Analise Matemática I

Aula 13

Derivada de uma função.

Ano académico 2017

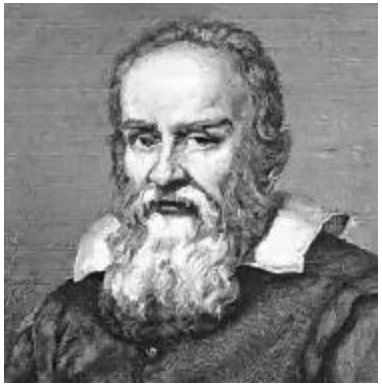
Bibliografia Básica

Autor	Título	Editorial	Data
Stewart, James	Cálculo, Volume 1	5ta. Edição, Pioneira Thompson Learning	2006
Zuma Medeiros , Valéria	Pré-Cálculo 2ª edição revista actualizada	CENGAGE Learning	2012
Demana, Franklin... (et al.)	Pré-Cálculo	Pearson Education do Brasil	2011
Larson, Ron	Cálculo Aplicado	1 Edição, Pioneira Thomson Learning	2011

Tema 3. Cálculo Diferencial

- Noção de Derivada.
- Derivada de uma função num ponto.
- Interpretação geométrica e física do conceito de derivada.
- Derivada de funções elementares.
- Derivabilidade e continuidade.
- Regras de Derivação.
- Regra da cadeia.

A linguagem do movimento



Galileu, ao descrever pela primeira vez uma função que relacionava o espaço com o tempo na queda dos corpos, deixou em aberto a **necessidade do Cálculo Diferencial, o cálculo com derivadas.**

A <u>derivada</u> expressa o <u>ritmo da mudança instantânea</u> em qualquer fenómeno que envolva funções.

Quando se trata de corpos em movimento, esta interpretação é especialmente precisa e interessante. De fato, **historicamente**, foi o que deu origem ao estudo das derivadas.

A lei da queda dos corpos

A tentativa de Galileu de **demonstrar** que todos os corpos caem com a mesma aceleração esbarrou na falta de um instrumento matemático - as **derivadas**.

Quem foi capaz de completar a tarefa de Galileu?...

Isaac Newton e G.W. Leibniz, ambos separadamente e quase ao mesmo tempo, o que originou uma forte disputa entre eles.

Gottfried Wilhelm von Leibniz

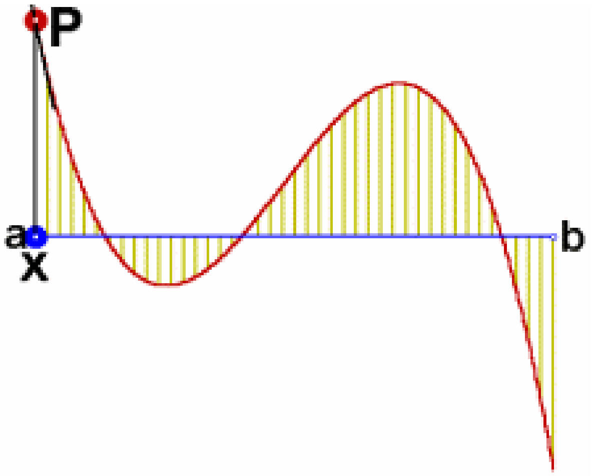
(Leipzig, 1 de julho de 1646 — Hanôver, 14 de Novembro de 1716)

Sir Isaac Newton

(Woolsthorpe, 4 de Janeiro de 1643 — Londres, 31 de Março de 1727)

A linguagem do movimento

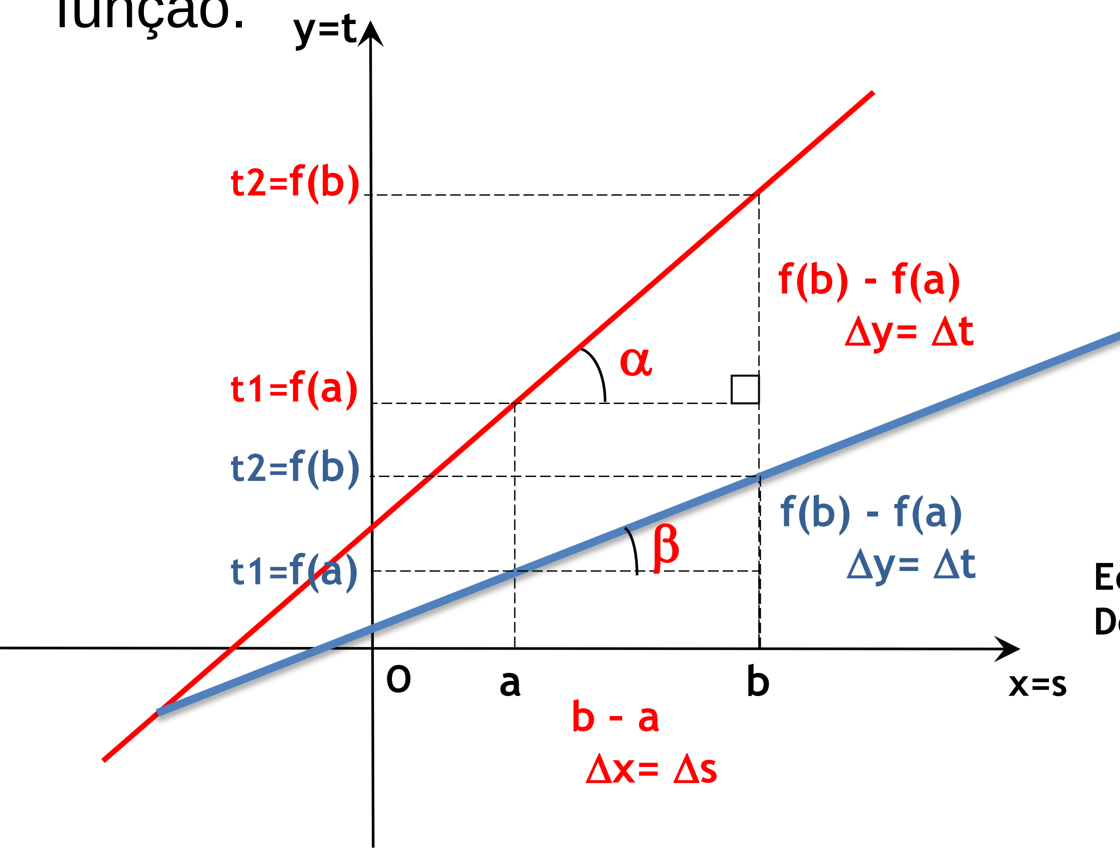
Newton e **Leibniz** iniciaram o Cálculo Diferencial e, ao medir o **ritmo de mudança** dos fenómenos físicos, naturais e inclusivamente sociais, abriram as portas ao espectacular desenvolvimento científico e tecnológico que transformou o mundo em 3 séculos tanto ou mais que em toda a história anterior. Parecia que por fim se tinha cumprido o sonho pitagórico: **explicar o mundo com a Matemática.**



(✱) O despeito de Newton (1642 – 1727) devido a algumas críticas desfavoráveis levou-o a manter em segredo durante 30 anos, sem publicá-las, as suas descobertas relativas ao Cálculo Diferencial e Integral. Na correspondência com Leibniz (1646 – 1716) deu-lhe alguns indícios e este foi capaz de por si só desenvolver o Cálculo com uma notação melhor. Quando o publicou, foi acusado de plágio. Leibniz recorreu à British Royal Society, presidida pelo próprio Newton; o que foi a sua perdição. Desacreditado pela opinião dominante, neste caso nada imparcial, a historia terminou amargamente para ele. Newton gabava-se de “ter desfeito o coração de Leibniz”.

Noção de Derivada.

Se uma função é representada graficamente por uma recta (função afim), facilmente sabemos com que velocidade varia essa função. Corresponde, é claro, à **declividade da recta** representativa da função.



$$\textbf{Velocidade} = \frac{\textbf{\textit{Deslocamento}}}{\textbf{\textit{Tempo}}}$$

$$\boldsymbol{tmv} = \boldsymbol{tg\alpha} = \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = m$$

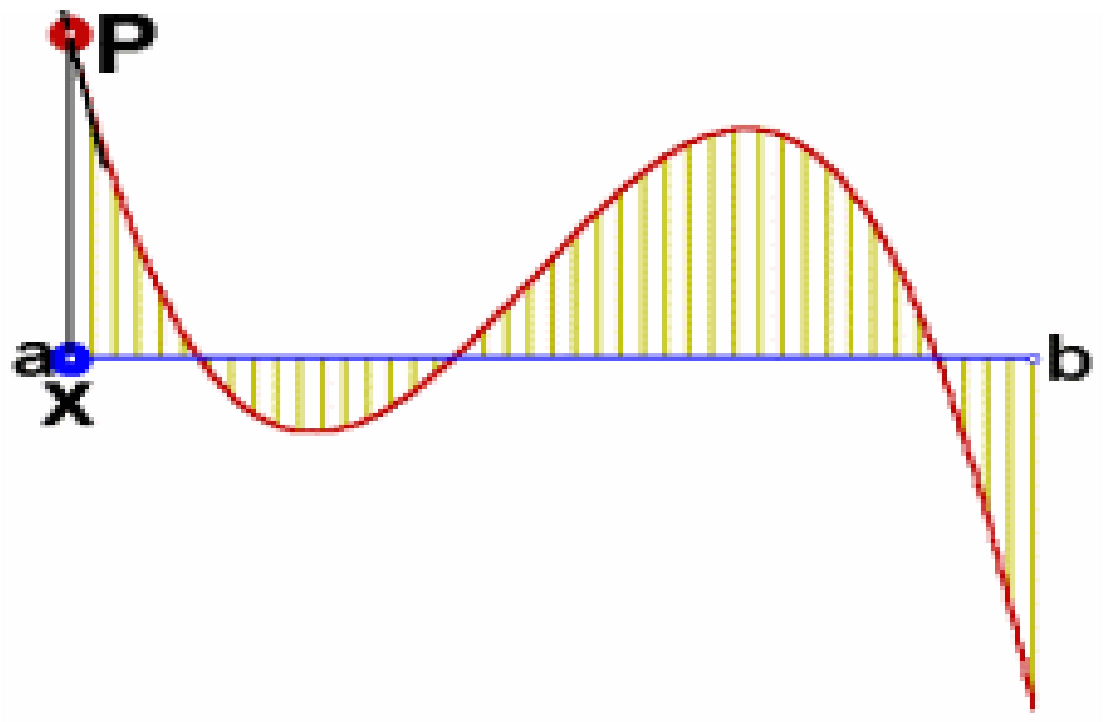
***t**axa **m**édia de **v**ariação*

Equação de uma Recta: y = mx + n
Derivada da Recta: m

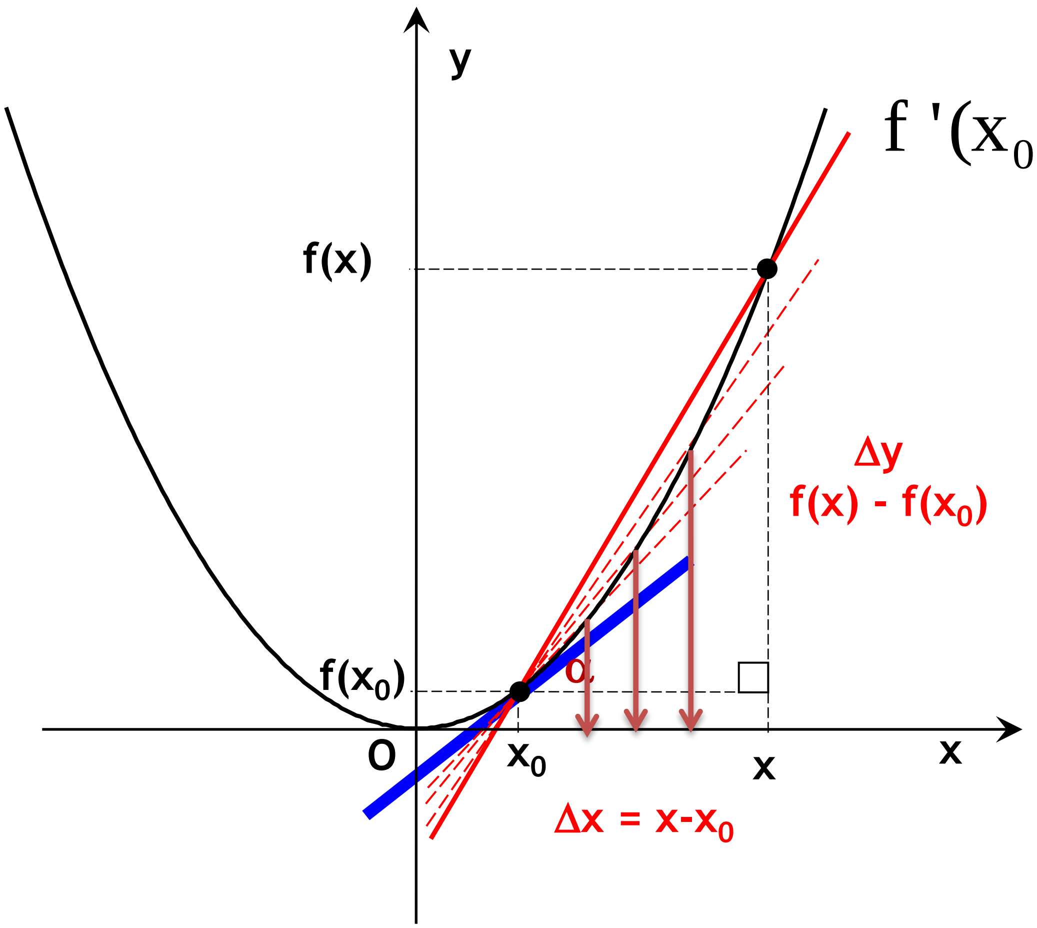
E... se o gráfico da função não for uma reta?

Com que velocidade (rapidez) varia essa função?

O que os Matemáticos se lembraram foi de “substituir localmente” a curva por uma recta e calcular a declividade dessa(s) recta(s) e… o resto é **História** e o estudo das **Derivadas…**



E... quando tomamos o limite?



$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Noção de Derivada. Interpretação física.

Velocidade Instantânea

Posição de um veículo que se desloca entre dois pontos é dada por uma função $y = f(x)$ em que x representa o tempo

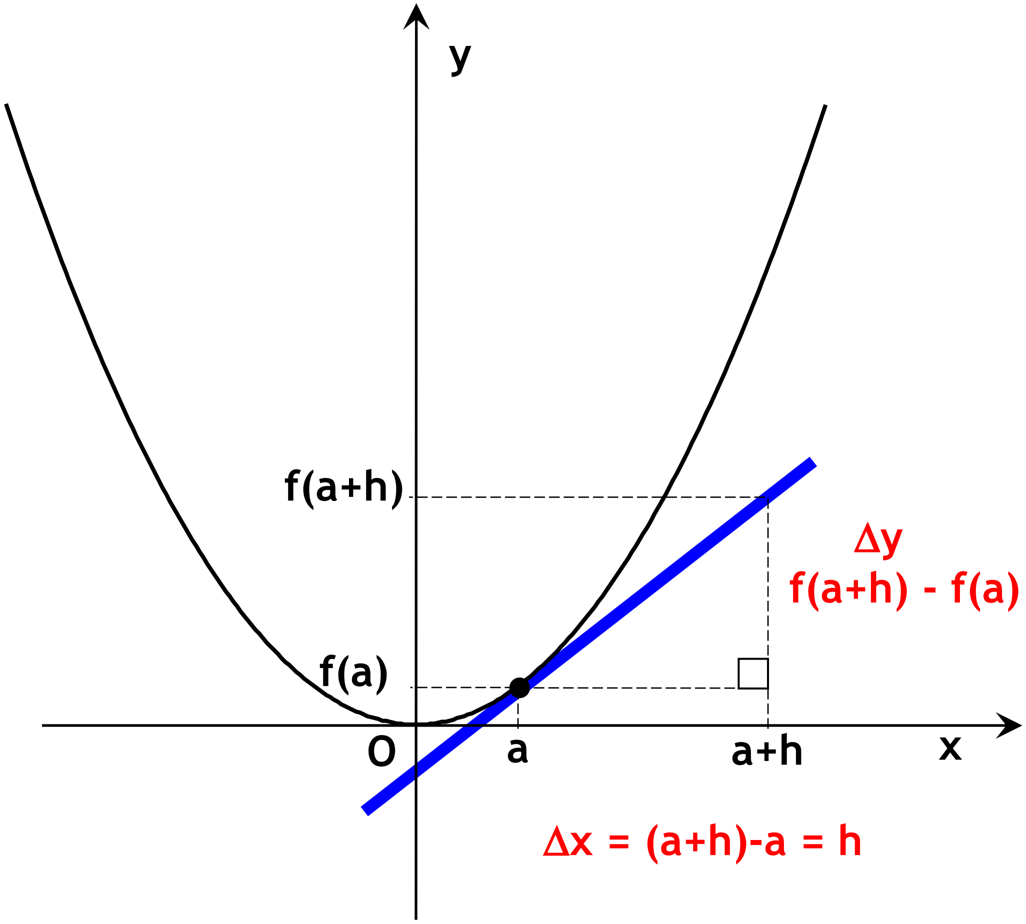
- Distância percorrida a velocidade média $v_{\text{med}} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
- Exemplo: Supondo que uma partícula em movimento, cuja posição é dada por $y = x^3 + 1$ cm, inicia o deslocamento em $a = 0$ seg. e pára em $b = 12$ seg., velocidade média será

$$v_{\text{med}} = \frac{f(12) - f(0)}{12 - 0} = \frac{(12^3 + 1) - (0^3 + 1)}{12} = 144 \quad \text{cm/seg}$$

- Velocidade média não informa sobre o tipo de movimento entre a e b, por vezes queremos saber detalhadamente o movimento em cada instante
- Velocidade instantânea é a variação da posição num pequeno intervalo:

$$v_{\text{inst}} = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

E… quando tomamos o limite?



Definição de Derivada

Diz-se que *f* é ***derivável ou*** **diferenciável em** ***a se existe (e é finito) o limite:***

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Tal limite (quando existe) diz-se a **derivada de f no ponto a** e representa-se por $f'(a)$, $Df(a)$ ou ainda por $\frac{df}{dx}(a)$. Fazendo a mudança de variável $x = a + h$, temos

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}.$$

Aqui têm apenas de se considerar os valores de h tais que $a + h \in D$.

Definição de Derivada

Diz-se que a função $f : D \to \mathbb{R}$ é derivável ou diferenciável em D se for derivável em todo o ponto de D e à nova função

$$f' : D \to \mathbb{R},$$

que a cada ponto $x \in D$ faz corresponder $f'(x)$, chama-se derivada de f e representa-se também por Df ou $\dfrac{df}{dx}$.

Definição de Derivada. Interpretação geométrica

O quociente

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

representa o declive da recta que passa pelos pontos

$$(a, f(a)) \text{ e } (a+h, f(a+h)).$$

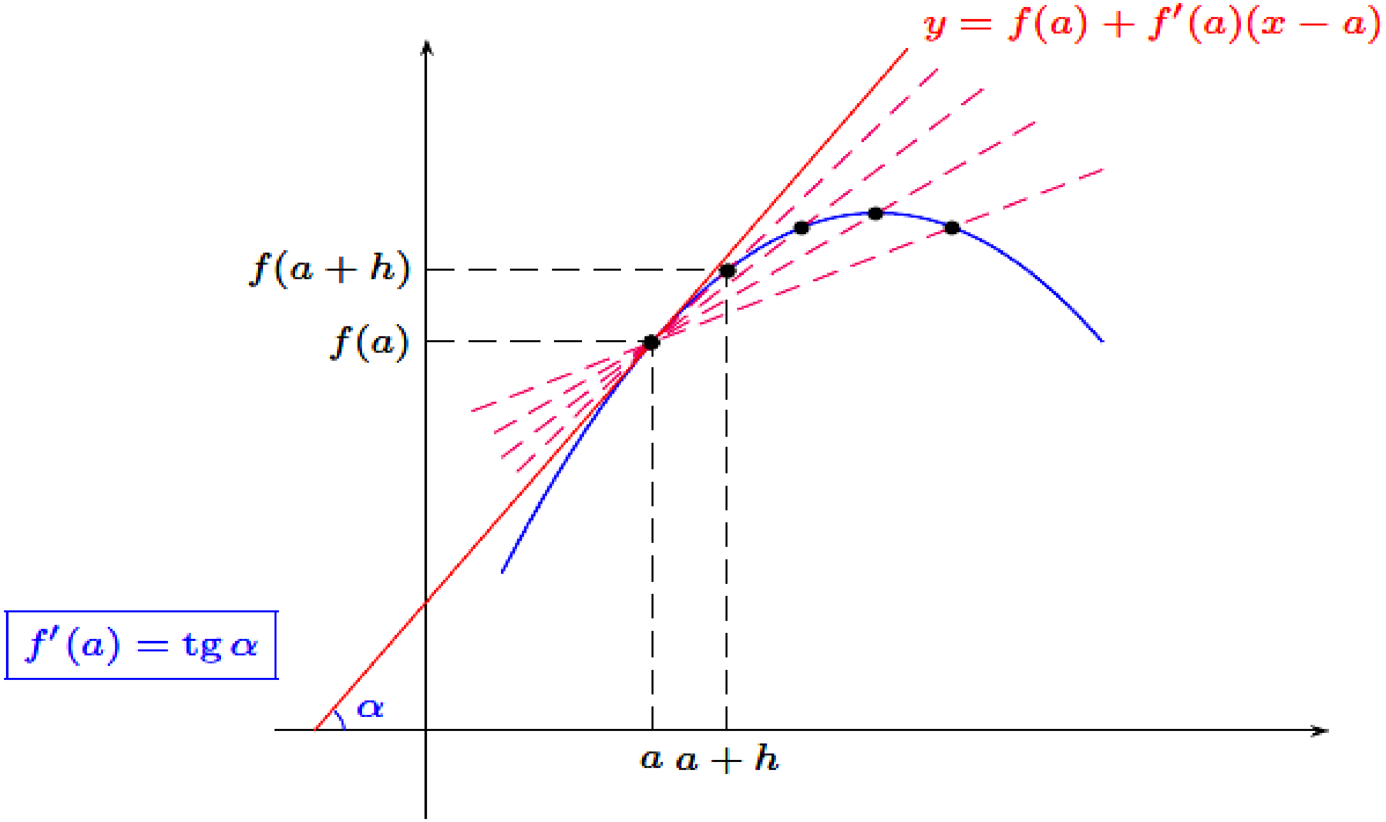
Fazendo h tender para zero, a recta que passa nos pontos

$$(a, f(a)) \text{ e } (a+h, f(a+h)),$$

vai tender para a recta tangente ao gráfico de f e que passa no ponto $(a, f(a))$. Assim, geometricamente, a derivada de uma função num ponto do domínio é o declive da recta tangente ao gráfico da função no ponto considerado. Portanto, a recta tangente ao gráfico de uma função f no ponto $(a, f(a))$ é a recta de equação

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Definição de Derivada



Interpretação geométrica do conceito de derivada

Derivabilidade

Diz-se que f é **derivável (ou diferenciável) à esquerda em a** se existe e é finito o limite

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'_e(a).$$

Diz-se que *f* é **derivável (ou diferenciável) à direita em a** *se* existe e é finito o limite

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'_d(a).$$

Tendo em conta as propriedades dos limites, resulta imediatamente, que *f é derivável em a se e só se f é derivável à esquerda e à direita em a e*

$$f'_e(a) = f'_d(a).$$

Derivadas. Exemplos

Exemplos – funções polinomiais

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^n$$

derivável em todos os pontos de $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Derivadas. Exemplos

Usando esta última igualdade, tem-se que a derivada da função definida por

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

é dada por

$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 2 a_2 x + a_1.$$

Derivadas. Exemplos

Exemplos – funções constante

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = c,$$

onde c é um número real. Então

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. Assim, f' é a função identicamente nula.

Derivadas. Exemplos

Exemplos – função identidade

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x.$$

Então, para cada $x \in \mathbb{R}$, temos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

e, portanto, $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f'(x) = 1.$$

Derivadas. Exemplos

Exemplos – função exponencial

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = e^x .$$

Então

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} \\ &= e^x . \end{aligned}$$

$$f(x) = a^u \qquad f'(x) = u'.a^u.\ln a$$

Derivadas. Exemplos.

Exemplos – função logaritmo natural

Seja $f\colon]0,+\infty[\, \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = \ln x$. Então

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\ln \dfrac{x+h}{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{h/x}\,\frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Derivadas. Exemplos.

Exemplos

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$ é derivável para qualquer $x \in \mathbb{R}$. De facto, $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos x$.

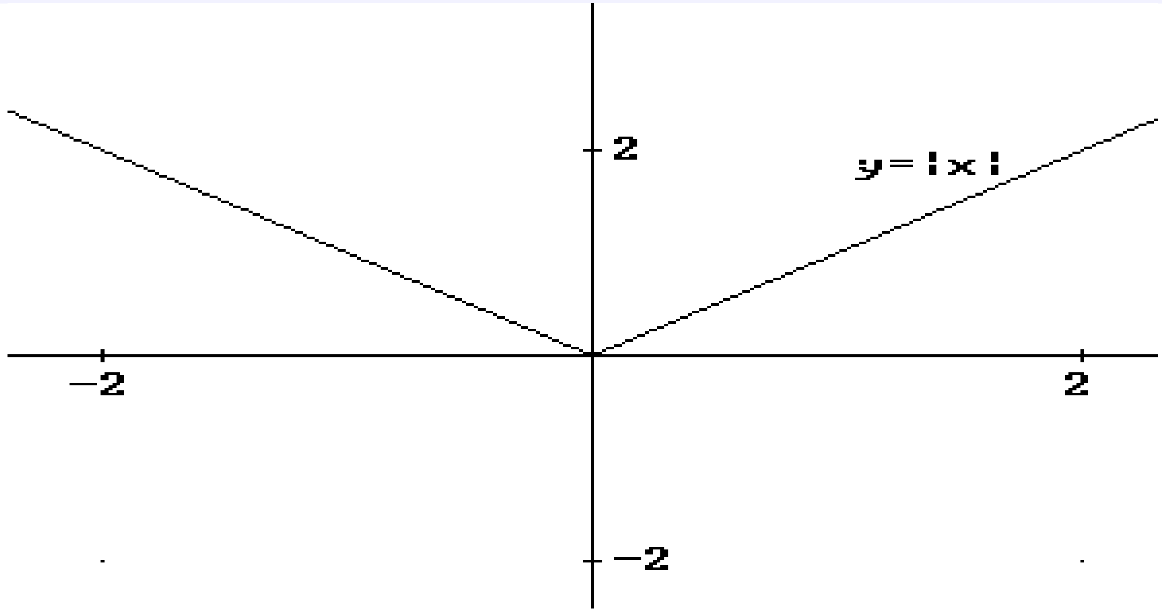
temos que $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.

Derivabilidade e continuidade

Exemplos

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = |x|.$$



Derivabilidade e continuidade

Exemplos

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = |x| \, .$$

Então

$$f'_e(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} -\frac{x}{x} = -1$$

e

$$f'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

o que mostra que f não é derivável no ponto 0.

Derivabilidade e continuidade

Exemplos

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Esta função não é diferenciável à direita, nem à esquerda do ponto 0, pois não existe

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x \operatorname{sen}(1/x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen} \frac{1}{x},$$

nem

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x \operatorname{sen}(1/x)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \operatorname{sen} \frac{1}{x}.$$

Derivabilidade e continuidade

Propriedades

Se $f : D \to \mathbb{R}$ é uma função derivável em $a \in D$, então f é contínua nesse ponto.

Observação

O recíproco desta propriedade é falso. A função

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

dada por

$$f(x) = |x|$$

é contínua no ponto 0, mas não é derivável nesse ponto.

Regras de derivação

Regras de derivação

Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$ funções deriváveis em $a \in D$ e $k \in \mathbb{R}$. Então

i) $f+g$ é derivável em a e

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a);$$

ii) kf é derivável em a e

$$(kf)'(a) = kf'(a);$$

iii) $f.g$ é derivável em a e

$$(f.g)'(a) = f'(a)\; g(a) + g'(a)\; f(a);$$

iv) se $g(a) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ é derivável em a e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\; g(a) - g'(a)\; f(a)}{g^2(a)}.$$

Derivada da função composta. Regra da cadeia

Derivada da função composta

Sejam D_f e D_g dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ e

$$f : D_f \to \mathbb{R} \text{ e } g : D_g \to \mathbb{R}$$

funções tais que

$$f(D_f) \subseteq D_g.$$

Se *f é derivável em a* e *g é derivável em b*, *então g ∘ f é derivável em a e*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\ f'(a) = g'(b)\ f'(a).$$

f(x)= ln (senx) f´(x)= ln´ (senx).senx´=$\frac{1}{senx} . cosx = \frac{cosx}{senx}$

Derivada da função composta

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \left(2x^2 + 5\right)^{100}$. Então, usando a derivada da função composta, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= 100\left(2x^2+5\right)^{99}\left(2x^2+5\right)' \\ &= 100\left(2x^2+5\right)^{99}4x \\ &= 400x\left(2x^2+5\right)^{99}. \end{aligned}$$

Derivada da função composta

Consideremos a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \operatorname{sen}\left(e^x + 1\right)$.

A sua derivada é dada por

$$g'(x) = \cos\left(e^x + 1\right)\left(e^x + 1\right)' = \cos\left(e^x + 1\right) e^x = e^x \cos\left(e^x + 1\right).$$

Derivada da função composta

Exemplos

A função $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $h(x)=\mathrm{e}^{3\cos x^2}$ tem derivada em todos os pontos de $\mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned} h'(x) &= \mathrm{e}^{3\cos x^2}\left(3\cos x^2\right)' \\ &= \mathrm{e}^{3\cos x^2}\left(-3\operatorname{sen} x^2\right)\left(x^2\right)' \\ &= \mathrm{e}^{3\cos x^2}\left(-3\operatorname{sen} x^2\right)\,2x \\ &= -6x\ \operatorname{sen} x^2\,\mathrm{e}^{3\cos x^2}. \end{aligned}$$

Derivada da função composta

Exemplos – função exponencial e função logarítmica

Para a função exponencial temos

$$(a^x)' = \left(\mathrm{e}^{\ln(a^x)}\right)' = \left(\mathrm{e}^{x\ln a}\right)' = \mathrm{e}^{x\ln a}\,\ln a = a^x\,\ln a.$$

Para a função logarítmica usando a igualdade

$$\log_{\mathrm{e}} x = \log_a x\,\log_{\mathrm{e}} a$$

temos

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{(\ln x)'}{\ln a} = \frac{1/x}{\ln a} = \frac{1}{x\,\ln a}.$$

Derivada da função inversa

Derivada da função inversa

Sejam f uma função diferenciável e injectiva definida num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in I$. Se

$$f'(a) \neq 0,$$

então f^{-1} é diferenciável em $b = f(a)$ e

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Derivada da função composta

Exemplos

Se f é uma função real de variável real diferenciável, então

$$\left[e^{f(x)}\right]' = f'(x)\, e^{f(x)},$$

$$[\operatorname{sen}(f(x))]' = f'(x)\cos(f(x))$$

e

$$[\cos(f(x))]' = -f'(x)\operatorname{sen}(f(x)).$$

Exercícios

1.Calcule e simplifique a derivada de cada uma das funções dadas abaixo :

(a) $\mathrm{f}(x) = \left(\dfrac{x+4}{2x^2-5x+6} \right)^3$

(b) $\mathrm{f}(x) = \dfrac{(4x-1)^3\left(x^2+2\right)^4}{\left(3x^2+5\right)^2}$

(c) $\mathrm{f}(x) = \dfrac{4x+6}{\sqrt{x^2+3x+4}}$

(d) $\mathrm{f}(t) = \sqrt[3]{\dfrac{5t+6}{5t-4}}$

2.Calcule $(\operatorname{tg} x)'$

Matemática

Matemática I

Ano académico 2017