración de las figuras se identifiquen las relaciones geométricas que existen entre las partes constituyentes de la figura. Tales relaciones pueden evocar elementos teóricos para la demostración.

3. *Uso de Cabri para apoyar la comprensión de relaciones geométricas que pueden quedar "ocultas" bajo enunciados de tipo más algebraico que geométrico.*

En ocasiones, un contenido específico que hace parte del desarrollo temático del curso puede ser objeto de diferentes tratamientos, algebraicos o geométricos. Cuando un problema cuyo trasfondo es una situación geométrica, y se formula para ser resuelto con métodos algebraicos, es posible transformar el enunciado para que su parte geométrica sea lo que predomina y que, a partir de la comprensión de las relaciones geométricas involucradas, se establezcan las relaciones algebraicas correspondientes.

---

[5] El grupo de investigación *Æ · G,* Aprendizaje y enseñanza de la geometría, del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, está conformado, en este momento, por los profesores Carmen Samper, Leonor Camargo, Patricia Perry, Armando Echeverri y Oscar Molina.

4. *Uso de Cabri para propiciar la creatividad, a través de construcciones auxiliares, para elaborar argumentos que llevan a la demostración de teoremas.*

En el curso de Geometría Plana se proponen problemas abiertos, para los que el análisis mediado por la geometría dinámica da lugar a conjeturas que se constituyen en solución del problema. Para poder demostrar muchas de estas conjeturas, se necesitan construcciones auxiliares. El uso de Cabri es fuente de ideas para construcciones auxiliares pues permite que los estudiantes, por medio de la exploración, ensayen distintas opciones y determinen cuál puede ser útil en la construcción de las demostraciones.

5. *Uso de Cabri para determinar lo "dado" y lo que se debe demostrar.*

Luego que los estudiantes han explorado problemas abiertos y formulado conjeturas, una de las estrategias que la profesora usa en clase para determinar si ésta es coherente con la construcción, es solicitar a los estudiantes que hagan un recuento de la construcción realizada. Suele suceder que los estudiantes no perciben todas las condiciones que han usado para la construcción de su representación, y por tanto la hipótesis o tesis de la conjetura formulada no es correcta.

6. *Uso de Cabri para crear situaciones que dan lugar a suficientes resultados para poder construir una porción del sistema axiomático.*

En el curso se trabaja a partir de problemas abiertos que favorecen la exploración dirigida al descubrimiento, la formulación de conjeturas, y la generalización. Tales conjeturas, guiados por la profesora y a través de la interacción entre los estudiantes, se van organizando dentro de un sistema axiomático en construcción. Dos ejemplos de este uso son aquellos que:

   a. *crean la necesidad de incluir teoremas dentro del sistema para poder probar conjeturas.*
   b. *dan lugar a propiedades de un objeto geométrico, que se deben organizar en definición y teoremas relacionados a éste.*

7. El uso de Cabri para determinar la validez de conjeturas formuladas por otros.

Luego que los estudiantes han propuestos conjeturas, como solución a una situación propuesta en clase, la profesora busca que el grupo realice la construcción correspondiente a cada conjetura dada, para analizar la validez de ésta, antes de proceder a construir su demostración.

8. El uso de Cabri para entender el desarrollo lógico de una demostración

Mientras los estudiantes realizan la construcción, en Cabri, de una representación que corresponde a una situación propuesta, ellos usan conocimientos geométricos que coinciden con los elementos de la teoría y la organización requerida, para desarrollar la demostración de la conjetura propuesta. Por ello, el recuento que hacen de la construcción les permite reconocer los pasos de la demostración de la conjetura.

4.3 MARCO MATEMÁTICO

A continuación se presentan algunas de las definiciones y teoremas que son estudiados en un curso de geometría plana, con relación a los cuadriláteros y sus propiedades. Este resumen es una recopilación del desarrollo teórico que proponen dos textos de geometría, Clemens, R. y O'daffer, G. (1998), y Moise, E. y Downs, F. (1964).

Cuadriláteros

Definición: Sean A,B,C y D cuatro puntos coplanarios. Si tres cualesquiera de ellos no son colineales y los $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD},$ y $\overline{\boldsymbol{DA}}$ se intersecan solamente en sus extremos, entonces la unión de ellos se llama cuadrilátero.

Definición: Un cuadrilátero es convexo si dos cualesquiera de sus vértices no están en lados opuestos de una recta que contiene a un lado del cuadrilátero.

Los cuadriláteros convexos se clasifican según el número de lados paralelos que tengan, así:

Paralelogramo: cuadrilátero en el cual ambos pares de lados opuestos son paralelos.

Los paralelogramos con propiedades especiales reciben nombres específicos. Estos se subdividen en:

Rombo: paralelogramo con ambos pares de lados opuestos paralelos. (Fig. 1)
Rectángulo: paralelogramo cuyos ángulos son todos rectos. (Fig. 2)
Cuadrado: rectángulo con cuatro lados congruentes. (Fig. 3)

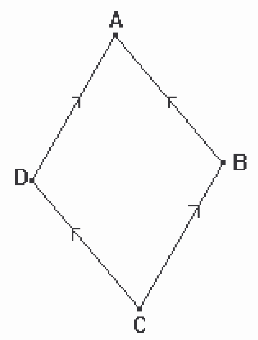


Figura 1

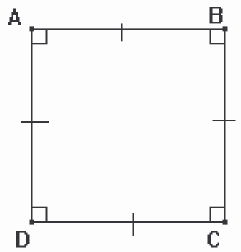


Figura 2

Figura 3

Trapecio: cuadrilátero con exactamente dos pares de lados paralelos (fig. 4). Los lados paralelos se llaman base mayor y base menor.

Un trapecio especial es el *isósceles* (fig. 5), en el cual los lados no paralelos son congruentes.

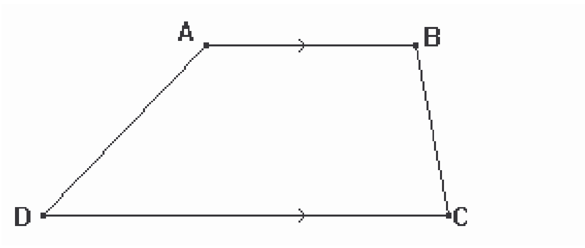


Figura 4

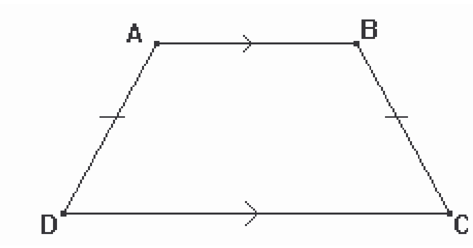


Figura 5

PARALELOGRAMOS

Las propiedades básicas de los paralelogramos son:

Teorema 1 Cada diagonal descompone a un paralelogramo en dos triángulos congruentes.

Teorema 2 Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.

Teorema 3 Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.

Teorema 4 Los pares de ángulos adyacentes de un paralelogramo son suplementarios.

Teorema 5 Las diagonales de un paralelogramo se bisecan.

Además, se establecen las propiedades suficientes para que un cuadrilátero sea paralelogramo.

Teorema 6 Si los lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Teorema 7 Si un cuadrilátero tiene un par de lados opuestos paralelos y congruentes, entonces es un paralelogramo.

Teorema 8 Si los ángulos opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Teorema 9 Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Las propiedades de los paralelogramos son útiles para demostrar hechos geométricos importantes, tales como:

Teorema 10 El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.

Teorema 11 Los puntos medios de los lados de un cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo.

Rectángulos, rombos y cuadrados.

Existen teoremas que permiten determinar el tipo de paralelogramo que representa una figura dada, a partir de relaciones entre los ángulos o segmentos determinados por las partes del cuadrilátero.

Teorema 12 Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, entonces tiene cuatro ángulos rectos, y el paralelogramo es un rectángulo.

Teorema 13 Un paralelogramo es un rectángulo si, y sólo si, sus diagonales son congruentes.

Teorema 14 En un rombo, las diagonales son perpendiculares entre si.

Teorema 15 Un paralelogramo es un rombo si, y sólo si, sus diagonales se bisecan y son perpendiculares.

Teorema 16 Un paralelogramo es un rombo si, y sólo si, cada diagonal biseca un par de ángulos opuestos.

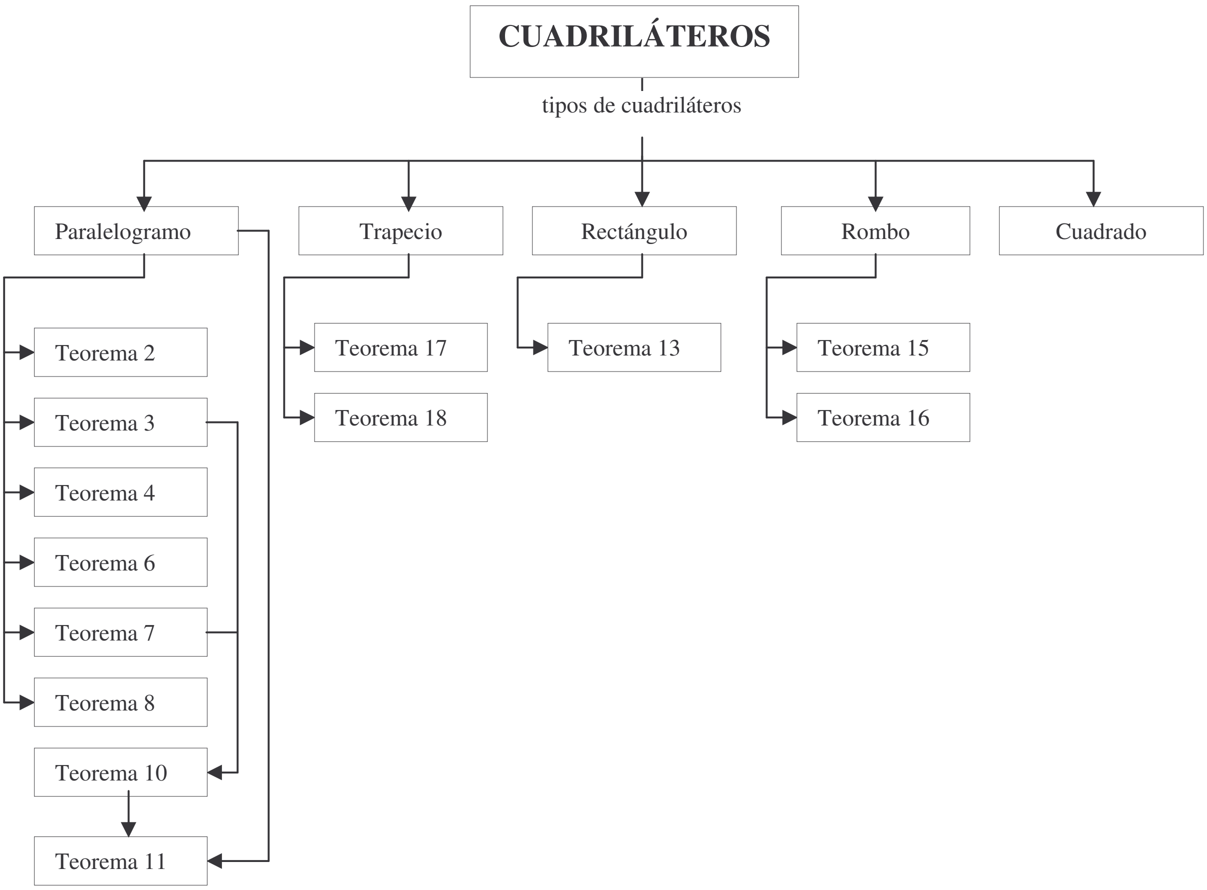
TRAPECIOS

Los teoremas sobre los trapecios son:

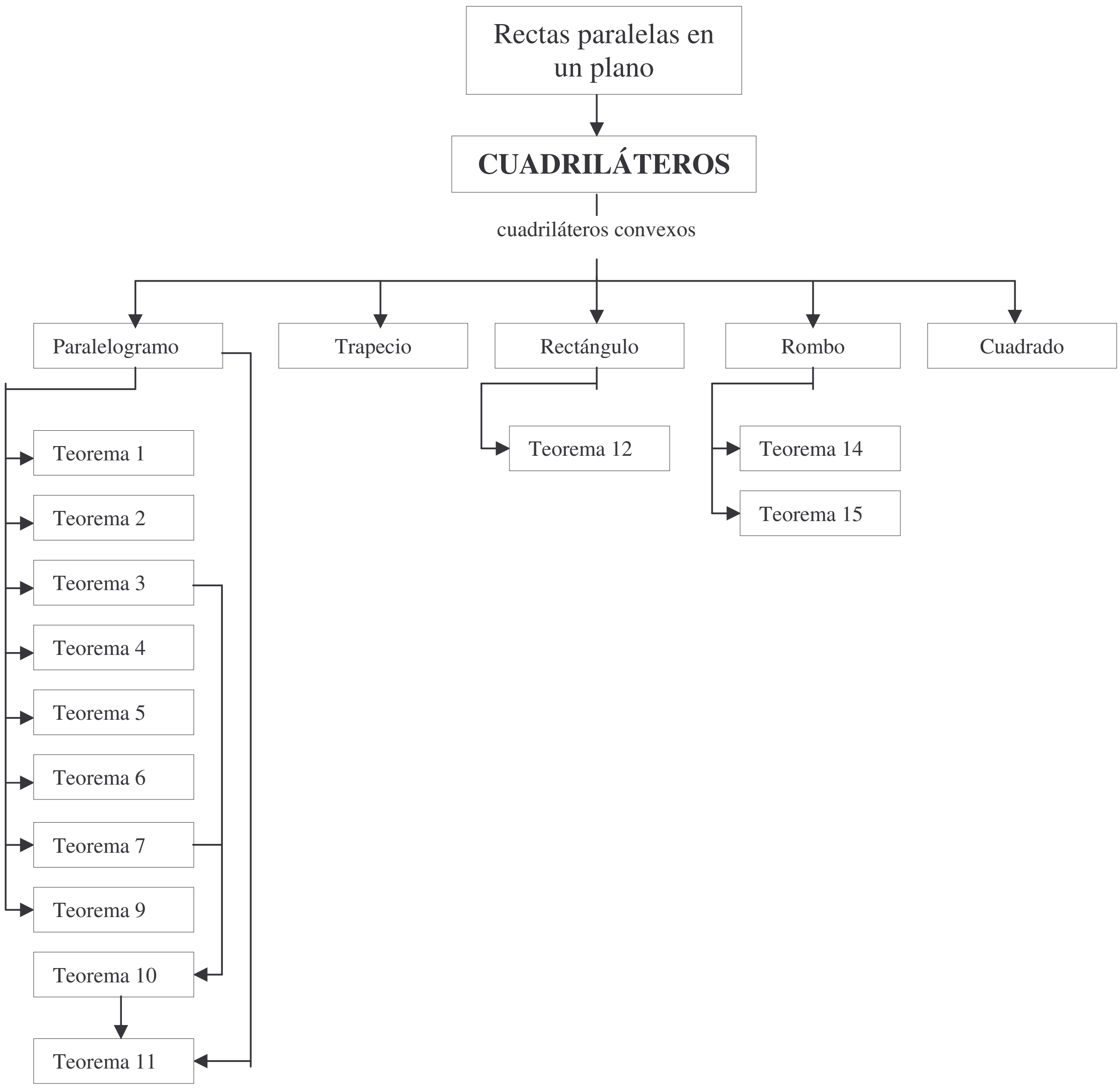
Teorema 17 El segmento que une los puntos medios de los dos lados no paralelos de un trapecio es paralelo a las dos bases y tiene una longitud igual a la semisuma de las longitudes de las bases.

Teorema 18 En un trapecio isósceles, los ángulos de la base y las diagonales son congruentes.

Los esquemas que se presentan a continuación ilustran como se aborda el tema de cuadriláteros desde los dos libros de texto mencionados, teniendo en cuenta las definiciones y teoremas listados anteriormente.



Cuadro 2. Esquema del desarrollo teórico "cuadriláteros"
del libro Clemens, R .y O'daffer, G. (1998)



Cuadro 3. Esquema del desarrollo teórico "cuadriláteros" del libro Moise, E. y Downs, F. (1964).

5. ASPECTOS METODOLÓGICOS

5.1 FUENTE DE INFORMACIÓN

La principal fuente de información para el análisis de la propuesta, *Cuadriláteros*, la constituyen las trascripciones de las grabaciones de audio y video de las tres clases desarrolladas durante la experiencia, y mi diario de campo, resultado de la observación no participante de dichas clases. El diario de campo permitió interpretar las intervenciones de los estudiantes, quienes en ocasiones no se refieren de manera clara a los objetos geométricos de los cuales hablan. La elaboración de los protocolos se realizó de forma literal, sin incluir apreciaciones del transcriptor, ya que este material es usado con diferentes fines dentro del grupo de investigación, en el que se inscribe la presente monografía. De esta forma se asegura que los fragmentos de protocolo que se muestran en el análisis, reflejen de forma fiel las intervenciones de los estudiantes. El protocolo completo ocupa aproximadamente 64 páginas.

Además, acompañé a la profesora mientras hacía las preparaciones de clase, que también se registraron en audio. Tuve acceso a los escritos que ella hacía, en el computador, con el propósito de organizar los aportes de los estudiantes, que inicialmente eran las conjeturas que entregaron al explorar la situación problema, y posteriormente las diferentes propuestas que surgían en clase para definir objetos geométricos o establecer teoremas. Como yo conocía el plan que tenía la profesora para cada clase, fue fácil reconocer las subtareas que ella proponía como respuesta a inquietudes o problemáticas que surgían, en el transcurso de las clases y que no habían sido planeadas de antemano por ella.

Por otro lado, asistí a todas las clases durante el semestre, lo que hizo que en el momento de la aplicación tuviera un bagaje que me permitió realizar una caracterización más real del grupo de los estudiantes del curso en el cual se realizó la experiencia.

5.2 METODOLOGÍA

El análisis que se hace es cualitativo, en el que se identifican algunos aspectos y características de la experiencia. La metodología empleada para hacer el análisis condujo, en primer lugar, a identificar cómo y por qué surgían los elementos teóricos que se iban incorporando al sistema axiomático en construcción, y el momento en el que se institucionalizaban. En segundo lugar, permitió buscar aspectos que identificaban cómo la profesora gestionaba la clase para enriquecer la construcción del sistema axiomático, cómo era el uso de la calculadora, y cómo fue el desarrollo teórico para la construcción del sistema axiomático local.

Para comenzar el proceso de análisis de los protocolos, realicé una lectura global de ellos, lo que me permitió obtener una mejor caracterización del trabajo de los estudiantes durante las clases. Luego, con el fin de reportar la ruta de aprendizaje que se desarrolló a partir de la situación, realicé una descripción de cada una de las sesiones, diseñé esquemas que resumen cómo iban surgiendo los elementos del sistema axiomático a partir de las conjeturas realizadas por los estudiantes debido a la gestión de la profesora, y las intervenciones de los estudiantes. En un esquema final se muestra el desarrollo del sistema axiomático local diseñado, teniendo en cuenta el orden en que iban surgiendo los elementos teóricos. Identifiqué cómo la profesora gestionaba los aportes de los estudiantes, las subtareas que ella proponía para enriquecer la propuesta planteada, y el uso de la calculadora durante la experiencia. Para identificar el uso de la calculadora, usé el listado *Uso de Cabri en el curso de Geometría Plana,* elaborado por el grupo Æ · G (Aprendizaje y enseñanza de la geometría) [Ver página 22-25].

6. CARACTERIZACIÓN DEL GRUPO

La experiencia de enseñanza que se describe y analiza fue realizada con un grupo de 35 estudiantes en un curso de Geometría Plana, del programa de formación inicial de profesores de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, en el cual se conforma una comunidad de práctica de indagación, cuya finalidad es aprender a demostrar. La experiencia se desarrolló durante tres sesiones de clase, en donde los estudiantes trabajaron en grupos de a tres o cuatro. Cada grupo tenía dos calculadoras TI-92, que cuentan con el software *Cabri.* Las sesiones fueron las tres últimas clases del semestre académico, dos sesiones de dos horas y una de una hora. En el momento de la experiencia que se reporta, los estudiantes tenían habilidad en el manejo de la calculadora, ya que durante el semestre se trabajó continuamente con ella.

La experiencia consistió en resolver una situación problema teniendo que realizar exploraciones con la geometría dinámica, y formular conjeturas que posteriormente serían objeto de estudio para decidir si se podían incorporar al sistema axiomático que se estaba formando. Los miembros de los grupos anotaban en su cuaderno de geometría dinámica[6] las diferentes construcciones que realizaban durante la exploración y las conjeturas a las que llegaban. Tras haber realizado esta actividad, hubo un receso de clases durante dos semanas, por problemas de orden público en la Universidad. Al regresar a clase, se realizó la respectiva socialización y análisis de las conjeturas. Para ello, la profesora había trascrito, en un acetato, las conjeturas, en un orden preestablecido. Con un retro-proyector, éstas se proyectaron para que todo el grupo pudiera leerlas y analizarlas; también se usó un view screen, elemento que permitía que cada grupo presentara, a la comunidad, las construcciones que realizaron durante la exploración, así como las que realizaban en el momento del estudio de las conjeturas propuestas.

[6] Durante el semestre los estudiantes llevaron un cuaderno en donde reportaban las construcciones que realizaban con la geometría dinámica, y las conjeturas a las que llegaban, al tratar de dar solución a situaciones problemas propuestas. Éste se llamó Cuaderno de Geometría Dinámica.

Durante el semestre, la geometría dinámica jugó un papel importante en el momento de descubrir y conjeturar hechos geométricos, que en algunos casos, dieron lugar al estudio de elementos teóricos en el proceso de construcción del sistema axiomático. El uso de la geometría dinámica permitía una exploración exhaustiva de los objetos geométricos involucrados que llevaba a descubrir relaciones invariantes en las representaciones construidas, y permitía revisar la validez de aquellas propiedades que identificaban visualmente en las construcciones. Los problemas que se les proponían a los estudiantes eran situaciones abiertas que permitían diversas interpretaciones llevándolos a diferentes construcciones. Por ende, las conjeturas propuestas eran de diferente naturaleza y llevaron a abordar varios teoremas y definiciones del sistema axiomático, ya que el proceso de conjeturación que realizaban los estudiantes, para dar solución a las situaciones, generaba la necesidad de justificar y proveer elementos para satisfacer dicha necesidad; tales elementos aportaban a la construcción del sistema axiomático.

En el momento en que abordaron la situación propuesta, los estudiantes ya habían estudiado varios axiomas, definiciones, y teoremas de la geometría plana. Los objetos geométricos estudiados fueron: rectas, planos, ángulos, triángulos, y rectas paralelas y perpendiculares El estudio de los triángulos se centró en la relación de congruencia. En cuanto a hechos geométricos relacionados con el paralelismo, se tenían los siguientes teoremas:

- Dos rectas paralelas están exactamente en un plano.
- Dos rectas coplanares perpendiculares a la misma recta son paralelas
- Sea *l* una recta y P un punto que no está en *l*. Entonces hay al menos una recta que pasa por P que es paralela a *l*.
- Teorema AIP: Se dan dos rectas cortadas por una secante. Si dos ángulos alternos internos son congruentes, entonces las rectas son paralelas.
- Teorema PAI: Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.
- Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, los ángulos correspondientes son congruentes.

7. ANÁLISIS DESCRIPTIVO DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA

En este apartado se presenta el análisis de la aplicación de la estrategia de enseñanza que se llevó a cabo en un curso de Geometría Plana de la Universidad Pedagógica Nacional. Está estructurado teniendo en cuenta cada uno de los objetivos propuestos en la presente monografía, y se subdivide en desarrollo y preparación de clases, desarrollo teórico de la propuesta, tareas y subtareas en el proceso de construcción del sistema axiomático, y uso de Cabri en la experiencia.

La propuesta se centra en el estudio de los cuadriláteros y sus propiedades. La teoría que conformó el sistema axiomático local, surge a partir de las conjeturas que los estudiantes formularon como resultado de haber explorado, con ayuda del programa de geometría dinámica Cabri, la siguiente situación:

> *Estudie la relación entre el tipo de cuadrilátero y la propiedad una diagonal biseca a la otra.*

7.1 DESARROLLO Y PREPARACIÓN DE CLASES

A continuación se describirá la preparación de clase que la profesora realizó, y el desarrollo de cada una de las tres clases en donde se aplicó la propuesta, donde se evidencia como, a partir de las intervenciones de los estudiantes y la gestión que realiza la profesora en clase, se construye el sistema axiomático. Para cada una de las clases se muestra la preparación, el desarrollo, un esquema que resume la construcción de porción del sistema axiomático local, generado en esa clase, y la descripción de cómo la profesora gestionó la clase.

Primera clase

Preparación de clase

Luego que los estudiantes han entregado, por escrito, cada una de las conjeturas que establecen, y la descripción de la construcción que realizaron para llegar a la conjetura, la profesora las organiza según su estructura lógica, siendo ésta de dos tipos:

- Si un cuadrilátero… entonces las diagonales…
- Si las diagonales… entonces el cuadrilátero…

Posteriormente, determina el orden en que desea abordarlas en la clase, iniciando por aquellas que son falsas. Las conjeturas verdaderas las organiza según el tipo de cuadrilátero al que se refieren y a la propiedad que expresan, lo que facilita hacer definiciones inclusivas de cada objeto geométrico a medida que se realiza el estudio de ellos. A continuación se presenta la lista de conjeturas según el orden que la profesora estableció[7]. En cada numeral se recogen todas las conjeturas de los estudiantes que expresan la misma idea, y para cada conjetura se pone, entre paréntesis, el número del grupo[8] que la propone.

1. Cuando en un cuadrilátero, sus ángulos y lados son desiguales no siempre una diagonal biseca a la otra. (IV)

2. Si un cuadrilátero tiene al menos un par de lados paralelos entonces una de sus diagonales biseca a la otra. (X)

3. a) Cuando un cuadrilátero tiene dos pares de lados paralelos sus diagonales se bisecan. (I)

[7] Cada vez que se mencione una conjetura por un número, este corresponde al número asignado en la lista de conjeturas que la profesora organizó para el desarrollo de la clase.
[8] La profesora le asignó, como nombre a cada grupo de estudiantes, un número para así, hacer referencia a ellos fácilmente.

b) Si en un cuadrilátero hay dos pares de lados paralelos, entonces las diagonales se bisecan entre si. (VI)
c) Si un cuadrilátero tiene dos pares de lados paralelos entonces sus diagonales se bisecan entre si. (IX)
d) Si un cuadrilátero es paralelogramo, entonces sus diagonales se bisecan. (X)

4. Si en un cuadrilátero no hay dos pares de lados paralelos, entonces sus diagonales no se bisecan. (VI)

La profesora ha planeado solicitarles a los estudiantes que reescriban esta afirmación usando la contrarecíproca para que vean la relación con las siguientes conjeturas formuladas por otros estudiantes.

a) Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan entonces el cuadrilátero es paralelogramo. (V)
b) Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan entonces es un paralelogramo. (II)
c) Si las diagonales se bisecan mutuamente entonces el cuadrilátero es un paralelogramo. (VII)
d) Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan entre si entonces el cuadrilátero es un paralelogramo. (VIII)

5. a) Si las diagonales son congruentes entonces es un paralelogramo. (III)
b) Si las diagonales son congruentes, es un paralelogramo y se bisecan mutuamente. (V)
c) Si se bisecan y forman ángulos rectos es un rombo. (III)
d) Si una diagonal biseca a la otra entonces el cuadrilátero es un cometa. (II)
e) Si la diagonal de un cuadrilátero biseca a la otra y son perpendiculares entonces el cuadrilátero es cometa. (I)

6. a)Si un cuadrilátero tiene dos pares de lados congruentes entonces sus diagonales se bisecan. (IX)
   b) Si un cuadrilátero tiene dos pares de lados congruentes entonces sus diagonales se bisecan entre si. (X)
   c) Si un cuadrilátero tiene dos pares de lados paralelos y congruentes entonces sus diagonales se bisecan. (IX)

7. Si se prolonga la diagonal interior de una cometa no convexa, entonces biseca a la diagonal exterior. (VI)

8. Si una diagonal del cuadrilátero biseca a la otra, el cuadrilátero tiene dos pares de lados congruentes. (V)

Dentro del plan de la profesora, la metodología que usaría en clase, para el análisis de cada conjetura, consistió en verificar la correspondencia entre ésta y la construcción realizada con el software. Para ello, pensó en pasar a uno de los estudiantes del grupo proponente de cada conjetura, a que explicara su construcción, proyectando la imagen que tiene en la calculadora sobre la pared. La comunidad de estudiantes debían revisara si ésta es coherente con la hipótesis y si la propiedad que identifica es la correspondiente a la tesis.

Desarrollo de clase

En esta clase, la profesora comenta que la dinámica de trabajo a realizar es tratar de analizar las conjeturas propuestas, determinar cuáles son verdaderas, y demostrarlas para que formen parte del sistema axiomático que se ha venido construyendo. En el proceso de explicar la construcción y exploración que realizaron para conjeturar lo establecido, y verificar la validez de la conjetura, los estudiantes pueden usar la calculadora.

Se analiza la Conjetura 1, tal como lo había determinado la profesora, estudiando la tesis de ésta, ya que la forma como se encuentra escrita puede llevar a interpretar que la conjetura establece la posibilidad de tener un cuadrilátero con lados y ángulos desiguales en donde una diagonal biseca a la otra o en donde ninguna biseca a la otra. Por ello, la profesora pide a los estudiantes del grupo proponente que muestren la construcción que realizaron para llegar a la conjetura. Como el grupo no guardó la correspondiente construcción en la calculadora, ella propone a los demás estudiantes del curso, como una subtarea, que construyan las condiciones exigidas en la hipótesis de la Conjetura 1 para verificar si la tesis dada es posible. Mientras los estudiantes realizan la construcción, la profesora escucha a los miembros del grupo proponente, que le explican la afirmación que hicieron en su conjetura. De acuerdo con esta explicación, ella reescribe la conjetura, así:

> *Existe un cuadrilátero con lados y ángulos desiguales, en donde una diagonal biseca a la otra.*

Varios estudiantes realizaron construcciones blandas, en las que mostraban cuadriláteros, en donde una diagonal bisecaba a la otra, que no tenían alguna propiedad especial para los ángulos y lados. Una de esas construcciones fue la realizada por Ferney, quien mientras interactúa con la profesora, muestra su contraejemplo al resto del grupo. A continuación se ilustra la interacción que se presentó.

Profesora	Vamos a ver la propuesta de Ferney, de un cuadrilátero con todos los lados desiguales, donde se cumple que una diagonal biseca a la otra.
Ferney	[Conecta el view screen, y proyecta la imagen que tiene en la calculadora]

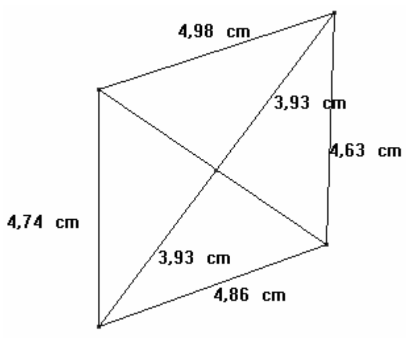


Figura 6

Profesora	¿Cuál diagonal está bisecada?
Ferney	Este segmento [señala con el cursor en la calculadora].
Profesora	Claro, es que no me nombraste a los vértices. Puedes nombrar rápidamente los vértices porfa. Entonces, tienes una diagonal bisecada, ¿cómo puedes asegurar que te dio?
Ferney	Porque sus medidas son iguales.
Profesora	¿Cómo lo construiste? Mejor dicho. Pongamos atención. ¿Cómo lo construiste? ¿Qué hiciste Ferney?
Ferney	Primero era un cuadrilátero, después trazamos las diagonales y después empecé a trabajar con un cuadrilátero, que evidentemente tenía todos sus lados desiguales. Y después trate de cuadrar las diagonales que se bisecara una aunque sea.
Profesora	¿Y trataste de cuadrar las diagonales? O sea cuéntame una cosa ¿si lo arrastramos se daña todo? ¿Se daña que la diagonal esté bisecada?
Ferney	[Arrastra un vértice del cuadrilátero] Una que biseque a la otra.
Profesora	Se daña que la diagonal se biseque. Si, o sea que ellos lo están armando a puro ojímetro. Si yo quisiera... Vuélvelo a poner como estaba. Pero él esta mostrando un ejemplo donde parecía que si se bisecaba una diagonal. Él hizo una construcción. Construyo cualquier cuadrilátero y lo fue deformando de tal manera que una diagonal biseque a la otra y le dio un cuadrilátero con lados desiguales y ángulos desiguales.

Así como la construcción del contraejemplo de Ferney, las construcciones del resto de ejemplos presentados, tomaban un cuadrilátero cualquiera, cuadraban las diagonales hasta que una bisecara a la otra, y posteriormente revisaban que efectivamente los lados y ángulos del cuadrilátero eran desiguales, haciendo uso de un arrastre guiado para poder llegar a los contraejemplos. Con ayuda del grupo, se reescribió la conjetura de la siguiente forma

Si en un cuadrilátero una diagonal biseca a la otra entonces los lados y ángulos pueden ser desiguales.

El grupo proponente no objetó, ya que la construcción realizada por sus compañeros es muy similar a la que ellos habían realizado. Después de establecer esta nueva conjetura, varios estudiantes realizan construcciones robustas, para verificar su validez. Con ello, se concluye que un cuadrilátero no tiene que tener alguna característica especial para que cumpla la condición propuesta en el problema.

Se continúa con el estudio de la Conjetura 2, para la cuál la profesora hace la aclaración que la expresión *al menos un par de lados paralelos*, quiere decir, uno o dos. Esto significaba que tocaba analizar ambos casos para poder decidir si la conjetura era cierta. Solicita a los estudiantes verificar en su calculadora lo que el grupo ha propuesto, pidiendo que primero se revise con un par de lados paralelos, y luego con los dos. Una estudiante, al revisar la primera opción, encuentra como contraejemplo un trapecio en donde las diagonales no se bisecan, lo que hace que la conjetura propuesta no sea aceptada por la comunidad.

Posteriormente, se realiza el análisis del tercer conjunto de conjeturas. Los grupos que proponen las primeras dos conjeturas explican la construcción que realizaron para llegar a ellas. Luisa, una de las integrantes de uno de los grupos, describe su construcción:

Luisa	Cada uno se encargaba de hacer un cuadrilátero diferente. Yo hice el rectángulo miré las diagonales y ahí nos dimos cuenta que efectivamente era.

Así como la descripción de Luisa, varias de las descripciones, de construcción y exploración, realizadas por los miembros de los grupos proponentes de las Conjeturas 3a y 3b, mencionan que construyeron rectángulos y luego miraron si las diagonales cumplían o no la propiedad. La profesora muestra inconformidad, ya que el objeto geométrico, rectángulo, no ha sido definido y por tanto, no es un elemento del sistema axiomático. Ella solicita que se defina, obteniendo las siguientes propuestas:

1. *Polígono con dos lados paralelos y congruentes.*

2. *Polígono con un par de lados paralelos y dos perpendiculares a los lados paralelos.*
3. *Cuadrilátero con un par de lados paralelos y ángulos congruentes.*

Es importante resaltar que en ese momento, tampoco se había definido paralelogramo, razón por la cual no se incluye ese término en las definiciones propuestas. Las dos primeras conjeturas del tercer grupo, no son aceptadas por el momento, ya que la construcción que los grupos habían realizado era de casos particulares, acción que teóricamente no permitía la generalización, como ellos lo habían hecho.

La discusión de la definición de rectángulo se deja para la clase siguiente, continuando con el análisis de la Conjetura 3c, para lo cual uno miembro del grupo proponente presenta una construcción para ésta. Mientras que el estudiante explica la construcción realizada, la profesora aprovecha para comentar, que la Conjetura 3c es muy similar a la 3d, con la diferencia que la última menciona al paralelogramo, término que no se ha definido. Por ello, la profesora solicita la definición correspondiente, primero al grupo proponente y luego a los demás estudiantes. Las propuestas son:

1. *Cuadrilátero con dos pares de lados paralelos y congruentes.*
2. *Cuadrilátero con un par de lados paralelos y ángulos congruentes.*
3. *Cuadrilátero con dos pares de lados paralelos.*

Se estableció la tercera como definición de paralelogramo, ya que es la más económica[9] de las propuestas. Luego de esto, se continuó analizando el conjunto de conjeturas agrupadas en el numeral. El proceso terminó cuando se agruparon en la siguiente proposición:

Si un cuadrilátero es paralelogramo entonces las diagonales se bisecan.

El siguiente paso consistió en demostrarla. Mientras los grupos trabajan en la demostración, la profesora se informaba sobre lo que estaba haciendo cada grupo y discutía con algunos

[9] Una definición económica es aquella que contienen la menor cantidad de características para definir un objeto matemático. Es decir, introduce la menor cantidad de elementos para caracterizar la figura.

estudiantes. Luego de un rato, uno de los estudiantes pasa y realiza la demostración, lo cual permitió incorporar el enunciado como teorema del sistema axiomático.

Luego la profesora aborda el análisis de las conjeturas identificadas con el numeral 4. Inicialmente se identifica la estructura lógica de la afirmación que es de la forma $\neg p \rightarrow \neg q$. Se genera una discusión sobre la contrarrecíproca y la inversa de una implicación, y se decide reescribir la conjetura de la forma $(q \rightarrow p)$, dada la equivalencia de la implicación y su contrarrecíproca.

Si las diagonales se bisecan entonces es paralelogramo.

Es así, cómo los estudiantes ven que las demás conjeturas quedan contenidas en ésta última. De nuevo, los estudiantes revisan la coherencia de las conjeturas propuestas con las construcciones realizadas por cada grupo, leyendo, de las hojas entregadas por los estudiantes, los pasos que reportan de la construcción. Se llega a que ninguna de las conjeturas corresponde con la construcción realizada, ya que todos los grupos reportaron haber construido primero el paralelogramo para luego mirar la propiedad que cumplían sus diagonales. En ese proceso, uno de los estudiantes del grupo que propuso la Conjetura 4d, reconstruye, en el tablero, la construcción realizada por su grupo, llegando mediante ésta a la siguiente conjetura.

Si un cuadrilátero es paralelogramo, los ángulos opuestos son congruentes.

A continuación se presenta parte del protocolo de la clase, en donde se evidencia el proceso descrito para el análisis de la Conjetura 4d.

Jairo: Construimos una segmento. Perdón construimos una recta. ¿Puedo pasar y le dibujo? Construimos una recta paralela a ella, construimos la transversal, entonces tomamos un ángulo cualquiera, el ángulo comprendido entre… voy a ponerle letras.

Profesora: Si, me parece porque yo estoy [perdida]. Por favor pongamos atención a lo que él hace. Entonces construiste dos paralelas.

Jairo: Y construí una transversal [dibuja en el tablero]

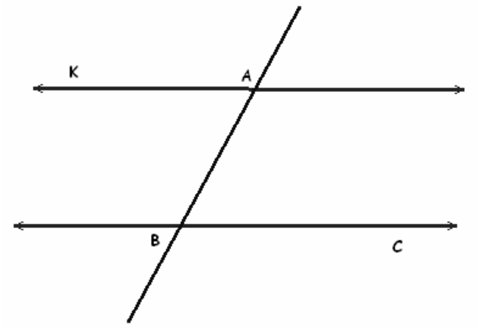


Figura 7

Profesora: ¿A quién?

Jairo: Transversal m. A este punto lo llamé A, a este B y entonces por el teorema que dice que este ángulo, el ángulo CBA era congruente con el ángulo KAB.Como éste es opuesto por el vértice de éste, entonces construí una recta paralela a éste.

Profesora: ¿Dónde?

Jairo: Que pasara por acá. [Apunta al punto C]

Profesora: Ah pero nada que ver con los ángulos. Entonces lo que hiciste fue construir una paralela aquí, a esta por C digamos [señala en la figura 8].

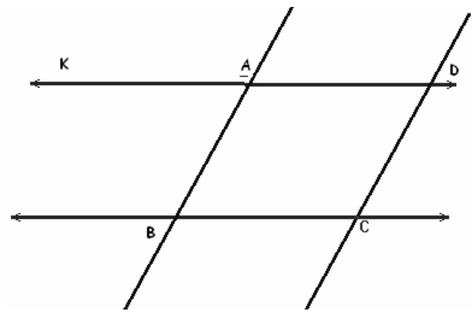


Figura 8

Jairo: Una paralela, y lo que hice fue por medio de…

Profesora: Pongan atención porque creo que esto va a dar lugar a un teorema muy importante.

Jairo: Como este ángulo es opuesto por el vértice a éste [se refiere a los ángulos KAE y EAD], entonces éste es congruente a éste. Luego como estas dos rectas son paralelas, entonces digo que éste ángulo, el ángulo marcado EAD es congruente con el ángulo ADC, por que son alternos internos entre paralelas. Luego digo que el ángulo ABC es congruente con el ángulo ADC (va señalando en el dibujo)

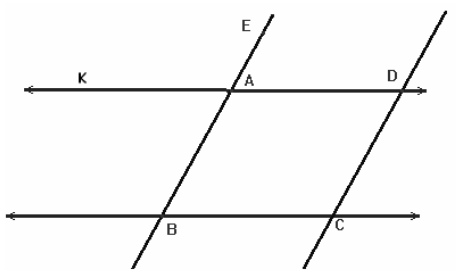
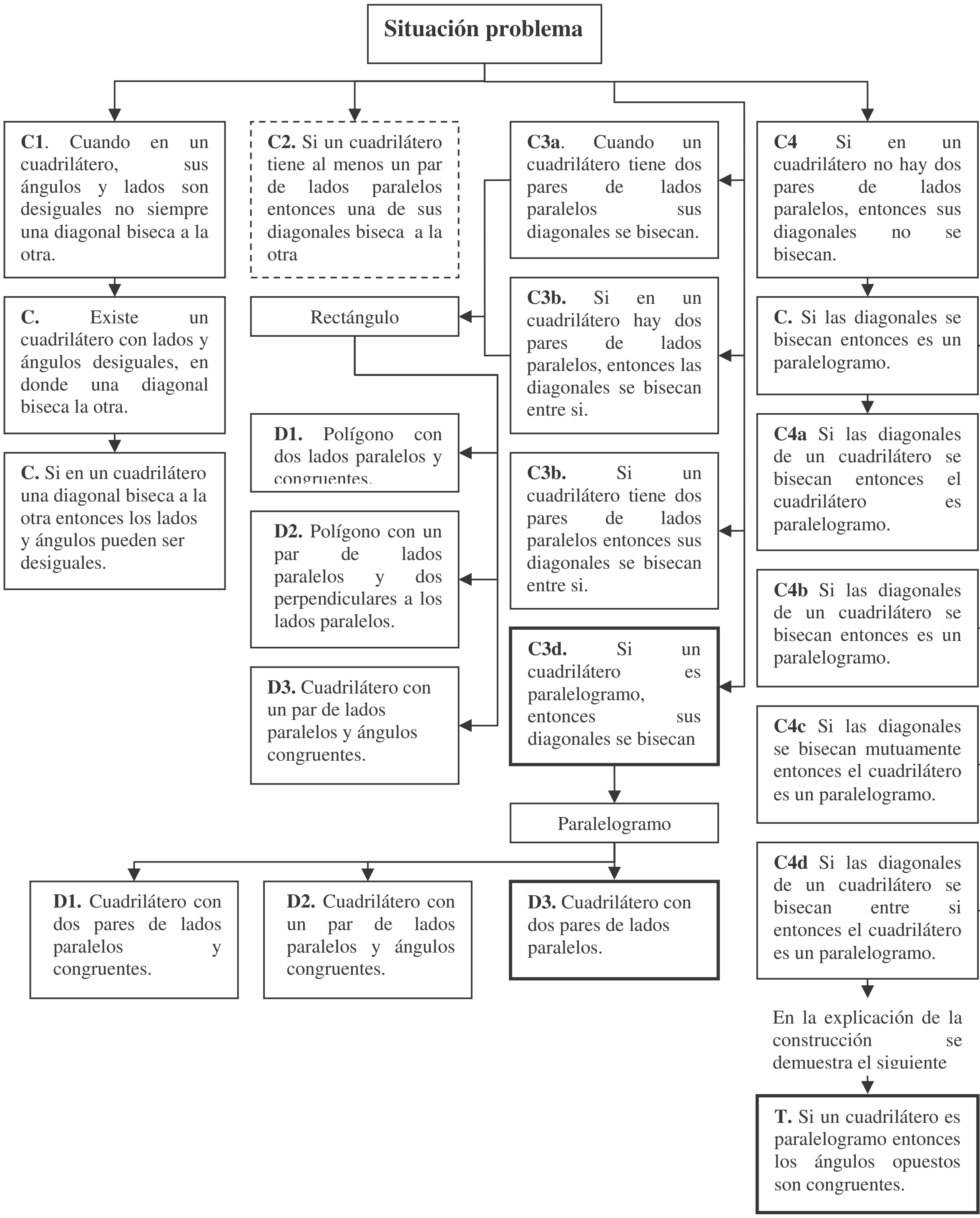


Figura 9

Profesora: O sea que Jairo lo que acaba de hacer es demostrarles a ustedes que *en un paralelogramo, los ángulos opuestos son congruentes*. Pero tu lo que construiste fue un paralelogramo; por eso digo que tu teorema es que: *si un cuadrilátero es paralelogramo, los ángulos opuestos son congruentes*. Y con eso llegaste a tu conjetura de que las diagonales se bisecan en un paralelogramo, para lo cual no es correcta la construcción.

La clase se termina con la introducción del teorema mencionado.

El cuadro que se muestra a continuación, y luego se explica, resume como se desarrolló la temática en esta clase. En cuadros punteados se encuentran las conjeturas que son falsas, para las cuales los estudiantes encontraron un contraejemplo, y en cuadros resaltados los elementos que se introdujeron al sistema axiomático.



Cuadro 4. Desarrollo de la primera clase.

Durante la clase se estudiaron los primeros cuatro grupos de conjeturas. La conjetura uno se rescribió de dos formas, y llevó a mostrar que la condición planteada en el problema no daba lugar a un cuadrilátero especial, permitiendo poner otras condiciones. La conjetura dos no es aceptada, ya que el grupo de estudiantes encuentra un contraejemplo para ésta. En el análisis de las dos primeras conjeturas del numeral 3, cuando se hace el recuento de las construcciones que llevaron a éstas, surge el objeto geométrico rectángulo, para el cuál se obtienen tres propuestas de definiciones que no son analizadas en esa clase; y de la cuarta conjetura de este numeral, surge el objeto geométrico paralelogramo, para el que se tienen tres propuestas de definición, que luego de analizarlas, se deja la tercera, y posteriormente se demuestra esta conjetura, que se introduce como teorema en el sistema axiomático local en construcción. En el análisis de la primera conjetura del numeral 4, se reescribe ésta logrando una conjetura que encierra las otras cuatro del numeral. Luego, se hace el recuento de las construcciones que llevaron a las conjeturas del numeral 4, y en el de la conjetura 4d, se demuestra el teorema *Si un cuadrilátero es paralelogramo entonces los ángulos opuestos son congruentes.*

Gestión de la profesora

Durante la clase la profesora siempre guió el trabajo hacia la aceptación o no de las conjeturas propuestas, para lo cual pidió a los estudiantes revisar la coherencia que había entre la construcción y la conjetura correspondiente. Ella indagaba, cuando no era claro en el reporte que ellos realizaban, cómo habían realizado las construcciones y qué habían observado como conclusión, para así determinar si la hipótesis y la tesis correspondían con la conjetura dada. Además, en la interacción que se generó, entre el estudiante que explicaba la construcción y la profesora, ella siempre cuestionó si la construcción que realizaba correspondía con el objeto geométrico mencionado en la hipótesis de la conjetura, o si, por lo contrario, después de hecho un cuadrilátero lo modificaban por medio del arrastre guiado para formar lo que visualmente parecía el objeto geométrico estudiado.

Por otro lado, mientras se revisaban las conjeturas propuestas, la profesora llevó a que los estudiantes buscaran contraejemplos de aquellas que eran falsas, y realizaran construcciones robustas de aquellas que eran verdades, si los estudiantes proponentes no tenían la construcción en la calculadora. Además, solicitó la definición de varios objetos geométricos mencionados en las conjeturas, los cuales no habían sido estudiados con anterioridad, buscando introducirlos al sistema axiomático.

Segunda clase

Preparación de clase

Para esta segunda clase, después de haber recordado los elementos que se introdujeron al sistema axiomático en la primera clase, la profesora decide ampliar el último teorema demostrado *"Si un cuadrilátero es paralelogramo entonces los ángulos opuestos son congruentes"*, para incluir que ambos pares de ángulos opuestos son congruentes. Luego, piensa hacer un recuento de los elementos que hay hasta el momento en el sistema axiomático local, y analizar las definiciones dadas de rectángulo, para lo cuál copia en un acetato dos de las definiciones que habían sido propuestas la clase anterior,. Éstas son:

1. *Polígono con dos pares de lados paralelos y congruentes.*
2. *Polígono con una par de lados paralelos y dos lados perpendiculares a los paralelos.*

Ella espera, una vez establecida la definición de rectángulo, indagar sobre la definición de cuadrado, para así introducir estos dos objetos al sistema axiomático, y poder continuar con el análisis de la lista de conjeturas propuestas. Retomando la conjetura general establecida después de analizar las del cuarto conjunto de conjeturas, para hacer la respectiva demostración, se seguirá analizando el quinto grupo de conjeturas. A continuación, se presenta de nuevo la lista de conjeturas que faltan por analizar, usando la numeración que la profesora usó originalmente.

5. a) Si las diagonales son congruentes entonces es un paralelogramo. (III)
   b) Si las diagonales son congruentes, es un paralelogramo y se bisecan mutuamente. (V)
   c)Si se bisecan y forman ángulos rectos es un rombo. (III)

d) Si una diagonal biseca a la otra entonces el cuadrilátero es un cometa. (II)

e) Si la diagonal de un cuadrilátero biseca a la otra y son perpendiculares entonces el cuadrilátero es cometa. (I)

6. a) Si un cuadrilátero tiene dos pares de lados congruentes entonces sus diagonales se bisecan. (IX)

   b) Si un cuadrilátero tiene dos pares de lados congruentes entonces sus diagonales se bisecan entre si. (X)

   c) Si un cuadrilátero tiene dos pares de lados paralelos y congruentes entonces sus diagonales se bisecan. (IX)

7. Si se prolonga la diagonal interior de una cometa no convexa, entonces biseca a la diagonal exterior. (VI)

8. Si una diagonal del cuadrilátero biseca a la otra, el cuadrilátero tiene dos pares de lados congruentes. (V)

Desarrollo de clase

Al iniciar la clase, la profesora retoma el trabajo de la clase anterior con un recuento de las conjeturas trabajadas, y las definiciones y teoremas incluidos en el sistema axiomático [Ver cuadro 4]. Retoma el último teorema demostrado[10], y pregunta si es posible ampliarlo, teniendo en cuenta que la demostración realizada la clase anterior solo llevó a la congruencia de un par de ángulos opuestos. Una propuesta es:

En un paralelogramo ambos pares de ángulos opuestos son congruentes.

Para demostrarlo surgen tres caminos. El primero es repetir lo misma que se hizo para demostrar que un par de ángulos opuestos es congruente, a la cual varios estudiantes objetan ya que la demostración quedaría demasiado larga, y se desea una demostración más

[10] Si un cuadrilátero es paralelogramo entonces los ángulos opuestos son congruentes.

corta. En el segundo camino, Zulma sugiere cambiar la definición, que se había seleccionado la clase anterior, de paralelogramo por *cuadrilátero con un par de lados opuestos paralelos y congruentes*. Ella propone trazar la diagonal AC del cuadrilátero ABCD. A continuación se ilustra parte de la propuesta que Zulma realiza, después de trazar la diagonal.

Zulma	¿Ahí ya tenemos que los lados opuestos son congruentes?
Profesora	No. Pero si lo necesitamos lo podemos… Pero si lo podemos demostrar lo podemos usar.
Zulma	Tocaría primero demostrar que los lados opuestos en un paralelogramo son congruentes.
Profesora	Zulma propone una propiedad: que los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.
Zulma	Porque nosotros, la clase pasada en lo que estábamos tratando de demostrar, utilizamos la definición de paralelogramo que decía que los lados opuestos o dos pares de lados paralelos, y hay una definición de paralelogramo que dice que tiene un par de lados opuestos congruentes. Es un cuadrilátero con un par de lados opuestos congruentes.
Profesora	Zulma propone cambiar nuestra definición de paralelogramo. Un paralelogramo es un cuadrilátero con un par de lados opuestos paralelos, no, congruentes. [Escribe definición en el tablero.]
Zulma	Paralelos y congruentes.
Profesora	Ah, ya cambiaste.
Zulma	No, yo dije que son paralelos y congruentes para que sea la definición. Tienen que ser paralelos y congruentes.

Ella luego de mencionar la definición que deseaba usar, propuso hacer la demostración de que el otro par de ángulos también son congruentes, por medio de triángulos congruentes, usando los dos triángulos que se formaron al trazar la diagonal AC. Como ya tenía la congruencia de dos lados, le tocaba demostrar que los otros lados del triángulo también lo eran, o lo que es lo mismo, que los otros lados del paralelogramo eran congruentes, surgiendo así una nueva conjetura sobre paralelogramos. La sugerencia de Zulma para la demostración no es aceptada por todos los miembros del grupo, ya que varios de ellos tenían una propuesta para una demostración más corta, usando la definición de paralelogramo que se había institucionalizado la clase anterior. Ésta consistía en usar el teorema *Suplementos de ángulos congruentes son congruentes,* la cual es aceptada por todos los miembros de la comunidad. En el proceso de la demostración, se deduce otro teorema relacionado con rectas paralelas, *si dos rectas paralelas están cortadas por una transversal entonces los ángulos internos no alternos son suplementarios,* logrando así introducir dos teoremas más al sistema axiomático.

A continuación se muestra la discusión que se dio a lo largo de la demostración, en la que se puede apreciar cómo se deduce el teorema de paralelas que se introdujo al sistema.

Jairo: Pues para no repetir el mismo proceso que había hecho, se puede hacer con el suplemento de ángulos.

Profesora: ¿Por qué?

Jairo: Para aplicar el teorema que dice, suplementos de ángulos congruentes son congruentes.

Profesora: Si.

Jairo: Sabemos que el ángulo ABC es congruente con el ángulo ADC… y para el otro lado.

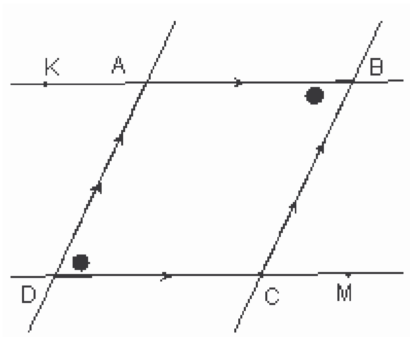


Figura 10

Profesora: Estos dos son los que me dices que son congruentes.[Se refiere a los ángulos ABC y ADC.]

Jairo: Si pero hay otro par… el par que no… los alternos-internos.

Profesora: Pasa, pasa, pasa, pasa porque no te entiendo.

Jairo: Entonces, yo había demostrado la vez pasada que éste ángulo era congruente a éste ángulo por ser alternos-internos. [∠KAD y ∠ADC]

Profesora: Entre paralelas, si.

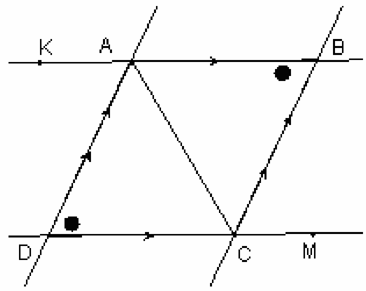


Figura 11

Jairo: Y tenemos este ángulo [∠DAB]. Ahora decimos que este ángulo [∠KAD]…

Profesora: O sea, borramos esta diagonal [$\overline{AC}$] para que no tengamos problemas.

Jairo: Ahora, éste ángulo [∠ADC] es congruente a éste [∠ABC] y este ángulo [∠BCM] es congruente a éste [∠ABC] por que son alternos-internos entre paralelas.

Profesora: Enumerémoslos, como dice Claudia enumerémoslo porque o sino…
O sea, tenemos, o sea que me estas diciendo que ya teníamos que el ángulo 1 era congruente con ángulo 2 en tú demostración, por que son alternos-internos, y 3 con 4.[Escribe en el tablero ∠1 ≅∠2 y ∠3 ≅ ∠4]

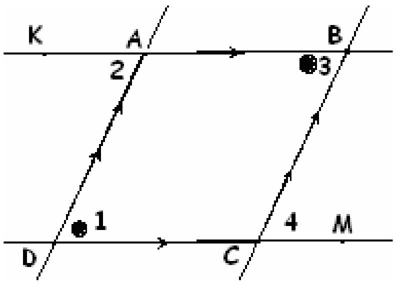


Figura 12

Jairo: Y ahora como el ángulo 4 es congruente con el ángulo 2.

Profesora: Porque teníamos que el 1 con 3, y entonces queda 2 con 4 por transitividad. Si.

Jairo: Ahora, como éste [∠2] es congruente con éste [∠4], y éstos ángulos [∠2 y ∠DAB] comparten [un lado], forman par lineal, y este ángulo [∠DAB] es el suplemento de éste [∠2] y éste [∠BCD] es suplemento de éste [∠4] y estos dos son congruentes [∠2 y ∠4]. Por eso éste es congruente con éste [∠DAB con ∠BCD].

Profesora: [Añade nombres a los demás ángulos.]

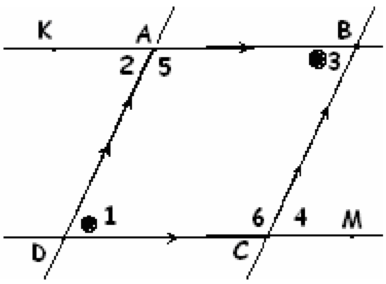


Figura 13

O sea, 2 y 5, ángulo 2 y ángulo 5 suplementarios, [Escribe en el tablero lo que dice.] y ángulo 4 y 6 suplementarios [Escribe lo que dice.], y entonces suplementos de ángulos congruentes son congruentes y logramos lo que queríamos. Ambos pares. Pero…

Jairo: ¿Está mal?

Profesora: No, está bien. Pero acabamos…, pero yo no se si lo habíamos discutido. Tal vez no lo habíamos estudiado antes, pero Jairo acaba de demostrar un teorema muy importante para ángulos entre paralelas. Porque [ángulos] 5 y 3 ¿qué características tienen?

Jairo: Son suplementarios.

Profesora: Cuando hay dos rectas paralelas cortadas por una transversal los ángulos internos no alternos son suplementarios. Y si hubiéramos tenido ese teorema habríamos podido hacer, mucho más rápido, esta demostración. Nosotros teníamos que cuando hay paralelas ángulos alternos-internos son congruentes. También teníamos que cuando hay paralelas ángulos correspondientes congruentes. Y ahora tenemos un tercer teorema que dice que cuando hay paralelas, cortadas por una transversal, ángulos internos no alternos son suplementarios. Entonces tenemos otro teorema *si dos rectas paralelas están cortadas por una transversal entonces ángulo internos no alternos son suplementarios* [escribe el teorema en el tablero], y con eso llegamos rápidamente a demostrar lo que queremos.

Posteriormente, la profesora hace una lista de los teoremas que han surgido hasta el momento, mencionano que ya hay varias formas de determinar cuándo un cuadrilátero es paralelogramo, y cuáles son las propiedades de éstos. Retoma la demostración del teorema *Si un cuadrilátero es paralelogramo, entonces sus diagonales se bisecan*, pues en el desarrollo de ésta se demuestra la congruencia de los dos triángulos que se forman al trazar una diagonal del cuadrilátero. Así obtienen el teorema *Si un cuadrilátero es paralelogramo entonces sus lados opuestos son congruentes,* por lados correspondientes de triángulos congruentes.

Luego, la profesora retoma la propuesta que dio Zulma de definición de paralelogramo, para examinar cada una de las dos propiedades incluidas en ésta. Comenta que ésta sólo podría ser una definición si es una equivalencia, lo que implica examinar la validez de cada implicación. La primera implicación *Si un cuadrilátero es paralelogramo entonces tiene un par de lados paralelos y congruentes* fue aceptada de inmediato por la comunidad, ya que quedaba demostrada con el teorema anterior y la definición de paralelogramo. Para la segunda implicación *Si un cuadrilátero tiene un par de lados paralelos y congruentes entonces es paralelogramo,* la profesora propone que primero determinen con la calculadora si es verdadera y si lo es se pase a construir la demostración. Luego de haber explorado, Francisco muestra su construcción al grupo

Francisco Yo lo que hice fue construir un par de lados paralelos que es el segmento DC paralelo al segmento AB. ¿Cómo hice para que quedaran congruentes? Trace la medida de DC, con la función compás, sobre la recta paralela. Luego trace los segmentos AD y los segmentos BC…

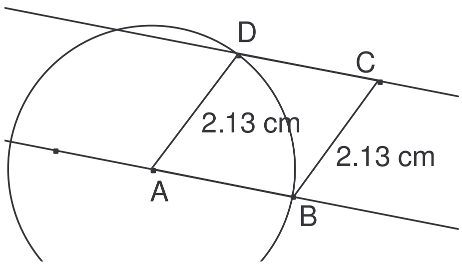


Figura 14

O sea, la medida de abajo tiene que dar igual a la de arriba.

Profesora O sea que dibujaste un segmento y después usaste compás. Entonces así él se asegura de tener igualdad de medidas. ¿Cierto? Y ¿después que hiciste?

Francisco Después trace los segmentos BC y AB, y les tome las medidas.

Profesora Si.

Francisco Pues, para comprobar que la condición se cumplía. Muevo éste segmento manteniendo las paralelas y en cualquier punto los otros dos segmentos tienen distancias iguales. [Arrastra los vértices mientras habla y se mantiene como paralelogramo.]

La construcción no es aceptada por el grupo, ya que Francisco no verificó que la figura construida fuera un paralelogramo, de acuerdo a la definición, sino que verificó que el otro par de segmentos fueran congruentes. Pero, como visualmente parece un paralelogramo, proponen el siguiente enunciado *Si un cuadrilátero tiene dos pares de lados congruentes entonces es paralelogramo.* Otro estudiante pasa y hace la construcción que corresponde a la conjetura propuesta por Zulma. Ésta es aceptada por la comunidad y se procede a hacer la respectiva demostración, incorporando esa propiedad, como teorema, al sistema axiomático.

La profesora retoma la construcción y la conjetura que Francisco había propuesto, al tratar de construir una representación para la propuesta de Zulma, e indaga sobre la validez de esa propiedad. Francisco, pasa y desarrolla la respectiva demostración, aceptándose como teorema.

La profesora decide continuar con la discusión que se había dejado pendiente la clase anterior, acerca de la definición de rectángulo. La primera *polígono con dos pares de lados paralelos y congruentes* no es aceptada, ya que aunque el rectángulo cumple la condición, una estudiante objeta al mencionar que hay otras figuras que también la cumplen, como el hexágono regular. La segunda "*Polígono con una par de lados paralelos y dos lados perpendiculares a los paralelos*" tampoco es aceptada, ya que los estudiantes dibujan varias figuras con más de cuatro lados [Figura 15] que cumplan la condición de la propuesta.

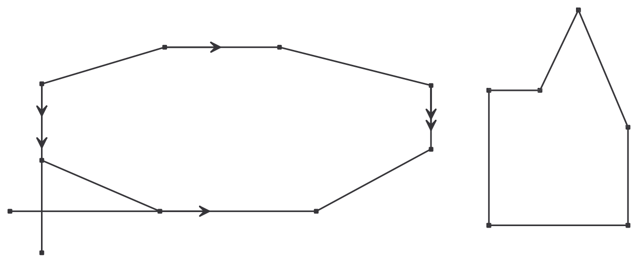


Figura 15 Polígonos con dos lados paralelos y dos lados perpendiculares

Quedando las dos definiciones propuestas rechazadas, la profesora pregunta si tiene otras sugerencias. Surgen las siguientes:

1. *Cuadrilátero con dos ángulos rectos no consecutivos.*
2. *Cuadrilátero con tres ángulos rectos.*
3. *Paralelogramo con un ángulo recto.*
4. *Paralelogramo con sus ángulos congruentes.*
5. *Paralelogramo con cuatro ángulos rectos.*

Después de la lluvia de ideas, se inicia la discusión de cada una de las propuestas. La primera de éstas no es aceptada ya que un estudiante ilustra un cuadrilátero [Figura 16] que cumple la condición, y que no es un rectángulo.

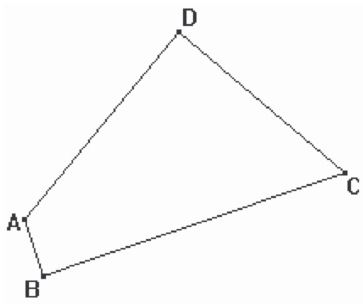


Figura16. Cuadrilátero con dos ángulos no consecutivos congruentes

Como para todos los estudiantes era importante que el rectángulo tuviera los cuatro ángulos rectos, se empieza a revisar cada una de las definiciones propuestas restantes, para ver si cumplían esta condición. Para la segunda definición propuesta, se demuestra que de las condiciones dadas se deduce que el cuadrilátero es paralelogramo, y luego por el teorema *Si un cuadrilátero es paralelogramo entonces sus ángulos opuestos son congruentes* se obtiene que los cuatro ángulos son rectos. Por ello, deciden aceptarla como definición momentáneamente, mientras son analizadas las otras. La propuesta 3 también es aceptada. A continuación se ilustra la interacción que se dio, entre varios estudiantes del grupo y la profesora, para llegar a mostrar que la figura descrita en la propuesta tiene los cuatro ángulos rectos.

Zulma Si tiene este ángulo recto… [indica, en un cuadrilátero dibujado en el tablero, al $\angle$A]. Entonces éste [$\angle$C] también es recto.

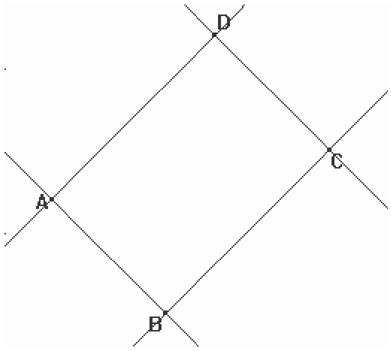


Figura 17

Profesora ¿Por qué?

Zulma Por que en un paralelogramo los ángulos opuestos son congruentes y éstas son paralelas [se refiere a los segmentos AD y BC] y estos también son paralelos [segmentos AB y CD.] Entonces hay un teorema que dice que si una recta es perpendicular a una paralela, a una recta perpendicular a la paralela.

Profesora A una de dos paralelas…

Zulma Eso. Entonces es perpendicular a la otra paralela.

Profesora ¿Ese lo tenemos? ¿Ese teorema?

Varios ¿Cuál?

Profesora Que si una recta es perpendicular a una de dos paralelas tiene que ser perpendicular a la otra.

Francisco Tenemos el reciproco.

Profesora Tenemos el reciproco. ¿Por qué? A ver, el teorema que propone Zulma es si *l* es perpendicular a *m*, y *m* y *n* son paralelas entonces *l* es perpendicular a *n*. [Escribe en el tablero lo anterior.] Es lo que ella propone. O sea, tengo dos paralelas *m* y *n*, y tengo aquí a *l* perpendicular y éste, no sabemos… [Ilustra en el tablero la situación.] Medardo.

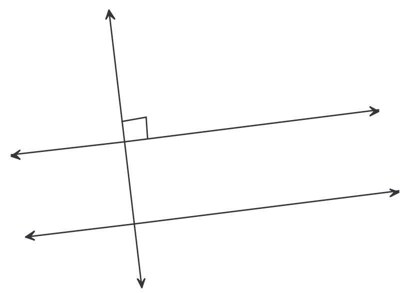


Figura 18

Medardo	Ángulos alternos internos…[$\angle 1$ y $\angle 2$]
Profesora	Si.
Medardo	Y una recta.
Profesora	O sea que éste es recto, [$\angle 1$] éste es recto [$\angle 2$], éste es alterno-interno. O por correspondientes [muestra los $\angle 1$ y $\angle 3$].
Zulma	Entonces, éste es perpendicular a esta recta. [volviendo a la figura 16, $\overline{\boldsymbol{AD}} \perp \overline{\boldsymbol{DC}}$]
Profesora	Y ya tenemos tres ángulos rectos y entonces ya sería con esta definición [cuadrilátero con tres ángulos rectos] un rectángulo. Aceptada.

La cuarta definición propuesta también es aceptada, ya que un estudiante muestra que los ángulos del paralelogramo descrito tienen que ser rectos, usando que los ángulos alternos-no internos entre paralelas son suplementarios, si dos ángulos son congruentes y suplementarios entonces son rectos, y si un cuadrilátero es paralelogramo sus ángulos opuestos son congruentes. Finalmente, la quinta propuesta es la propiedad que los estudiantes ya habían acordado caracterizaba a los rectángulos, y la que usaron para determinar si eran o no las demás propuestas viables como definición de rectángulo. Al final, el grupo determinó dejar como definición de rectángulo la tercera,(paralelogramo con un ángulo recto) ya que es la que menos condiciones exige y por tanto facilita el proceso necesario en el momento de hacer demostraciones, y porque ya se tienen varios teoremas que permiten demostrar que un cuadrilátero es paralelogramo.

Posteriormente, la profesora pregunta sobre la definición de cuadrado. Las propuestas son:

1. *Rectángulo con todos los lados congruentes.*
2. *Rectángulo con un par de lados consecutivos congruentes.*

Antes de empezar a analizarlas, el grupo caracteriza a los cuadrados como cuadrilátero con todos los lados y ángulos congruentes. Luego se revisa si las dos propuestas llevan al cumplimiento de estas características. Se llega a que las dos definiciones son válidas, ya que la primera, al exigir la condición de ser rectángulo se garantiza que los cuatro ángulos sean rectos, y de la segunda parte de la definición se incluye los cuatro lados congruentes. En la segunda definición, el ser rectángulo se garantizan los cuatro ángulos rectos, y el ser paralelogramo con un par de lados consecutivos congruentes garantiza que los cuatro lados sean congruentes. Se institucionaliza la segunda definición, ya que hará más fácil la demostración de que un cuadrilátero sea cuadrado.

Luego de haber definido rectángulo y cuadrado, la profesora retoma la conjetura *Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan entonces es paralelogramo* establecida la clase anterior, que recoge todas las conjeturas del cuarto grupo. Los estudiantes trabajan en la calculadora, muestran al grupo sus diferentes construcciones, y realizan la demostración correspondiente, introduciendo este teorema al sistema axiomático.

La clase termina con el análisis de la Conjetura 5a, la cuál no es aceptada ya que uno de los estudiantes presenta un ejemplo [Ver figura 19] de un cuadrilátero que tienen diagonales congruentes y no es paralelogramo. Para verificar que no es paralelogramo, usa la herramienta *comprobar propiedades* y revisa que los lados opuestos efectivamente no son paralelos.

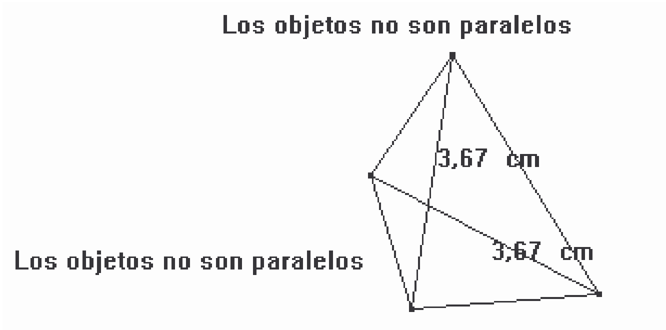
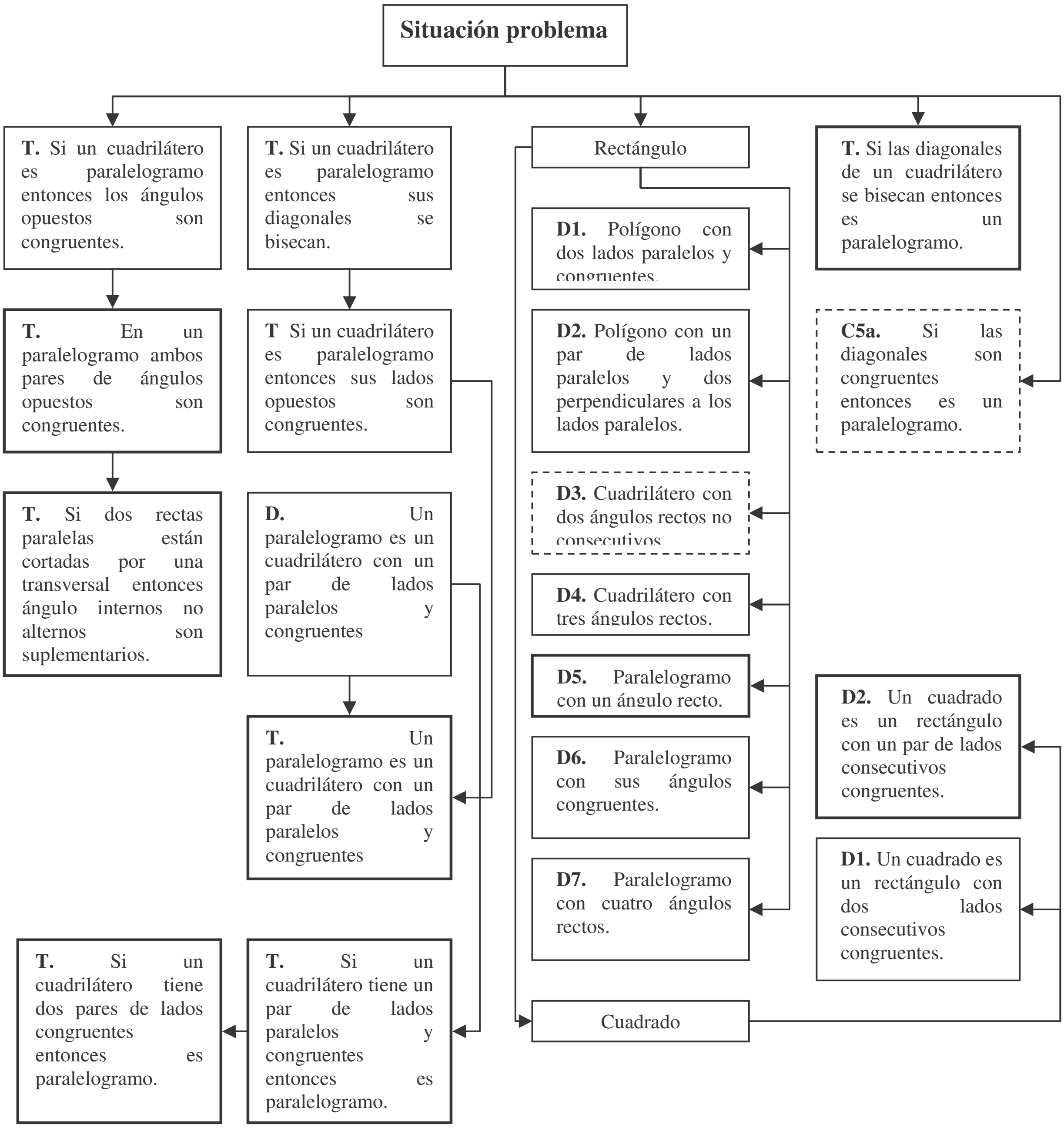


Figura 19 Cuadrilátero en donde las diagonales son congruentes

El esquema que se presenta a continuación resume cómo fue la ruta de la teoría que siguió en esta clase, dada la gestión que realizó la profesora, aprovechando cada una de las intervenciones de los estudiantes en el proceso de construir demostraciones y validar conjeturas. Cada una de las afirmaciones que se desprende de la situación problema, se había estudiado la clase anterior, y se retomaron para terminar de analizarlas, o eran conjeturas propuestas de la exploración inicial del problema. Los elementos que se introducen al sistema axiomático aparecen encerrados en cuadros más oscuros, y las afirmaciones falsas, para las cuales los estudiantes encontraron contraejemplos, se encuentran encerradas en líneas punteadas. Luego del esquema se encuentra un pequeño resumen de la clase, que ayuda a la comprensión de éste.



Cuadro 5. Desarrollo de la segunda clase.

La profesora inicia la clase, proponiendo ampliar el último teorema demostrado la clase anterior, para el cual surgen diferentes propuestas de demostración. En la construcción de la demostración con la propuesta aceptada, se demuestra un teorema sobre paralelas. En otra de las propuestas, que no es aceptada por el grupo, se sugiere cambiar la definición de paralelogramo, por los cuál la profesora busca que los estudiantes demuestren las dos implicaciones que contiene, para dejarlas como teoremas, dado que ya se ha institucionalizado una definición. Para aceptar la primera implicación, la profesora retoma la demostración de un teorema estudiado la clase anterior, en el que implícitamente se había demostrado que *Si un cuadrilátero es paralelogramo entonces sus lados opuestos son congruentes,* con este último teorema y la definición de paralelogramo se hace la demostración de la implicación. En el proceso de validar la segunda implicación propuesta, surge una construcción que lleva a una nueva conjetura *si un cuadrilátero tiene dos pares de lados congruentes entonces es paralelogramo.* La segunda implicación de la definición propuesta y la conjetura que surgió son demostradas, y aceptadas como teoremas dentro del sistema.

Posteriormente, se analizan las dos propuestas para definir rectángulo que se habían obtenido la clase anterior, las cuales no fueron aceptadas, ya que los estudiantes encontraron figuras que cumplen con esta definición y no se caracterizan como rectángulos. Al obtener nuevas propuestas se institucionaliza como definición la quinta propuesta. Luego, la profesora sugiere definir cuadrado, para lo cuál se obtienen dos propuestas aceptando la segunda.

Se continúa con la demostración de la conjetura, que encierra el grupo de conjeturas del numeral 4, establecida la clase anterior. Y se analiza la primera conjetura del grupo de conjeturas 5, la cuál no es aceptada ya que los estudiantes encuentran un contraejemplo.

Gestión de la profesora

Durante la clase, la profesora estuvo muy pendiente de las diferentes intervenciones que hacían los estudiantes, pues en la mayoría de ellas surgieron discusiones sobre otras propiedades geométricas de los paralelogramos que no habían sido estudiadas. Esto llevó a que, a partir de la su propuesta de la profesora de ampliar el teorema de la clase anterior, el desarrollo de la clase se desviara del plan que había organizado para la clase. Ella cuestionaba la validez de las propiedades que los estudiantes iban mencionando, y aprovechaba cada una de estas intervenciones para determinar elementos que enriquecieron el sistema axiomático. Cuando se estaba trabajando una conjetura, y surgía otra, la profesora no solicitaba el estudio de ésta en ese momento, sino que, luego de haber terminado el análisis de la conjetura principal, retomaba el aporte hecho por el estudiante, solicitando al resto del grupo que verificaran su validez, en la calculadora. Si ésta era verdadera pasaban a demostrarla, dando origen a una nueva propiedad. Se observa que la profesora, además de aprovechar cada una de las intervenciones, consideraba relevantes las participaciones de los estudiantes, haciendo que ellos sintieran que sus aportes eran importantes para la conformación del sistema axiomático.

Para volver a retomar el plan de la clase, la profesora hace un recuento de los teoremas que se han demostrado hasta el momento, y cuando menciona el teorema *Si un cuadrilátero es paralelogramo entonces sus diagonales se bisecan,* les recuerda que varios de los estudiantes, para establecer la conjetura que dio origen a ese teorema, analizaron rectángulos, y que esta definición había quedado pendiente. Entonces, ella recuerda dos de las tres propuestas para la definición de rectángulo, que habían surgido en la clase anterior, y guía la discusión para decidir la aceptación o no de éstas.. Como ninguna de las dos propuestas es aceptada, ella solicita la formulación de otras posibles definiciones, guiando de nuevo el análisis de éstas. Sigue un proceso similar para establecer la definición de cuadrado.

Durante el resto de la clase, el papel que ella juega es similar al de la anterior, en donde, por medio de la indagación, busca que los estudiantes analicen las conjeturas propuestas.

Tercera clase

Preparación de clase

En la anterior clase quedó pendiente la demostración del reciproco del teorema *Si un cuadrilátero es paralelogramo entonces sus ángulos opuestos son congruentes,* que requiere en ésta usar el teorema *La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180,* Por ello, la profesora decide iniciar la clase con la demostración de este último teorema, para luego continuar con la demostración del primero.

Posteriormente, retomará la conjetura 5a, *Si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes entonces es un paralelogramo* para verificar su validez, y lograr que a partir de las propuestas de los estudiantes, por medio de la exploración con Cabri, surjan los siguientes teoremas:

- Si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes y se bisecan entonces es un rectángulo.
- Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan, son congruentes y perpendiculares entonces es un cuadrado.

Desarrollo de clase

La profesora inicia la clase recordando que para casi todos los teoremas abordados, se ha demostrado su recíproco sí es verdadero, pero que no se ha hecho lo mismo con el reciproco del teorema *Si un cuadrilátero es paralelogramo entonces sus ángulos opuestos son congruentes,* pues no se tienen los elementos teóricos para demostrarlo. Continúa su discurso mencionando el siguiente teorema sobre las medidas de los ángulos internos de un triángulo:

> Teorema: *La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180.*

Este es un teorema que los estudiantes habían querido usar, en repetidas ocasiones, para justificar algún paso del desarrollo de las demostraciones de algunos teoremas, pero no se había podía hacer ya que éste no se había demostrado, y por tanto no hacia parte del sistema axiomático. Luego que la profesora pregunta si alguno había leído la demostración en el texto, uno de los estudiantes pasa al tablero y la hace, permitiendo incorporarlo en el sistema.

La profesora menciona que este nuevo teorema va a permitir demostrar la conjetura *Si los ángulos opuestos de un cuadrilátero son congruentes entonces el cuadrilátero es un paralelogramo*, reciproco del teorema mencionado al principio. Uno de los estudiantes, Antonio, empieza la demostración, que es principalmente algebraica, haciendo una representación gráfica de un cuadrilátero y dividiéndolo en dos partes con una de sus diagonales [Ver figura 19].

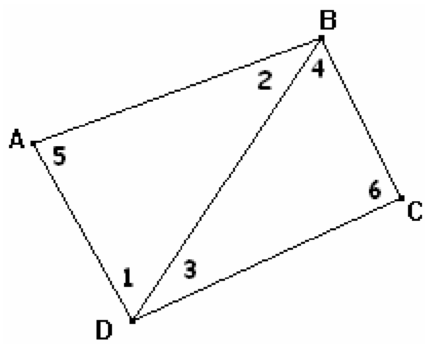


Figura 20

Luego de formar varias ecuaciones con la suma de las medidas de los ángulos de los triángulos llega a las ecuaciones $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 4$ y $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 3 + m\angle 4$. y no continua con la demostración, para lo cual la profesora indaga sobre que es lo que se quiere demostrar, luego que varios contesta *"Demostrar que es paralelogramo"* ella pregunta ¿Cómo? Fabián, uno de los estudiantes del grupo, interviene

Fabián: Para demostrar que un cuadrilátero es paralelogramo existen, si no estoy mal, tres opciones. La primera que dos pares de lados opuestos sean paralelos. La segunda que los dos pares de lados opuestos sean

	congruentes. La tercera es que un par de lados sean paralelos y congruentes. Entonces hay que llegar a cualquiera de las tres.
Profesora:	Si. Y, ¿con el método, con lo que está haciendo él parece que estamos tratando de llegar a qué?
Antonio:	Digamos que si yo pudiera demostrar que m$\angle$2 y m$\angle$3 son congruentes, por ángulos alternos internos tendríamos el paralelismo de la recta AB con DC.

Luego de la intervención de Antonio, la profesora decide continuar la demostración y a partir de las dos ecuaciones que Antonio había logrado plantear, antes de que Fabián interviniera, muestra que m$\angle$1 es congruente con m$\angle$4. Con ello se obtiene que el $\overline{AD}$ es paralelo al $\overline{BC}$, y sugiere que se proceda de forma similar para demostrar que el $\overline{AB}$ es paralelo al $\overline{DC}$. Luego se introduce este teorema al sistema axiomático.

La clase continúa con el análisis de la Conjetura 5a, que se había iniciado la clase anterior. La profesora procede, como siempre hace cuando se presentan las conjeturas, solicitando que se estudie en la calculadora su validez. La conjetura no es aceptada por la comunidad, ya que encuentran como contraejemplo al trapecio isósceles. Entonces, la profesora pregunta si al añadir otra condición a la hipótesis el cuadrilátero cumple la propiedad expuesta en la tesis.

Fabián interviene proponiendo la condición *las diagonales se bisecan.*

Fabián:	Las diagonales se bisecan.
Profesora:	Entonces Fabián dice que la condición es que se bisequen. ¿Por qué, Fabián?
Fabián:	Cuando nosotros hicimos el trabajo, cuando hicimos el trabajo con la calculadora ese día, con paralelogramos, nos dimos cuenta que…cuando se bisecaban, miramos esa relación, que eran congruentes. Se bisecaban.
Profesora:	Si. Eso ya lo demostramos.

Fabián: Entonces cuando realizamos la longitud de las diagonales, nos dimos cuenta que eran congruentes.

Profesora: ¡¿Siempre?! Ah, bueno. Entonces miremos a ver.

Fabián: No. Eso sucede cuando es un rectángulo, cuando era un rectángulo.

La profesora comenta que la explicación que él da de su propuesta no es coherente con su construcción. Surge entonces otra conjetura:

1. *Si el cuadrilátero es un rectángulo, las diagonales se bisecan y son congruentes.*

Sin embargo, no deja de lado la propuesta inicial de Fabián:

2. *Si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes y se bisecan entonces es un paralelogramo.*

A continuación, otros estudiantes empiezan a dar diferentes condiciones para cambiar la Conjetura 5 a. Las conjeturas que resultan son:

3. *Si las diagonales se bisecan, son congruentes y perpendiculares, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.*
4. *Si las diagonales son congruentes, perpendiculares y una biseca a la otra, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.*

La profesora propone que se revise la validez de cada una de estas conjeturas con la calculadora. Una estudiante del grupo pasa y muestra la construcción que realizó para verificar la validez de la tercera conjetura, pero como la construcción no era coherente con la hipótesis, surge otra conjetura.

> *Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan y son perpendiculares entonces el cuadrilátero es un rombo.*

A continuación se presenta parte del protocolo, que refleja el dialogo en donde se deduce esta conjetura.

Alicia: Primero tracé este segmento [AC], encontré el punto medio [M] y con compás, y centro en el punto medio, encontré el otro segmento [BD].[Figura que se proyecta usando el view screen.]

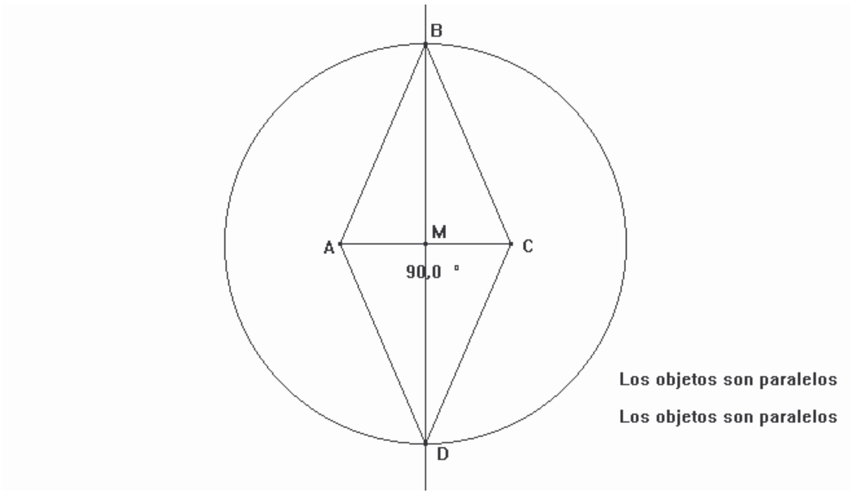


Figura 21

Alicia: Porque son radios iguales [Se refiere a $\overline{MB}$ y a $\overline{MD}$] y luego se bisecan.

Profesora: Si.

Alicia: Luego con la función polígono pues simplemente construí el polígono.

Profesora: A ver, porque no te entendí. Comenzaste con un segmento cualquiera.

Alicia: Si.

Profesora: Le encontraste el punto medio.

Alicia: Con compás y…

Profesora: Hiciste una circunferencia de cualquier radio.

Alicia: No. Del segmento original.

Profesora: Pero yo no lo vi. ¿Cuál es el segmento original?

Alicia: La diagonal. [Alicia muestra el $\overline{AC}$ con el cursor.]

Profesora: Ese [$\overline{AC}$]. Y la circunferencia no tiene ese radio. A ver. Mueve cualquier vértice. [Observan la proyección en la pared. Mueve a C y la figura no cambia de forma.] ¿Cómo hiciste esta construcción, Alicia? Tú querías… ¿qué? ¿Qué es lo que tú estás haciendo? Ahí no hay congruencia.

Francisco: Ahí no hay congruencia de las diagonales.

Profesora: Pero, ¿aquí qué hay? ¿Qué relación tienes tú entre tus diagonales?

Alumnos: Se bisecan.

Francisco: Una biseca a la otra.

Profesora: Se bisecan y ¿qué más?

Alumno: Perpendiculares.

Profesora: Parece que son perpendiculares. No se.

Alumna Si porque allí está la medida del ángulo.

Profesora: Pero, ¿cómo hiciste eso entonces?

Alicia Es que prácticamente es la mediatriz.

Profesora: Pero, por eso. ¿Tú la trazaste? ¿Cómo hiciste lo del ángulo de 90? Mueve uno de los puntos de arriba.

Alicia: ¿De arriba?

Profesora: Si. Ese. [punto B]. Se mueve sobre la circunferencia, ¿no? [Al mover el punto B, el cuadrilátero deja de parecer rombo, sigue pareciendo paralelogramo, las diagonales no son perpendiculares.] Y ¿cuáles son los ángulos que mediste?

Alicia Este ángulo [∠BAD] y este otro [∠BCD].

Profesora: Los opuestos. Ah, ¿para ver si era paralelogramo o qué? O ¿Para qué? [Silencio.] Ahí hay algo muy interesante en lo que ella tiene. [Alicia regresó al punto B a la posición original, y la figura se parece de nuevo a un rombo.] ¿Qué ven ustedes? [Silencio.] Ella hizo, uno, diagonales que se bisecan y en el ejemplo que nos está mostrando, ¿qué más hizo? Diagonales perpendiculares. En el ejemplo que nos está mostrando. Y ¿qué ven? [Escribe las dos propiedades en el tablero.] ¿Es paralelogramo? Si.

Alumna: [No se entiende.]

Profesora: Pero, ¿qué?

Alumna: [No se entiende.] …bisecan?

Profesora: Si ahí ambas se bisecan, diagonales que se bisecan. Además, diagonales perpendiculares. No las hizo congruentes, pero mi pregunta es que si ustedes ven en esa figura algo interesante. Aníbal.

Aníbal: Un rombo.

Profesora: ¿Parece un rombo? ¿Comprobamos? Si comprobar propiedades… equidistancia.

En el momento de establecer la conjetura, la profesora solicita la definición de rombo, obteniendo las siguientes propuestas:

1. *Paralelogramo con cuatro lados congruentes.*
2. *Paralelogramo con dos pares de lados adyacentes congruentes.*

Éstas son analizadas, teniendo en cuenta que se debe seleccionar la definición que excluya aquellos objetos geométricos que no son rombos, y que en el momento de usarla para hacer demostraciones, no exija un proceso muy largo. La definición que se establece para rombo, después del análisis de las propuestas y al descartar la primera, ya que hace la descripción de solo unos rombos, es:

Paralelogramo con dos lados adyacentes congruentes.

Tan pronto se institucionaliza la definición, Aníbal interviene.

Aníbal: El cuadrado también es rombo.

Profesora ¿Por qué?

Aníbal: Porque cumple las condiciones de rombo.

Profesora Aníbal dice que el cuadrado también es rombo.

Varios: Si

Profesora Pero, ¿por qué? Tenemos que mirar nuestras definiciones. La definición de cuadrado dijimos: rectángulo con un par de lados congruentes.

Francisco: Si es rectángulo es paralelogramo.

Profesora Y si es rectángulo es paralelogramo, luego tendríamos paralelogramo con un par de lados adyacentes congruentes. Luego si puedo hacer esa conexión.

Con ésto, se introduce al sistema axiomático el teorema *Todo cuadrado es rombo.*

Luego, la profesora retoma el análisis de las conjeturas 1, 2 y 3, anteriormente mencionadas. La comunidad rechaza momentáneamente la conjetura del rombo, que se dedujo de la construcción de Alicia, ya que ésta no es convincente. Posteriormente, un estudiante realiza la construcción de la conjetura 1, pero sin colocar la condición de perpendicularidad, lo que lo lleva a obtener un rectángulo. Así se obtiene otra conjetura:

Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan y son congruentes entonces éste es rectángulo.

Como la construcción es convincente, la conjetura es aceptada por la comunidad y se procede a demostrarla.

Posteriormente Medardo, pasa y muestra otra construcción

Medardo: Hice diagonales perpendiculares y congruentes y me dio un cuadrado.

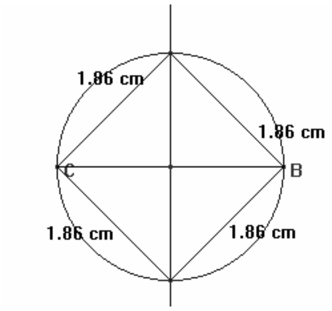


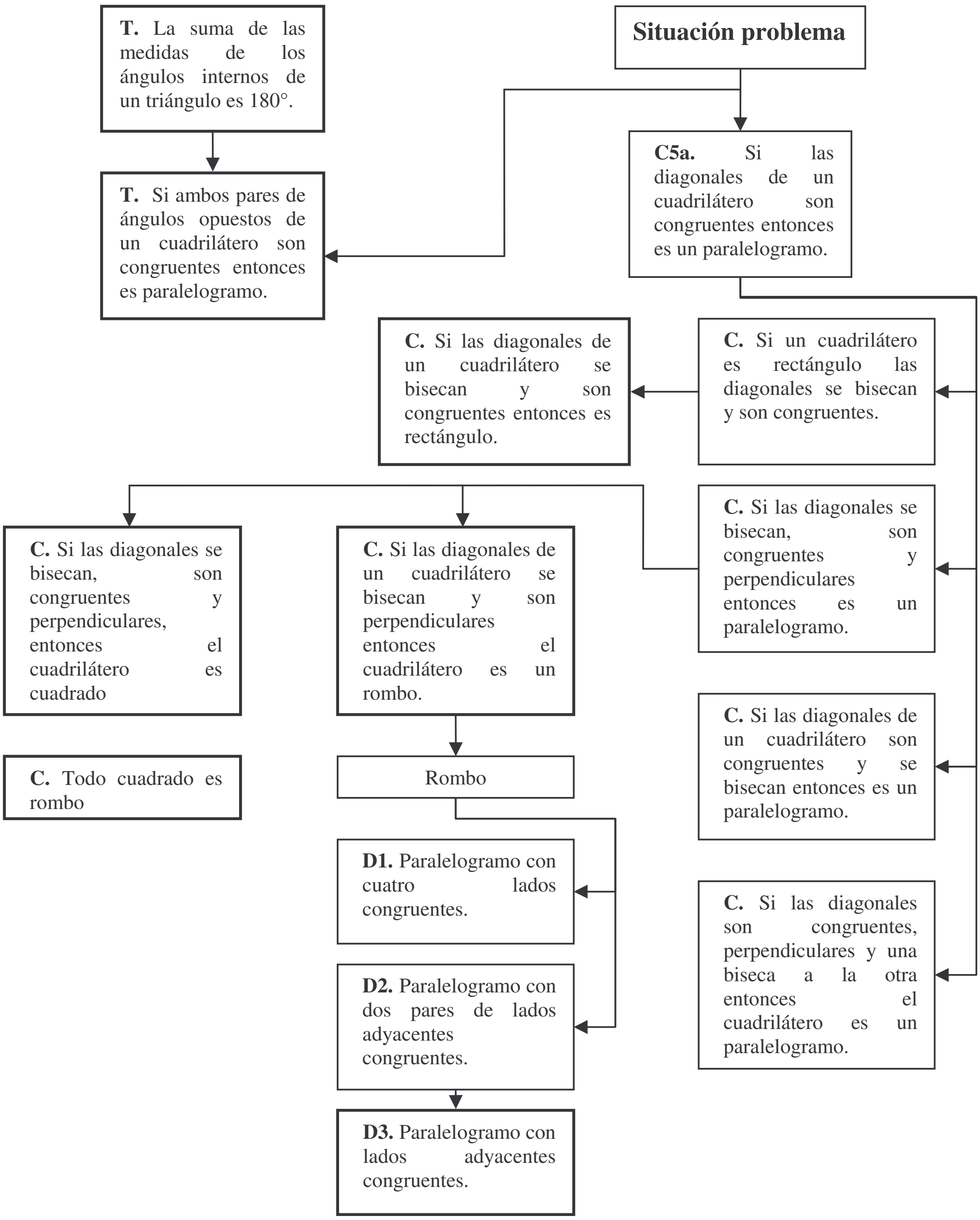
Figura 22

Esto da lugar a otra conjetura:

> S*i las diagonales se bisecan son congruentes y perpendiculares, entonces el cuadrilátero es un cuadrado.*

Por falta de tiempo, ya que ese día se terminaba el semestre académico, no se terminaron de estudiar todas las conjeturas propuestas inicialmente. Además, se aceptaron como teoremas las últimas conjeturas, dejando la demostración por cuenta de cada estudiante.

A continuación se presenta un esquema que resume el desarrollo de la clase, en donde se resalta los elementos teóricos que se introdujeron al sistema axiomático.



Cuadro 6. Desarrollo de la tercera clase.

Al iniciar la clase la profesora menciona que hay el reciproco de un teorema que no se ha podido demostrar, para lo cuál propone demostrar primero el teorema *La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180,* que es usando para construir la demostración del teorema *Si ambos pares de ángulos opuestos de un cuadrilátero son congruentes entonces es un paralelogramo,* reciproco que se quería demostrar. Posteriormente se retoma la conjetura 5a, que se rechaza al encontrar un contraejemplo, por lo cual al profesora propone completar la hipótesis de esta conjetura para que sea valida, a lo que surgen cuatro propuestas.

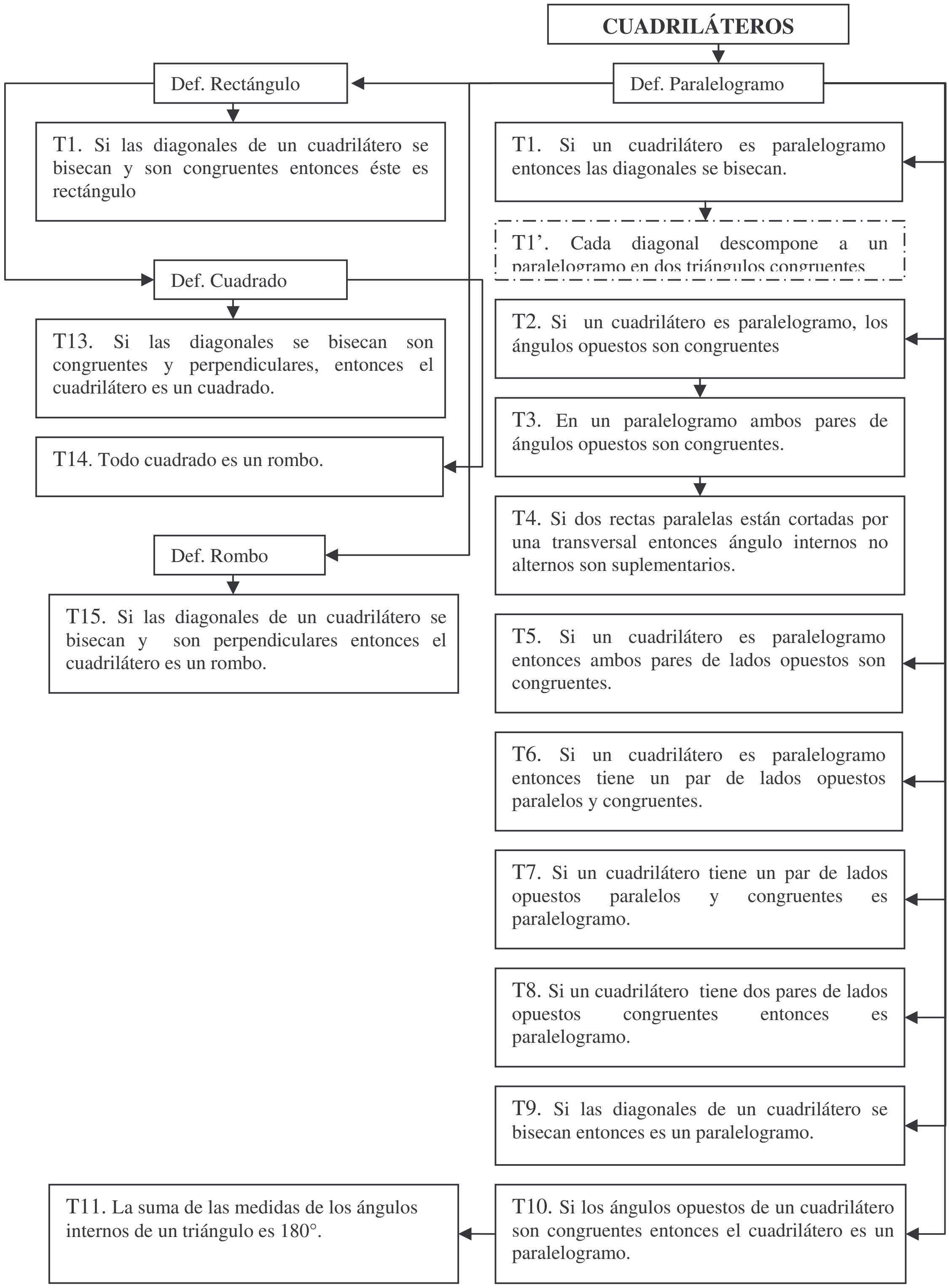
Al analizar la primera propuesta un estudiante propone una construcción que lleva a una nueva conjetura la cual es aceptada como teorema. En el análisis de la segunda propuesta, se presentan dos construcciones, que no corresponden a la conjetura estudiada, pero dan origen a dos nuevas conjeturas que se convierten en teoremas. Uno de estos dos teoremas, es sobre rombos, por lo que se da la necesidad de definir rombo, para lo cuál surgen tres definiciones, de las que se acepta la tercera. Luego de definir rombo, surge el teorema *Todo cuadrado es rombo.*

Gestión de la profesora

La profesora guía la discusión durante la construcción de los dos primeros teoremas. Ella al proponer el análisis de la Conjetura 5a, recoge todas las propuestas de cambio que se generan, e indaga sobre el por qué de algunas de las propuestas, haciendo que se generen otras. Luego propone que se validen con la calculadora, para desechar las que no son verdaderas y demostrar las demás. La profesora solicita la descripción de las construcciones para identificar las condiciones con las que iniciaron la exploración y así decidir si existe correspondencia con la hipótesis de la conjetura formulada o con la tesis de ésta. También solicita que por medio del test del arrastre se muestre si la propiedad nombrada en la tesis se mantiene. Al terminar la clase, ella institucionaliza aquellas propuestas que son ciertas, ya que por cuestión de tiempo, no se alcanza a comprobar su validez ni demostración.

7.2 DESARROLLO TEÓRICO DE LA PROPUESTA

Como resultado del análisis de las conjeturas propuestas por los estudiantes, a la situación problema, se formó un sistema axiomático local respecto a cuadriláteros y sus propiedades. A continuación se presenta el desarrollo teórico que muestra cómo se construyó el sistema. Además de establecer definiciones de cuadriláteros especiales y teoremas relacionados a ellos, se incluyeron el teorema de las medidas de los ángulos internos de un triángulo y un teorema sobre rectas paralelas. El primero surgió como necesidad para demostrar una de las conjeturas propuestas, y el segundo en la construcción de una de las demostraciones.



Cuadro 7. Desarrollo teórico de la propuesta

En comparación con el desarrollo teórico que se identifica en los libros de Clemens, et al. (1998) y Moise y Downs (1964)[11], se puede observar que a partir de la situación problema se logra abordar casi todos los teoremas y definiciones propuestas en éstos, aunque algunas de las definiciones varían. Como el tiempo para el análisis de todas las conjeturas estuvo limitado, por el cierre de la Universidad, quedaron muchas de ellas sin estudiar. Por tanto, no se puede decir cuál es el alcance real de la situación problema, en cuánto a elementos teóricos para ampliar el sistema axiomático que se estaba construyendo.

Las definiciones de rectángulo, cuadrado y rombo determinadas por la comunidad son diferentes a las proporcionadas en los textos, lo que hace que las demostraciones propuestas sean distintas a las que en ellos se encuentran. Por ejemplo, el Teorema 13 [Ver lista de teoremas en el marco matemático] *Si un paralelogramo tienen un ángulo recto, entonces tiene cuatro ángulos rectos, y el paralelogramo es un rectángulo,* no fue considerado por el grupo, ya que éste fue verificado en el momento de determinar la definición de rectángulo *Un rectángulo es un paralelogramo con un ángulo recto*.

El teorema T1', presentado en el cuadro 7, está encerrado con líneas punteadas, ya que aunque en las clases no se institucionalizó, como sucede en los libros revisados, se demostró de forma implícita cuando se realizaba la demostración del Teorema T1. Los Teoremas 11 y 12, presentados en los textos [ver lista de teoremas en el marco matemático], no son tema de discusión en la clase, razón por la cuál no se incluyen explícitamente en el sistema axiomático, porque sus demostraciones son ejercicios propuestos en una tarea extraclase. Además, en el sistema construido, surgieron dos teoremas sobre cuadrados que no se presenta en los dos libros consultados *Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan, son congruentes y perpendiculares, entonces el cuadrilátero es un cuadrado.* y *Todo cuadrado es un rombo.*, lo que destaca aún más la riqueza de la situación problema propuesta.

[11] Ver Cuadro 1 y Cuadro 2 del marco teórico, págs. 29 y 30.

Entre los teoremas que no hicieron parte del sistema axiomático construido con el grupo y que si están incluidos en los textos, se encuentran aquellos relacionados con trapecios, que hubiesen podido ser abordados en las discusiones generadas, pero que la profesora decidió no hacerlo debido al factor tiempo y al deseo de dejar concluida toda la temática de paralelogramos, para finalizar el semestre. Por ejemplo, cuando surgió el trapecio isósceles, para ejemplificar cuadrilátero con diagonales congruentes que no es paralelogramo, se habría podido abordar el análisis de esta figura geométrica. Otros de los teoremas que hicieron falta dentro del sistema son los recíprocos de los teoremas 12 y 13, del esquema anterior, que se hubiesen podido abordan en el momento que se estudiaron y demostraron esos teoremas.

7.3 TAREAS Y SUBTAREAS EN EL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN DEL SISTEMA AXIOMÁTICO LOCAL

Teniendo en cuenta el ambiente de aprendizaje generado en el grupo, con el que se realizó la experiencia que se estudia en este trabajo, y que las tareas asignadas proporcionan un punto de partida para el desarrollo de la actividad matemática (Ponte, 1997), la profesora propone una situación problema que lleva a los estudiantes a una exploración exhaustiva de ésta para proporcionar el conjunto de conjeturas que fueron objeto de estudio en la construcción del sistema axiomático local. En el proceso de análisis de estas conjeturas, la profesora propone otras subtareas con la finalidad de validar las conjeturas propuestas por los estudiantes y aprovecharlas para deducir otros hechos geométricos que se desprenden de ellas. Así se logra que la situación de aprendizaje propuesta induzca el estudio de mayor cantidad de conceptos y se realicen variados procedimientos matemáticos, que llevaron a que los estudiantes realizaran actividad matemática. A continuación se presentan las tareas y subtareas incluidas en el trabajo de construcción del sistema axiomático.

Tarea: Cuadriláteros

Estudie la relación entre el tipo de cuadrilátero y la propiedad una diagonal biseca a la otra.

Subtareas

Con el fin de validar conjeturas, haciendo uso de la calculadora:

T1. Revisar si es cierto que existe un cuadrilátero con lados y ángulos desiguales, en donde una diagonal biseca la otra.

T2. Validar la siguiente conjetura: *Si un cuadrilátero tiene al menos un par de lados paralelos, entonces una de sus diagonales biseca a la otra.*

T3. Verificar la siguiente conjetura: *Si un cuadrilátero tiene un par de lados opuestos paralelos y congruentes es paralelogramo.*

T4. Validar la siguiente conjetura: *Si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes entonces es un paralelogramo.*

T5. Hacer una construcción para verificar: *Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan y son congruentes entonces éste es rectángulo.*

Con el fin de definir objetos geométricos:

T6. Analizar cada una de las definiciones dadas para rectángulo por los estudiantes, para determinar la definición que se incluirá en el sistema axiomático.

T7. Analizar cada una de las definiciones de paralelogramo dadas por los estudiantes, para determinar la definición adoptada para el sistema axiomático.

T8. Analizar cada una de las propuestas para la definición de cuadrado.

T9. Analizar las definiciones de rombo propuestas.

Con el fin de aplicar los teoremas incorporados al sistema:

T10. Demostrar: *El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.*

T11. Demostrar: *Los puntos medios de las lados de un cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo.*

Para establecer elementos teóricos:

T.12 Demostrar la siguiente conjetura: *Si un cuadrilátero es paralelogramo entonces las diagonal se bisecan.*

T13. Demostrar la conjetura: *Si un cuadrilátero tienen un par de lados opuestos paralelos y congruentes entonces es paralelogramo.*

T14. Demostrar: *Si un cuadrilátero tienen dos pares de lados opuestos congruentes entonces es paralelogramo.* **T15**. Demostrar: *Si las diagonales de un cuadrilátero se biseca entonces es paralelogramo.*

T16. Demostrar el siguiente teorema: *La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180.*

T17. Demostrar: *Si ambos pares de ángulos opuestos de un cuadrilátero son congruentes entonces es paralelogramo.*

T18 Demostrar el teorema: S*i las diagonales se bisecan son congruentes y perpendiculares, entonces el cuadrilátero es un cuadrado.*

Las subtareas T1 a T5 son propuestas cuando el grupo de estudiantes proponente no tienen guardado, en la calculadora, el archivo de la construcción que los llevó a la conjetura, o cuando, en las discusiones, los estudiantes mencionan propiedades de los objetos geométricos estudiados, que no se han revisado o tenido en cuenta. Cuando las conjeturas validadas son ciertas, se procede a demostrarlas; de lo contrario, la comunidad las rechaza o se empieza a añadir condiciones a la hipótesis, revisando los objetos geométricos obtenidos, para que la tesis sea verdadera, surgiendo así nuevas conjeturas. Este es el caso de T4, en donde a partir de añadir diferentes condiciones a la hipótesis, se lograron tres teoremas [ver desarrollo de la tercera clase].

Las subtareas del segundo conjunto, T6 a T9, se realizan cuando los estudiantes, al mencionar otros objetos geométricos (paralelogramo, rectángulo, cuadrado, y rombo.) en sus conjeturas, la profesora solicita las definiciones, y después de una lluvia de ideas, se selecciona la definición que mejor se acople al sistema axiomático y a la construcción de demostraciones. En estas subtareas, los estudiantes debaten, y definen estrategias que les permita llegar a un acuerdo. Para seleccionar la definición apropiada, ellos revisan la propuesta, para asegurarse que ésta no incluya figuras que no cumplan con todas las propiedades que caracterizan al objeto definido, buscando para ello un contraejemplo. También, se busca que la definición escogida sea la más económica, para facilitar las demostraciones de los teoremas en las que se hará uso de ésta.

Las subtareas T10 y T11 se dejan como trabajo extraclase pues son teoremas que no surgen directamente de la situación problema, pero que son demostradas haciendo uso de los teoremas que han surgido.

El último conjunto de subtareas, T12 a T18, consta de actividades que surgen después de validar algunas conjeturas propuestas, para introducir elementos teóricos al sistema que permitan demostrar otros teoremas. Esto último es el caso de la subtarea T16, que se propone con el fin de incluir, en el sistema, el teorema mencionado y así poder demostrar la conjetura *Si ambos pares de ángulos opuestos de un cuadrilátero son congruentes entonces es paralelogramo.* Hay que destacar que no siempre la profesora tiene que proponer subtareas como éstas para demostrar las conjeturas validadas, ya que en varias ocasiones los estudiantes espontáneamente construyen la demostración, o en el momento del recuento de las construcciones, van argumentando cada paso, desarrollando de una vez la demostración.

En el proceso de realizar las subtareas propuestas, los estudiantes tuvieron la oportunidad de debatir, sacar conclusiones, comparar resultados, y ejemplificar, buscando enriquecer su conocimiento. La profesora gestionaba los debates, haciendo cuestionamientos que llevaban a los estudiantes a pulir sus demostraciones, conjeturas, construcciones y justificaciones.

7.4 USO DE CABRI EN LA EXPERIENCIA

Teniendo en cuenta la importancia que tuvo la calculadora en esta experiencia, es necesario resaltar algunos usos de Cabri que ilustran su papel como herramienta que posibilitó la construcción del sistema axiomático. El grupo de investigación Æ · G (Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría), ha identificado diferentes aspectos del papel de la geometría dinámica en el curso de Geometría Plana, por lo que se hará uso de esta clasificación para ejemplificar el papel de Cabri en la experiencia analizada.

Uso de Cabri para crear situaciones que dan lugar a suficientes resultados para poder construir una porción del sistema axiomático.

Este uso es el que propició la actividad matemática, ya que a partir de la situación presentada se evidencia cómo el uso de Cabri favoreció la exploración de propiedades geométricas de las partes constituyentes de los cuadriláteros, posibilitando la producción de conjeturas, que con la guía de la profesora fueron analizadas, validadas, demostradas y organizadas para construir un sistema axiomático local. El papel de la profesora fue fundamental pues ella anticipó la conveniencia de uno u otro orden para abordar el análisis de los enunciados, a efecto de ir incorporando los teoremas, de tal suerte que se logre una organización deductiva coherente. La descripción del desarrollo de las clases en donde se abordó la propuesta ilustra de forma clara este uso.

Uso de Cabri para entender que el cumplimiento de la tesis de un enunciado "si… entonces…" depende de todas las condiciones de la hipótesis.

Durante el análisis de algunas conjeturas, se dio importancia a la determinación de las consecuencias de no tener en cuenta parte de las condiciones de la hipótesis, para comprender el papel que juega cada una de ellas en el enunciado. El protocolo que se presenta a continuación, ilustra como la profesora ante una conjetura falsa, porque hacía falta parte de la hipótesis, indaga esperando que los estudiantes encuentren un contraejemplo a la conjetura y completen la hipótesis para que ésta sea válida.

Profesora: Hay una conjetura que me pareció interesante y que quisiera que miráramos. Dice si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes entonces es paralelogramo. Quisiera que miraran rápidamente en la calculadora si es válida.

Alumnos: Ya lo hicimos.

Profesora: ¿Ya la miramos? ¿Y?

Ferney: Si. Trapecio isósceles.

Profesora: Ah. Ya vimos que es falsa. Entonces mi pregunta es: ¿qué sería lo que vieron los del grupo para decirme esta conjetura? Porque nosotros sabemos que la calculadora sí nos da algo de cierto. Lo que a veces nos sucede es que nosotros hemos hecho o una construcción distinta a la que reportamos, lo hemos visto mucho, o inconscientemente le hemos puesto una característica mas, una condición mas, de la cual no somos conscientes. Pero cómo nosotros ya sabemos que esto es falso, mi pregunta es ¿habrá otra condición para que sea verdadero?

José: No se; tengo como una duda o… no se. Es que en la primera, yo creo, analizaron solamente un caso. Dijeron si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes, cuando se bisecan, y son perpendiculares entonces es paralelogramo.

Alumnos: No.

Profesora: ¿Quién dijo eso?

José: No. Pienso yo.

Profesora: Ah bueno. O sea que tú quieres añadirle que se bisequen y sean perpendiculares. [Escribe en el tablero.] Bueno, hágame el favor. Rápido, necesito saber si esto es cierto. Creo que debemos hacer una construcción en la calculadora. A ver.

Uso de Cabri para determinar lo "dado" y lo que se debe demostrar.

Luego que los estudiantes han explorado y formulado conjeturas, una de las estrategias que la profesora usó en clase para determinar si ésta era coherente con la construcción, fue pedir a los estudiantes que realizaran un recuento de la construcción realizada. La profesora destacaba cómo la hipótesis de la conjetura formulada no era correcta, ya que las condiciones creadas no correspondían con ésta. El siguiente protocolo es un ejemplo de esta situación.

Profesora Se borraron. Entonces, dizque descubrió que las diagonales se bisecan. Pero la conjetura [la hipótesis] de ellos es: Si en un cuadrilátero hay dos pares de lados paralelos. Y tú construcción no llevó a dos pares de lados paralelos, ¿o sí? Tú te aseguraste de un par de lados paralelos. Tu conjetura, la conjetura que ustedes lanzaron es: si en un cuadrilátero hay dos pares de lados paralelos (coloca el acetato y lee en él), pero la construcción que hicieron fue: un par de lados paralelos y dos perpendiculares. ¿Corresponde o no su construcción a la conjetura?¿Qué dicen?

Varios (No se entiende)

Profesora Yo lo que estoy tratando de hacer, ahorita, es ver si la conjetura que ustedes establecen tiene piso, y entonces analizo la de Orlando. Él se aseguro, en su construcción, de tener un par de lados paralelos, y después construyó dos perpendiculares. Pero enuncian esto y quiero ver si tiene o no correspondencia con la construcción. Fabián

Fabián Pues si lo analizamos así, construcción a teorema podría tener relación porque allá nos dicen dos pares de lados paralelos y aquí nos dicen un par y dos perpendiculares. Pero hay un teorema que nos dice que si dos rectas son perpendiculares a una tercera, entonces esas dos rectas son paralelas. Entonces si correspondería.

Profesora Luego si corresponde, entonces si corresponde. Pero, pero ellos sólo hablan de… Por ese lado corresponde, estamos de acuerdo, dos pares de lados paralelos. Pero ellos le pusieron otra condición. ¿Qué otra condición le pusieron?

Clara Perpendiculares.

Profesora La perpendicularidad. Luego la conjetura no corresponde porque para ellos era dos pares de lados paralelos más perpendicularidad entre los lados. Luego no es correspondiente.

El uso de Cabri para determinar la validez de conjeturas formuladas por otros.

Este uso se identifica cuando en el análisis de las conjeturas propuestas, la profesora busca que los estudiantes realicen la construcción y revisen la validez de ésta. A continuación se presenta parte del protocolo de clase en donde se puede evidenciar este uso.

Profesora: Sí lo que ellos están diciendo es cierto, sí lo que me acaba de decir Alicia es cierto, que no siempre una diagonal biseca a la otra, significa que posiblemente una diagonal biseca a la otra. Entonces, eso fue lo que me dijiste, ¿cierto? Entonces estarían diciendo que hay un cuadrilátero con ángulos y lados desiguales, en donde una diagonal biseca a la otra, y quisiera saber si eso es posible. ¿Si es cierta esa? Entonces quiero que ustedes, con la calculadora, miren si es posible la interpretación que yo estoy dando según lo que me dijo Alicia. Yo traduzco eso a: existe un cuadrilátero con lados y ángulos desiguales, en donde una diagonal biseca a la otra [escribe esto en el tablero]. ¿Estoy interpretando bien lo que me dijiste Alicia?

Alicia [Asiente.]

Profesora ¿Si? Y quiero saber si eso es cierto. Clara ¿Estás haciendo la tarea?

Clara ¿Cuál?

Profesora Esa, la que ellos proponen. Que existen cuadriláteros con lados y ángulos desiguales en los cuales una diagonal biseca a la otra. Acuérdense que el proceso es ver si es posible lo que ellos proponen. Si es posible, entonces tenemos que incluirlo en el sistema axiomático como teorema, pero, si con la calculadora, vemos que no es posible no le gastamos esfuerzo. [Silencio] Desafortunadamente, las descripciones que me hicieron en la mayoría de los casos, del proceso que realizaron, no están muy buenas. Por eso no lo leo, pero en este caso me parece bueno que podamos hacer la exploración correspondiente.

8. CONCLUSIONES

A partir del análisis realizado de la propuesta didáctica y teniendo en cuenta los objetivos del presente trabajo, presento las siguientes conclusiones:

- La experiencia permitió abordar casi todos los elementos teóricos presentados en los libros de texto, referentes al tema de cuadriláteros. Se entreve la riqueza del ambiente de aprendizaje forjado, cómo el problema propuesto propicia la generación de conjeturas, y cómo el uso de la geometría dinámica posibilita la exploración para determinar dependencias y generalizaciones, tres factores determinantes de la propuesta analizada. Los elementos teóricos no fueron estudiados de forma tradicional sino que surgieron como necesidades desde la teoría para poder resolver la situación propuesta.

- El trabajo con la geometría dinámica posibilitó el descubrimiento de hechos geométricos a través de la exploración de construcciones realizadas, obteniendo resultados que se convirtieron en elementos esenciales para el desarrollo teórico de la clase, al validar o rechazar cada una de las conjeturas propuestas.

- Durante la aplicación de la propuesta se generó un ambiente en el aula, en donde los estudiantes actuaron como comunidad académica en la que se construye conocimiento, siendo Cabri el dinamizador de la actividad matemática generada. Los miembros de la comunidad (profesora y estudiantes) construyeron colectivamente su sistema axiomático local, siendo la profesora guía del proceso. Los estudiantes desarrollaron actitudes de indagación que les permitió ser críticos de lo propuesto y apropiarse del trabajo realizado en el aula.

- Al analizar las subtareas que la profesora propuso y las acciones que generó para direccionar las clases, fue posible observar que el papel de la profesora, en esta experiencia, es el de una docente comprometida con el aprendizaje de sus estudiantes, lo que la llevó a considerar en sus preparaciones los posibles aportes de los estudiantes ante las preguntas que diseñaba para indagar sobre su conocimiento, y así saber de antemano la dirección que posiblemente podía tomar el desarrollo teórico. Además, durante la clase, buscó la forma de usar todas las sugerencias de sus estudiantes, cosa que hizo que ellos sintieran que sus aportes eran importantes en la construcción del sistema axiomático, y que se apropiaran de la tarea, realizando así actividad matemática.

- El desarrollo de este análisis fue impórtate para mi formación, ya que el papel de la profesora que aquí se evidencia es muy diferente a el que he podido observar, durante mi formación como docente, en muchos de los cursos. Mi visión de lo que debe ser un docente pasó de una concepción tradicionalista a una en la cual el papel del profesor es el de proponer tareas y gestionar propuestas que propicien la construcción social del conocimiento. Además, pude evidenciar el potencial de la geometría dinámica dentro de la actividad matemática como instrumento mediador para la construcción del conocimiento. Por otro lado, me permitió observar que más que ser profesor, se debe ser un profesor investigador, pues es así como se pueden diseñar actividades que ayuden en el aprendizaje de los estudiantes y lleven a un proceso de construcción, sin caer en el activismo.

- Trabajos como el realizado, presentan una evidencia de que la pedagogía va más allá de la teoría, como muchos estudiantes piensan, ya que todo depende del compromiso del profesor, los ambientes de aprendizaje que genera, y la gestión que hace en el aula con miras a la construcción del conocimiento.

9. BIBLIOGRAFÍA

ARIAS, J. *Aprendizaje Cooperativo*. 2ª Edición. Bogotá: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional. Bogota, 2005.

CLEMENS, R.y O'DAFFER, G. Geometría. Prentice Hall. México, 1998.

DE LA ROSA A. La calculadora como instrumento de mediación. En: Correo del maestro. Núm. 56. Enero, 2001.

GUTIÉRREZ, A. Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de Geometría dinámica. En: Investigación en educación matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM. Septiembre, 2005.

HEALY, L. Identifying and explaining geometrical relationships. Interactions with robust and soft Cabri constructions. Proceedings of PME 24, Hiroshima, Giapponi, 2000. Pág. 103 – 117.

LABORDE, C. Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. En: Educational Studies in Mathematics 44. Netherlands, 2000.

-------- Robust and soft constructions: two sides of the use of dynamic geometry environments. En: Electronic Proceedings of the 10th Asian Technology Conference in Mathematics. December 12-19, 2005, South Korea, 2006.

MOISE, E. y DOWNS, F. Geometría moderna. Addison Wesley Iberoamericano SA. 1964.

MORENO L. Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. Centro de investigaciones y estudios avanzados del IPN. México, 1999.

PONTE, J. A., et. al. Didáctica de la matemática. Lisboa: Ministerio de Educación. Departamento de Encino Secundario. Portugal, 1997.

SAMPER C., LEGUIZAMÓN, C. y CAMARGO, L. Como promover el razonamiento en el aula de por medio de la geometría. Universidad Pedagógica Nacional. Bogota, D.C., 2003.

SAMPER, C., PERRY, P. y CAMARGO, L. Geometría plana: un espacio de aprendizaje. (DMA-006-05). Reporte de Investigación Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, 2006.