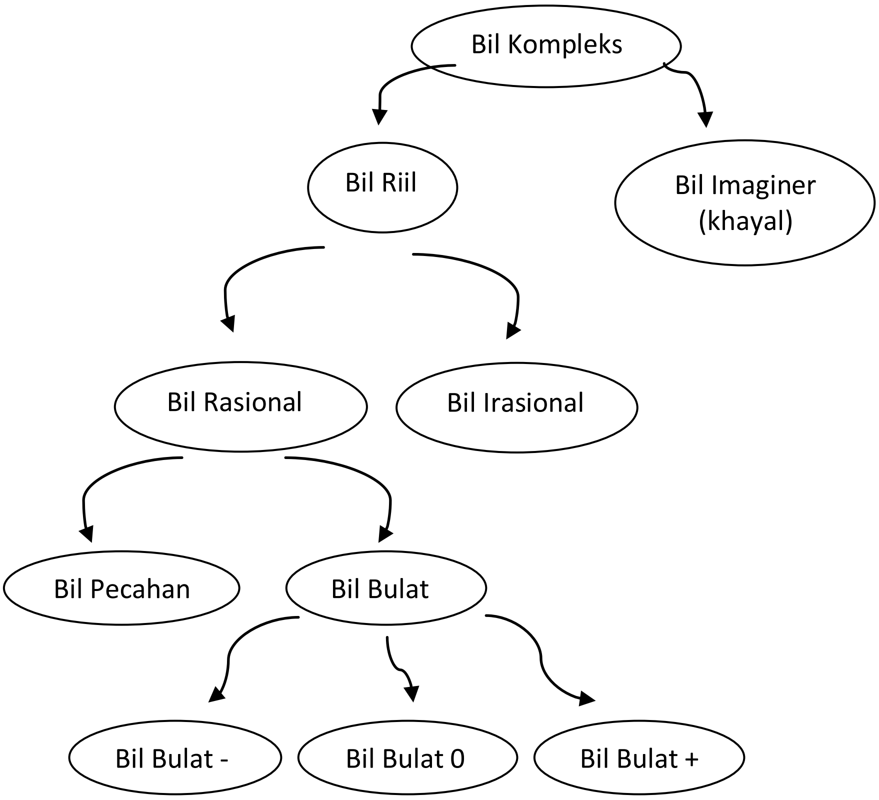
Pendahuluan



Sistem Bilangan Kompleks

Untuk $a, b \in \mathbb{R}$ maka bentuk umum bilangan kompleks adalah

$$z = a + bi$$

dengan $b \neq 0$, i dinamakan satuan khayal (*imaginary unit*) bersifat $i^2 = -1$. a dinamakan bagian riil dari z dan b dinamakan bagian khayal dari z yang berturut-turut dinyatakan dengan $\mathrm{Re}(z)$ dan $\mathrm{Im}(z)$.

Kompleks sekawan (*Complex Conjugate*) dari suatu bilangan kompleks adalah

$$\bar{z} = a - bi$$

Operasi Dasar Bilangan Kompleks

1. Penjumlahan $(a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di$
2. Pengurangan $(a + bi) - (c + di) = a + bi - c - di$
3. Perkalian $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
4. Pembagian $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

Sifat-sifat Aljabar Bilangan Kompleks

Misalkan $z_1, z_2,$ dan z_3 adalah bilangan kompleks, maka berlaku:

1. Hukum komutatif
$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$
2. Hukum asosiatif
$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3; \qquad z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$$
3. Hukum distributif (penyebaran)
$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$
4. Hukum kesekawanan
$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$; $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$; $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$; $\overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$
5. $\bar{\bar{z}} = \bar{z}$
6. $z\bar{z} = [Re(z)]^2 + [Im(z)]^2$

Contoh1

Diberikan $z_1 = 2 - 3i$ dan $z_2 = -5 + i$, maka:

a. $z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (-5 + i) = -3 - 2i$
b. $z_1 - z_2 = (2 - 3i) - (-5 + i) = 7 - 4i$
c. $z_1 z_2 = (2 - 3i)(-5 + i) = -7 - 17i$
d. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2-3i)}{(-5+i)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

Latihan 1

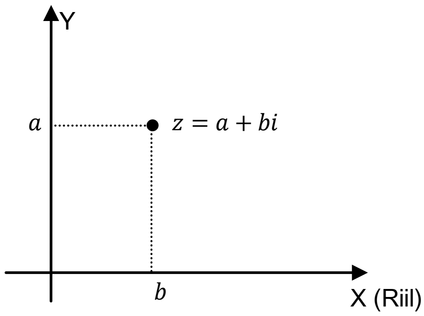
1. Selesaikan operasi yang diberikan
   a. $(3 + 4i) + (3i - 2)$
   b. $3(-1 + 4i) - 2(7 - i)$
   c. $(3 + 2i)(2 - i)$
   d. $\frac{2-3i}{4-i}$
   e. $i^2, i^3, i^4, i^5, \dots, i^{10}$
   f. $i^{123} - 4i^9 - 4i$
   g. $(2i - 1)^2 \left\{\frac{4}{1-i} + \frac{2-i}{1+i}\right\}$
   h. $\frac{i^4 + i^9 + i^{16}}{2 - i^5 + i^{10} - i^{15}}$
   i. $3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 - 2\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$
2. Tunjukkan bahwa bila $z = -1 - i$ maka $z^2 + 2z + 2 = 0$
3. Buktikan bahwa $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
4. Tentukan bilangan riil x dan y sehingga $2x - 3iy + 4ix - 2y - 5 - 10i = (x + y + 2) - (y - x + 3)i$

5. Buktikan bahwa untuk setiap z, berlaku

$$Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \text{dan} \quad Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

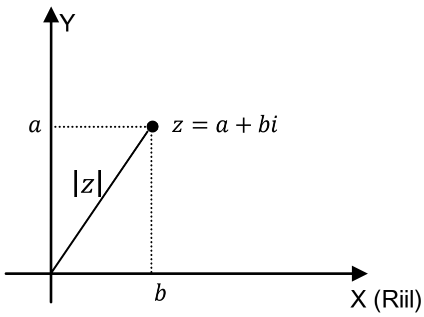
Grafik Bilangan Kompleks

Suatu bilangan kompleks dapaat digambarkan dalam suatu bidang kompleks seperti menggambarkan suatu titik pada bidang cartesius XY.



Nilai Mutlak

Nilai mutlak atau absolut atau modulus didefinisikan sebagai jarak antara z dan sumbu koordinat dan diberikan sebagai $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$



Contoh 2

Diketahui $z = -1 - i$, maka modulus dari z adalah $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

Contoh 3

$$\left|\frac{2 + 3i}{1 - i}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{26}$$

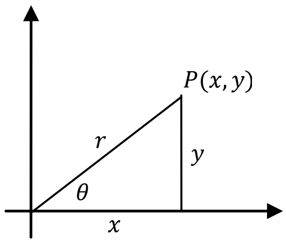
Jika z_1 dan z_2 bilangan kompleks, maka berlaku

1. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

2. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
4. $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

Bentuk Polar (Kutub) Bilangan Kompleks

Perhatikan gambar berikut



Andaikan $z = x + iy$ merupakan suatu titik (x, y) pada bidang kompleks, berdasarkan gambar

$$x = r\cos\theta\ , \quad y = r\sin\theta$$

Dimana $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy|$dinamakan modulus dari $z = x + iy$, ditulis $mod\, z$ dan θ dinamakan argumen dari z ditulis $\arg z = arc\tan\frac{y}{x}$ yaitu menyatakan suatu sudut antara garis OP dengan sumbu x positif. Hal ini mengakibatkan

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

yang dinamakan dengan bentuk kutub bilangan kompleks, dan r dan θ dinamakan koordinat kutub. Dapat juga ditulis dalam bentuk

$$x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\ cis\ \theta = re^{i\theta}$$

Operasi Aljabar Bentuk Kutub

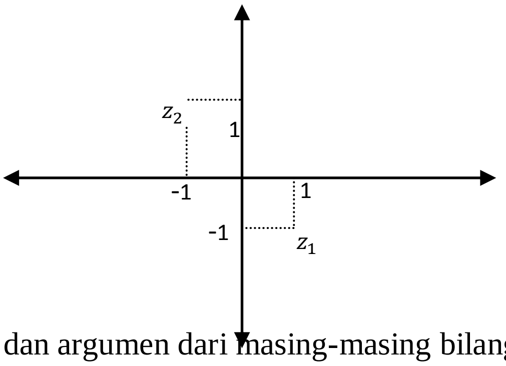
Misalkan $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ dan $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, maka:

1. $z_1 + z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) + r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$
   $= (r_1\cos\theta_1 + r_2\cos\theta_2) + i(r_1\sin\theta_1 + r_2\sin\theta_2)$
2. $z_1 - z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) - r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$
   $= (r_1\cos\theta_1 - r_2\cos\theta_2) + i(r_1\sin\theta_1 - r_2\sin\theta_2)$
3. $z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1).r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$
   $= r_1 r_1\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\}$
4. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\}$

Contoh 4

Diketahui $z_1 = 1 - i$ dan $z_2 = -1 + i$

a. Gambar kedua bilangan kompleks tersebut dalam bidang kompleks



b. Modulus dan argumen dari masing-masing bilangan kompleks
Modulus:
$|z_1| = r_1 = \sqrt{2}$ atau $mod\ z_1 = \sqrt{2}$
$|z_2| = r_2 = \sqrt{2}$ atau $mod\ z_2 = \sqrt{2}$
Argumen:
$\tan\theta_1 = \frac{-1}{1} = -1$, maka di peroleh $\theta_1 = 315^\circ$ atau $\arg z_1 = 315^\circ$
$\tan\theta_2 = \frac{1}{-1} = -1$, maka di peroleh $\theta_2 = 135^\circ$ atau $\arg z_2 = 135^\circ$

c. Bentuk kutub masing-masing bilangan kompleks
$z_1 = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$
$z_2 = \sqrt{2}(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$

Latihan 2

1. Tentukan $\left|\frac{\bar{z}}{z}\right|$!
2. Hitunglah setiap bentuk berikut jika diketahui $z_1 = 1 - i, z_2 = -2 + 4i$
   a. $|2z_2 - 3z_1|^2$
   b. $|z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1|$
3. Tentukan bentuk polar dari bilangan kompleks
   a. $2 + 2\sqrt{3}i$
   b. $-5 + 5i$
   Kemudian gambarkan grafiknya pada bidang kompleks
4. Diketahui $z_1 = 1 + i, z_2 = \sqrt{3} + i$. Tentukan
   a. $mod\ (z_1 z_2)$ dan $Arg\ (z_1 z_2)$
   b. $mod\ \left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ dan $Arg\ \left(\frac{z_1}{z_2}\right)$
   dan tulis masing-masingnya dalam bentuk kutub

Teorema De'Moivre

Misalkan $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ dan $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$.

Maka diperoleh

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}$$

$$z_1 z_2 \ldots z_n = r_1 r_2 \ldots r_n\{\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)\}$$

Jika $z_1 = z_2 = \cdots z_n = z$, maka diperoleh

$$z^n = \{r(\cos\theta + i\sin\theta\}^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Dinamakan teorema De'Moivre.

Rumus Euler

Ingat kembali deret Maclaurin

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \text{ dengan } a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Menyebabkan $f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

Misalkan $x = ix$,

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots\right)$$

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

dinamakan rumus Euler. Secara umum kita dapat mendefinisikan

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Sehingga bilangan kompleks z dapat kita tulis dalam bentuk

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

Contoh 5

1. Tunjukkan bahwa

   a. $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

Diketahui

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad \text{dan} \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

Sehingga diperoleh

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

b. $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ dan $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

Dengan menggunakan teorema De'Moivre

$$\begin{aligned}\cos 2\theta + i\sin 2\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^2\\ &= \cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta\\ &= (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + i(2\cos\theta\sin\theta)\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta\\ &= (1 - \sin^2\theta) - \sin^2\theta\\ &= 1 - 2\sin^2\theta\end{aligned}$$

dan

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

c. $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

Perhatikan bahwa $\sin^2\theta = (\sin\theta)^2$ sehingga

$$\begin{aligned}\sin^2\theta &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2\\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}}{2}\right) + \frac{1}{2}\\ &= -\frac{1}{2}(\cos 2\theta) + \frac{1}{2}\\ &= 1 - \cos^2\theta\end{aligned}$$

Latihan 3

1. Tunjukkan bahwa
   a. $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$
   b. $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin 3\theta$ dan $\cos 3\theta = 4\cos 3\theta - 3\cos\theta$
   c. $\sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta$
2. Jika diketahui $z_1 = re^{i\theta_1}$ dan $z_2 = re^{i\theta_2}$. Tentukan

a. $z_1 z_2$ b. $\frac{z_1}{z_2}$

Akar Bilangan Kompleks

Andaikan w adalah akar dari z yaitu:

$$w = z^{\frac{1}{n}} \text{ atau } w^n = z$$

Sehingga

$$z^{\frac{1}{n}} = \{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^{\frac{1}{n}}$$

$$= r^{\frac{1}{n}}(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{1}{n}}$$

dengan menggunakan teorema De'Moivre diperoleh

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)$$

atau bentuk umum

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left\{\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right\} \qquad k = 0,1,2,\dots,n-1$$

Contoh 6

Tentukan setiap akar yang diberikan berikut dan letaknya pada bidang kompleks

a. $(-1+i)^{\frac{1}{3}}$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$(-1+i)^{\frac{1}{3}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left\{\cos\frac{\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)}{3} + i\sin\frac{\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)}{3}\right\}$$

Untuk

$k = 0, \quad z_1 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$k = 1, \quad z_2 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$

$k = 2, \quad z_3 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$

b. $\left(2\sqrt{3} - 2i\right)^{\frac{1}{2}}$

$$r = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{2}$$

$$\sin\theta = -\frac{2}{\sqrt{4}}, \qquad \theta = 330^\circ$$

$$\cos\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4}, \qquad \theta = 330^\circ$$

$$\left(2\sqrt{3} - 2i\right)^{\frac{1}{2}} = (4)^{\frac{1}{2}}\left\{\cos\frac{(330^\circ + 2k\pi)}{2} + i\sin\frac{(330^\circ + 2k\pi)}{2}\right\}$$

Untuk

$k = 0, \quad z_1 = 2(\cos 165^\circ + i\sin 165^\circ)$

$k = 1, \quad z_2 = 2(\cos 345^\circ + i\sin 345^\circ)$

Persamaan Suku Banyak

Penyelesaian persamaan suku banyak berbentuk

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

dimana $a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_n$ bilangan kompleks yang diketahui dan n bilangan bulat positif. Persamaan suku banyak memiliki n akar kompleks. Jika $z_1, z_2, \ldots, z_n$ adalah n buah akarnya, maka

$$a_0(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n) = 0$$

dinamakan bentuk pemfaktoran persamaan suku banyak.

Contoh 7

Selesaikan $z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 0$

penyelesaian

$$z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 0$$

Setelah difaktorkan diperoleh

$$(z - 2)(z - 1)^2(z^2 + 2z + 2) = 0$$

Maka

$$z_1 = 2, z_2 = 1, z_3 = 1, z_4 = -1 + i, \text{dan } z_5 = -1 - i$$

Latihan 4

1. Selesaikan persamaan $z^4 + 81 = 0$
2. Tentukan semua akar dari $z^4 + z^2 + 1 = 0$

Fungsi Kompleks

Suatu fungsi kompleks dengan variabel kompleks z dinyatakan oleh $w = f(z)$ dengan $z = x + iy$ sebagai domain dari w dan fungsi kompleks terdiri dari bilangan riil dan imaginer sehingga fungsi kompleks dapat dinyatakan dalam bentuk

$$w(z) = u(z) + v(z)i$$

atau

$$w(z) = u(x, y) + v(x, y)i$$

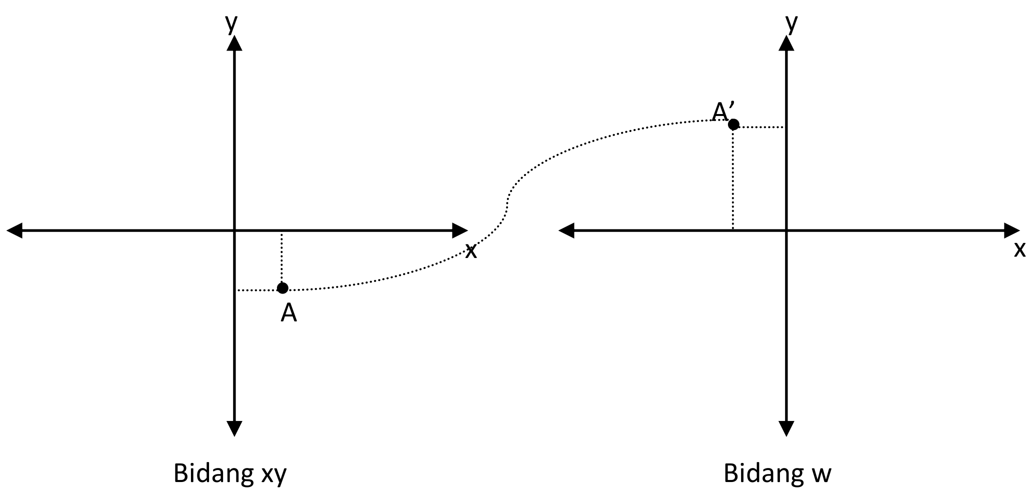
dimana $u(x, y)$ adalah bagian riil dan $v(x, y)$adalah bagian imaginer.

Dalam bentuk koordinat polar (r, θ) dapat juga dinyatakan dengan mengganti x dan y yaitu:

$$w(z) = u + iv = f(z) = f(x + iy) = r\cos\theta + i\, r\sin\theta$$

Jadi

$$f(z) = u(r, \theta) + i\, v(r, \theta)$$



Contoh

1. Jika $f(z) = 2x^2 + iy$. Tentukan fungsi kompleks dalam z

Penyelesaian

Jika

$$z = x + iy \quad \text{dan} \quad \bar{z} = x - iy$$

menyebabkan

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2} \qquad \text{dan} \quad y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

Sehingga

$$f(z) = 2\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + i\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(z^2 + \bar{z}^2 + z - \bar{z}) + z\bar{z}$$

2. Diketahui $f(z) = x + iy + \frac{x-iy}{x^2+y^2}$
   a. Nyatakan dalam bentuk z
   b. Tentukan u dan v
   c. Tentukan $f(1+2i)$

   Penyelesaian

   a. $f(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} + i\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + \frac{\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)+\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)}{z\bar{z}} = z + \frac{1}{z}$
   b. $f(z) = x + iy + \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2}$

      diperoleh

      $u = x + \frac{x}{x^2+y^2}$ dan $v = x + \frac{x}{x^2+y^2}$
   c. $f(z) = z + \frac{1}{z} = 1 + 2i + \frac{1}{1+2i} = \frac{6}{5} + \frac{8}{5}i$

Latihan

1. Tentukan nilai fungsi $f(z)$ jika $z = 1,\ 1+i,\ i, -1+i,$ dan -1 jika
   a. $f(z) = \frac{1}{z}$
   b. $f(z) = iz$
   c. $f(z) = z^2 + 1$
2. Jika $f(z) = z^2$ tentukan pemetaan dari bidang xy ke w jika
   a. $-2 + i$
   b. 1 −3i
3. Jika $z = 1 + 2i$, tentukan
   a. $f(z) = \frac{x-iy}{1+z}$
   b. $f(z) = \frac{1}{|z|}$
4. Misalkan $w = f(z) = z(2-z)$. Tentukan nilai w yang dinyatakan dengan

a. $z = 1 + i$
b. $z = 2 - 2i$

5. Jika $w = f(z) = \frac{1+z}{1-z}$. Tentukan $f(i)$dan $f(1-i)$
6. Jika $f(z) = \frac{2z+1}{3z-2}$, $z \neq \frac{3}{2}$. Tentukan
   a. $f(z)$
   b. $f\{f(z)\}$
7. Jika $w = f(z) = \frac{z+2}{2z-1}$. Tentukan
   a. $f(0), f(i),$ dan $f(1+i)$
   b. Nilai z sehingga $f(z) = i$ dan $f(z) = 2 - 3i$
8. Pisahkan setiap fungsi berikut ini dalam bagian riil dan khayalnya yaitu menentukan $u(x,y)$dan $v(x,y)$sehingga $f(z) = u + iv$.
   a. $f(z) = 2z^2 - 3zi$
   b. $f(z) = \frac{z+1}{2}$
   c. $f(z) = \frac{1-z}{1+z}$

Fungsi Eksponensial

Didefinisikan $w = e^z$ dengan $z = x + iy$ sehingga

$$w = e^{x+iy} = e^x . e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Sifat-sifat fungsi eksponensial

1. $e^{z_1} . e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

   Bukti

   Misalkan $e^{z_1} = e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1)$ dan $e^{z_2} = e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2)$
   $$\begin{aligned} e^{z_1} . e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) . e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}\{\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)\} \\ &= e^{x_1+x_2} . e^{i(y_1+y_2)} \\ &= e^{x_1+iy_1} . e^{x_2+iy_2} \\ &= e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$
2. $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$ (buktikan sebagai latihan)
3. $|e^z| = e^x$

   Bukti

   Misalkan $z = x + iy$
   $$\begin{aligned} |e^z| &= |e^x(\cos y + i \sin y)| \\ &= e^x|(\cos y + i \sin y)| \\ &= e^x\sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} \end{aligned}$$

$$|e^z| = e^x$$

4. $e^{z+2k\pi i} = e^z$
   Bukti
$$e^{z+2k\pi i} = e^z . e^{2k\pi i}$$
$$= e^z . (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi) , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$
$$e^{z+2k\pi i} = e^z$$

Fungsi Trigonometri

Ingat kembali rumus Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

menyebabkan

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} , \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} , \tan x = \frac{e^{ix} - e^{-iz}}{(e^{ix} + e^{-iz})i}$$

Contoh

Buktikan bahwa

1. $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_1 + \cos z_1 \sin z_2$
   Bukti
$$\sin(z_1 + z_2) = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i}$$
$$= \frac{e^{iz_1} . e^{iz_2} - e^{-iz_1} . e^{-iz_2}}{2i}$$
$$= \frac{(\cos z_1 + i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2) - (\cos z_1 - i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2)}{2i}$$
$$= \frac{2i(\cos z_1 \sin z_2) + 2i(\cos z_1 + i \sin z_2)}{2i}$$
$$= \sin z_1 \cos z_1 + \cos z_1 \sin z_2$$
2. $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_1 - \sin z_1 \sin z_2$ (prove it!)

Latihan

(buku Schaum halaman 67 no 62, 64, 68)

Fungsi Hiperbolik

Definisi

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

dengan $x \in \mathbb{R}$

Jika $z = x + iy$ adalah bilangan kompleks, maka

$$\sinh iz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

$$\cosh iz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Sifat-sifat fungsi hiperbolik

1. $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$
   Bukti:
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$
$$= \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i}$$
$$= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^{y}(\cos x - i \sin x)}{2i}$$
$$= i \cos x \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right) + \sin x \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)$$
$$= i \cos x \sinh y + \sin x \cosh y$$
2. $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$ (prove it!)
3. $\sinh(iz) = i \sin z$
   Bukti:
$$\sinh(iz) = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2}$$
$$= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^{y}(\cos x - i \sin x)}{2}$$
$$= -\cos x \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right) + i \sin x \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)$$
$$= -\cos x \cosh y + i \sin x \cosh y$$

$$= i(\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y)$$
$$= i \sin z$$

4. $\cosh iz = \cos z$ (prove it !)
5. $\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$
   Bukti:
$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$
$$= \frac{e^{x+iy} - e^{-(x+iy)}}{2}$$
$$= \frac{e^x(\cos y + i \sin y) + e^{-x}(\cos y - i \sin y)}{2}$$
$$= \cos y \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) + i \sin y \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$$
$$= \cos y \sinh x + i \sin y \cosh x$$
6. $\cosh z = \cos y \cosh x + i \sin y \sinh x$ (prove it!)
7. $\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$
   Bukti:
$$\sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$$
$$= \left(\frac{e^{z_1} - e^{-z_1}}{2}\right)\left(\frac{e^{z_2} + e^{-z_2}}{2}\right) + \left(\frac{e^{z_1} + e^{-z_1}}{2}\right)\left(\frac{e^{z_2} - e^{z_2}}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{2e^{z_1+z_2} - 2e^{-(z_1+z_2)}}{4}\right)$$
$$= \left(\frac{e^{z_1+z_2} - e^{-(z_1+z_2)}}{2}\right) = \sinh(z_1 + z_2)$$
8. $\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2$
   (prove it !)

Fungsi Logaritma

$$z = re^{i\theta}$$

$$\ln z = \ln(re^{i\theta})$$

$$\ln z = \ln r + \ln e^{i\theta}$$

$$\ln z = \ln r + i\theta$$

Secara umum ditulis

$$\ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Nilai utama $\ln z = \ln r + i\theta$

Latihan

(buku Schaum halaman 67 no 74, 75, 76)

Fungsi Invers Trigonometri

1. $\sin^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(iz \pm \sqrt{1-z^2}\right)$
   Bukti
   Jika $z = \sin w$, maka $w = \sin^{-1} z$merupakan invers sinus dari z, yaitu
   $w = arc\sin z = \sin^{-1} z$ dimana $z = \frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}$
   Untuk menentukan $\sin^{-1} z$, perhatikan bahwa
   $$2iz = e^{iw} - e^{-iw}$$
   $$2ize^{iw} = e^{2iw} - 1$$
   $$\left(e^{iw}\right)^2 - 2ize^{iw} - 1 = 0$$
   Andaikan $p = e^{iw}$, sehingga
   $p^2 - 2iz - 1 = 0$, merupakan persamaan kuadrat dalam p, sehingga
   $$p_{1,2} = \frac{2iz + \sqrt{-4z^2+4}}{2}$$
   $$= iz + \sqrt{1-z^2}$$
   Menyebabkan
   $$e^{iw} = iz + \sqrt{1-z^2}$$
   $$\ln e^{iw} = \ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$$
   $$iw = \ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$$
   $$w = \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$$
   Maka $\sin^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$
2. $\cos^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(z + \sqrt{1-z^2}\right)$
3. $\tan^{-1} z = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$
4. $\csc^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{i+\sqrt{z^2-1}}{z}\right)$
5. $\sec^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{i+\sqrt{1-z^2}}{z}\right)$
6. $\cot^{-1} z = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)$

Fungsi Invers Hiperbolik

1. $\sinh^{-1} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)$

Bukti

Jika $z = \sinh w$, maka $w = \sinh^{-1} z$merupakan invers sinus dari z, yaitu

$w = arc \sinh z = \sinh^{-1} z$ dimana $z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$

Untuk menentukan $\sin^{-1} z$, perhatikan bahwa

$$2iz = e^{iw} - e^{-iw}$$

$$2ize^{iw} = e^{2iw} - 1$$

$$\left(e^{iw}\right)^2 - 2ize^{iw} - 1 = 0$$

Andaikan $p = e^{iw}$, sehingga

$p^2 - 2iz - 1 = 0$, merupakan persamaan kuadrat dalam p, sehingga

$$p_{1,2} = \frac{2iz + \sqrt{-4z^2 + 4}}{2}$$

$$= iz + \sqrt{1 - z^2}$$

Menyebabkan

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}$$

$$\ln e^{iw} = \ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

$$iw = \ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

$$w = \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

Maka $\sin^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$

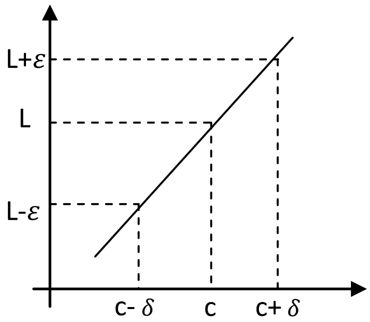
2. $\cos^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(z + \sqrt{1 - z^2}\right)$
3. $\tan^{-1} z = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$
4. $\csc^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{i+\sqrt{z^2-1}}{z}\right)$
5. $\sec^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{i+\sqrt{1-z^2}}{z}\right)$
6. $\cot^{-1} z = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)$

Limit Fungsi

Andaikan suatu fungsi $f(z)$ adalah fungsi kompleks dengan variabel z dan limit $f(z)$ adalah L dengan z mendekati z_0 yaitu

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$$

Jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $\delta > 0$ sehingga $|f(z) - L| < \varepsilon$ jika $0 < |z - z_0| < \delta$



Teorema Limit

Jika $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$ dan $\lim_{z \to z_0} g(z) = B$, maka

1. $\lim_{z \to z_0} \{f(z) + g(z)\} = A + B$
2. $\lim_{z \to z_0} \{f(z) - g(z)\} = A - B$
3. $\lim_{z \to z_0} \{f(z) \cdot g(z)\} = A \cdot B$
4. $\lim_{z \to z_0} \{f(z)/g(z)\} = \frac{A}{B}$, $B \neq 0$

Contoh

1. Diketahui

$$\lim_{x \to 2} (2x - 1) = 3$$

dan $\varepsilon = 0{,}01$. Tentukan δ

Penyelesaian

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

$$|2x - 1 - 3| < 0{,}01$$

$$|2x - 4| < 0{,}01$$

$$|2||x - 2| < 0{,}01$$

$$|x - 2| < 0{,}005$$

Karena

$$|2x - 1 - 3| < 0{,}01 \to |x - 2| < \delta$$

$$|x - 2| < 0{,}005 \to |x - 2| < \delta$$

Maka diperoleh

$$\delta = 0{,}005 = \frac{1}{2}\varepsilon$$

2. Hitunglah $\lim_{z\to 1+i} z^2 - 5z + 10$ dengan menggunakan teorema limit

   Penyelesaian

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 1+i} z^2 - 5z + 10 &= \lim_{z\to 1+i} z^2 - \lim_{z\to 1+i} 5z + \lim_{z\to 1+i} 10\\ &= (1+i)^2 - 5(1+i) + 10\\ &= 5 - 3i\end{aligned}$$

Latihan

1. Diketahui

$$\lim_{z\to 1}\frac{iz}{2} = \frac{i}{2}$$

   dan $\varepsilon = 0{,}1$. Tentukan δ

2. (Buku Schaum Latihan halaman 69 nomor 94)
3. Jika $f(z) = 3z^2 + 2z$, tentukan

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Turunan

Andaikan $f(z)$ adalah fungsi kompleks, maka turunan $f(z)$ yaitu $f'(z)$ didefinisikan oleh

$$f'(z) = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Dimana $z \to z_0$, $z - z_0 \neq 0$ atau $z - z_0 = \Delta z$.

$z \to z_0$ berarti $(z - z_0) \to 0$ atau $\Delta z \to 0$, sehingga

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Contoh

1. Tentukan turunan $f(z) = z^2 + 1$ dengan menggunakan definisi turunan

   Penyelesaian

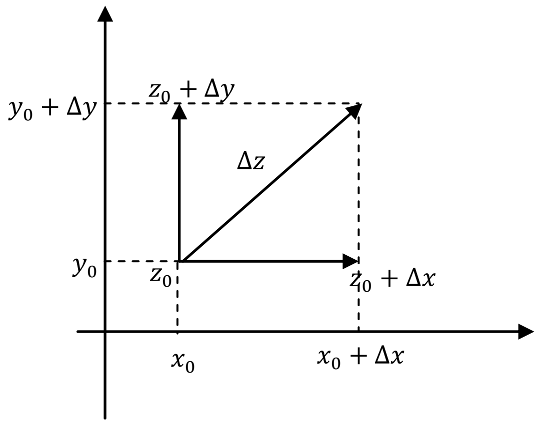
$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 + 1 - (z^2+1)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z(2z_0 + \Delta z)}{\Delta z}$$

$$= 2z_0$$

Jadi, $f'(z) = 2z_0$

Perhatikan grafik berikut



<u>Untuk y konstan</u>

$$f(z_0) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)$$

$$f(z_0 + \Delta z) = u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0)$$

Maka

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x, y_0) + iv(x_0+\Delta x, y_0) - [u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x, y_0) - u(x_0,y_0)}{\Delta x} - i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0+\Delta x, y_0) - v(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{..........} \ (1)$$

<u>Untuk x konstan</u>

$$f(z_0) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)$$

$$f(z_0 + \Delta z) = u(x_0, y_0 + \Delta y) + iv(x_0, y_0 + \Delta y)$$

Maka

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0,y_0+\Delta y)+iv(x_0,y_0+\Delta y)-[u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)]}{i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{i\Delta y} - i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)}{i\Delta y}$$

$$= \frac{\partial u}{i\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{.............} \ (2)$$

Dari (1) dan (2)

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

yang dinamakan persamaan Cauchy-Riemann. $f(z_0)$ dikatakan fungsi analitik, yakni mempunyai turunan di z_0.

Bentuk Polar Persamaan Cauchy-Riemann

Misalkan terdapat suatu fungsi kompleks

$$f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$$

dengan $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\cos\theta + ir\sin\theta$, dimana $u = (r,\theta) = r\cos\theta$ dan $v = r\sin\theta$. Sehingga

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \cos\theta \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial v}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \sin\theta \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\sin\theta$$

maka

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Contoh

Apakah $f(z) = z^2$ memenuhi persamaan Cauchy-Riemann?

Penyelesaian

Misalkan $z = x + iy$

menyebabkan

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2$$

diperoleh $u = x^2 - y^2$ dan $v = 2xy$

sehingga

$\frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x$, $\frac{\partial(2xy)}{\partial x} = 2y$, dan $-\frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial y} = 2y$

Jadi, $f(z)$ memenuhi Persamaan Cauchy-Riemann

Latihan

1. (Buku Shaum, halaman 97 nomor 43a, 43b, 46a, dan 47a)
2. Apakah fungsi berikut memenuhi persamaan Cauchy-Rieman
   a. $f(z) = r^2 \cos^2\theta + ir^2 \sin^2\theta$
   b. $f(z) = \frac{1}{z}$ dengan $z = re^{i\theta}$

Fungsi Harmonik

Andaikan terdapat suatu fungsi kompleks $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Dari persamaan Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{.........} \ (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{.......} \ (2)$$

Jika pers (1) didiferensialkan terhadap x diperoleh

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \text{...........} \ (3)$$

Jika pers (1) didiferensialkan terhadap y diperoleh

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial v}{\partial^2 y} \quad \text{...........} \ (4)$$

Jika pers (2) didiferensialkan terhadap x diperoleh

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad \text{...........} \ (5)$$

Jika pers (2) didiferensialkan terhadap y diperoleh

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y^2} \quad \text{............ (6)}$$

Jadi, jika turunan parsial kedua dari u dan v terhadap x dan y ada dan kontinu dalam suatu daerah ℝ maka

dari pers (3) dan (6) diperoleh

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y^2} = 0$$

dari pers (4) dan (5) diperoleh

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial^2 y} = 0$$

yang disebut dengan persamaan Laplace. Fungsi di mana $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ memenuhi persamaan Laplace dalam suatu daerah ℝ dinamakan fungsi harmonik dan dikatakan harmonik dalam ℝ.

Contoh

a. Buktikan bahwa fungsi $U = 2x(1 - y)$harmonik
b. Tentukan suatu fungsi v sehingga $f(z) = u + iv$ adalah analitik (yaitu menentukan fungsi sekawan dari u
c. Nyatakan $f(z)$ dalam suku-suku dari z

Penyelesaian

a. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(2x-2xy)}{\partial x}\right) = \frac{\partial(2-2y)}{\partial x} = 0$

   $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(2x-2xy)}{\partial y}\right) = \frac{\partial(-2x)}{\partial y} = 0$

   Karena $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y^2} = 0$, maka U fungsi harmonik.

b. Suatu fungsi dikatakan analitik jika memenuhi persamaan Cauchy-Riemann. Maka
   - $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2 - 2y$

     $v = \int \frac{\partial v}{\partial y}\, dy = \int (2 - 2y) dy = 2y - y^2 + c(x)$ .... (*)

   - $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$

     $\frac{\partial(2y-y^2+c(x))}{\partial x} = -(-2x)$

$c'(x) = 2x$
$c(x) = x^2$ .... (**)

Substitusi (**) ke (*) sehingga diperoleh

$$v = 2y - y^2 + x^2$$

c. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$
$= 2x - 2xy + i(2y - y^2 + x^2)$
$= 2x + i2y + i(x^2 + 2xy - y^2)$
$= 2(x + iy) + i(x + iy)^2$
$= 2z + iz^2$

Latihan

(Buku Shaum, halaman 97 nomor 50, 51, dan 53a)

Aturan Pendiferensialan

Jika $f(z), g(z),$ dan $h(z)$ fungsi analitik dari z, maka berlaku aturan pendiferensialan berikut ini:

1. $\frac{d}{dz}\{f(z) + g(z)\} = \frac{d}{dz}f(z) + \frac{d}{dz}g(z) = f'(z) + g'(z)$
   Bukti
   $\frac{d}{dz}\{f(z) + g(z)\} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{[f(z+\Delta z)+g(z+\Delta z)]-[f(z)+g(z)]}{\Delta z}$
   $= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{[f(z+\Delta z)-f(z)]}{\Delta z} + \lim_{\Delta z \to 0} \frac{[g(z+\Delta z)-g(z)]}{\Delta z}$
   $= \frac{d}{dz}f(z) + \frac{d}{dz}g(z)$
2. $\frac{d}{dz}\{f(z) - g(z)\} = \frac{d}{dz}f(z) - \frac{d}{dz}g(z) = f'(z) - g'(z)$
3. $\frac{d}{dz}\{cf(z)\} = c\frac{d}{dz}\{f(z)\} = cf'(z)$
4. $\frac{d}{dz}\{f(z).g(z)\} = g(z)\frac{d}{dz}f(z) + f(z)\frac{d}{dz}g(z) = g(z)f'(z) + f(z)g'(z)$
   Bukti
   $\frac{d}{dz}\{f(z).g(z)\} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{[f(z+\Delta z)\cdot g(z+\Delta z)]-[f(z)\cdot g(z)]}{\Delta z}$
   $= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)[g(z+\Delta z)-g(z)]+g(z)[f(z+\Delta z)-f(z)]}{\Delta z}$
   $= f(z)\lim_{\Delta z \to 0} \frac{[g(z+\Delta z)-g(z)]}{\Delta z} + g(z)\lim_{\Delta z \to 0} \frac{[f(z+\Delta z)-f(z)]}{\Delta z}$
   $= f(z)\frac{d}{dz}g(z) + g(z)\frac{d}{dz}f(z)$
5. $\frac{d}{dz}\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\} = \frac{g(z)\frac{d}{dz}f(z)+f(z)\frac{d}{dz}g(z)}{[g(z)]^2} = \frac{g(z)f'(z)+f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}$
   Bukti

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{[f(z+\Delta z)/g(z+\Delta z)]-[f(z)/g(z)]}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)g(z)-g(z+\Delta z)f(z)}{g(z+\Delta z)g(z)}\cdot\frac{1}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{g(z)[f(z+\Delta z)-f(z)]-f(z)[g(z+\Delta z)-g(z)]}{g(z+\Delta z)g(z)}\cdot\frac{1}{\Delta z}$$
$$= \frac{g(z)}{[g(z)]^2}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{[f(z+\Delta z)-f(z)]}{\Delta z} + \frac{f(z)}{[g(z)]^2}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{[g(z+\Delta z)-g(z)]}{\Delta z}$$
$$= \frac{g(z)f'(z)+f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}$$

6. Jika $w(z) = f(\zeta)$ di mana $\zeta = g(z)$ maka
$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dz} = f'(\zeta)\frac{d\zeta}{dz} = f'\{g(z)\}g'(z)$$
Dengan cara yang sama, jika $w(z) = f(\zeta)$ di mana $\zeta = g(\eta)$ dan $\eta = h(z)$, maka
$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{d\eta}\cdot\frac{d\eta}{dz}$$
Aturan pendiferensialan seperti ini dinamakan aturan rantai
7. Jika $w = f(z)$, maka $z = f^{-1}(w)$; dan $\frac{dw}{dz}$ dan $\frac{dz}{dw}$ dihubungkan oleh
$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{dz/dw}$$
8. Jika $z = f(t)$ dan $w = g(t)$ di mana t adalah parameter, maka
$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw/dt}{dz/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

Aturan L'Hospital

Misalkan $f(z)$ dan $g(z)$ analitik dalam suatu daerah yang memuat titik z_0 dan andaikan $f(z_0) = g(z_0) = 0$, tetapi $g'(z_0) \neq 0$. Maka aturan L'Hospital menyatakan bahwa

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

Contoh

1. Tunjukkan bahwa $\frac{d}{dz}\sin z = \cos z$

   Bukti

$$\frac{d}{dz}(\sin z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)$$
$$= \frac{1}{2i}\cdot\frac{d}{dz}\left(e^{iz}\right) - \frac{1}{2i}\cdot\frac{d}{dz}\left(e^{-iz}\right)$$

$= \frac{1}{2i} \cdot ie^{iz} - \frac{1}{2i}\left(-ie^{-iz}\right)$

$= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

$= \cos z$

2. Tentukan turunan setiap fungsi berikut ini
   a. $3\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)$

   $\frac{d}{dz}\left\{3\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)\right\} = 3\sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{z}{2}\right)$

   b. $\tan^3(z^2 - 3z + 4i)$

   $\frac{d}{dz}\{\tan^3(z^2 - 3z + 4i)\} = 3(2z - 3)\tan^2(z^2 - 3z + 4i)\sec^2(z^2 - 3z + 4i)$

   c. $\ln(\sec z + \tan z)$

   $\frac{d}{dz}\{\ln(\sec z + \tan z)\} = \sec z$
3. Tentukan turunan kedua dari $3\sin^2(2z - 1 + i)$

   Penyelesaian

   $f'(z) = 12\sin(2z - 1 + i)\cdot\cos(2z - 1 + i)$

   $= 6\sin(4z - 2 + 2i)$

   $f''(z) = 24\cos(4z - 2 + 2i)$
4. Tentukan $\frac{dw}{dz}$ jika $w^3 - 3z^2w + 4\ln z = 0$

   Penyelesaian

$$3w^2\frac{dw}{dz} - \left(6zw + 3z^2\frac{dw}{dz}\right) + \frac{4}{z} = 0$$

$$\frac{dw}{dz}(3w^2 - 3z^2) = 6zw - \frac{4}{z}$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{6zw - 4/z}{3w^2 - 3z^2}$$

5. Hitunglah $\lim_{z\to i}\frac{z^{10}+1}{z^6+1}$

   Penyelesaian

$$\lim_{z\to i}\frac{z^{10}+1}{z^6+1} = \lim_{z\to i}\frac{10z^9}{6z^5} = \frac{5}{3}$$

Latihan

1. Gunakan aturan pendiferensialan untuk menentukan turunan dari fungsi berikut
   a. $\frac{d}{dz}\{\sin^2(5z + 2i)\}$
   b. $\frac{d}{dz}\{2z\cos^{-1}(\ln z)\}$
   c. $\frac{d}{dz}\{\sin h^{-1}(3 + iz)\}^{-2}$

2. (Buku Shaum, halaman 99 nomor 74, 77b, 78, dan 79)

Pengintegralan Fungsi Kompleks

Jika $t\epsilon[a,b]$ dan $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ kontinu pada $[a,b]$, maka:

$$\int_a^b f(t)dt \quad \text{ada}$$

Jika g kontinu bagian demi bagian pada $[a,b]$, diketahui terdapat $a = c_1, c_2, \dots, c_n = b$ dengan $c_1 < c_2 < \cdots < c_n \epsilon [a,b]$, maka g terintegralkan pada $[a,b]$ dan

$$\int_a^b g(t)dt = \int_{a=c_1}^{c_2} g(t)dt + \int_{a=c_2}^{c_3} g(t)dt + \cdots + \int_{c_{n-1}}^{c_n} g(t)dt$$

Integral Tentu Fungsi Kompleks

Misalkan $f(t) = u(t) + iv(t)$, untuk $u(t)$ dan $v(t)$ fungsi kontinu pada $[a,b]$, berarti:

$$\int_a^b u(t)\,dt \quad \text{dan} \quad \int_a^b v(t)\,dt$$

sehingga

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt$$

Sifat-sifat Integral Tentu:

1. $Re\left\{\int_a^b f(t)dt\right\} = \int_a^b Re\{f(t)\}dt = \int_a^b u(t)dt$
2. $Im\left\{\int_a^b f(t)dt\right\} = \int_a^b Im\{f(t)\}dt = \int_a^b v(t)dt$
3. $\int_a^b kf(t)dt = k\int_a^b f(t)dt,\ k$ adalah konstanta kompleks
4. $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le \int_a^b |f(t)|dt$
5. $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$

Contoh

Tentukan $Re\left\{\int_0^1 (1+i2t)^2 dt\right\}$ dan $Im\left\{\int_0^1 (1+i2t)^2 dt\right\}$

Penyelesaian

Karena $f(t) = (1 + i2t)^2 = (1 - 4t^2) + i(4t)$

Maka

$$Re\left\{\int_0^1 (1 + i2t)^2 dt\right\} = \int_0^1 (1 - 4t^2)dt = -\frac{1}{3}$$

dan

$$Im\left\{\int_0^1 (1 + i2t)^2 dt\right\} = \int_0^1 4t\, dt = 2$$

Teorema Dasar Kalkulus

Jika $f(x)$mempunyai anti turunan, misalkan $F(x)$ dengan kata lain $\frac{d}{dx}\{F(x)\} = f(x)$ dan $f(x)$ kontinu pada $[a, b]$, maka:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Teorema Dasar Kalkulus untuk Fungsi Bernilai Kompleks

Misalkan $f(t) = u(t) + iv(t)$ kontinu pada $a \le x \le b$. Jika $\frac{d}{dx}\{F(x)\} = f(x)$ untuk $t\epsilon[a, b]$ sehingga

$$\frac{d}{dt}\{U(t)\} = u(t) \quad \text{dan} \quad \frac{d}{dt}\{V(t)\} = v(t)$$

maka

$$\int_a^b f(t)dt = F(t)|_a^b = U(t)|_a^b + iV(t)|_a^b$$

$$= U(b) - U(b) + i[V(b) - V(a)]$$

Contoh

Hitunglah

a. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{it}\, dt$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{i2t}\, dt$ (kerjakan sebagai latihan)

Penyelesaian

a. Misalkan

$u = it$

$du = idt$

$dt = \frac{du}{i}$

Batas integral :

$t = 0 \quad \rightarrow \quad u = 0$

$t = \frac{\pi}{4} \quad \rightarrow \quad u = \frac{\pi}{4} i$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{it}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{it} \frac{du}{i} = \frac{e^u}{i}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$= -i[e^{\frac{\pi}{4}i} - e^0]$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2} + i\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

Kontur/ Lintasan

Definisi (busur)

Jika $x = x(t), y = y(t)$ untuk $a \leq t \leq b$, dimana $x(t)$ dan $y(t)$ fungsi kontinu pada $[a, b]$. Maka himpunan titik-titik $z = (x, y)$ atau $z = (x(t), y(t))$ dalam bidang kompleks dinamakan busur.

Perhatikan tabel berikut

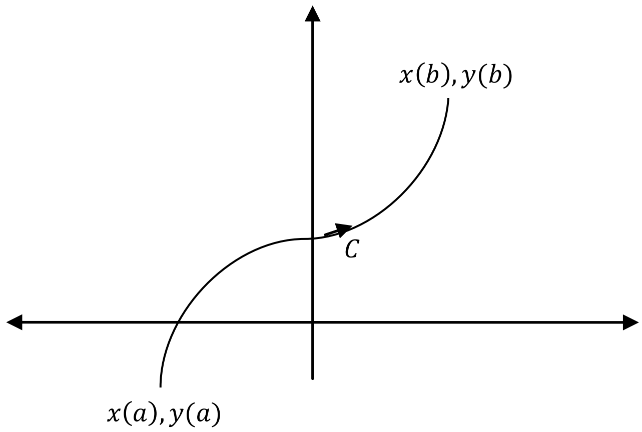
t	$x(t)$	$y(t)$	$x(t), y(t)$
t_1	$x(t_1)$	$y(t_1)$	$x(t_1), y(t_1)$
t_2	$x(t_2)$	$y(t_2)$	$x(t_2), y(t_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t_n	$x(t_n)$	$y(t_n)$	$x(t_n), y(t_n)$

Misalkan

$t = a$, maka $x = x(a), y = y(a)$ sehingga $(x, y) = (x(a), y(a))$

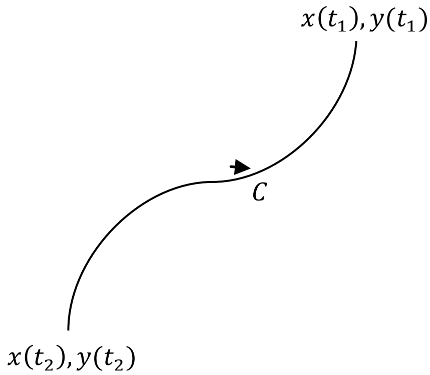
$t = b$, maka $x = x(b), y = y(b)$ sehingga $(x, y) = (x(b), y(b))$

Maka

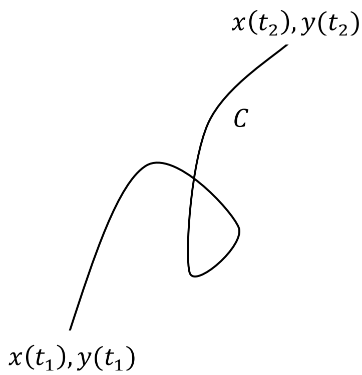


Busur di atas dinamai dengan C dengan persamaan $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$ dimana $z(t) = x(t) + iy(t)$. Jika $x(t)$ dan $y(t)$ keduanya kontinu pada $[a, b]$ maka terbentuk busur kontinu. Jika $\forall\, t_1 \neq t_2$ maka $x(t_1) \neq x(t_2)$ dan $y(t_1) \neq y(t_2)$ maka busur sederhana terbentuk busur sedehana (busur Yordan).

Contoh



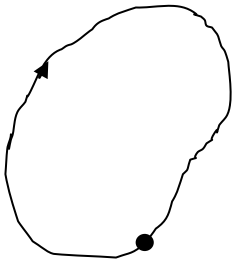
Busur Yordan



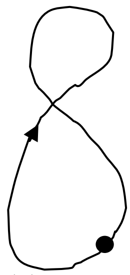
Bukan busur Yordan

Jika busur Yordan mempunyai sifat $x(a) = x(b)$ dan $y(a) = y(b)$, dengan kata lain $\big(x(a), y(a)\big) = (x(b), y(b))$, tapi tidak memotong dirinya sendiri Maka busur tersebut disebut kurva tertutup sedehana (kurva Yordan).

Contoh



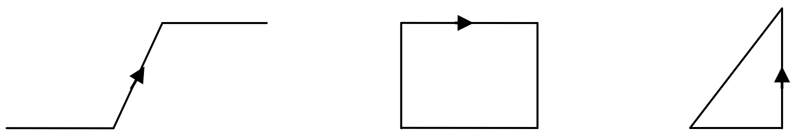
$x(a) = x(b), y(a) = y(b)$
Kurva Yordan



$x(a) = x(b), y(a) = y(b)$
Bukan kurva Yordan

Jika $x'(t), y'(t)$ kontinu dan $x'(t) \neq 0, y'(t) \neq 0$ maka busur mempunyai perubahan arah garis singgung yang kontinu dan disebut *smoot*/ busur mulus/ busur licin. Sedangkan kontur merupakan serangkaian busur (sejumlah berhingga) busur mulus.

Contoh (kontur)



Panjang Busur

Misalkan busur C dengan persamaan $z(t) = x(t) + iy(t)$ dimana $x'(t)$ dan $y'(t)$ ada pada $t\epsilon[a, b]$, maka C dikatakan busur terdiferensialkan, panjang busur tersebut dinamakan L, yaitu:

$$L = \int_a^b |z'(t)|dt, \quad |z'(t)| = \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2}$$

Contoh

Tentukan panjang busur C $z = e^{i2t}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

Penyelesaian

$z = e^{i2t} = \cos\ 2t + i \sin 2t$

$x(t) = \cos 2t, \quad x'(t) = -2 \sin 2t$
$y(t) = \sin 2t, \quad y'(t) = 2 \cos 2t$

Karena $x'(t)$ dan $y'(t)$ ada pada $t\epsilon\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ maka busur C disebut busur terdiferensialkan, maka

$$L=\int_{0}^{2\pi}|z'(t)|dt=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{4\sin^2 2t+4\cos^2 2t}\ dt=\int_{0}^{2\pi}2\ dt=2t|_0^{2\pi}=\pi$$

panjang busur C adalah π

Latihan

1. Diketahui

$$z=\begin{cases}x+ix, & 0\le x\le 1\\ x+i, & 1\le x\le 2\end{cases}$$

   Apakah z merupakan busur Yordan?

2. Jika diketahui
   a. $z(t)=e^{it}$ dengan $0\le t\le 2\pi$
   b. $z(t)=3\cos t+i\sin 2t$
   Selidiki apakah $z(t)$ merupakan kurva Yordan?

Integral Garis

Jika $P(x,y)$ dan $Q(x,y)$adalah fungsi riil dari x dan y yang kontinu di semua titik pada kurva C, maka integral garis sepanjang kurva C dapat didefinisikan sebagai:

$$\int_{c}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

Contoh

Hitunglah $\int_{(0,3)}^{(2,4)}(2y+x^2)dx+(3x-y)dy$ sepanjang

a. Parabola $x=2t,y=t^2+3$
b. Garis lurus dari $(0,3)$ ke $(2,3)$, kemudian dari $(2,3)$ ke $(2,4)$
c. Garis lurus dari $(0,3)$ ke $(2,4)$

Penyelesaian

a. Titik $(0,3)$ dan $(3,4)$ pada parabola berkaitan dengan $t=0$ dan $t=1$. Maka integral yang diberikan sama dengan

$$\int_{t=0}^{1} \{2(t^2+3)+(2t)^2\}2\,dt + \{3(2t)-(t^2+3)\}2t\,dt$$

$$= \int_{0}^{1} (24t^2+12-2t^3-6t)\,dt = \frac{33}{2}$$

b. Sepanjang garis lurus dari (0,3) ke (2,3), $y = 3, dy = 0$ integral garisnya sama dengan

$$\int_{x=0}^{2} (6+x^2)dx + (3x-3)0 = \int_{x=0}^{2} (6+x^2)dx = \frac{44}{3}$$

Sepanjang garis lurus dari (2,3) ke $(2,4), x = 2, dx = 0$ dan integral garisnya sama dengan

$$\int_{y=3}^{4} (2y+4)0 + (6-y)dy = \int_{y=3}^{4} (6-y)dy = \frac{5}{2}$$

Maka nilai yang diinginkan $= \frac{44}{3} + \frac{5}{2} = \frac{103}{6}$

c. Suatu persamaan garis yang menghubungkan (0,3) dan (2,4) adalah $2y - x = 6$. Selesaikan untuk x, maka $x = 2y - 6$. Jadi integral garisnya sama dengan

$$\int_{y=3}^{4} \{2y+(2y-6)^2\}2dy + \{3(2y-6)-y\}dy$$

$$= \int_{y=3}^{4} (8y^2-39y+54)dy = \frac{97}{6}$$

Hasil tersebut juga dapat diperoleh dengan menggunakan $y = \frac{1}{2}(x+6)$.

Integral Garis Fungsi Kompleks

Misalkan $f(z)$adalah suatu fungsi kompleks yang kontinu disemua titik sepanjang C. Integral fungsi $f(z)$ sepanjang C dimulai dari $z = z_1$ sampai $z = z_2$ dalam bidang kompleks dirumuskan sebagai

$$\int_C f(z)dz \text{ atau } \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$$

Contoh

1. Hitunglah $\int_C f(z)dz$ bila $C: z = 2e^{i\theta}, \quad 0 \le \theta \le \pi$ dimana $f(z) = \frac{z+2}{2}$

Penyelesaian

$f(z)$ kontinu sepanjang C, maka integral sepanjang lintasan C ada, yaitu $\int_C f(z)dz$. Maka

$$\int_C f(z)dz = \int_0^{\pi} \frac{2e^{i\theta}+2}{2e^{i\theta}}\, 2ie^{i\theta}d\theta$$

$$= 2i\left(\frac{e^{i\theta}}{i}+\theta\right)\Bigg|_0^{\pi} = 2i\left(\frac{e^{i\pi}}{i}-1+\pi\right)$$

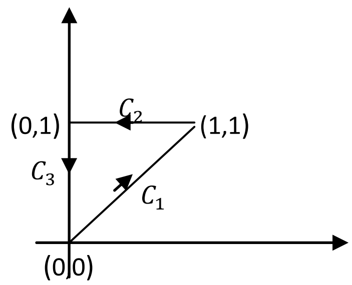
$$= 2i\left(\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{i}-1+\pi\right)$$

$$= -4+2\pi i$$

Jadi $\int_C f(z)dz = -4+2\pi i$.

$\int_C f(z)dz$ juga dapat dicari dengan terlebih dahulu mengubah z ke dalam bentuk kutub, yakni $z = 2\cos\theta + 2i\sin\theta$. (Kerjakan sebagai latihan!)

2. Carilah $\oint_C f(z)dz$ jika diketahui $f(z) = y - x - i3x^2$ dan lintasan C adalah sebagai berikut



- C_1 : (0,0) ke (1,1), $y = x, dy = dx, z = x+ix, dz = (1+i)dx$. Maka

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{x=0}^{1} (x - x - i3x^2)\,(1+i)dz = 1-i$$

- C_2 : (1,1) ke (0,1), $y = 1, dy = 0, z = x+i, dz = dx$

$$\int_{C_2} f(z)dz = \int_{x=1}^{0} (1 - x - i3x^2)dx = -\frac{1}{2} + i$$

- C_3 : $(0,1)$ ke $(0,0)$, $x = 0, dx = 0, z = iy, dz = idy$

$$\int_{C_3} f(z)dz = \int_{y=1}^{0} iy\, dy = -\frac{i}{2}$$

Jadi $\oint_C f(z)dz = (1 - i) + \left(-\frac{1}{2} + i\right) + \left(-\frac{i}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$

Hubungan antara Integral Garis Riil dan Kompleks

Jika $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = u + iv$, maka integral kompleks $\int_C f(z))dz$ dapat dinyatakan dalam suku-suku integral garis riil sebagai

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u + iv)\,(dx + idy)$$

$$= \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy$$

Contoh

Hitunglah $\int_C \bar{z}\,dz$ dari $z = 0$ ke $z = 4 + 2i$ sepanjang kurva C yang diberikan oleh

a. $z = t^2 + it$
b. Garis $z = 0$ ke $z = 2i$ kemudian dari $z = 2i$ ke $z = 4 + 2i$

Penyelesaian

a. Titik $z = 0$ dan $z = 4 + 2i$ berkaitan dengan $t = 0$ dan $t = 2$. Maka integral garisnya sama dengan

$$\int_{t=0}^{2} (\overline{t^2 + \imath t})(2t + i)dt = \int_{0}^{2} (2t^3 - it^2 + t)dt = 10 - \frac{8}{3}i$$

b. Integral garis yang diberikan sama dengan

$$\int_C (x-iy)(dx+idy) = \int_C x\,dx + y\,dy + i\int_C x\,dy - y\,dx$$

Garis dari $z=0$ ke $z=2i$ sama seperti garis dari $(0,0)$ ke $(0,2)$, sehingga $x=0, dx=0$ dan integral garisnya sama dengan

$$\int_{y=0}^{2} (0)(0) + ydy + i\int_{y=0}^{2} (0)dy - y(0) = \int_{y=0}^{2} ydy = 0$$

Garis dari $z=2i$ ke $z=4+2i$ sama dengan garis dari $(0,2)$ ke $(4,2)$, sehingga $y=2, dy=0$ dan integral garisnya sama dengan

$$\int_{x=0}^{4} xdx + (2)(0) + i\int_{x=0}^{4} x(0) - 2dx = \int_{0}^{4} xdx + i\int_{0}^{2} -2dx = 8-8i$$

Maka nilai yang diinginkan $= 2 + (8-8i) = 10 - 8i$

Latihan

Buku Shaum, halaman 125 nomor 32, 33, 34, dan 38

Integral Fungsi Trigonometri dan Hiperbolik

Gunakan pengetahuan yang sudah anda dapat pada mata kuliah kalkulus untuk menjawab soal-soal berikut.

Tentukan

1. $\int \cos 2z \cdot \sin 2z\, dz$
2. $\int \cos 4z\, dz$
3. $\int \tan(2z+5)\, dz$
4. $\int z \sin 2z\, dz$
5. $\int z^3 \cos 4z\, dz$
6. $\int \cos^3 z\, dz$
7. $\int \sin^5 z\, dz$
8. $\int \sin^4 z\, dz$
9. $\int z^2 \sinh z\, dz$
10. $\int 3\tanh^2 z\, \mathrm{sech}^2\, z\, dz$
11. $\int \sinh^5 z\, dz$
12. $\int_0^{\pi i} \cosh 5z\, dz$