ANALYSE DES ERREURS D'APPROXIMATION DANS LES PROBLÈMES CLASSIQUES D'ÉDP

pour la Mécanique des milieux continus

Jean-Antoine Désidéri
Equipe-Projet INRIA OPALE
Centre de Sophia Antipolis Méditerranée
http://www-sop.inria.fr/opale

Vérification des simulations numériques en Mécanique des milieux continus. Notion de validation. Collège de Polytechnique, 9-10 Juin 2010

Outline

Le laplacien [1]

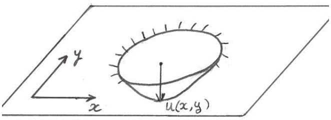
Problème de Poisson :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^d \\ u = u_0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \neq \emptyset \text{ (Dirichlet)} \\ u_n = \overrightarrow{\nabla} u . \overrightarrow{n} = \phi \quad \text{sur } \Gamma_1 \text{ (Neumann)} \end{cases}$$

Problèmes (stationnaires) d'« équilibre » sur domaine spatial borné Ω de frontière $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, soumise à des conditions aux limites.

Exemples physiques

- Déplacement vertical $u(x,y)$ d'une membrane; bord fixé.



Le laplacien [2]

Autres exemples physiques

- Température (d'équilibre) dans Ω; bord isotherme ou soumis à une condition de flux de chaleur.

$$\Delta T = 0$$

- En Mécanique des Fluides : potentiel des vitesses, ou fonction de courant (écoulement plan et permanent de fluide parfait incompressible irrotationnel)

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla\phi} \qquad \Delta\phi = \Delta\psi = 0$$

Propriétés fondamentales [1]

Formulation variationnelle

$$\boxed{\text{Trouver } u \in H_0^1 \text{ tq } \forall v \in H_0^1 \; : \; \iint_\Omega \overrightarrow{\nabla u} . \overrightarrow{\nabla v} = \iint_\Omega f.v}$$

Solution unique en vertu du
Théorème (Lax-Milgram) : Etant donné un espace de Hilbert V (i.e. un espace vectoriel normé, complet), une forme bilinéaire a continue et cœrcive (i.e. $\exists \alpha > 0 \;\texttt{tq}\; \forall u, \; a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2$), une forme linéaire continue L, le problème

$$\| \text{ Trouver } u \in V \text{ tq } \forall v \in V, \; a(u,v) = L(v)$$

admet une solution unique.
Eléments Finis :

$$\text{P1-Lagrange} \simeq H^1$$

Propriétés fondamentales [2]

Théorème (Principe du maximum)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ assez régulière. Soit $u \in H^1(\Omega)$ telle que $-\Delta u \geq 0$ dans Ω et $u \geq 0$ sur Γ; alors : $u \geq 0$ dans Ω.

Conséquence

Supposons u solution de l'équation de Laplace :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

Posons

$$m_0 = \min u_0 = \min_{\Gamma} u \,, \quad M_0 = \max u_0 = \max_{\Gamma} u$$

et appliquons le théorème aux fonctions $u - m_0$ et $M_0 - u$:
$\Longrightarrow m_0$ et M_0 sont également le minimum et le maximum de la fonction $u(x,y)$ dans le domaine Ω en entier (et non pas seulement sur le bord).

Outline

Discrétisation classique [1]

Dimension 1 d'espace : $-u_{xx} = f \qquad u(0) = u(1) = 0$

Indiçage

$$\Delta x = h \qquad x_j = jh \qquad u_j \simeq u(x_j) \qquad f_j = f(x_j)$$

Observation de base : développement de Taylor à l'ordre 4

$$\begin{aligned} u(x_{j\pm1}) &= u(x_j \pm h) \\ &= u(x_j) \pm h u_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} \pm \frac{h^3}{6} u_{xxx} + \frac{h^4}{24} \bar{u}^{\pm}_{xxxx} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow u_{xx}(x_j) = \underbrace{\frac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1})}{h^2} - \frac{h^2}{24}\left(\bar{u}^{+}_{xxxx} + \bar{u}^{-}_{xxxx}\right)}_{\text{concerne une fonction régulière quelconque}}$$

Discrétisation classique [2]

Dimension 1 d'espace : $-u_{xx} = f \qquad u(0) = u(1) = 0$

Définition du schéma d'approximation

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = f_j \qquad (j = 1, 2, ..., N)$$

Système matriciel : $\boxed{A_h u_h = f_h}$

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad u_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \qquad f_h = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{h^2} \mathrm{Trid}_N(-1, 2, -1) \text{ (définie >0)}$$

$u_0 = u_{N+1} = 0$

(Dirichlet hom.)

diagonale dominante; $\|A_h\|_\infty = \frac{4}{h^2}$.

Discrétisation classique [3]

Dimension 2 ou 3; conditions de Dirichlet homogènes

$$\boxed{A_h u_h = f_h}$$

En 2D; maillage tensoriel

$$\frac{u_{j+1,k} - 2u_{j,k} + u_{j-1,k}}{h_x^2} + \frac{u_{j,k+1} - 2u_{j,k} + u_{j,k-1}}{h_y^2} = f_{j,k}$$

$$\begin{aligned} A_h &= \frac{1}{h_x^2}\mathrm{Trid}_{N_x}(-1,2,-1) \oplus \frac{1}{h_y^2}\mathrm{Trid}_{N_y}(-1,2,-1) \\ &= \mathrm{Penta}\left(\ldots, -\frac{1}{h_x^2}, \ldots, -\frac{1}{h_y^2}, \frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}, -\frac{1}{h_y^2}, \ldots, -\frac{1}{h_x^2}, \ldots\right) \end{aligned}$$

En 3D; maillage tensoriel

$$A_h = \frac{1}{h_x^2}\mathrm{Trid}_{N_x}(-1,2,-1) \oplus \frac{1}{h_y^2}\mathrm{Trid}_{N_y}(-1,2,-1) \oplus \frac{1}{h_z^2}\mathrm{Trid}_{N_z}(-1,2,-1)$$

Erreur de troncature [1]

Définition

C'est le résidu de l'équation aux différences lorsqu'on y injecte le discrétisé de la solution de l'EDP :

$$\boxed{E.T. = A_h u - f_h}$$

où $-u_{xx} = f$ + CL.

Evaluation par développement de Taylor

Par exemple, en 1D :

$$\begin{aligned} E.T. &= -\frac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) - u(x_{j-1})}{h^2} - f_j \\ &= -u_{xx}(x_j) - \frac{h^2}{24}(\bar{u}^+_{xxxx} + \bar{u}^-_{xxxx}) - f(x_j) \\ &= -\frac{h^2}{24}(\bar{u}^+_{xxxx} + \bar{u}^-_{xxxx}) = O(h^2) \end{aligned}$$

Erreur de troncature [2]

Majoration

$$\boxed{\|E.T.\|_\infty \leq \frac{\mu h^2}{12}}$$

$$\mu = \max_x |u_{xxxx}|$$

Cette majoration prend en compte la régularité connue de la solution u du problème continu.

Majoration de $\left\|A_h^{-1}\right\|_\infty$

En sommant les $\ell-1$ premières équations :

$$u_1 + u_{\ell-1} - u_\ell = h^2(f_1 + f_2 + \ldots + f_{\ell-1})$$

$$u_1 + u_1 - u_2 = h^2(f_1)$$

$$u_1 + u_2 - u_3 = h^2(f_1 + f_2)$$

$$\vdots$$

$$u_1 + u_{j-1} - u_j = h^2(f_1 + f_2 + \ldots + f_{j-1})$$

Puis en sommant de $\ell = 2$ à j :

$$ju_1 - u_j = h^2\left[(j-1)f_1 + (j-2)f_2 + \ldots + f_{j-1}\right]$$

Et pour $j = N+1$:

$$(N+1)u_1 = h^2\left[Nf_1 + (n-1)f_2 + \ldots + f_N\right]$$

Majoration de $\left\|A_h^{-1}\right\|_\infty$ (suite)

Il vient :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{h^2}{N+1}\left[Nf_1 + (n-1)f_2 + \ldots + f_N\right] \\ u_j = \dfrac{N+1-j}{N+1} h^2 \left[f_1 + 2f_2 + \ldots + (j-1)f_{j-1}\right] \\ \qquad + \dfrac{jh^2}{N+1}\left[(N+1-j)f_j + (N-j)f_{j+1} + \ldots + f_N\right] = \left(A_h^{-1} f_h\right)_j \end{cases}$$

En conséquence :

$$\left\|A_h^{-1}\right\|_\infty = h^2 \max_j \left[\frac{N+1-j}{N+1}(1+2+\ldots+j-1) + \frac{j}{N+1}\Big((N+1-j)+(N-j)+\ldots+1\Big)\right] \leq \frac{1}{8}$$

Erreur d'approximation

Deux résultats ont été établis :

1. $\|E.T.\|_\infty = \|A_h u - f_h\| \leq \frac{\mu h^2}{12} \quad (\mu = \max_x |u_{xxxx}|)$;
2. $\left\|A_h^{-1}\right\|_\infty \leq \frac{1}{8}$, $\forall h$.

Erreur d'approximation :

$$u - u_h = A_h^{-1}\left(A_h u - \underbrace{A_h u_h}_{f_h}\right) = A_h^{-1}\,(E.T.)$$

En conséquence :

$$\|u - u_h\|_\infty \leq \frac{1}{8} \times \frac{\mu h^2}{12} \leq \frac{\mu h^2}{96}$$

ON DIT QUE LE SCHÉMA D'APPROXIMATION EST PRÉCIS AU SECOND-ORDRE (OU DU SECOND ORDRE)

Analyse de Fourier [1]

Conditions de Dirichlet

- Problème continu

$$\begin{cases} Au = -u_{xx} = \lambda u \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u(x) = s^{(m)}(x) = C^{(m)} \sin(m\pi x) \\ \lambda = \lambda^{(m)} = (m\pi)^2 \quad (m = 1, 2, \dots \infty) \end{cases}$$

- Problème discret

$$A_h u_h = \lambda_h u_h \Longrightarrow \begin{cases} u_h = s_h^{(m)} \,;\; {s_h^{(m)}}_j = C_h^{(m)} \sin(m\pi x_j) = C_h^{(m)} \sin(j\theta_m) \\ \lambda_h = \lambda_h^{(m)} = \dfrac{2 - 2\cos(\theta_m)}{h^2} = \dfrac{4}{h^2} \sin^2\left(\dfrac{\theta_m}{2}\right) \end{cases}$$

$$(m = 1, 2, \dots, N)$$

$$\boxed{\theta_m = \frac{m\pi}{N+1}}$$

"paramètre de fréquence" $(m = 1, 2, \dots, N)$

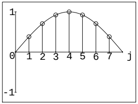
Analyse de Fourier ^{2}

Illustration des modes ($N = 7$)

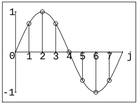
Hautes Fréquences, $\theta_m \geq \frac{\pi}{2}$

Basses Fréquences, $\theta_m < \frac{\pi}{2}$

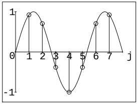
$s_h^{(1)}{}_j \sim \sin(\pi x_j)$



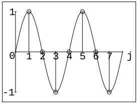
$s_h^{(2)}{}_j \sim \sin(2\pi x_j)$



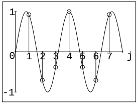
$s_h^{(3)}{}_j \sim \sin(3\pi x_j)$



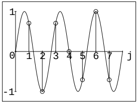
$s_h^{(4)}{}_j \sim \sin(4\pi x_j)$



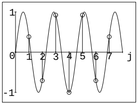
$s_h^{(5)}{}_j \sim \sin(5\pi x_j)$



$s_h^{(6)}{}_j \sim \sin(6\pi x_j)$



$s_h^{(7)}{}_j \sim \sin(7\pi x_j)$



Analyse de Fourier [3]

Conditions de Dirichlet-Neumann

$$u(0) = 0 \quad (u_0 = 0) \qquad u'(1) = 0 \quad (u_{N+1} = u_N)$$

Idem, sauf définition :

$$\theta_m = \frac{m\pi}{2N+1} \quad (m = 1, 2, \ldots, N)$$

Propriétés spectrales des modèles continus et discrets

Modèles discrets et schémas itératifs - application aux algorithmes multigrilles et multidomaines, J.A.D., Editions HERMES, Paris (1998); chapitre 2.

Analyse de Fourier [4]

Plus petite valeur propre (conditions de Dirichlet)

$$\Longrightarrow \lambda_{h\min} = \lambda_h^{(1)} = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{\pi h}{2}\right) \doteq \pi^2 = \lambda^{(1)}$$

La plus petite valeur propre du système discret est associée au mode de plus basse fréquence, pour lequel, par consistance de la discrétisation, l'action de A_h est, à une erreur de troncature près, identique que celle de l'opérateur différentiel.

Analyse de Fourier [5]

Retour sur la bornitude de A_h^{-1}

En résumé :

$$\lambda_h^{(1)} \doteq \lambda^{(1)}$$

et

$$\lambda_{\max}(A_h^{-1}) = \frac{1}{\lambda_h^{(1)}} \sim \frac{1}{\lambda^{(1)}} = \text{const. (indépendamment de } h\text{)}$$

$= \frac{1}{\pi^2}$, dans le modèle. Il est donc naturel de faire l'hypothèse qu'en général, et pas seulement pour ce modèle du laplacien en CL=DD, il existe une constante B indépendante de h pour laquelle :

$$\forall h : \left\|A_h^{-1}\right\| \leq B$$

On en tire :

$$\boxed{\|u - u_h\| = O(E.T.)}$$

Il est donc justifié de qualifier la précision d'un schéma numérique par examen de l'ordre de l'erreur de troncature par rapport à h.

Analyse de Fourier [6]

Conditionnement

Plus grande valeur propre (conditions de Dirichlet)

$$\begin{cases} \theta_N = \dfrac{N}{N+1}\pi \doteq \pi \quad \text{(fréquence maximum)} \\ \lambda_{h\max} = \lambda_h{}^{(N)} = \dfrac{2-2\cos(\theta_N)}{h^2} \doteq \dfrac{4}{h^2} = \|A_h\|_\infty \end{cases}$$

Nombre de conditionnement

$$\kappa = \frac{\lambda_{h\max}}{\lambda_{h\min}} = \frac{1}{\mathrm{tg}^2(\frac{\theta_1}{2})} \sim \frac{4N^2}{\pi^2}$$

Résolution des équations [1]

Comment résoudre $A_h u_h = f_h$?

Résolution directe (Gauss)

Irréaliste en raison du grand nombre d'inconnues (d.d.l.) :

$$\boxed{\mathrm{N} \sim N^d \qquad d \ : \ \text{dimension d'espace}}$$

Stockage naturel :

- temps calcul : $\propto \mathrm{N}^3 = N^{3d}$
- place mémoire : $\propto \mathrm{N}^2 = N^{2d}$

Stockage morse :

des facteurs N en moins (place mémoire : $N^d \times N^{d-1} = \mathrm{N}^2 / N$)

Résolution des équations [2]

Méthode itérative (Jacobi, Gauss-Seidel, etc)

Jacobi : on construit $\{u_h^n\}$

$$u_h^{n+1} = u_h^n - \tau\left(A_h u_h^n - f_h\right) = \left(I - \tau A_h\right) u_h^n + \tau f_h$$

NB : identique à Euler explicite appliqué à $\dot{u}_h = f_h - A_h u_h$, avec $\Delta t = \tau$. Généralisation : méthodes pseudo-instationnaires.

Trm : Alors, si $A_h > 0$, ce qui est le cas du laplacien discret, le choix

$$\tau = \left(\frac{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}{2}\right)^{-1} = \tau^*$$

est optimal, et correspond à la valeur suivante du rayon spectral :

$$\rho\left(I - \tau^* A_h\right) = \rho^*(h) = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} = 1 - \frac{2}{\kappa} + \ldots = 1 - ch^2 + \ldots$$

NB : $\log \rho^*(h) \sim (-ch^2)$.

Résolution des équations [3]

Critère d'arrêt

$$\underbrace{\left\| u_h^n - u_h \right\|}_{\substack{\text{erreur} \\ \text{itérative} \\ (n \to \infty)}} \sim \underbrace{\left\| u_h - u \right\|}_{\substack{\text{erreur} \\ \text{d'approximation} \\ (h \to 0)}}$$

$$C_I \times \rho^*(h)^n \sim C_A \times h^2$$

Il vient : $n \log \rho^*(h) \sim \log h$ et :

$$n \sim \frac{-\log h}{h^2} \sim N^2 \log N$$

Coût de résolution

schéma local $\Longrightarrow$ coût d'1 itération de Jacobi $\propto \mathrm{N} \sim N^d$:

$$\boxed{\text{COÛT}_{\text{Jacobi}} \sim N^{d+2} \log N \sim \mathrm{N} \times N^2 \log N}$$

"Nested Iteration", ou enrichissement progressif de maillage

Kronsjö-Dahlquist (1971). *BIT* **12**, 1972.

Fin					$\mathcal{M}_{h/4}$	...
				$\nearrow$		
Moyen			$\mathcal{M}_{h/2}$			
		$\nearrow$				
Grossier	$\mathcal{M}_h$					
	Résoudre	Prolonger	**Lisser**	Prolonger	**Lisser**	...

- Efficacité: dépend de la conception des éléments suivants :
  - lisseurs adaptés aux propriétés spectrales du système discret,
  - application rigoureuse de critères d'arrêt à chaque niveau,
  - opérateurs de transfert (interpolations) suffisamment précis.
- Réduction du coût : seulement d'un facteur $\propto \log N$ (i.e. nombre de niveaux de maillage)
- Bénéfice additionnel : la robustesse (en nonlinéaire)

Algorithme idéaux bigrille et multigrille

- Algorithme idéal bigrille : $\rho \leq B_1$ exemple: *V-cycle*

Grille Fine $\mathcal{M}_h$: Lissage seul ↘ Grille grossière $\mathcal{M}_{2h}$: Résolution complète ↗ Grille Fine $\mathcal{M}_h$: Lissage seul

- Algorithme multigrille idéal : par extension : $\rho_{\text{MG}} \leq B$

$$\rho_{\text{MG}}^n \sim h^2 \Longrightarrow n \sim \log N \Longrightarrow$$

$$\boxed{\text{COÛT}_{\text{MG}} \sim \text{N} \times \log N \sim N^d \log N}$$

Méthode Multigrille Complète

Full Multi-Grid (FMG) Method

Cycle MG combiné à l'algo. d'enrichissement de maillage

Fin				$\nearrow$	$\mathcal{M}_{h/4}$ $\downarrow\uparrow$	
Moyen		$\nearrow$	$\mathcal{M}_{h/2}$ $\downarrow\uparrow$		$\mathcal{M}_{h/2}$ $\downarrow\uparrow$	
Grossier	$\mathcal{M}_h$		$\mathcal{M}_h$		$\mathcal{M}_h$	
	Résoudre (1-grille)	Prolonger	**cycle MG** (2-grilles)	Prolonger	**cycle MG** (3-grilles)	.

- Complexité linéaire :

$$\boxed{\text{COÛT}_{\text{FMG}} \sim \text{N} \sim N^d \quad \text{SEULEMENT!}}$$

- Ouvrages d'introduction : Briggs (SIAM, 1991), Wesseling (John Wiley, 1991), J.A.D. (Hermès, 1998)

Outline

Éléments Finis

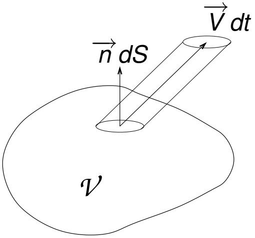
On réfère aux cours des Profs. J. Peter et Y. Coudière.

Outline

Equation de continuité (conservation de la masse)

Formulation eulérienne intégrale

$\mathcal{M}(t)$: masse de fluide contenue dans le domaine $\mathcal{V}$ fixe dans le temps



$$\rho = \rho(x,y,z,t)\,,\ \vec{V} = \vec{V}(x,y,z,t)\,,\ \ldots$$

$$\begin{aligned} dm &= -\rho\, d\mathcal{V} \\ &= -\rho(\vec{n}\,dS).(\vec{V}\,dt) \\ &= -\rho\,\vec{V}.\vec{n}\,dS\,dt \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{M}'(t) = -\iint_S \rho\,\vec{V}.\vec{n}\,dS = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t}\,d\mathcal{V}$$

$$\boxed{\forall \mathcal{V}\ :\ \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t}\,d\mathcal{V} + \iint_S \rho\,\vec{V}.\vec{n}\,dS = 0}$$

Formulation différentielle

Théorème de la divergence

Sous hypothèse d'écoulement continu :

$$\iint_S \rho \vec{V} . \vec{n} \, dS = \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\left(\rho \vec{V}\right) d\mathcal{V}$$

et il vient :

$$\forall \mathcal{V} \ : \ \iiint_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho \vec{V}\right)\right] d\mathcal{V} = 0$$

de sorte que :

Equation différentielle locale :

$$\boxed{\forall (x,y,z) \ \forall t \ : \ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho \vec{V}\right) = 0}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0$$

Équations d'Euler

Masse, quantité de mouvement, énergie totale (interne+cinétique) spécifiques (par unité de volume)

Forme conservative (forme divergence)

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E \end{pmatrix}, \quad \boxed{\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} + \frac{\partial G(W)}{\partial y} + \frac{\partial H(W)}{\partial z} = 0}$$

W : variables conservatives

$F(W)$, $G(W)$, $H(W)$: flux des équations d'Euler

$$F(W) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(E+p) \end{pmatrix} G(W) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ v(E+p) \end{pmatrix} H(W) = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + p \\ w(E+p) \end{pmatrix}$$

Équation d'état (gaz caloriquement parfait) : $p = \rho r T = (\gamma - 1)\left[E - \rho \frac{V^2}{2}\right]$

($\gamma = C_p/C_v = 7/5$, pour un mélange de gaz diatomiques calor. parfaits)

A quoi servent les équations d'Euler?

À modéliser les écoulements compressibles de fluide parfait

- conviennent en dehors des zones d'écoulement très visqueux (notamment les parois) à condition que ces zones soient de faible étendue, et l'interaction faible (couche limite mince)
- contiennent la bonne structure de choc (par opposition à la modélisation par le potentiel, même complet)
- permettent le couplage avec les codes de couche limite
- constituent une étape méthodologique vers Navier-Stokes

Propriétés des flux [1]

Homogénéïté :

Pour un mélange de gaz caloriquement parfaits, les flux $F(W)$, $G(W)$, $H(W)$ sont des fonctions homogènes (des composantes) du vecteur W :

$$\forall\lambda \in \mathbb{R},\ F(\lambda W) = \lambda F(W),\ G(\lambda W) = \lambda G(W),\ H(\lambda W) = \lambda H(W)$$

En conséquence (théorème d'Euler) :

$$F(W) = A(W)W,\ G(W) = B(W)W,\ H(W) = C(W)W$$

où $A(W)$, $B(W)$ et $C(W)$ sont les matrices jacobiennes (5×5) :

$$A(W) = \frac{\partial F(W)}{\partial W},\ B(W) = \frac{\partial G(W)}{\partial W},\ C(W) = \frac{\partial H(W)}{\partial W}$$

dont les expressions sont connues en fonction des variables d'écoulement (composantes de W).

Propriétés des flux [2]

Diagonalisation

Matrices jacobiennes diagonalisables sur $\mathbb{R}$:

Soit $\overrightarrow{k} = (k_1, k_2, k_3)$ et $\|k\| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$.
La matrice

$$k_1 A(W) + k_2 B(W) + k_3 C(W)$$

admet les valeurs propres réelles suivantes[1] :

$$\lambda_k = \begin{cases} \overrightarrow{k}\,.\,\overrightarrow{V} & \text{(triple)} \\ \overrightarrow{k}\,.\,\overrightarrow{V} + c\,\|k\| & \text{(simple)} \\ \overrightarrow{k}\,.\,\overrightarrow{V} - c\,\|k\| & \text{(simple)} \end{cases}$$

où c est la vitesse locale du son :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

(mélange de gaz caloriquement parfaits)

[1] Warming, R. F., Beam, R., and Hyett, B. J. : "Diagonalization and Simultaneous Symmetrization of Gas-Dynamics Matrices", *Math. Comput.* 29, 1975, 1037-1045.

Forme quasi-linéaire

Sous hypothèse d'écoulement continu :

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial t} + A(W)\frac{\partial W}{\partial x} + B(W)\frac{\partial W}{\partial y} + C(W)\frac{\partial W}{\partial z} = 0}$$

Linéarisation autour d'un état constant W_0 :

$$W(x,y,z,t) = W_0 + W'(x,y,z,t)$$

$$\frac{\partial W'}{\partial t} + A_0\frac{\partial W'}{\partial x} + B_0\frac{\partial W'}{\partial y} + C_0\frac{\partial W'}{\partial z} + \ldots = 0$$

dont les solutions sont la superposition d'ondes simples (Fourier) :

$$W'(x,y,z,t) = \sum_{(k_1,k_2,k_3)} \exp(-i\lambda_k t)\exp(ik_1 x + ik_2 y + ik_3 z)\,\tilde{W}_k$$

où : $(k_1 A_0 + k_2 B_0 + k_3 C_0)\tilde{W}_k = \lambda_k \tilde{W}_k$ (λ_k : valeur propre réelle, $\tilde{W}_k$ vecteur propre réel associé): SYSTÈME HYPERBOLIQUE

Nombre de Mach [1]

Cas d'un écoulement plan stationnaire :

$$AW_x + BW_y = 0 \iff W_x + A^{-1}BW_y = 0$$

à rapprocher formellement de l'équation d'advection,

$$u_x + \alpha u_y = 0 \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

à condition que la matrice $A^{-1}B$ soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$; or les valeurs propres λ sont les solutions de l'équation $\det(A^{-1}B - \lambda I) = 0$ qui équivaut à :

$$\det(B - \lambda A) = \det(k_1 A + k_2 B) = 0 \qquad (k_1 = -\lambda;\ k_2 = 1)$$

Trois solutions :

$$\begin{cases} k_1 u + k_2 v = -\lambda u + v = 0 \\ k_1 u + k_2 v \pm c\sqrt{k_1^2 + k_2^2} = -\lambda u + v \pm c\sqrt{1+\lambda^2} = 0 \end{cases}$$

Nombre de Mach 2

Première solution :

$\lambda = \frac{v}{u}$, toujours réelle; correspond à une onde qui se déplace à la vitesse de la particule matérielle de fluide.

Autres solutions

$$\pm c\sqrt{1+\lambda^2} = \lambda u - v \Longleftrightarrow (u^2 - c^2)\lambda^2 - 2uv\lambda + v^2 - c^2 = 0$$

2 autres solutions réelles ssi :

$$u^2v^2 - (u^2 - c^2)(v^2 - c^2) > 0 \Longleftrightarrow V^2 = u^2 + v^2 > c^2$$

c'est-à-dire :

$$M = \frac{V}{c} > 1$$

"écoulement supersonique".

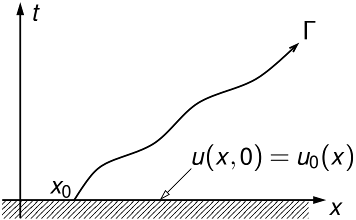
En écoulement supersonique stationnaire, les équations d'Euler forment un système d'EDP hyperbolique (en espace).

Loi de conservation non-linéaire

Problème type 1D scalaire hyperbolique nonlinéaire :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \qquad (x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}+) \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Soit Γ une courbe régulière du plan (x,t) émanant d'un point x_0 de l'axe des x, où la condition initiale est connue.



$$\frac{du}{ds} = u_t \frac{dt}{ds} + u_x \frac{dx}{ds} = \frac{dt}{ds} \left[\sigma - f'(u) \right] u_x$$

$$\sigma = \frac{dx}{dt} \ :$$

vitesse de propagation

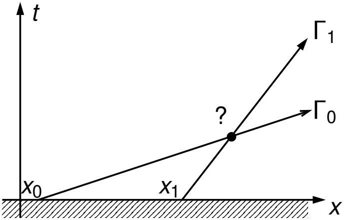
Structure de la solution

Supposons que la courbe (caractéristique) Γ vérifie la condition suivante en chacun de ses points :

$$\sigma = \frac{dx}{dt} = f'(u)$$

alors, le long de Γ, $\frac{du}{ds} = 0$, $u =$ constante, et Γ est une demi-droite.

Mais alors, quelle est la solution à l'intersection de deux caractéristiques?



Conclusion : En général,

APPARITION DE DISCONTINUITÉS EN TEMPS FINI

(sauf si, $\sigma_0(x) = f'[u_0(x)]$ est une fonction monotone-croissante de x).

Outline

Erreur de troncature d'un schéma d'évolution

Problème d'évolution général

Équations d'Euler et de Navier-Stokes en perspective

$$u_t = \mathrm{L}\, u \quad \text{(+ CI, et éventuellement CL)}$$

Équation Équivalente

A. Lerat, R. Peyret, *Propriétés dispersives et dissipatives d'une classe de schémas aux différences pour les systèmes hyperboliques nonlinéaires,* La Recherche Aérospatiale 2 (1975) 61-79.

Équation Modifiée

R.F. Warming, B.J. Hyett, *The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference methods,* J. Comput. Phys. 14 (1974) 159-179.

Calcul formel d'un exemple

Exemple d'équation

Équation de convection (d'advection pure) :

$$\begin{cases} u_t + c\,u_x = 0 & (t \in \mathbb{R}+,\ x \in \mathbb{R}) \\ u(x,0) = u_0(x) & (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Problème de Cauchy pur : $u(x,t) = u_0(x - ct)$ (onde simple)

Exemple de schéma numérique à 2 niveaux en temps

Différences finies du 1er ordre, avancée en temps, rétrograde en espace ($c > 0$) :

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\,\dfrac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 & (n \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{Z}) \\ u_j^0 = u_0(x_j) & (j \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Maillage uniforme (analyse locale) : $x_j = j\Delta x\,;\ t^n = n\Delta t$

Étape 1 : Introduire un interpolant régulier

Notons précisément:

- $u(x,t)$ la solution du problème continu $(= u_0(x-ct))$
- $\tilde{u}(x,t)$ une fonction régulière interpolant la suite infinie $\{u_j^n\}$

$$\tilde{u}(j\Delta x, n\Delta t) = u_j^n \qquad \forall n \in N,\ \forall j \in Z)$$

Remarque : il existe une infinité non dénombrable de fonctions entières satisfaisant cette condition d'interpolation (cf. : *Interpolation of infinite sequences by entire functions*, J.A.D., Applied Numer. Math. 58 (2008) 1918-1932)

Injecter l'interpolant dans l'équation aux DF et développer en série de Taylor

$$\frac{\tilde{u}(x_j,t^{n+1})-\tilde{u}(x_j,t^n)}{\Delta t}+c\,\frac{\tilde{u}(x_j,t^n)-\tilde{u}(x_{j-1},t^n)}{\Delta x}=0$$

Il vient :

$$\boxed{\tilde{u}_t+\frac{\Delta t}{2}\,\tilde{u}_{tt}+\frac{\Delta t^2}{6}\,\tilde{u}_{ttt}+\cdots+c\left[\tilde{u}_x-\frac{\Delta x}{2}\,\tilde{u}_{xx}+\frac{\Delta x^2}{6}\,\tilde{u}_{xxx}+\ldots\right]=0} \tag{1}$$

Notons :

$$\theta_k(\Delta x,\Delta t)$$

une série (resp. un développement limité) suivant les puissances croissantes de Δx et Δt, dont les coefficients sont des dérivées partielles de la fonction $\tilde{u}(x,t)$ (x et t étant des variables auxiliaires), et dont le terme de plus bas degré est d'ordre k (i.e. en Δx^k, $\Delta x^{k-1}\Delta t,\ldots,$ Δt^k);
de sorte que :

$$\tilde{u}_t=-c\,\tilde{u}_x+\theta_1(\Delta x,\Delta t)\,,\;\theta_1=-\frac{\Delta t}{2}\,\tilde{u}_{tt}+c\,\frac{\Delta x}{2}\,\tilde{u}_{xx}+\ldots$$

Remarque importante

Il est légitime de dériver $\theta_k(\Delta x, \Delta t)$ par rapport aux variables auxiliaires x ou t sans en changer l'ordre par rapport aux petits paramètres Δx et Δt :

$$\frac{\partial^\ell}{\partial x^\ell} \frac{\partial^m}{\partial t^m} \theta_k(\Delta x, \Delta t) = \theta'_k(\Delta x, \Delta t)$$

par exemple :

$$\theta_1 = -\frac{\Delta t}{2}\, \tilde{u}_{tt} + c\, \frac{\Delta x}{2}\, \tilde{u}_{xx} + \dots$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \theta_1 = -\frac{\Delta t}{2}\, \tilde{u}_{ttx} + c\, \frac{\Delta x}{2}\, \tilde{u}_{xxx} + \dots := \theta'_1$$

Étape 2 : Tirer des conséquences de l'éqn. (1)

Pour éliminer les dérivées en temps d'ordre supérieur, et simplifier l'éqn. (1) elle-même

Il vient successivement :

$$\tilde{u}_t = -c\,\tilde{u}_x + \theta_1(\Delta x, \Delta t)\,,\ \theta_1 = -\frac{\Delta t}{2}\,\tilde{u}_{tt} + c\,\frac{\Delta x}{2}\,\tilde{u}_{xx} + \dots$$

puis, en dérivant par rapport à t :

$$\tilde{u}_{tt} = -c\tilde{u}_{xt} + \theta_1'(\Delta x, \Delta t) = -c\tilde{u}_{tx} + \theta_1'(\Delta x, \Delta t)$$

où : $\theta_1'(\Delta x, \Delta t) = \partial/\partial t\,(\theta_1) = -\frac{\Delta t}{2}\,\tilde{u}_{ttt} + c\,\frac{\Delta x}{2}\,\tilde{u}_{xxt} + \dots$ Puis :

$$\tilde{u}_{tt} = -c\partial/\partial x\,[-c\,\tilde{u}_x + \theta_1(\Delta x, \Delta t)] + \theta_1'(\Delta x, \Delta t) = c^2\,\tilde{u}_{xx} + \theta_1''(\Delta x, \Delta t)$$

où :
$\theta_1'' = -c\partial/\partial x\,(\theta_1) + \theta_1' = c\,\frac{\Delta t}{2}\,\tilde{u}_{ttx} - c^2\,\frac{\Delta x}{2}\,\tilde{u}_{xxx} - \frac{\Delta t}{2}\,\tilde{u}_{ttt} + c\,\frac{\Delta x}{2}\,\tilde{u}_{xxt} + \dots.$
En réinjectant cette expression dans (1), le développement augmente en précision !!! Au second-ordre près :

$$\tilde{u}_t + c\,\tilde{u}_x = \frac{c}{2}\,(\Delta x - c\Delta t)\,\tilde{u}_{xx} + \theta_2(\Delta x, \Delta t)$$

Ordre supérieur

De même, à partir de :

$$\tilde{u}_t = -c\,\tilde{u}_x + \frac{c}{2}\left(\Delta x - c\Delta t\right)\tilde{u}_{xx} + \theta_2(\Delta x, \Delta t)$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_{tt} &= -c\tilde{u}_{xt} + \frac{c}{2}\left(\Delta x - c\Delta t\right)\tilde{u}_{xxt} + \theta_2'(\Delta x, \Delta t) \\
&= -c\tilde{u}_{tx} + \frac{c}{2}\left(\Delta x - c\Delta t\right)\tilde{u}_{txx} + \theta_2'(\Delta x, \Delta t) \\
&= -c\left[-c\,\tilde{u}_x + \frac{c}{2}\left(\Delta x - c\Delta t\right)\tilde{u}_{xx} + \theta_2(\Delta x, \Delta t)\right]_x \\
&\quad + \frac{c}{2}\left(\Delta x - c\Delta t\right)\left[c\,\tilde{u}_x + \theta_1(\Delta x, \Delta t)\right]_{xx} + \theta_2'(\Delta x, \Delta t) \\
&= c^2\tilde{u}_{xx} - c^2\left(\Delta x - c\Delta t\right)\tilde{u}_{xxx} + \theta_2''(\Delta x, \Delta t)
\end{aligned}$$

où $\theta_2''(\Delta x, \Delta t) = -c\frac{\partial}{\partial x}\theta_2 + \frac{c}{2}\left(\Delta x - c\Delta t\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta_1 + \theta_2'$. De plus :

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_{ttt} &= \left[\tilde{u}_{tt}\right]_t = \left[c^2\tilde{u}_{xx} + \theta_1'''(\Delta x, \Delta t)\right]_t = c^2\left[\tilde{u}_t\right]_{xx} + \theta_1''''(\Delta x, \Delta t) \\
&= -c^3\tilde{u}_{xxx} + \theta_1''''(\Delta x, \Delta t)
\end{aligned}$$

Substitution dans l'éqn. (1)

Il vient :

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_t + c\tilde{u}_x &= -\frac{\Delta t}{2}\tilde{u}_{tt} - \frac{\Delta t^2}{6}\tilde{u}_{ttt} + \ldots + \frac{c\Delta x}{2}\tilde{u}_{xx} - \frac{c\Delta x^2}{6}\tilde{u}_{xxx} + \ldots \\
&= -\frac{\Delta t}{2}\left[c^2\tilde{u}_{xx} - c^2(\Delta x - c\Delta t)\,\tilde{u}_{xxx} + \theta_2''(\Delta x, \Delta t)\right] \\
&\quad - \frac{\Delta t^2}{6}\left[-c^3\tilde{u}_{xxx} + \theta_1''''(\Delta x, \Delta t)\right] \\
&\quad + \frac{c\Delta x}{2}\tilde{u}_{xx} - \frac{c\Delta x^2}{6}\tilde{u}_{xxx} + \ldots \\
&= \frac{c(\Delta x - c\Delta t)}{2}\tilde{u}_{xx} \\
&\quad + \left[\frac{c^2\Delta t(\Delta x - c\Delta t)}{2} - \frac{c(\Delta x^2 - c^2\Delta t^2)}{6}\right]\tilde{u}_{xxx} + \ldots \\
&= P_1(\Delta x, \Delta t)\,\tilde{u}_{xx} + P_2(\Delta x, \Delta t)\,\tilde{u}_{xxx} + \ldots
\end{aligned}$$

où $P_k = c_{k,0}\Delta x^k + c_{k-1,1}\Delta x^{k-1}\Delta t + \ldots + c_{k,k}\Delta t^k$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots)$ est un polynôme homogène de degré k en $(\Delta x, \Delta t)$.

Étape 3 : Réciproque

Δx et Δt étant des paramètres fixés; soit $v(x,t)$ la solution du problème :

$$\begin{cases} v_t + c v_x = P_1(\Delta x, \Delta t)\, v_{xx} + P_2(\Delta x, \Delta t)\, v_{xxx} + \dots \\ \qquad\qquad (t \in \mathbb{R}+,\ x \in \mathbb{R}) \\ v(x,0) = u_0(x) \qquad (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Alors, on admettra que :

- $v(x,t)$ est bien défini, au moins pour t suffisamment petit;
- Pour un schéma à 2 niveaux temps, il y a unicité :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall j \in \mathbb{Z},:\ v(x_j, t^n) = \tilde{u}(x_j, t^n) = u_j^n$$

<u>Preuve :</u> Soit : $R_j^n = \frac{v(x_j,t^{n+1}) - v(x_j,t^n)}{\Delta t} + c\frac{v(x_j,t^n) - v(x_{j-1},t^n)}{\Delta x}$. En développant en série de Taylor, il vient $R_j^n = 0$ par les mêmes manipulations formelles, et en vertu de l'eqn. modifiée; mais l'eqn. aux DF admet une solution unique (schéma explicite à 2 niveaux); donc $v(x_j, t^n) = \tilde{u}_j^n = u_j^n$. $\square$

Cette équation est donc bien équivalente au schéma numérique.

Équation modifiée - équation équivalente

Licence usuelle : le praticien expérimenté utilise généralement le même symbole pour u, $\tilde{u}$ et v

$$\boxed{u_t + cu_x = P_1(\Delta x, \Delta t)\, u_{xx} + P_2(\Delta x, \Delta t)\, u_{xxx} + \dots}$$

MAIS, IL EST INTERDIT POUR ÉTABLIR CETTE ÉQUATION D'UTILISER L'ÉQUATION DE DÉPART ($u_t + cu_x = 0$) QUI N'EST PAS SATISFAITE PAR LE SCHÉMA NUMÉRIQUE !!!

Terminologie/concepts

- Série : Équation modifiée (Warming & Hyett); calcul formel
- Développement limité : Équation équivalente (au schéma numérique à un certain ordre près) (Lerat-Peyret); eqns. de NS

S'applique au nonlinéaire

Par exemple, à l'équation de Burgers; ... mais plus compliqué !

Erreur de troncature - Ordre de précision

Erreur de troncature pour un problème d'évolution :

Le membre de droite de l'équation modifiée (équivalente), lorsque celui de gauche fait apparaître l'opérateur du problème continu :

$$\boxed{E.T. = P_1(\Delta x, \Delta t)\, u_{xx} + P_2(\Delta x, \Delta t)\, u_{xxx} + \dots}$$

Ordre de précision du schéma numérique :

Le plus petit entier α pour lequel :

$$P_\alpha(\Delta x, \Delta t) \neq 0$$

Remarque : en notant $Au - f = u_t + cu_x = 0$ le problème continu de départ, il vient :

$$E.T. = Au_h - f$$

où on note ici u_h la solution de l'équation modifiée (au lieu de v, ou u) dont les valeurs aux nœuds du maillage sont u_j^n. En elliptique, nous avions posé $E.T. = A_h u - f_h$.

À quoi sert l'équation équivalente? [1]

À vérifier la consistance d'un schéma pour l'instationnaire

Le schéma est consistant ssi

$$E.T. \longrightarrow 0 \qquad \text{(formellement)}$$

dans un processus de raffinement de maillage ($\Delta x \rightarrow 0\,,\ \Delta t \rightarrow 0$).

À quoi sert l'équation équivalente? 2

À étudier formellement le schéma numérique par le biais d'une E.D.P.; par exemple par transformée de Fourier :

$$f(x)\,;\ \hat{f}(\omega) = \int \exp(-i\omega x) f(x)\,dx \Longrightarrow \widehat{\frac{df}{dx}}(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega)$$

Problème de départ

$$\frac{d}{dt}\hat{u}(\omega,t) = -ci\omega\,\hat{u}(\omega,t) \Longrightarrow \hat{u}(\omega,t) = \exp(-ci\omega t)\,\hat{u}(\omega,0)$$

Problème discret

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{u}(\omega) &= -ci\omega\,\hat{u}(\omega,t) + \widehat{E.T.}(\omega) \\
&= \left[-ci\omega t - P_1\omega^2 - P_2 i\omega^3 + \ldots\right]\hat{u}(\omega,t) \\
\Longrightarrow \hat{u}(\omega,t) &= \exp\left[(-ci\omega - P_2\omega^2 - P_3 i\omega^3 + \ldots)t\right]\hat{u}(\omega,0) \\
&= \hat{u}_{exact}(\omega,t)\underbrace{\exp\left[\left(-P_1\omega^2 - P_2 i\omega^3 + \ldots\right)t\right]}_{1+O\left(\omega t\, P_\alpha(\omega\Delta x,\omega\Delta t)\right)}
\end{aligned}$$

À quoi sert l'équation équivalente? [3]

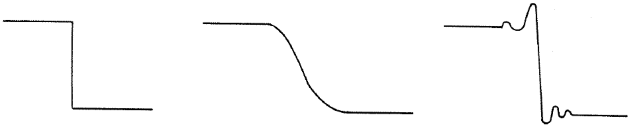
À reconnaître le principal caractère de l'erreur

Schéma d'ordre impair

principalement dissipatif (erreur d'amplitude)

Schéma d'ordre pair

principalement dispersif (erreur de phase)



Onde discontinue   1er-ordre   2nd-ordre

À quoi sert l'équation équivalente? [4]

À comparer les schémas entre eux par confrontation des expressions formelles de leurs erreurs de troncature

Voir : Chapitre 4 du livre de cours "ATP" :

Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, D. A. Anderson, J. C. Tannehill and R. H. Pletcher, Hemisphere Publishing Corporation, New York, London (1984).

À quoi sert l'équation équivalente? [5]

À identifier des conditions nécessaires de stabilité.
Dans l'exemple du schéma décentré du premier ordre, une condition nécessaire est la suivante :

$$P_1 \geq 0$$

et ceci exige d'une part $c \geq 0$, et d'autre part la classique condition de Courant :

$$\nu = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

En particulier, sans surprise, on trouve que le décentrage amont est inconditionnellement instable lorsque $c < 0$.

À quoi sert l'équation équivalente? [6]

À construire de nouveaux schémas, plus précis, ou mieux adaptés à un traitement particulier, par ajustement des paramètres du schéma qui interviennent dans les coefficients de l'équation équivalente.

Par exemple, on peut construire un schéma d'ordre 3 par combinaison convexe de deux schémas d'ordre 2 :

$$(1-\beta) * (\text{Lax-Wendroff}) + \beta * (\text{Schéma Décentré du 2nd-ordre})$$

et ajustement nontrivial du coefficient

$$\beta = \frac{1+\nu}{3}$$

en fonction du nombre de Courant ν (*Third-order numerical schemes for hyperbolic problems,* J.A.D., A. Goudjo, V. Selmin, Rapport de Recherche INRIA No. 607, 1987 - http://hal.inria.fr/inria-00075947/fr/)

Stabilité

Analyse de Von Neumann

Définition :

Quel que soit $T > 0$ fixé, il existe une borne C_T, indépendante de $h = \Delta x$, majorant la solution numérique dans le processus de raffinement de maillage ($h \to 0$) : $\forall j,\ \forall n \leq n_{\max}$: $\left|u_j^n\right| \leq C_T \qquad (\Delta t = T/n_{\max})$.

Une condition suffisante

$$\left\|u_h^{n+1}\right\| \leq [1 + O(\Delta t)] \left\|u_h^n\right\|$$

où :

$$u_h^n = \begin{pmatrix} \vdots \\ u_j^n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Preuve : $\|u_h^n\| / \|u_h^0\| \leq [1 + K\Delta t]^n \leq \exp(Kn\Delta t) \leq \exp(KT)$; $C_T = \exp(KT)\,\|u_h^0\|$. $\square$

Analyse pratique de la stabilité

Analyse de Fourier

On étudie généralement la stabilité d'un schéma numérique en considérant (d'abord) un problème de Cauchy pur pour lequel on peut supposer la solution périodique en j. En faisant de plus l'hypothèse de linéarité et coefficients constants, un schéma à 2 niveaux en temps s'écrit matriciellement :

$$u_h^{n+1} = G_h u_h^n + b_h$$

et une condition suffisante (forte) de stabilité est la suivante : $\|G_h\| \leq 1$, pour une certaine norme. Or, en périodique : $\|G_h\|_2 = \rho(G_h)$ (rayon spectral, $\max_m \left|\lambda_h^{(m)}\right|$), et les valeurs propres d'une matrice circulante s'expriment simplement. Une condition simple en résulte généralement.

Conditions aux limites

Ianenko, Gustafsson-Kreiss-Sundström (GKS)

Convergence

Problème et schéma numérique linéaire

Théorème d'équivalence de Lax

Étant donné un problème aux valeurs initiales pur, linéaire, bien posé, et un schéma numérique consistant associé, la convergence équivaut à la condition de stabilité.

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \text{CONSISTANCE} & + & \text{STABILITÉ} & \Longrightarrow & \text{CONVERGENCE} \\ \\ E.T. \longrightarrow 0 & & \|u_h^n\| \leq C_T & & u_h \longrightarrow u \quad (h \to 0) \end{array}}$$

Outline

Solution forte [1]

Loi de conservation 1D scalaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \qquad (x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}+) \qquad \text{(a)}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{(b)}$$

Solution forte (ou classique)

Une fonction $u(x,t)$ de $\bar{\mathcal{O}}$ dans $\mathbb{R}$, où $\mathcal{O}$ est un ouvert bordant l'axe des x, satisfaisant les conditions suivantes :

- de classe C^1 dans $\mathcal{O}$;
- vérifiant (a) en tout point de $\mathcal{O}$;
- vérifiant la condition initiale (b) .

Nous avons vu que sauf conditions initiales très particulières, il n'existe pas de solution forte sur $\mathcal{O} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}+$ en entier.

Solution forte ^{2}

Soient $u(x,t)$ une solution forte dans $\bar{O}$, et $\Phi(x,t)$ une fonction test régulière

$\phi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}+)$, à support compact $\subseteq \bar{O}$. On a :

$$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}+} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} \right) \phi(x,t)\, dx\, dt = 0$$

où $\phi = 0$ en dehors de son support.

Par intégration par parties, il vient :

$$\underbrace{\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}+} u \frac{\partial \phi}{\partial t}\, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\phi(x,0)\, dx + \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}+} f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x}\, dx\, dt}_{\text{existe, } \forall \phi \text{, sous des conditions de régularité moins fortes sur } u} = 0$$

Solution faible

(solution au sens des distributions)

Définition

$$\begin{cases} u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}+)\,,\ f(u) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}+)\,, \\ \displaystyle\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}+} \left(u\,\frac{\partial\phi}{\partial t} + f(u)\,\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) dx\,dt = -\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,\phi(x,0)\,dx\,, \\ \text{pour tout } \phi \text{ de régularité } C^\infty\text{, à support compact dans } \mathbb{R}\times\mathbb{R}+ \end{cases}$$

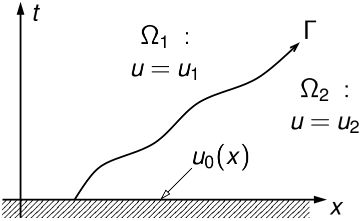
Par cette définition, toute solution forte est une solution faible. Or, on sait que les lois de conservation génèrent des fonctions discontinues. Sont-elles des solutions faibles?

Propagation de discontinuité [1]

Soit la fonction

$$u = \begin{cases} u_1 & \text{solution forte dans } \Omega_1 \\ u_2 & \text{solution forte dans } \Omega_2 \end{cases}$$

où Ω_1 et Ω_2 constituent une partition du demi-plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}+$, et ont une frontière commune Γ, correspondant au lieu d'une discontinuité qui se propage dans le temps.



Est-elle une solution faible?

Propagation de discontinuité 2

Cette fonction discontinue est "solution faible" ssi :

$\forall \phi \in C^\infty$ (à support compact) $supp.(\phi) \cap \mathbb{R} = \emptyset$: $I_1 + I_2 = 0$, où :
$I_k = \iint_{\Omega_k} \left(u_k \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u_k) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx\, dt$ $(k = 1, 2)$.
En intégrant par parties, il vient :

$$I_k = \underbrace{\iint_{\Omega_k} \left(\frac{\partial u_k}{\partial t} \phi + \frac{\partial f(u_k)}{\partial x} \phi \right) dx\, dt}_{=0} + \int_\Gamma \left(u_k \phi\, n_{k\,t} + f(u_k) \phi\, n_{k\,x} \right) d\gamma$$

Or si $\vec{n} = \vec{n}_{12}$, $\vec{n}_1 = +\vec{n}$ et $\vec{n}_2 = -\vec{n}$ et la condition devient :

$$\forall \phi\ (\dots)\ : \int_\Gamma \left[(u_1 - u_2)\, n_t + \Big(f(u_1) - f(u_2) \Big)\, n_x \right] \phi\, d\gamma = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\Big[f(u) \Big] = \sigma \Big[u \Big]}$$

"Relation de saut"

$\Big[f(u) \Big] := f(u_2) - f(u_1)$, $\Big[u \Big] := u_2 - u_1$ et $\sigma := \frac{-n_t}{n_x} = \left(\frac{dx}{dt} \right)_\Gamma$ (vitesse de propagation de la discontinuité).

Propagation de discontinuité [3]

Équation de Burgers

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{u^2}{2}\right) = 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x < 0 \\ u_2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

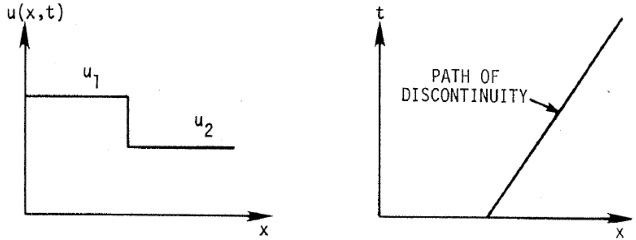
Vitesse de propagation

$$\sigma = \left(\frac{dx}{dt}\right)_\Gamma = \frac{\left[f(u)\right]}{\left[u\right]} = \frac{\frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2}}{u_2 - u_1} = \frac{u_1 + u_2}{2}$$

Propagation de discontinuité [4]

Équation de Burgers

Cas du choc : $u_1 > u_2$



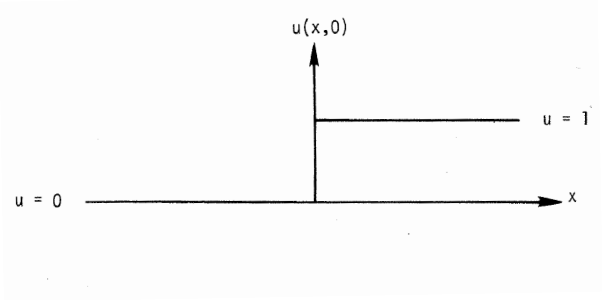
(illustration tirée de ATP)

Propagation de discontinuité [5]

Équation de Burgers

Cas inverse : $u_1 < u_2$

- Condition initiale



- La "mauvaise" solution faible :

$$\frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow u(x,t) = u_0\left(x - \frac{t}{2}\right)$$

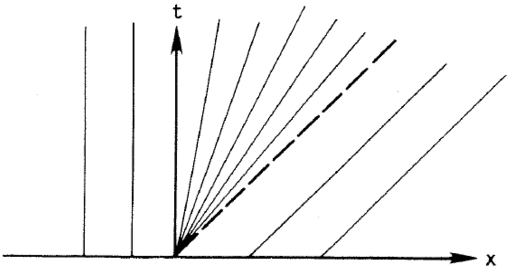
Propagation de discontinuité [6]

Équation de Burgers

Cas inverse : $u_1 < u_2$ (suite)

- La "bonne"solution faible : "Onde de détente"

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x/t & \text{si } 0 < x < t \\ 1 & \text{si } x > t \end{cases}$$



(illustration tirée de ATP)

Propagation de discontinuité [7]

Les relations de saut ne suffisent pas en général à caractériser la "bonne solution faible"

Critères physiques : entropie, parabolisation (viscosité évanescente : $u_t + [f(u)]_x = \varepsilon u_{xx}$, $\varepsilon \to 0$)

Equations d'Euler, écoulement stationnaire

Relations de saut = Equations de Rankine-Hugoniot

$$\Big[n_x F(W) + n_y G(W) + n_z H(W) \Big]_{\text{choc}} = 0$$

Outline

Théorème de Lax-Wendroff

Cours du Prof. Tim Colonius (Cal'Tech)

http://www.its.caltech.edu/∼appelo/ae232/lecture28.pdf

Théorème de Lax-Wendroff

Forme conservative + consistance + convergence	$\Longrightarrow$	la fonction limite est solution faible de la loi de conservation

Schéma sous forme conservative

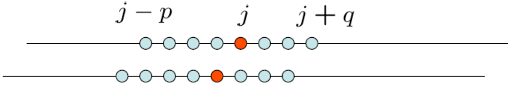
Pour la loi de conservation $u_t + [f(u)]_x = 0$

Définition

S'il peut s'écrire :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big[\mathrm{F}\left(u_{j-p}^n, u_{j-p+1}^n, \ldots, u_{j+q}^n\right) - \mathrm{F}\left(u_{j-p-1}^n, u_{j-p}^n, \ldots, u_{j+q-1}^n\right)\Big]$$

où F$(u, v, \ldots)$ est la fonction de flux numérique.



Cas particulier : $p = 0$ et $q = 1$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big[\mathrm{F}\left(u_{j+1}, u_j\right) - \mathrm{F}\left(u_j, u_{j-1}\right)\Big]$$

Conservation globale discrète [1]

Définition de symbole

$$\mathrm{F}\left(u^n_{j-p}, u^n_{j-p+1}, \ldots, u^n_{j+q}\right) := \mathrm{F}\left(u^n; j\right)$$
$$\mathrm{F}\left(u^n_{j-p-1}, u^n_{j-p}, \ldots, u^n_{j+q-1}\right) := \mathrm{F}\left(u^n; j-1\right)$$

Formulation compacte du schéma

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big[\mathrm{F}\left(u^n; j\right) - \mathrm{F}\left(u^n; j-1\right)\Big]$$

Sommation sur les cellules

$$\forall J, K \ : \ \Delta x \sum_{j=J}^{K} \left(u_j^{n+1} - u_j^n\right) = -\Delta t\Big[\mathrm{F}\left(u^n; K\right) - \mathrm{F}\left(u^n; J-1\right)\Big]$$

Conservation globale discrète [2]

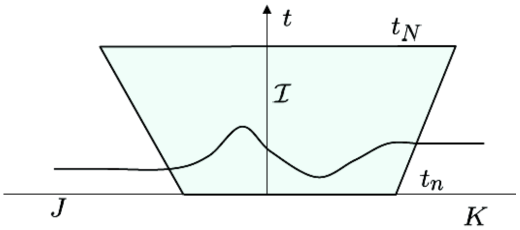
Hypothèse : condition initiale constante à l'infini

Alors si J et K sont suffisamment grands :

$$\mathrm{F}\left(u^n;K\right) = f_\infty \qquad \mathrm{F}\left(u^n;J-1\right) = f_{-\infty}$$

(par consistance à l'EDP), et :

$$\Delta x \sum_{j=J}^{K} \left(u_j^{n+1} - u_j^n\right) = -\Delta t \left[f_\infty - f_{-\infty}\right]$$



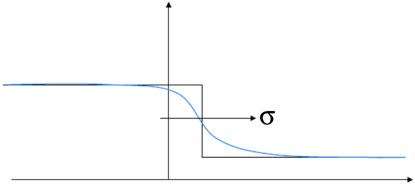
Conservation globale discrète 3

Sommation sur les pas de temps

$$\Delta x \sum_{j=J}^{K} \left(u_j^N - u_j^n\right) = -(t_N - t_n)\left[f_\infty - f_{-\infty}\right]$$

Cas du choc

$$\left[f_\infty - f_{-\infty}\right] = \sigma\left[u_\infty - u_{-\infty}\right] \qquad \sigma = \frac{dx}{dt}$$



LES SCHÉMAS CONSERVATIFS PRÉSERVENT LES SAUTS ET LES VITESSES DE PROPAGATION DES CHOCS

Consistance

Définition

Une méthode est dite consistante si la fonction de flux numérique se réduit à la fonction de flux de l'EDP lorsque tous ses arguments sont égaux :

$$\mathrm{F}\,(u, u, ..., u) = f(u)$$

et F est Lipschitz-continue :

$$\left|\mathrm{F}\,(v, w, ...) - f(u)\right| \leq K \max\left(|v-u|\,, |w-u|\,, ...\right)$$

quand v, w, ... approche u. (La constante K peut dépendre de u, mais pas de v, w, ... Les fonctions différentiables sont Lipschitz.)

Exemple 1 : Eqn. de Burgers, schéma décentré amont

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\frac{\left(u_j^n\right)^2}{2} - \frac{\left(u_{j-1}^n\right)^2}{2}\right]$$

Fonction de flux numérique

$p = q = 0$

$$\mathrm{F}(u) = \frac{u^2}{2} = f(u)$$

Lipschitz-continuité

$$\mathrm{F}'(u) = f'(u) = u$$

bien définie.

Exemple 2 : Eqn. de Burgers, schéma saute-mouton

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left[f\left(u_{j+1}^n\right) - f\left(u_{j-1}^n\right)\right]$$

On pose :

$$\mathrm{F}(v,w) = \frac{\Delta x}{2\Delta t}(v-w) + \frac{1}{2}\left[f(v)+f(w)\right]$$

Il vient :

$$\mathrm{F}(u,u) = f(u)$$

De plus :

$$\left|\mathrm{F}(u+\varepsilon_1, u+\varepsilon_2) - f(u)\right| \leq \left|\frac{\Delta x}{2\Delta t}(\varepsilon_1-\varepsilon_2) + \frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)f'(u)\right|$$
$$\leq K\max(|\varepsilon_1|,|\varepsilon_2|) \qquad \text{quand } \varepsilon_1,\varepsilon_2 \to 0.$$

Hypothèse de convergence [1]

Définition fonctionnelle de la solution numérique

On associe aux données discrètes la fonction $\tilde{u}(x,t)$ constante dans tout pavé $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}] \times [t_n, t_{n+1}]$ dans lequel sa valeur est u_j^n.

Rappel de la notion de convergence

La convergence implique qu"il existe une fonction $u(x,t)$ telle que dans un processus de raffinement de maillage, associé à une suite d'indice m, on a :

$$\int_0^T \int_a^b \left| \tilde{u}^{(m)}(x,t) - u(x,t) \right| \, dx\, dt \to 0 \qquad \text{quand } m \to \infty \quad \text{(CV1)}$$

Hypothèse de convergence ^{2}

Notion de variation totale

$$TV(g) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x+\varepsilon) - g(x)| \, dx$$

Si $g'(x)$ existe :

$$TV(g) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| g'(x) \right| \, dx$$

Hypothèse de variation totale bornée

On suppose que :

$$TV\left(\tilde{u}^{(m)}(x,t)\right) \leq R \qquad \forall t \, \forall m \tag{CV2}$$

(Noter qu'on peut montrer que la variation totale d'une solution faible de loi de conservation est à variation totale, TV, non croissante.)

Mise en garde

- L'analyse qui suit ne s'applique qu'aux lois de conservation scalaires. Dans le cas d'un système, certaines propriétés restent vraies, mais pas toutes.
- La théorie actuelle est bien plus développée pour les équations scalaires, et à ce jour, aucune preuve de stabilité/convergence n'est établie pour les systèmes généraux.
- Ceci dit, en pratique, l'expérience montre que le cas scalaire est instructif du cas général.

Théorème de Lax-Wendroff

Si la solution numérique $\tilde{u}^{(m)}(x,t)$ satisfait (CV1) et (CV2), et si elle provient de l'application d'un schéma numérique sous forme conservative, consistant, et convergeant dans un processus de raffinement de maillage ($m \longrightarrow \infty$), la limite, $u(x,t)$, est solution faible de la loi de conservation.

<u>Démonstration :</u> voir
http://www.its.caltech.edu/∼appelo/ae232/lecture28.pdf

Différences finies et coordonnées curvilignes

Exemple : Euler 2D stationnaire, forme conservative

$$\frac{\partial F(W)}{\partial x} + \frac{\partial G(W)}{\partial y} = 0$$

Coordonnées curvilignes

$$x = x(\xi,\eta) \qquad y = y(\xi,\eta)$$

Réécriture sous forme conservative[2]:

$$\frac{\partial \hat{F}(\hat{W})}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}(\hat{W})}{\partial \eta} = 0$$

régularité de la carte exigée!

$$\hat{W} = J^{-1} W\,,\ \hat{F} = J^{-1}(\xi_x F + \xi_y G) = y_\eta F - x_\eta G\,,\ \hat{G} = J^{-1}(\eta_x F + \eta_y G) = -y_\xi F + x_\xi G\,,\ J = \xi_x \xi_y + \eta_x \eta_y \neq 0, \text{ ou } \infty.$$

[2] Toujours possible : Viviand, H. : "Conservative Forms of Gas Dynamics Equations", *La Recherche Aérospatiale*, Jan.-Feb.1974, pp. 65-68.

Écoulement constant en différences finies

En continu

Si $W = W_0$ (constant), $F = F_0$, $G = G_0$, et l'EDP

$$(y_\eta F - x_\eta G)_\xi + \left(-y_\xi F + x_\xi G\right)_\eta = 0$$

est trivialement satisfaite en vertu de l'égalité des dérivées partielles croisées :

$$(y_\eta F)_\xi + \left(-y_\xi F\right)_\eta = (-x_\eta G)_\xi + \left(x_\xi G\right)_\eta = 0$$

Mais en discret,

$$\delta_\xi \delta_\eta x_{j,k} \stackrel{?}{=} \delta_\eta \delta_\xi x_{j,k} \quad \delta_\xi \delta_\eta y_{j,k} \stackrel{?}{=} \delta_\eta \delta_\xi y_{j,k}$$

- OK en centré, mais attention au terme de viscosité artificielle!
- FAUX en décentré! De manière flagrante et irréversible : stencils différents...

Équations de Saint-Venant

Écoulement en eaux peu profondes

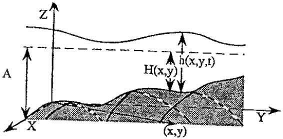
Shallow Water Equations (estuaires, canaux, etc)

Par intégration selon la hauteur des équations d'Euler (incompressible)

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,y,t) + \frac{\partial F_1}{\partial x}\left[w(x,y,t)\right] + \frac{\partial F_2}{\partial y}\left[w(x,y,t)\right] = G\left[x,y,ww(x,y,t)\right]$$

$$w = \begin{pmatrix} h \\ hu_1 \\ hu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad G(x,y,w) = \begin{pmatrix} 0 \\ gh\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) \\ gh\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

$$F_1(w) = \begin{pmatrix} q_1 \\ \frac{q_1^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \\ \frac{q_1 q_2}{h} \end{pmatrix} \quad F_2(w) = \begin{pmatrix} q_2 \\ \frac{q_1 q_2}{h} \\ \frac{q_2^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}$$



- Schémas C-conservatifs

  (Bermúdez-Dervieux-Désidéri-Vásquez, Comput. Methods Appl. Mech. and Engrg. 155 (1998) 49-72)

- Schémas équilibrés (Leroux, ...)

Volumes Finis

Quelques premiers acteurs

Idée de base, à ma connaissance ...

MacCormack, R. W. and Paullay, A. J. : "The Influence of the Computational Mesh on Accuracy for Initial Value Problems with Discontinuous or Non-Unique Solutions", *Computers and Fluids,* Vol. 2, 1974, pp. 339-361.

Dans le monde

van Leer, Roe, Harten, Osher ...

En France

Montagné (ONERA), Gallouët, Herbin, Vila (et Coudière), Dervieux et al (INRIA, en nonstructuré)...

Plus récemment

Abgrall, Barth, Coquel, Couaillier, Deconinck, ...

La problématique

Questions :

Comment construire un schéma conservatif

- en maillage nonuniforme ?
- en approximation décentrée ?

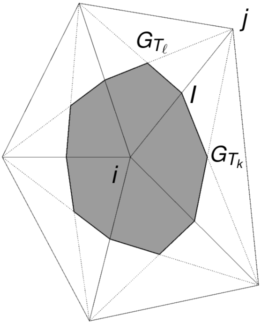
La réponse

- en opérant en coordonnées cartésiennes, plutôt que curvilignes;
- en discrétisant la formulation intégrale (et non l'EDP), pour se ramener à un calcul approché de flux à l'interface;
- en affectant le flux numérique, exact ou approché, aux deux côtés de l'interface, avec les signes + et - (conservation).

Exemple : approximation des éqns. d'Euler par volumes finis

en maillage nonstructuré; technique du maillage dual

Maillage VF dual, cellule centrée sommet



C_i : la cellule de VF autour du nœud i (en grisé)

$G_{T_k} I G_{T_\ell}$: interface entre les nœuds i et j (construction s'appuyant sur les médianes)

$$\forall C_i : \frac{d}{dt} \iint_{C_i} W \, dS + \int_{\partial C_i} \Big(n_x F(W) + n_y G(W) \Big) \, ds = 0$$

Équation de bilan discrète

Moyenne par cellule affectée au sommet

$$W_i(t) \simeq \frac{1}{\mathcal{A}_i} \iint_{C_i} W(x,y,t)\, dS \qquad (\mathcal{A}_i : \text{aire de la cellule } C_i)$$

Calcul du flux par interface

$$\int_{\partial C_i} \Big(n_x F(W) + n_y G(W) \Big)\, ds = \sum_{j \text{ voisin de } i} \phi_{i,j}$$

$$\phi_{i,j} = \int_{\underbrace{\partial C_i \cap \partial C_j}_{G_{T_k} IG_{T_\ell}}} \Big(n_x F(W) + n_y G(W) \Big)\, ds$$

$$\simeq \eta_{i,j\,x} F(W_I) + \eta_{i,j\,y} G(W_I) \qquad \vec{\eta}_{i,j} = \int_{G_{T_k} IG_{T_\ell}} \vec{n}\, ds$$

$$= \|\eta\|\, \mathcal{R}_\gamma^{-1}\, F\Big(\mathcal{R}_\gamma W_I\Big)$$

pour une certaine matrice de rotation $\mathcal{R}_\gamma$, et par invariance formelle des équations d'Euler lors d'un changement de base euclidienne

Approximation du flux

Schéma décentré

$$F(U) = F^+(U) + F^-(U)$$

où les flux $F^\pm$ ont la propriété spectrale suivante :

$$\forall\, U \text{ (admissible)} \;,\; \forall \lambda \in \sigma\left(\frac{\partial F^\pm(U)}{\partial U}\right),\; \lambda \in \mathbb{R}^\pm,$$

(van Leer, Osher, Roe, etc)

Schéma d'ordre 1 :

$$F_l = F\left(\mathcal{R}_\gamma W_l\right) = \underbrace{F^+\left(\mathcal{R}_\gamma W_i\right)}_{\substack{\text{influence}\\ \text{amont}}} + \underbrace{F^-\left(\mathcal{R}_\gamma W_j\right)}_{\substack{\text{influence}\\ \text{aval}}}.$$

Extrapolation au second-ordre

van Leer Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws (MUSCL [1])

Remplacer W_i et W_j par des extrapolés gauche/droite au centre I

$$F_I = F\left(\mathcal{R}_\gamma W_I\right) = F^+\left(\mathcal{R}_\gamma W_{i,j}\right) + F^-\left(\mathcal{R}_\gamma W_{j,i}\right)$$

MUSCL [2]

Schéma décentré : construction de triangles amont

$$W_{i,j} = W_i + \frac{\overrightarrow{ij}}{2} . \overrightarrow{\nabla W}_i$$

$$W_{j,i} = W_j - \frac{\overrightarrow{ij}}{2} . \overrightarrow{\nabla W}_j$$

où :

$$\overrightarrow{\nabla W}_i = \begin{cases} \dfrac{\sum_k \text{aire}(T_k) \overrightarrow{\nabla W}_{T_k}}{\sum_k \text{aire}(T_k)} & \text{schéma } \frac{1}{2}\text{-décentré de type Fromm} \\ \overrightarrow{\nabla W}_{T_{i,j}} & \text{schéma totalement-décentré} \end{cases}$$

MUSCL [3]

Limiteurs

Schéma utilisé

moyenne limitée (non arithmétique, à l'origine : Van Albada) des deux schémas, dans le but de préserver la monotonie des chocs

J.A.D. & A. Dervieux, “Compressible Flow Solvers using Unstructured Grids”, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture Series 1988-5, Computational Fluid Dynamics, March 7-11, 1988. Rapport de Recherche INRIA No. 1732, Juin 1992 (http://hal.inria.fr/inria-00076971/fr/).

Résumé [1]

Elliptique

- Problèmes EDP aux limites (équilibre)
  Prototype : le laplacien, formulation variationnelle, principe du maximum
- Erreur de troncature :

$$E.T. = A_h u - f_h \, ; \quad u \ : \ \text{solution du pb. continu}$$

$$\text{Taylor : } \|E.T.\| = O(h^{\alpha}) \, ; \quad \alpha \ : \ \text{ordre de précision}$$

- Erreur d'approximation :

$$\left\|A_h^{-1}\right\| \leq B \Longrightarrow \|u_h - u\| = O(E.T.) = O(h^{\alpha})$$

- Analyse de Fourier :
  - modes de basses/hautes fréquences
  - rayon spectral, erreur itérative
  - complexité, multigrilles

Résumé [2]

Hyperbolique

- Prototype : les équations d'Euler :
  - Le linéarisé : jacobiennes diagonalisables sur $\mathbb{R}$; système hyperbolique; propagation d'ondes
  - Le caractère nonlinéaire : lois de conservation; solutions fortes/faibles; relation de saut, critère d'entropie
- Analyse de l'erreur en linéaire :
  - Taylor en x et t : équation équivalente, modifiée
  - Erreur de troncature (en instationnaire) :

$$E.T. = \text{``}Au_h - f\text{''} = P_1(\Delta x, \Delta t)u_{xx} + P_2(\Delta x, \Delta t)u_{xxx} + \ldots$$

  - Consistance : $E.T. \to 0 \qquad (\Delta x, \Delta t \to 0)$
  - Ordre de précision : $\alpha \;:\; P_\alpha(\Delta x, \Delta t) \not\equiv 0$
  - Erreur dissipative, dispersive
  - Stabilité : $\|u_h\| \le C_T$
  - Théorème de Lax :

CONSISTANCE	+	STABILITÉ	$\Longrightarrow$	CONVERGENCE
$E.T. \longrightarrow 0$		$\|u_h^n\| \le C_T$		$u_h \longrightarrow u \quad (h \to 0)$

Résumé 3

Hyperbolique (suite)

- Analyse de l'erreur en nonlinéaire :
  - Schémas sous forme conservative
  - Consistance, conservation globale
  - Théorème de Lax-Wendroff :

Forme conservative + consistance + convergence	$\Longrightarrow$	la fonction limite est solution faible de la loi de conservation

  - Une difficulté majeure en DF (coordonnées curvilignes) avec les eqns. d'Euler ou de Saint Venant : conserver les constantes, à chaque Δt, avec un schéma décentré
  - Introduction aux volumes finis; exemple en maillages nonstructurés.

Validation-vérification-calibration

Une activité continue d'ERCOFTAC