Lecture Notes

Analytic Geometry (Geometri Analitik)

disusun oleh

Nanda Arista Rizki, M.Si.

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS MULAWARMAN
2018

December, 2018

Daftar Isi

Daftar Gambar

Daftar Tabel

BAB 1

Pendahuluan Geometri Analitik

Sebelum masuk ke dalam materi, alangkah baiknya mengetahui perbedaan antara kalkulus dan geometri. Walaupun kalkulus dan geometri merupakan cabang ilmu matematika, namun secara istilah, kalkulus yang disebut sebagai ilmu hitung, sedangkan geometri adalah ilmu ukur. Kalkulus secara umum membahas tentang *change* (perubahan), yang meliputi limit, kontinuitas, fungsi, diferensial, integrasi, dan lain lain. Sementara yang dibahas geometri adalah bentuk, ukuran, sifat ruang dan posisi relatif dari suatu rupa. Oleh karena itu, geometri melibatkan koordinat suatu rupa tersebut dalam bentuk dimensi.

Geometri merupakan ilmu pengetahuan yang sudah lama. Kata geometri berasal dari bahasa Yunani. Geo artinya bumi dan metri artinya ukuran. Sehingga geometri didefinisikan sebagai cabang ilmu matematika yang dikembangkan untuk memudahkan studi dan pengukuran berbagai bentuk rupa. Dalam geometri, dikenal beberapa postulat geometri euclid berikut:

1. Titik.
   Titik merupakan objek yang secara hipotesis tidak berdimensi. Artinya jika sebuah titik dibuat di atas kertas, maka objek tersebut bukanlah titik namun kombinasi dari tak hingga titik.

2. Garis.
   Garis adalah suatu wadah untuk titik yang terdefinisi sebagai kurva satu dimensi. Garis hanya memiliki panjang, tidak memiliki luas, dan tidak memiliki

ketebalan. Garis dapat digolongkan dalam dua jenis yaitu *curved line* (garis lengkung) dan *straight line* (garis lurus). Perhatikan Gambar 1.1 berikut.

(a) *Curved line* (b) *Straight line*

Gambar 1.1: Perbedaan antara *curved line* dan *straight line*

3. Intermediasi.

   Antara dua titik yang berbeda pada garis lurus, maka selalu ada titik lain dimana pun mereka berada. Ujung-ujung suatu garis berupa titik.

4. Segmen garis dan "*rays*".

   Jika sebuah garis terpotong oleh dua titik (misal A dan B), maka disebut segmen garis. Artinya sebuah segmen garis memiliki titik awal (A) dan titik akhir (B). Segmen garis memiliki panjang tetap terbatas. Namun jika titik akhir B jatuh di tak hingga, maka diperoleh segmen garis dengan panjang semi-tak hingga yang disebut "*rays*".

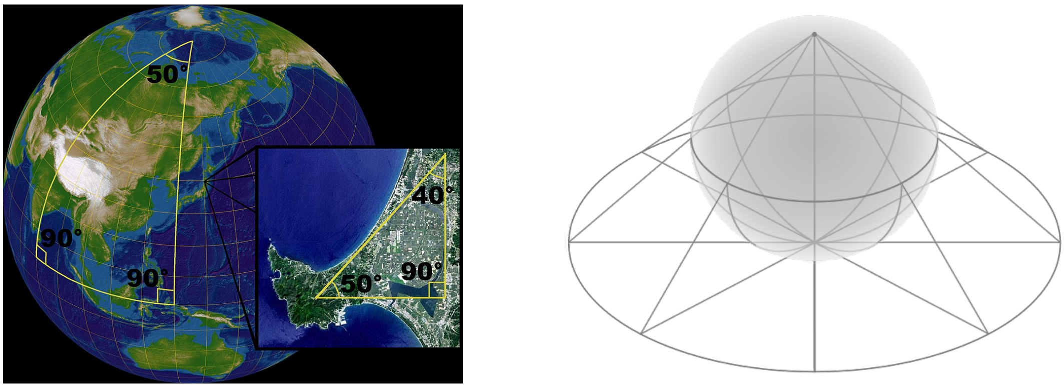
5. Permukaan.

   Permukaan dibentuk dari dua dimensi, yang disebut suatu wadah garis. Permukaan memiliki panjang dan luas, namun tidak memiliki ketebalan. Permukaan dikatakan permukaan bidang jika dipilih dua titik sebarang (katakanlah A dan B) pada suatu permukaan lalu kedua titik tersebut dihubungkan oleh segmen garis lurus (AB), maka setiap titik pada segmen garis tersebut terkandung dalam permukaan. Permukaan bidang dianggap sebagai permukaan bidang euclid, sebaliknya disebut permukaan lengkung.

6. *Solid*.

   Suatu konstruksi geometri yang memiliki tiga dimensi, yang diperoleh dengan melakukan translasi atau rotasi dari permukaan disebut *solid*.

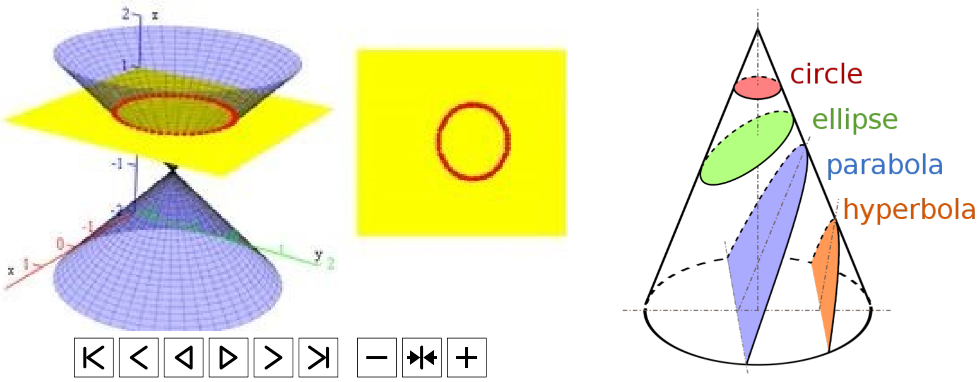
Sebagian besar dari postulat Euclid adalah pernyataan sederhana tentang fakta-fakta intuitif jelas dan tak terbantahkan tentang bidang atau ruang. Postulat-postulat Euclid tersebut tentu tidak berlaku pada geometri non-euclid. Contoh geometri non-euclid dapat dilihat pada Gambar 1.2.



(a) *Triangles spherical geometry* (b) *Stereographic projection*

Gambar 1.2: Konsep *spherical geometry*

Geometri analitik adalah suatu cabang ilmu matematika yang merupakan kombinasi antara aljabar dan geometri. Dengan menghubungkan persamaan matematika secara aljabar dengan tempat kedudukan secara geometri diperoleh suatu metode pemecahan masalah geometri yang lebih sistematik dan lebih tegas. Masalah-masalah geometri akan diselesaikan secara aljabar (atau secara analitik). Sebaliknya gambar geometri sering memberikan pemahaman yang lebih jelas pada pengertian hasil secara aljabar. Dalam materi geometri analitik ini juga akan membahas tentang irisan kerucut dengan suatu bidang datar. Perhatikan Gambar 1.3, bahwa suatu irisan kerucut dapat membentuk lingkaran, elips, parabola, dan hiperbola.

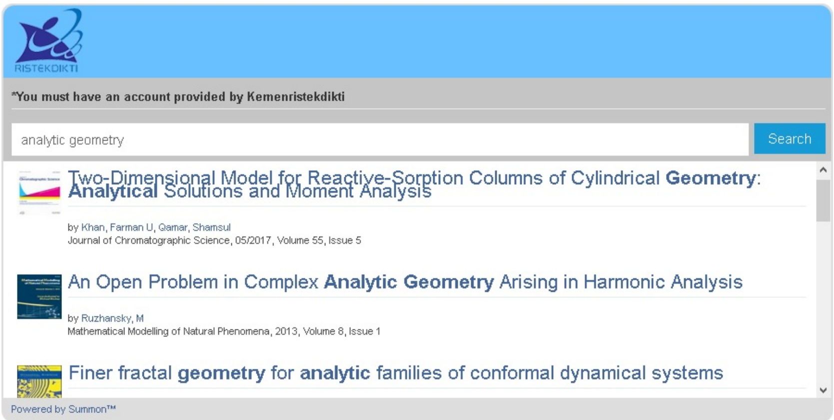


(a) Animasi pembentukan irisan kerucut (b) Hasil irisan kerucut

Gambar 1.3: Irisan kerucut

Penguasaan materi geometri analitik melibatkan *open source software* bernama GeoGebra yang dapat membantu dalam proses visualisasi, yang tersedia baik secara *online* maupun yang dapat diunduh secara gratis di www.geogebra.org. Untuk membantu pemahaman, maka dalam proses pembelajaran dapat menggunakan media yang disediakan oleh https://www.khanacademy.org/math/geometry-home/analytic-geometry-topic dan https://www.khanacademy.org/math/precalculus/conics-precalc.

Penelitian-penelitian mengenai geometri analitik yang terbaru atau masih hangat saat ini, dapat dipantau langsung melalui *website widgets* (lihat Gambar 1.4) atau Google Scholar (lihat Gambar 1.5).



Gambar 1.4: Pencarian referensi penelitian melalui *website widgets*

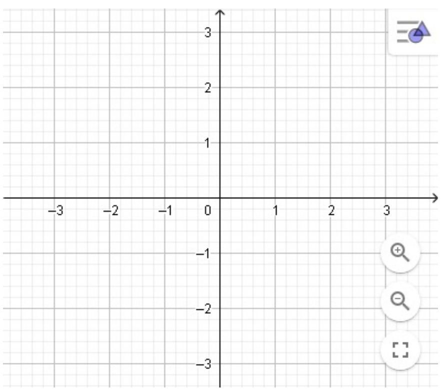
Gambar 1.5: Pencarian referensi penelitian melalui Google Scholar

BAB 2

Sistem Koordinat Kartesius

Sistem koordinat menjadi landasan bagi geometri analitik. Koordinat kartesius dikenalkan oleh seorang matematikawan Perancis bernama René Descartes. Idenya adalah cara menunjukkan kedudukan atau posisi sebuah titik pada bidang dengan dua bilangan yaitu absis dan ordinat yang ditulis (x, y). Perhatikan Gambar 2.1 bahwa semua himpunan $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2)|x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ dapat digambarkan dalam koordinat kartesius. Bidang ini dibagi menjadi empat kuadran sebagai pedoman dalam meletakkan posisi suatu titik.

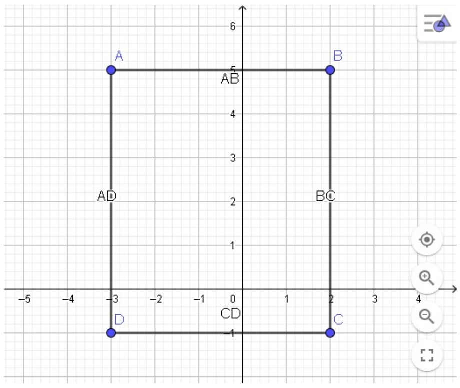
Sistem koordinat kartesius $\mathbb{R}^2$ inilah yang selanjutnya diperluas menjadi dimensi ruang $\mathbb{R}^3$. Bentuk-bentuk geometri yang dapat digambar dalam sistem koordinat kartesius $\mathbb{R}^3$ antara lain adalah balok, tabung, bola, dan kerucut.



Gambar 2.1: Koordinat kartesius di $\mathbb{R}^2$

2.1 Garis

Setiap titik dalam koordinat kartesius dapat dihubungkan oleh segmen garis lurus. Misal titik $A(-3, 5)$, titik $B(2, 5)$, titik $C(2, -1)$, dan titik $D(-3, -1)$ dihubungkan dengan cara menarik garis dari titik A ke B, lalu ke C, kemudian ke D dan kembali lagi ke A. Maka diperolehlah sebuah bangun datar seperti pada Gambar 2.2, yang dapat diketahui sifat-sifat geometrinya (seperti keliling dan luas).



Gambar 2.2: Contoh bidang datar

Jarak antara titik dalam sistem koordinat dapat ditentukan dengan mudah melalui Teorema Pythagoras. Misal titik $A(a_1, a_2)$ dan $B(b_1, b_2)$ ingin dicari panjang segmen garis lurus yang menghubungkan kedua titik tersebut, maka

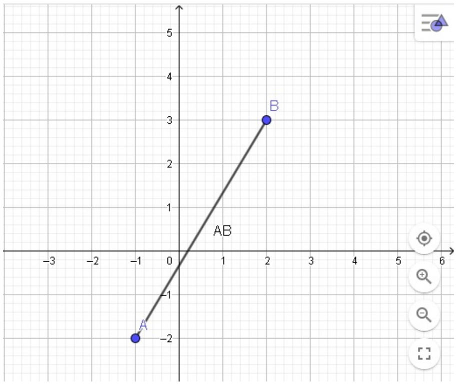
$$\overline{AB}^2 = |AB|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2. \tag{2.1}$$

Karena jarak selalu bernilai positif, maka

$$\overline{AB} = |AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}. \tag{2.2}$$

Dalam hal ini, $\overline{AB}$ menyatakan panjang segmen garis AB yang terbentuk, sedangkan $|AB|$ menyatakan jarak antar dua titik tersebut. Perhatikan bahwa jarak antara titik $A(-1, -2)$ dan $B(2, 3)$ seperti pada Gambar 2.3, dapat dengan mudah dihitung menggunakan konsep Teorema Pythagoras.

Misal diketahui dua titik berbeda, yaitu $A(a_1, a_2)$ dan $B(b_1, b_2)$. Segmen garis lurus dibentuk dengan cara menghubungkan titik A dan titik B. Lalu titik $C(c_1, c_2)$ ditaruh dalam segmen garis tersebut, dengan perbandingan $|AC| : |CB| = p : q$.



Gambar 2.3: Ilustrasi jarak antara dua titik berbeda

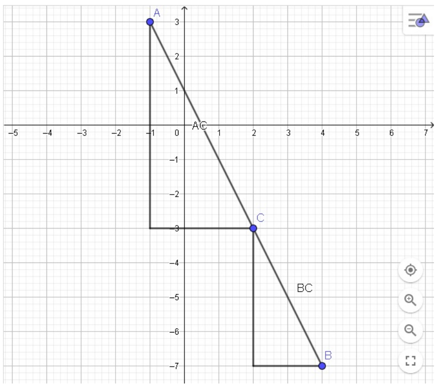
Kedudukan titik C dalam segmen garis tersebut adalah

$$C(c_1, c_2) = \left(\frac{p \cdot b_1 + q \cdot a_1}{p+q}, \frac{p \cdot b_2 + q \cdot a_2}{p+q} \right). \tag{2.3}$$

Sebagai contoh misal diketahui titik $A(-1, 3)$ dan titik $B(4, -7)$, lalu diletakkan titik $C(c_1, c_2)$ pada segmen garis lurus AB dengan perbandingan $|AC| : |CB| = 3 : 2$ seperti pada Gambar 2.4. Dengan menggunakan Persamaan 2.3, diperoleh

$$C(c_1, c_2) = \left(\frac{3 \cdot 4 + 2 \cdot (-1)}{3+2}, \frac{3 \cdot (-7) + 2 \cdot 3}{3+2} \right) = (2, -3).$$

Secara khusus, posisi titik tengah dari segmen garis AB yaitu ketika nilai $p = q = 1$.

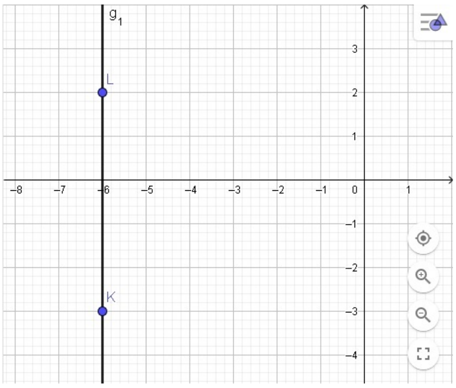


Gambar 2.4: Ilustrasi titik dalam segmen garis lurus

Misalkan garis *rays* g_1 melalui dua buah titik berbeda yaitu $K(-6, -3)$ dan $L(-6, 2)$ sedemikian sehingga sejajar dengan sumbu Y, seperti yang dapat dilihat pada Gambar 2.5. Perhatikan bahwa garis g_1 juga melalui titik $(-6, 0)$. Jika diberikan titik-titik lain yang juga terletak pada garis ini, maka absisnya selalu bernilai -6. Oleh karena itu, garis g_1 adalah himpunan semua titik yang berabsis -6, dan ditulis dengan cara

$$g_1 \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = -6\}$$

atau secara sistematis dinyatakan dalam bentuk persamaan $x = -6$. Dengan penjelasan yang sama, maka dapat dipahami bahwa sumbu Y adalam persamaan garis yang berbentuk $x = 0$.



Gambar 2.5: Garis $x = -6$

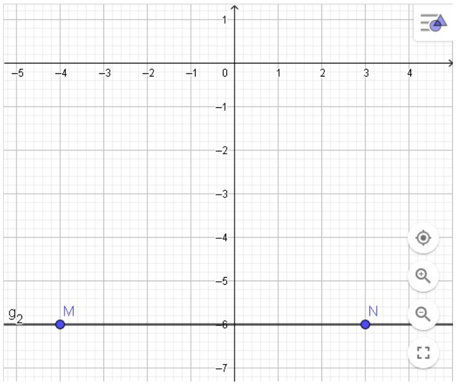
Selanjutnya misalkan garis g_2 melalui titik $M(-4, -6)$ dan $L(3, -6)$ sedemikian sehingga sejajar dengan sumbu X, seperti yang dapat dilihat pada Gambar 2.6. Perhatikan bahwa semua titik-titik yang terletak pada garis g_2 memiliki nilai ordinat -6, sehingga garis g_2 dapat ditulis menjadi

$$g_2 \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = -6\}$$

atau secara sistematis dinyatakan dalam bentuk persamaan $y = -6$. Dengan pengertian tersebut, dapat dipahami bahwa persamaan untuk sumbu X adalah $y = 0$.

Secara umum, persamaan garis lurus yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ dapat diperoleh dengan cara

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_2}. \tag{2.4}$$



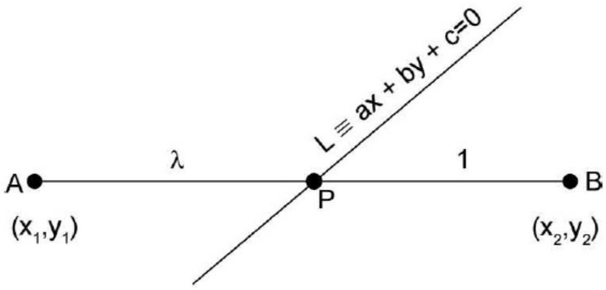
Gambar 2.6: Garis $y = -6$

Suatu persamaan garis biasanya ditulis dalam salah satu dari dua bentuk berikut:

1. $y = mx + c$, dengan kemiringan garis m dan suatu konstanta c.
2. $ax + by + c = 0$, dengan a, b, c adalah konstanta real, sedangkan nilai a dan nilai b tidak bersama-sama nol.

Jika suatu segmen garis AB menghubungkan titik ujung $A(x_1, y_1)$ dan titik $B(x_2, y_2)$, dipotong oleh garis lurus $L \equiv ax+by+c = 0$ dengan rasio perbandingan $\lambda : 1$ seperti pada Gambar 2.7, maka

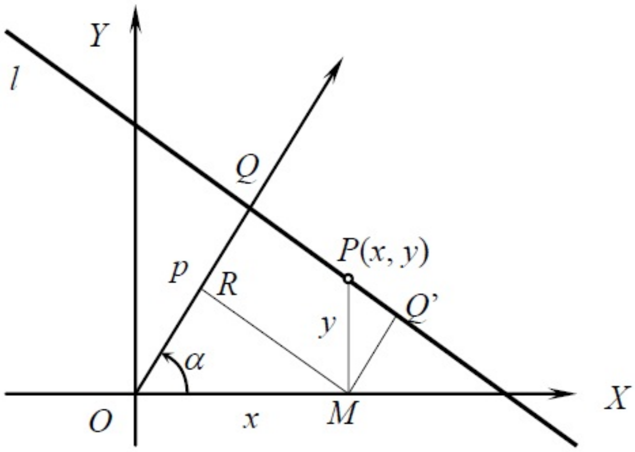
$$\lambda = -\frac{ax_1 + by_1 + c}{ax_2 + by_2 + c} = -\frac{L_1}{L_2}. \tag{2.5}$$



Gambar 2.7: Ilustrasi titik potong antara segmen garis dan garis *rays*

Suatu garis dapat ditentukan jarak terdekatnya dari titik asal $O(0, 0)$. Misalkan titik $Q(x, y)$ merupakan titik dalam garis l yang letaknya terdekat dari titik asal, lalu dibentuk segmen garis lurus (dengan menghubungkan titik asal dan titik

Q). Segmen garis yang tebentuk merupakan garis normal dari titik asal ke garis l tersebut (perhatikan Gambar 2.8).



Gambar 2.8: Ilustrasi jarak terpendek dari titik asal ke suatu garis

Untuk menurunkan persamaan garis dalam bentuk p dan α diambil sembarang titik $P(x, y)$ pada garis l. Ditarik garis dari P yang tegak lurus dengan sumbu x, sehingga memotong sumbu x di titik M. Dari M digambar garis yang tegak lurus dengan garis normal ON dan berpotongan di titik R. Proyeksi tegak lurus dari OM pada ON adalah

$$OR = OM \cos\alpha = x\cos\alpha. \tag{2.6}$$

Dengan cara yang sama, proyeksi tegak lurus dari MP pada ON adalah

$$RQ = MP\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = y\sin\alpha, \tag{2.7}$$

namun

$$OR + RQ = OQ = p. \tag{2.8}$$

Oleh karena itu, dengan menghubungkan Persamaan 2.6, Persamaan 2.7, dan Persamaan 2.8, diperoleh

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \tag{2.9}$$

yang merupakan bentuk normal dari persamaan garis lurus l. Segmen garis OQ

memiliki panjang p dan sudut normal α.

Reduksi suatu persamaan garis lurus ke bentuk normalnya menjadi sangat penting jika ingin mengetahui jarak terpendeknya dari titik asal dan besar sudutnya. Misalkan bentuk persamaan garis tersebut adalah

$$l \equiv ax + by + c = 0.$$

Jika masing-masing ruas dikalikan dengan suatu konstanta $k \in \mathbb{R}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
&kax + kby + kc = 0\\
&ka = \cos\alpha\\
&kb = \sin\alpha\\
&kc = -p.
\end{aligned}$$

Jika ka dan kb masing-masing dikuadratkan lalu dijumlahkan, maka diperoleh

$$k^2a^2 + k^2b^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
k^2 &= \frac{1}{a^2+b^2}\\
k &= \pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.
\end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\
\sin\alpha &= \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\\
p &= \mp\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.
\end{aligned}$$

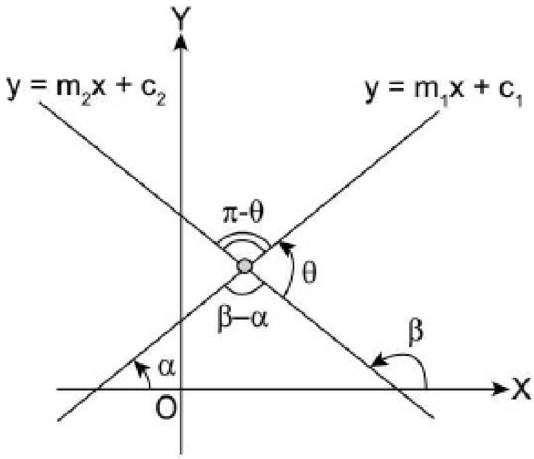
Oleh karena itu, bentuk normal persamaan garis l tersebut adalah

$$\pm\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0.$$

Misal diberikan dua buah garis lurus, yaitu $y = m_1x + c_1$ dan $y = m_2x + c_2$, seperti yang tampak pada Gambar 2.9. Kedua garis tersebut memotong sumbu x dan membentuk sudut α dan sudut β dengan sumbu x. Perhatikan bahwa $\tan\alpha = m_1$, dan $\tan\beta = m_2$. Misalkan sudut dua buah garis ini adalah θ dan $\pi - \theta$. Berdasarkan Gambar 2.9, bahwa sudut antara dua garis ini adalah $\theta = \pi - \beta + \alpha$ dan $\beta - \alpha$. Sudut θ dapat dipeoleh dengan cara menghitung

$$\tan\theta = \pm\tan(\alpha - \beta) = \pm\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}.$$

Jika $\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2} > 0$, maka sudut $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ atau sudut θ lancip. Sedangkan jika $\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2} < 0$, maka sudut $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ atau sudut θ tumpul.



Gambar 2.9: Sudut yang terbentuk oleh dua garis berbeda

Hubungan antara dua garis lurus adalah salah satu dari kondisi berikut

- sejajar
- berimpit
- tegak lurus

Misal diberikan dua garis $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ dan garis $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Jika

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, maka dua garis tersebut adalah sejajar, karena

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} &\Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \\ &\Rightarrow -\frac{a_1}{b_1} = \frac{-a_2}{b_2} \\ &\Rightarrow m_1 = m_2 \\ &\Rightarrow \tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = 0 \Rightarrow \theta = 0.\end{aligned}$$

Dengan kata lain, jika dua buah garis sejajar, maka gradiennya sama ($m_1 = m_2$). Selanjutnya akan dibuktikan arah sebaliknya, dengan memisalkan $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda \neq \frac{c_1}{c_2}$, dan titik (x_0, y_0) terletak pada garis $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, maka $a_1x_0 + b_1y_0 = -c$. Sehingga

$$a_2x_0 + b_2y_0 = \frac{a_1}{\lambda}x_0 + \frac{b_1y_0}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}(a_1x_0 + b_1y_0) = -\frac{c_1}{\lambda} \neq -c_2,$$

dan $a_2x_0 + b_2y_0 \neq -c_2$, yang berarti (x_0, y_0) tidak terletak pada garis $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Karena tidak ada $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ dan $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ saling sejajar.

Kondisi selanjutnya adalah untuk garis yang berimpit. Misal diberikan dua garis $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ dan garis $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Jika $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, maka dua garis tersebut berimpit. Misalkan $\lambda = \frac{c_1}{c_2}$, maka $a_1 = a_2\lambda$, $b_1 = b_2\lambda$, dan $c_1 = c_2\lambda$. Jika titik (x_0, y_0) terletak pada garis $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, maka

$$\begin{aligned}a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0 &\Rightarrow a_2\lambda x_0 + b_2\lambda y_0 + c_2\lambda = 0 \\ &\Rightarrow \lambda(a_2x_0 + b_2y_0 + c_2) = 0 \\ &\Rightarrow a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0.\end{aligned}$$

yang berarti titik (x_0, y_0) terletak pada garis $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Dalam hal ini, semua titik yang terletak pada garis $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ juga terletak pada garis $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Oleh karena itu, dalam kondisi ini, kedua garis tersebut dikatakan berimpit.

Selanjutnya adalah kondisi tegak lurus dari dua buah garis. Misal diketahui dua buah garis lurus, yaitu garis $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ dan garis $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ akan saling tegak lurus jika $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ atau $\frac{a_1}{a_2} = -\frac{b_2}{b_1}$. Hubungan antar gradiennya adalah $-m_1 = 1/m_2$ atau $m_2 = -1/m_1$ atau $m_1 m_2 = -1$. Hal ini dapat dibuktikan dengan memisalkan θ adalah sudut antara dua buah garis lurus dan m_1, m_2 adalah gradien-gradiennya, maka $\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$. Diketahui dua buah garis yang saling tegak lurus memiliki sudut $\theta = \frac{\pi}{2}$, maka $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan(x) = \infty$. Sehingga

$$\begin{aligned}
\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \infty &\Rightarrow 1 + m_1 m_2 = 0 \\
&\Rightarrow m_1 m_2 = -1 \\
&\Rightarrow m_1 = -1/m_2 \\
&\Rightarrow \frac{-a_1}{b_1} = \frac{b_2}{a_2} \\
&\Rightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0.
\end{aligned}$$

Suatu titik dapat ditentukan jaraknya ke sebuah garis lurus. Sebelumnya, perhatikan bahwa garis $ax + by + c_1 = 0$ dan $ax + by + c_2 = 0$ memiliki kemiringan atau gradien yang sama, yaitu $m = -\frac{a}{b}$ ketika $b \neq 0$. Jika $b = 0$, maka kedua garis yang terbentuk tersebut adalah garis vertikal. Dalam hal ini, kedua garis tersebut sejajar. Sebaliknya jika hasil kali dari gradien garis pertama dan gradien garis ke dua adalah $m_1 \cdot m_2 = -1$, maka kedua garis tersebut tegak lurus.

Selanjutnya, misal diberikan sebuah garis $l_1 \equiv ax + by + c = 0$ dan sebuah titik (x_1, y_1), maka persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan sejajar dengan garis l_1 adalah

$$ax + by - (ax_1 + by_1) = 0.$$

Perhatikan bahwa garis $ax + by + c_1 = 0$ dan $bx - ay + c_2 = 0$ adalah saling tegak lurus. Lebih lanjut, persamaan garis lurus yang melalui (x_1, y_1) dan tegak lurus dengan $ax + by + c = 0$ adalah

$$bx - ay + (bx_1 - ay_1) = 0.$$

Misal garis yang tegak lurus dengan l_1 dan melalui titik $P(x_1, y_1)$ adalah garis $l_2 \equiv bx - ay + (bx_1 - ay_1) = 0$. Jika garis l_1 dan garis l_2 berpotongan di titik Q, maka koordinat titik Q adalah

$$Q\left(-\frac{ac-b^2x_1+aby_1}{a^2+b^2}, -\frac{bc+abx_1-a^2y_1}{a^2+b^2}\right).$$

Perhatikan bahwa panjang segmen garis PQ adalah jarak titik P ke garis l_1. Lalu dengan menggunakan Persamaan 2.2 untuk menghitung jarak titik P ke garis l_1, diperoleh

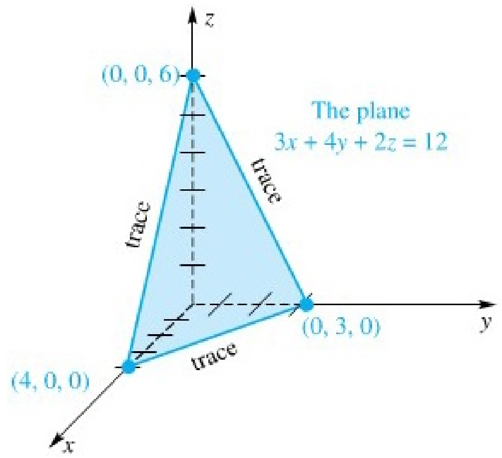
$$\begin{aligned}
PQ &= \sqrt{\left(x_1+\frac{ac-b^2x_1+aby_1}{a^2+b^2}\right)^2+\left(y_1+\frac{bc+abx_1-a^2y_1}{a^2+b^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{a^2x_1+ac++aby_1}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\frac{b^2y_1+bc+abx_1}{a^2+b^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{a(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\frac{b(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{(a^2+b^2)\left(\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{(ax_1+by_1+c)^2}{a^2+b^2}} \\
&= \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

2.2 Bidang

Suatu bidang di $\mathbb{R}^3$ dinyatakan dalam bentuk

$$Ax+By+Cz=D,$$

dengan $A^2+B^2+C^2 \neq 0$. Bidang ini dapat disketsakan dengan menentukan titik potong bidang dengan sumbu x, sumbu y, dan sumbu z. Sebagai contoh, bidang $3x+4y+2z=12$ seperti pada Gambar 2.10 melalui titik $(4,0,0)$, $(0,3,0)$, dan $(0,0,6)$.



Gambar 2.10: Sketsa bidang $3x + 4y + 2z = 12$

2.3 Latihan

1. Tentukan jarak antara titik $X(-13, -9)$ dan $Y(20, 16)$!

2. Misal diketahui titik-titik $A(1, -3)$, $B(-3, 2)$, dan $C(-4, -1)$. Tentukan panjang masing-masing segmen garis lurus AB, BC, dan AC!

3. Jika titik $E(-6, -3)$ $F(1, -3)$, $G(1, 2)$, dan $H(h_1, h_2)$ membentuk sebuah bangun datar dengan kelilingnya adalah 24 satuan. Tentukan koordinat titik H!

4. Tentukan koordinat titik Q, yang terletak pada AB dengan $A(-5, 1)$ dan $B(3, -5)$, sedemikian sehingga $AP : PB = 3 : 5$.

5. Diketahui dua titik $E(4, 7)$ dan $G(8, 1)$. Titik F terletak pada segmen garis EG sedemikian hingga $|EF| : |FG| = 1 : 3$. Tentukanlah absis dan ordinat dari titik F!

6. Jika titik $A(2, -1)$ terletak pada segmen garis MN sedemikian sehingga $MA : AN = 2 : 1$ dan diketahui titik $M(8, 1)$, maka tentukanlah titik N!

7. Diketahui titik-titik sudut $A(0, 1)$, $B(2, 5)$, dan $C(-1, 4)$. Buktikan bahwa segitiga tersebut merupakan segitiga sama kaki!

8. Jika segmen garis lurus memiliki dua titik ujung yaitu $P(-5, -6)$ dan $Q(10, 1)$, maka buktikan bahwa titik $R(4, -2)$ terletak pada segmen garis tersebut!

9. Diketahui segmen garis AB dengan menghubungkan titik ujung $A(1,-2)$ dan titik ujung $B(-3,4)$. Jika titik P dan Q berada dalam segmen garis tersebut, dimana titik P membagi AB dalam rasio $1:2$ dan titik Q membagi AB dalam rasio $2:1$. Maka tentukanlah koordinat titik P dan titik Q!
10. Tentukan persamaan garis yang melalui titik (0,5) dan (0,0)!
11. Tentukan persamaan garis yang melalui titik (-3,2) dan (2,3)!
12. Tentukan titik potong garis $x+2y=3$ dengan sumbu x!
13. Tentukan titik potong garis $x+2y=3$ dengan sumbu y!
14. Tentukan nilai λ jika garis $x+2y=3$ memotong segmen garis yang menghubungkan titik $A(-1,0)$ dan titik $B(3,4)$!
15. Tentukan titik potong garis $x+2y=3$ dengan garis $x-y=-1$!
16. Reduksi Persamaan $3x-4y-15=0$ ke dalam bentuk persamaan normal, lalu sketsalah grafiknya!
17. Reduksi Persamaan $y=\frac{3}{4}x$ ke dalam bentuk persamaan normal, lalu sketsalah grafiknya!
18. Tentukan bentuk normal dari garis jika diketahui jarak terpendeknya dari titik asal adalah p dengan sudut α sebagai berikut.
    a) $\alpha=45°$, $p=4$.
    b) $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $p=3$.
    c) $\alpha=180°$, $p=4$.
    d) $\alpha=\frac{3\pi}{2}$, $p=4$.
19. Tentukan jarak titik $(1,4)$ ke garis $3x-5y+2=0$!
20. Tentukan jarak titik $(5,7)$ terhadap garis yang melalui titik $(-4,-6)$ dan $(8,3)$!
21. Sketsalah grafik $2x+3y=6$ dalam $\mathbb{R}^3$!

BAB 3

Lingkaran

Persamaan lingkaran yang memiliki titik pusat (α, β) dan radius r adalah

$$
\begin{aligned}
(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 &= r^2 \\
x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Jika lingkaran tersebut memiliki titik pusat $(0, 0)$ maka persamaan lingkarannya adalah $x^2 + y^2 = r^2$. Persamaan lingkaran juga dapat memiliki bentuk

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0,$$

yang memiliki titik pusat $(-a, -b)$ dan radius $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$. Ketika nilai $r = 0$, maka lingkarannya hanya berupa titik.

Misalkan lingkaran dengan radius $r = 3$ dan titik pusatnya terletak pada garis $y = x - 1$. Jika lingkaran tersebut melalui titik $(7, 3)$, maka ada dua persamaan lingkaran yang terbentuk. Hal ini dapat buktikan dengan memisalkan titik pusatnya adalah (a, b). Karena titik (a, b) terletak pada garis $y = x - 1$, maka $b = a - 1$.

Karena lingkaran melalui titik $(7,3)$, maka

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(a-7)^2+(b-3)^2} \\ \Rightarrow 3 &= \sqrt{(a-7)^2+(a-1-3)^2} \\ \Rightarrow 9 &= (a-7)^2+(a-4)^2 \\ \Rightarrow (a-7)(a-4) &= 0. \end{aligned}$$

Untuk $a=7$ diperoleh $b=6$, dan untuk $a=4$ diperoleh $b=3$. Oleh karena itu, persamaan lingkarannya adalah

$$\begin{aligned} (x-7)^2+(y-6)^2 = 9 &\equiv x^2+y^2-14x-12y+76=0, \text{ atau} \\ (x-4)^2+(y-3)^2 = 9 &\equiv x^2+y^2-8x-6y+16=0. \end{aligned}$$

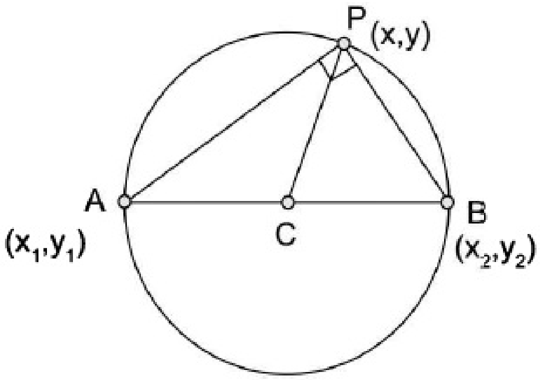
Bentuk diametrik

Misalkan $A(x_1,y_1)$ dan $B(x_2,y_2)$ adalah titik-titik ujung dari diameter suatu lingkaran, dan titik $P(x,y)$ terletak di sebarang lingkaran seperti pada Gambar 3.1. Dalam hal ini, gradien dari segmen garis AP dan BP masing-masing adalah $\frac{y-y_1}{x-x_1}$ dan $\frac{y-y_2}{x-x_2}$. Karena sudut $\angle APB = 90°$, maka

$$\begin{aligned} \frac{y-y_1}{x-x_1}\cdot\frac{y-y_2}{x-x_2} &= -1 \\ (x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2) &= 0. \end{aligned}$$

Sebagai contoh, akan dicari persamaan lingkaran yang memiliki diameter dengan titik ujungnya adalah $A(6,5)$ dan $B(0,-3)$. Lalu misalkan C adalah titik pusat dari lingkaran tersebut, maka $C(3,1)$ adalah titik tengah dari segmen garis AB. Kemudian radius $r=|AC|$ dapat diperoleh dengan cara menghitung jarak antara titik A dan titik C, sehingga $|AC|=5$. Oleh karena itu, persamaan lingkarannya adalah

$$\begin{aligned} (x-3)^2+(y-1)^2 &= 5 \\ x^2+y^2-6x-2y-15 &= 0 \\ (x-6)(x-0)+(y-5)(y+3) &= 0. \end{aligned}$$



Gambar 3.1: Ilustrasi bentuk diametrik

Tiga titik yang tak segaris

Misalkan suatu lingkaran memiliki persamaan $x^2+y^2+2ax+by+c=0$. Persamaan tersebut memiliki tiga parameter yang salig bebas yaitu a, b, dan c. Sehingga persamaan lingkaran yang melalui tiga titik tak segaris $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, dan $C(x_3,y_3)$ dapat diperoleh dengan cara berikut. Jika tiga titik $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, dan $C(x_3,y_3)$ terletak pada lingkaran, maka memenuhi

$$\begin{aligned} x_1^2+y_1^2+2ax_1+by_1+c&=0\\ x_2^2+y_2^2+2ax_2+by_2+c&=0\\ x_3^2+y_3^2+2ax_3+by_3+c&=0. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, persamaan lingkarannya dapat diselesaikan dengan cara menentukan

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1\\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1\\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1\\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Posisi titik terhadap lingkaran

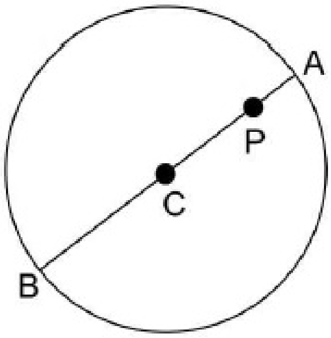
Posisi titik terhadap lingkaran dapat ditentukan berdasarkan perbandingan radius dan jarak titik tersebut terhadap titik pusat. Ada tiga kasus dalam posisi titik ini, yaitu titik terletak dalam lingkaran, titik terletak pada lingkaran, dan titik terletak di luar lingkaran. Berdasarkan posisi ini, maka dapat ditentukan jarak minimum dan maksimum suatu titik tersebut dari lingkaran.

Kondisi pertama yaitu suatu titik terletak dalam lingkaran. Kondisi ini dipenuhi jika jarak suatu titik dengan titik pusat kurang dari radius lingkaran. Misalkan suatu titik P terletak dalam lingkaran yang berpusat di titik C dan memiliki radius r, seperti pada Gambar 3.2. Jika panjang AB adalah diameter dari lingkaran, maka jarak minimum titik P dari lingkaran adalah

$$|PA| = |CA| - |CP| = r - |CP|,$$

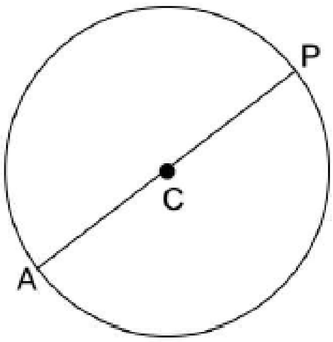
sedangkan jarak maksimumnya dari lingkaran adalah

$$|PB| = |CB| + |CP| = r + |CP|.$$



Gambar 3.2: Ilustrasi titik dalam lingkaran

Jika jarak suatu titik P dengan titik pusat sama radius lingkaran, maka titik tersebut terletak pada lingkaran. Titik P berada pada lingkaran yang beradius r seperti pada Gambar 3.3, maka jarak minimum dan maksimumnya masing-masing adalah 0 dan $PA = 2r$.



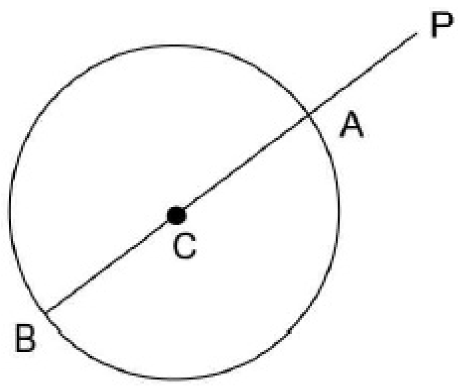
Gambar 3.3: Ilustrasi titik pada lingkaran

Jika jarak suatu titik P dengan titik pusat lebih dari radius lingkaran, maka titik tersebut terletak di luar lingkaran. Perhatikan Gambar 3.4. Jarak minimum titik P dari lingkaran adalah

$$|PA| = |CP| - |CA| = |CP| - r,$$

sedangkan jarak maksimum titik P dari lingkaran adalah

$$|PB| = |CP| + |CB| = r + |CP|.$$



Gambar 3.4: Ilustrasi titik di luar lingkaran

Posisi garis terhadap lingkaran

Posisi garis $L \equiv y - mx - c = 0$ terhadap lingkaran dapat dibedakan menjadi tiga, yaitu memotong lingkaran, menyinggung lingkaran, tidak memotong lingkaran, atau bahkan melalui titik pusat. Misalkan lingkaran tersebut berpusat di (α, β) dan memiliki radius. Jika suatu garis memotong lingkaran di dua titik yaitu A dan B, maka

$$\frac{|\beta - m\alpha - c|}{\sqrt{1+m^2}} < r.$$

Dengan menggunakan bentuk normal dari garis, maka titik tengah segmen garis AB dapat ditentukan dengan menyelesaikan solusi dari

$$\frac{x-\alpha}{m} = \frac{y-\beta}{-1} = \frac{-(m\alpha + c - \beta)}{1+m^2}.$$

Kasus kedua adalah ketika garis $L \equiv y - mx - c = 0$ menyinggung lingkaran. Hal ini terjadi jika

$$\frac{|\beta - m\alpha - c|}{\sqrt{1+m^2}} = r.$$

Titik temu antara garis dan lingkaran dapat ditentukan dengan menyelesaikan solusi dari

$$\frac{x-\alpha}{m} = \frac{y-\beta}{-1} = \frac{-(m\alpha + c - \beta)}{1+m^2}.$$

Kasus selanjutnya adalah suatu garis $L \equiv y - mx - c = 0$ tidak menyentuh lingkaran, yaitu ketika

$$\frac{|\beta - m\alpha - c|}{\sqrt{1+m^2}} > r.$$

Kasus terakhir adalah suatu garis $L \equiv y - mx - c = 0$ melalui titik pusat, yang hanya terjadi jika

$$\frac{|\beta - m\alpha - c|}{\sqrt{1+m^2}} = 0.$$

Kondisi garis singgung

Suatu garis $y = mx + c$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ jika dan hanya jika $c^2 = r^2(1+m^2)$. Titik yang dilalui oleh garis dan lingkaran tersebut adalah $\left(-\frac{mr^2}{c}, \frac{r^2}{c}\right)$. Selanjutnya dimisalkan, garis yang akan menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ adalah garis $ax + by + c = 0$. Maka garis $ax + by + c = 0$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ jika dan hanya jika $c^2 = r^2(a^2 + b^2)$. Dalam hal ini, titik temu antara garis dan lingkaran tersebut adalah $\left(-\frac{ar^2}{c}, -\frac{br^2}{c}\right)$. Dalam kasus lingkaran yang tidak berpusat di titik $(0,0)$, dapat melakukan pergeseran dengan vektor yang bersesuaian dengan arah dari titik $(0,0)$ ke titik pusat.

Selanjutnya adalah persamaan garis singgung pada lingkaran yang melalui satu titik. Jika persamaan lingkarannya adalah $x^2 + y^2 = r^2$ dan melalui titik (x_1, y_1), maka garis singgungnya adalah garis

$$x_1 x + y_1 y = r^2.$$

Jika persamaan lingkarannya adalah $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ dan melalui titik (x_1, y_1), maka garis singgungnya adalah garis

$$x_1x + y_1y + \frac{1}{2}a(x_1 + x) + \frac{1}{2}b(y_1 + y) + c = 0$$

.

Selanjutnya adalah persamaan garis singgung pada lingkaran yang memiliki gradien tertentu. Jika persamaan lingkarannya adalah $x^2 + y^2 = r^2$, maka garis singgungnya yang bergradien m adalah

$$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}.$$

Lalu jika persamaan lingkarannya adalah $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, maka garis singgungnya yang bergradien m adalah

$$(y - k) = m(x - h) \pm r\sqrt{m^2 + 1},$$

dengan $h = -\frac{1}{2}a$, $k = -\frac{1}{2}b$, dan $r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}a\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}b\right)^2 - c}$.

Kuasa lingkaran

Kuasa lingkaran dibagi menjadi tiga yaitu kuasa titik terhadap lingkaran, garis kuasa, dan titik kuasa. Kuasa titik merupakan kedudukan suatu titik terhadap lingkaran. Garis kuasa menyatakan kedudukan antara dua lingkaran. Titik kuasa merupakan suatu titik yang menyatakan kedudukan antar lingkaran (lebih dari dua lingkaran).

Misal diberikan suatu lingkaran L yang berpusat di titik M. Lalu diletakkan titik P yang terletak di luar lingkaran L. Dari titik P dibentuk segmen garis yang memotong lingkaran di titik A_1 dan B_1 seperti pada Gambar 3.5. Suatu kuasa titik P terhadap lingkaran L didefinisikan sebagai perkalian panjang PA_1 dan PB_1, ditulis

$$K(P) = |PA_1| \cdot |PB_1|.$$

Misal C adalah titik singgung garis yang melalui P. Perhatikan segitiga $\triangle PB_1C$

dan segitiga $\triangle PCA_1$, bahwa

$$\angle B_1PC = \angle CPA_1$$

dan

$$\angle PA_1C = \angle PCB_1 = \frac{1}{2}\angle AMC.$$

Karena segitiga $\triangle\ PA_1C$ dan $\triangle\ PCB_1$ mempunyai dua pasang sudut yang berukuran sama, maka kedua segitiga tersebut adalah sebangun. Akibatnya terdapat hubungan perbandingan

$$\frac{|PA_1|}{|PC|} = \frac{|PC|}{|PB_1|}$$

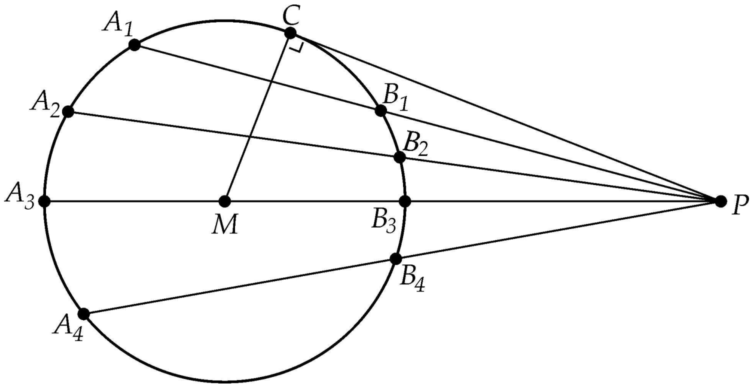
atau

$$|PA_1| \cdot |PB_1| = PC^2.$$

Sehingga diperoleh

$$K(P) = PC^2.$$

Perhatikan bahwa $|PC|$ merupakan panjang garis singgung dari titik P ke titik singgung di lingkaran. Dengan kata lain, kuasa titik P terhadap lingkaran L adalah kuadrat panjang garis singgung lingkaran dari titik P ke titik singgungnya.



Gambar 3.5: Ilustrasi titik di luar lingkaran

Misal melalui titik P ditarik lagi garis-garis yang memotong lingkaran selain di titik A_1 dan B_1. Misal titik-titik potongnya adalah titik-titik A_i dan B_i, untuk $i = 2, 3, 4$. Maka berlaku

$$K(P) = PC^2 = |PA_1| \cdot |PB_1| = |PA_2| \cdot |PB_2| = |PA_3| \cdot |PB_3| = |PA_4| \cdot |PB_4|.$$

Misal lingkaran L berjari-jari r. Jika segmen garis yang melalui titik P dan titik pusat M, juga melalui dua titik A_k dan B_k, dengan $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, maka

$$K(P) = |PA_k| \cdot |PB_k| = (|PM| - r)(|PM| + r) = |PM|^2 - r^2.$$

Dalam hal ini, nilai $|PM|^2 - r^2$ juga didefinisikan sebagai kuasa titik P terhadap lingkaran L.

Selanjutnya, dimisalkan titik P berada pada posisi (x_1, y_1). Jika persamaan lingkaran L adalah $L \equiv x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ dengan pusat $M\left(-\frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}b\right)$ dan kuadrat jai-jarinya adalah $r^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - c$, maka kuasa titik $P(x_1, y_1)$ terhadap lingkaran L adalah

$$\begin{aligned} K(P) = |PM|^2 - r^2 &= \left(x_1 + \frac{1}{2}a\right)^2 + \left(y_1 + \frac{1}{2}b\right)^2 - r^2 \\ &= x_1^2 + y_1^2 + ax_1 + by_1 + c. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Sehingga, kuasa titik $P(x_1, y_1)$ terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ juga dapat diperoleh dengan cara mensubstitusi variabel x dan y pada persamaan lingkaran dengan nilai x_1 dan y_1.

Berdasarkan Persamaan 3.1, jika titik P berada di luar lingkaran L, maka kuasa titik P terhadap lingkaran tersebut bernilai positif. Hal ini dikarenakan panjang garis singgung dari titik P ke titik singgungnya adalah bilangan positif. Jika titik P berada tepat pada lingkaran, maka kuasa titik P terhadap lingkaran tersebut adalah nol. Namun jika titik P berada di dalam lingkaran L, maka kuasa titik P terhadap lingkaran bernilai negatif. Dalam hal ini, panjang garis singgungnya bernilai imajiner dan sesuai dengan kenyataan bahwa secara geometri sebuah titik di dalam lingkaran tidak bisa dikonstruksi garis singgungnya.

Misal diberikan dua buah lingkaran. Perhatikan bahwa ada suatu titik yang memiliki kuasa sama terhadap dua lingkaran tersebut. Himpunan titik-titik yang memiliki kuasa yang sama terhadap dua lingkaran tertentu berupa garis lurus yang disebut garis kuasa. Misalkan persamaan kedua lingkaran tersebut adalah

$$\begin{aligned} L_1 &\equiv x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ L_2 &\equiv x^2 + y^2 + a_2 x + b_2 y + c_2 = 0. \end{aligned}$$

Jika titik $P(x_1, y_1)$ memiliki kuasa yang sama terhadap lingakran L_1 dan L_2, maka

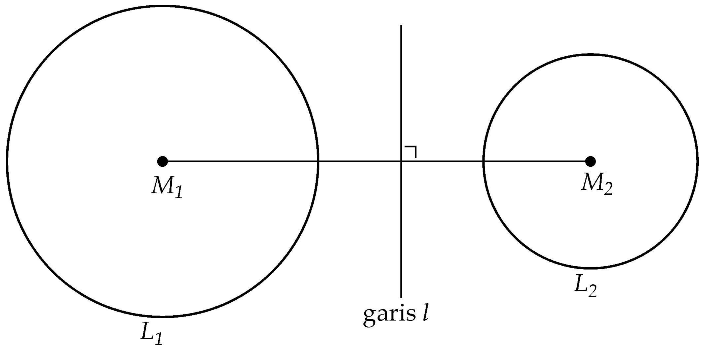
$$\begin{aligned} K(P) &= K(P) \\ x_1^2 + y_1^2 + a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 &= x_1^2 + y_1^2 + a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 \\ (a_1 - a_2)x_1 + (b_1 - b_2)y_1 + c_1 - c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Hal ini akan berlaku pada setiap titik yang kuasanya terhadap kedua lingkaran itu adalah sama. Dengan demikian, garis kuasa yang merupakan tempat kedudukan titik-titik yang memiliki kuasa yang sama terhadap lingkaran L_1 dan L_2 adalah sebagai berikut

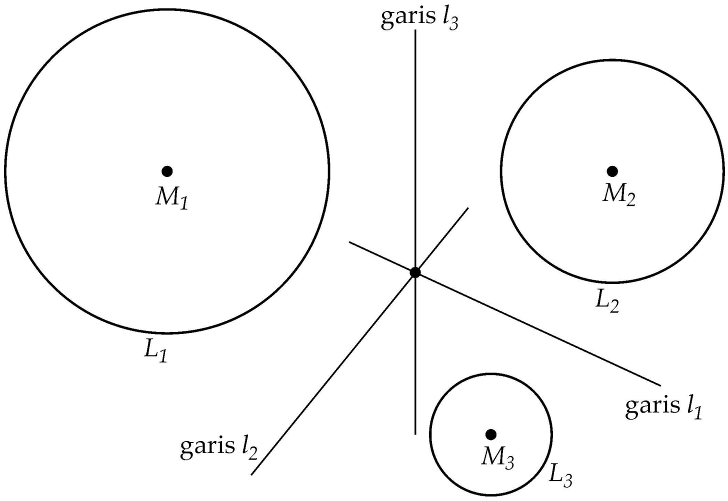
$$\begin{aligned} l &\equiv L_1 - L_2 \\ &\equiv (a_1 - a_2)x_1 + (b_1 - b_2)y_1 + c_1 - c_2 = 0. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa garis kuasa memiliki gradien $m_1 = -\dfrac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2}$. Titik pusat lingkaran L_1 dan L_2 masing-masing adalah $M_1\left(-\frac{1}{2}a_1, -\frac{1}{2}b_1\right)$ dan $M_2\left(-\frac{1}{2}a_2, -\frac{1}{2}b_2\right)$. Gradien garis yang menghubungkan antara titik pusat L_1 dan titik pusat L_2 adalah $m_2 = \dfrac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}$. Karena $m_1 \cdot m_2 = -1$, maka garis kuasa dua buah lingkaran akan tegak lurus dengan garis penghubung titik-titik pusat kedua lingkaran tersebut, seperti pada Gambar 3.6.

Selanjutnya, misal diberikan tiga buah garis yang titik-titik pusatnya tidak berada pada satu garis lurus (konsentris), yaitu L_1, L_2, dan L_3 seperti pada Gambar 3.7. Perhatikan bahwa ada satu titik yang memiliki kuasa yang sama terhadap ketiga lingkaran tersebut. Ketiga lingkaran tersebut mempunyai tiga garis kuasa yang saling berpotongan di satu titik. Titik tersebut disebut titik kuasa.



Gambar 3.6: Ilustrasi garis kuasa dari dua lingkaran



Gambar 3.7: Ilustrasi titik kuasa dari tiga lingkaran

Misalkan ingin menentukan titik kuasa dari lingkaran

$$L_1 \equiv x^2 + y^2 + 3x + 5y - 7 = 0$$
$$L_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x + 4y - 6 = 0$$
$$L_3 \equiv x^2 + y^2 + 4x - 2y - 2 = 0.$$

Maka garis kuasa lingkaran L_1 dan L_2 adalah

$$L_1 - L_2 \Rightarrow 5x + y - 1 = 0.$$

dan garis kuasa lingkaran L_1 dan L_3 adalah

$$L_1 - L_3 \Rightarrow x - 7y + 5 = 0.$$

Diperoleh solusi penyelesaiannya yaitu $x = \frac{1}{18}$ dan $y = \frac{13}{18}$. Dengan demikian, koordinat titik kuasa ketiga lingkaran tersebut adalah $\left(\frac{1}{18}, \frac{13}{18}\right)$.

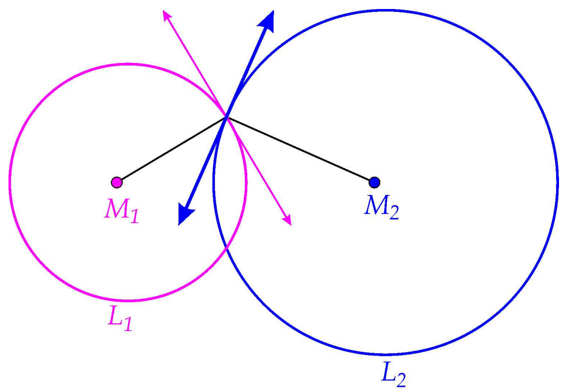
Dua lingkaran yang berpotongan

Sudut antara dua buah lingkaran didefinisikan sebagai sudut yang dibentuk oleh garis-garis singgung pada kedua lingkaran itu di titik potongnya. Dua lingkaran dikatakan saling memotong tegak lurus jika sudut antara garis-garis singgung di titik potongnya adalah 90°. Perhatikan Gambar 3.8. Misalkan dua lingkaran tersebut adalah

$$L_1 \equiv x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$L_2 \equiv x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Kemudian perhatikan Gambar 3.9 bahwa r_1 tegak lurus dengan r_2, sehingga $\triangle M_1M_2P$ adalah segitiga siku-siku. Dalam hal ini, $M_1\left(-\frac{1}{2}a_1, -\frac{1}{2}b_1\right)$, $M_2\left(-\frac{1}{2}a_2, -\frac{1}{2}b_2\right)$, $r_1 = \sqrt{\frac{1}{4}a_1^2 + \frac{1}{4}b_1^2 - c_1}$, dan $r_2 = \sqrt{\frac{1}{4}a_2^2 + \frac{1}{4}b_2^2 - c_2}$. Sehingga berlaku

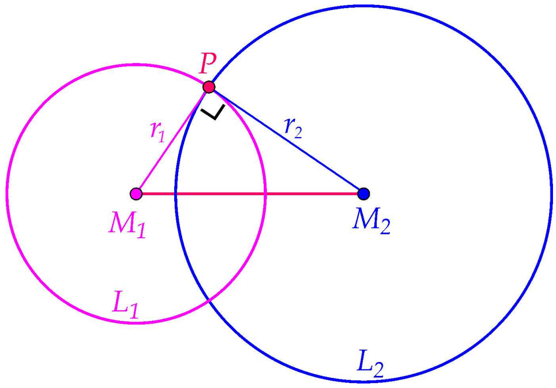
$$|M_1M_2|^2 = r_1^2 + r_2^2.$$



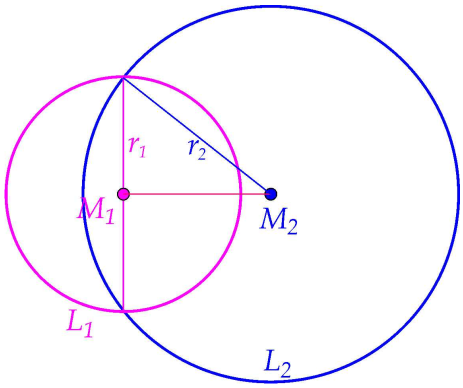
Gambar 3.8: Ilustrasi titik potong dari dua lingkaran

Sebuah lingkaran juga dapat memotong lingkaran lain sedemikian sehingga membagi dua sama besar lingkaran tersebut. Perhatikan Gambar 3.10. Jika lingkaran L_2 membagi dua sama besar lingkaran L_1, maka dalam $\triangle M_1PM_2$ berlaku

$$|M_1M_2|^2 = r_2^2 - r_1^2.$$



Gambar 3.9: Ilustrasi dua lingkaran berpotongan tegak lurus



Gambar 3.10: Ilustrasi lingkaran membagi dua sama besar

3.1 Latihan

1. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di titik $(-2, 3)$ dan memiliki radius $r = 5$!

2. Tentukan titik pusat dan radius jika persamaan lingkarannya adalah $3x^2 + 3y^2 - 8x - 10y + 3 = 0$!

3. Buktikan bahwa titik-titik $(1, 0)$, $(2, -7)$, $(8, 1)$, dan $(9, -6)$ terletak pada lingkaran!

4. Jika suatu persegi dibentuk oleh garis $x = 2$, $x = 3$, $y = 1$, dan $y = 2$. Tentukan persamaan lingkaran yang diameternya adalah diagonal dari persegi tersebut!

5. Jika $(4, 1)$ adalah titik ujung diameter dari persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$, tentukan titik ujung diameter lainnya!

6. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik $(1, 1)$, $(2, -1)$, dan $(3, 2)$!

7. Tentukan posisi titik $A(1, 2)$ dan titik $B(6, 0)$ terhadap lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$!

8. Diberikan titik-titik $P_1(2, 3)$, $P_2(1, 0)$, dan $P_3(6, -1)$ serta sebuah lingkaran dengan persamaan $S \equiv x^2 + y^2 - 10x + 24y + 144 = 0$. Tentukan jarak maksimum dan minimum antara:

   a) titik P_1 dan lingkaran S

   b) titik P_2 dan lingkaran S

   c) titik P_3 dan lingkaran S.

9. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ yang melalui titik $(2, 0)$!

10. Tentukan kedudukan titik $(1, 1)$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = 1$!

11. Tentukan garis kuasa dari lingkaran $L_1 \equiv (x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 16$ dan $L_2 = x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$!

12. Tentukan garis kuasa dari lingkaran $(x-2)^2+y^2 = 4$ dan $x^2+y^2 = 1$! Apakah garis kuasanya memotong kedua lingkaran?

13. Tentukan koordinat dari titik kuasa lingkaran-lingkaran berikut:

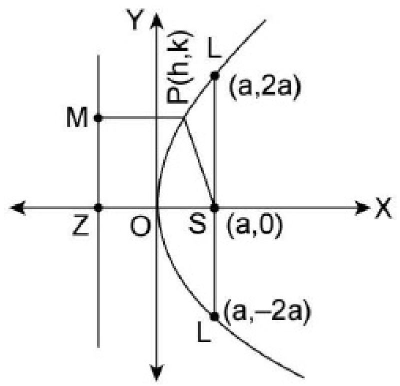
$$L_1 \equiv x^2 + y^2 + x + y - 14 = 0$$
$$L_2 \equiv x^2 + y^2 = 13$$
$$L_3 \equiv x^2 + y^2 + 3x - 2y - 26 = 0.$$

14. Tentukan persamaan lingkaran yang memotong tegak lurus lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 2x + 5y - 5 = 0$, melalui titik $(6, 1)$, dan pusatnya terletak pada garis $g \equiv 9x + 4y = 47$!

BAB 4

Parabola

Parabola didefinisikan sebagai tempat kedudukan titik-titik $P(h,k)$ pada bidang sedemikian hingga titik itu berjarak sama dari suatu titik fokus dan garis tertentu yang tidak memuat fokus (disebut garis direktrik). Misalkan posisi titik fokus berada pada sumbu x dan dengan garis direktrik tegak lurus sumbu x seperti pada Gambar 4.1. Sedangkan sumbu y diletakkan di tengah-tengah segmen garis hubung dari titik fokus S ke garis direktrik. Misalkan jarak antara garis direktrik dengan fokus adalah $2a$, maka koordinat titik fokusnya adalah $S(a,0)$ dan persamaan garis direktrik $d \equiv x = -a, a \neq 0$.

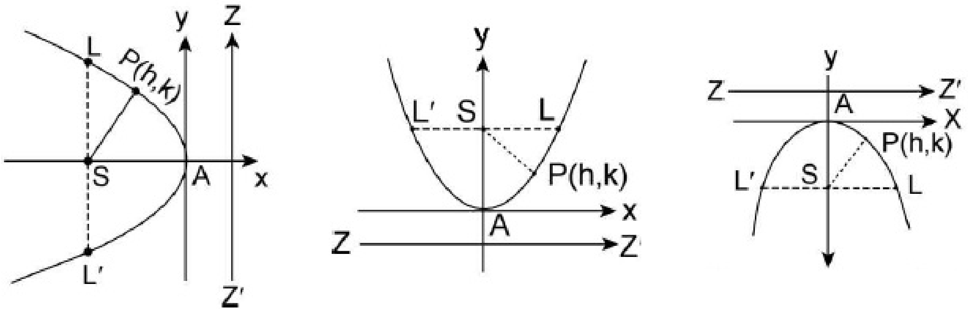


Gambar 4.1: *Right-handed* parabola

Jika titik $P(h,k)$ adalah sebarang titik pada parabola, maka berdasarkan definisi parabola diperoleh hubungan

$$\begin{aligned} SP = PM = a + h &\Rightarrow \sqrt{(h-a)^2 + k^2} = a + h \\ &\Rightarrow a^2 + h^2 - 2ah + k^2 = a^2 + h^2 + 2ah \\ &\Rightarrow k^2 = 4ah. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, kedudukan titik P berada pada kurva $y^2 = 4ax$. Persamaan parabola ini adalah $y^2 = 4ax^2$ untuk $a > 0$. Titik puncaknya adalah $(0,0)$ dengan sumbu simetrisnya adalah sumbu x atau garis $y = 0$. Garis direktriknya adalah garis $x + a = 0$.



(a) *Right-handed* parabola (b) *Upwards* parabola (c) *Downwards* parabola

Gambar 4.2: Bentuk parabola standar

Secara umum, ada 4 parabola standar yaitu *right-handed* parabola, *left-handed* parabola, *upwards* parabola, dan *downwards* parabola, yang masing-masing diilustrasikan pada Gambar 4.1, Gambar 4.2a, Gambar 4.2b, dan Gambar 4.2c. Adapun sifat-sifat parabola ini dirangkum dalam Tabel 4.1.

Tabel 4.1: Sifat-sifat Parabola Standar

Diagram	Gambar 4.1	Gambar 4.2a	Gambar 4.2b	Gambar 4.2c
Persamaan	$y^2 = 4ax$	$y^2 = -4ax$	$x^2 = 4ay$	$x^2 = -4ay$
Titik fokus	$(a, 0)$	$(-a, 0)$	$(0, a)$	$(0, -a)$
Titik puncak	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
Garis direktrik	$x + a = 0$	$x - a = 0$	$y + a = 0$	$y - a = 0$
Sumbu simetris	$y = 0$	$y = 0$	$x = 0$	$x = 0$
Garis singgung di titik puncak	$x = 0$	$x = 0$	$y = 0$	$y = 0$

4.1 Bentuk Parabola Tak Standar

Ada beberapa bentuk parabola yang tidak standar. Bentuk pertama yang dikenalkan adalah parabola yang terbuka ke sisi kanan. Misalkan titik $P(x, y)$ adalah sebarang titik pada parabola, dengan titik puncak di $A(\alpha, \beta)$ dan sumbu simetrisnya sejajar dengan sumbu x seperti pada Gambar 4.3a. Perhatikan bahwa

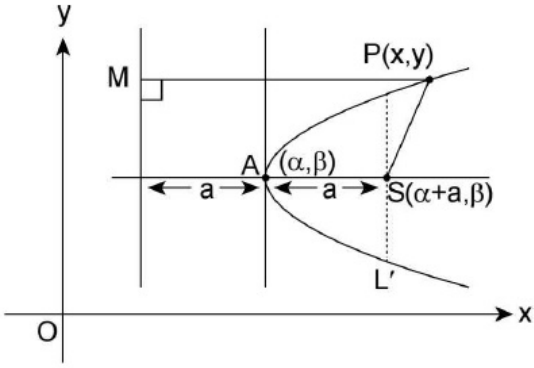
$$\begin{aligned} PS &= PM \\ (x-\alpha-a)^2 + (y-\beta)^2 &= (x-\alpha+a)^2 \\ (x-\alpha)^2 + a^2 - 2a(x-\alpha) + (y-\beta)^2 &= (x-\alpha)^2 + a^2 + 2a(x-\alpha) \\ (y-\beta)^2 &= 4a(x-\alpha). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Jika dibandingkan dengan bentuk standar $y^2 = 4ax$, maka cukup mengganti variabel x dengan $(x - \alpha)$ dan variabel y dengan $(y - \beta)$. Titik fokus parabola ini adalah $(\alpha + a, \beta)$ dengan titik puncak (α, β). Persamaan sumbu simetris dan persamaan garis singgung di titik puncak masing-masing adalah $y - \beta = 0$ dan $x - \alpha = 0$. Persamaan garis direktrik parabola ini adalah $x = \alpha - a$.

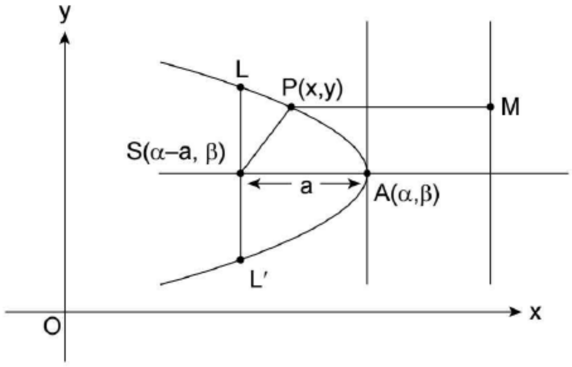
Bentuk kedua dari parabola tak standar adalah parabola yang terbuka ke sisi kiri seperti pada Gambar 4.3b. Dalam hal ini,

$$\begin{aligned} PS &= PM \\ [x-(\alpha-a)]^2 + (y-\beta)^2 &= ((\alpha-x)+a)^2 \\ (x-\alpha)^2 + a^2 + 2(x-\alpha)a + (y-\beta)^2 &= (\alpha-x)^2 + a^2 + 2a(\alpha-x) \\ (y-\beta)^2 &= 4a(\alpha-x) \\ (y-\beta)^2 &= -4a(x-\alpha). \end{aligned} \tag{4.2}$$

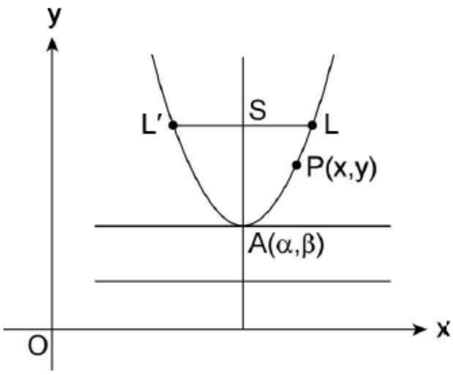
Titik fokus parabola ini adalah $(\alpha - a, \beta)$ dengan titik puncaknya adalah (α, β). Sumbu simetris parabola ini adalah $y - \beta = 0$. Persamaan garis singgung di titik puncak dan persamaan garis direktrik parabola ini masing-masing adalah $x - \alpha = 0$ dan $x = \alpha + a$.



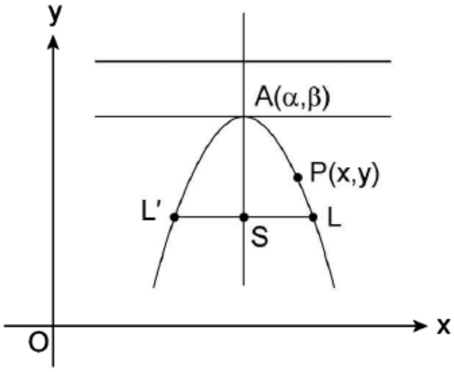
(a) *Parbola opening towards right hand side*



(b) *Parbola opening towards left hand side*



(c) *Parbola opening upwards*



(d) *Parbola opening downwards*

Gambar 4.3: Bentuk parabola tak standar

Bentuk selanjutnya dari parabola tak standar adalah parabola yang terbuka ke atas seperti pada Gambar 4.3c. Kurva parabola ini memiliki persamaan

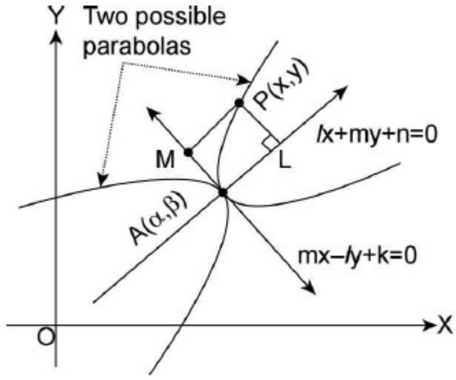
$$(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta) \tag{4.3}$$

Titik fokus parabola ini adalah $(\alpha, \beta + a)$ dengan titik puncaknya adalah (α, β). Sumbu simetris parabola ini adalah $x - \alpha = 0$. Persamaan garis singgung di titik puncak dan persamaan garis direktrik parabola ini masing-masing adalah $y - \beta = 0$ dan $y = \beta - a$.

Bentuk terakhir dari parabola tak standar adalah parabola yang terbuka ke bawah seperti pada Gambar 4.3d. Kurva parabola ini memiliki persamaan

$$(x-\alpha)^2 = -4a(y-\beta) \tag{4.4}$$

Titik fokus parabola ini adalah $(\alpha, \beta - a)$ dengan titik puncaknya adalah (α, β). Sumbu simetris parabola ini adalah $x - \alpha = 0$. Persamaan garis singgung di titik puncak dan persamaan garis direktrik parabola ini masing-masing adalah $y - \beta = 0$ dan $y = \beta + a$.



Gambar 4.4: Parabola yang diketahui garis singgung dan sumbu simetrisnya

Misalkan akan ditentukan persamaan parabola yang persamaan sumbu simetrisnya adalah $lx + my + n = 0$, dan garis singgung di titik puncaknya adalah $mx - ly + k = 0$, seperti pada Gambar 4.4. Lalu misalkan titik puncaknya adalah (α, β), dan $P(x, y)$ adalah sebarang titik pada parabola. Maka persamaan parabola tersebut adalah

$$\begin{aligned}(PL)^2 &= 4a(PM)\\ \left(\frac{lx+my+n}{\sqrt{l^2+m^2}}\right)^2 &= 4a\frac{|mx-ly+k|}{\sqrt{m^2+l^2}}\\ (lx+my+n)^2 &= \pm 4a(mx-ly+k)\sqrt{l^2+m^2}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Dalam hal ini, terdapat dua kemungkinan persamaan parabola yang diperoleh.

Persamaan parabola juga dapat ditentukan jika diketahui titik fokusnya. Misalkan $S(x_0, y_0)$ adalah titik fokus parabola dan garis $lx+my+n = 0$ adalah persamaan garis direktriknya. Lalu misalkan $P(x, y)$ adalah sebarang titik pada parabola seperti sehingga seperti pada Gambar 4.5. Sehingga

$$
\begin{aligned}
PS &= PM \\
\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} &= \frac{|lx+my+n|}{\sqrt{l^2+m^2}} \\
(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 &= \frac{(lx+my+n)^2}{(l^2+m^2)} \\
(x^2+y^2-2xx_0-2yy_0+x_0^2+y_0^2)(l^2+m^2) &= l^2x^2+m^2y^2+n^2+2lmxy+2mny+2lnx,
\end{aligned}
$$

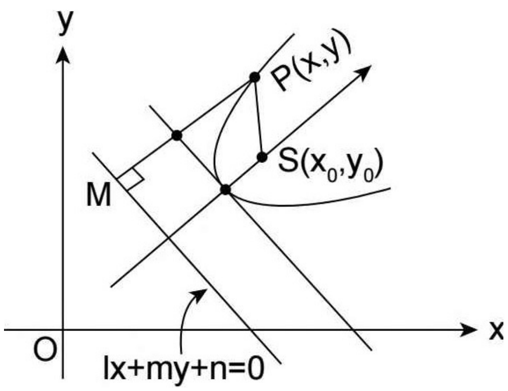
lalu diperoleh

$$
\begin{aligned}
m^2x^2+l^2y^2+x[-2x_0(l^2+m^2)-2ln]+y[-2y_0(l^2+m^2)-2mn]-2lmxy+c=0 \\
m^2x^2+l^2y^2+2gx+2fy-2lmxy+c=0 \\
(mx-ly)^2+2gx+2fy+c=0,
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

dengan c adalah konstanta. Persamaan 4.6 dapat disederhanakan menjadi

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0. \tag{4.7}$$

Konsekuensinya, suatu persamaan berderajat dua bahwa dapat dikatakan sebuah persamaan parabola jika $h^2=ab$ dan $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2 \neq 0$.



Gambar 4.5: Parabola yang diketahui titik fokusnya

Sebagai contoh, akan ditentukan persamaan parabola yang memiliki titik fokus $S(-1,-2)$ dan garis direktrik $x-2y+3=0$. Jika $P(x,y)$ adalah sebarang titik pada kurva parabola dengan titik M terletak pada garis direktriknya, maka

$$
\begin{aligned}
SP &= PM \\
(SP)^2 &= (PM)^2 \\
(x+1)^2 + (y+2)^2 &= \left(\frac{|x - 2y + 3|}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2}} \right)^2 \\
5(x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5) &= (x^2 + 4y^2 - 4xy + 6x - 12y + 9) \\
4x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 32y + 16 = 0.
\end{aligned}
$$

4.2 Persamaan Garis Singgung Pada Parabola

Adapun persamaan garis singgung untuk parabola standar dapat dilihat pada Tabel 4.2. Sedangkan garis singgung untuk parabola dengan titik puncak (h, k) dapat dilihat pada Tabel 4.3.

Tabel 4.2: Persamaan Garis Singgung Pada Parabola Standar

Persamaan	Melalui titik (x_1, y_1)	Bergradien m
$y^2 = 4ax$	$yy_1 = 2a(x + x_1)$	$y = mx + \frac{a}{m}$
$y^2 = -4ax$	$yy_1 = -2a(x + x_1)$	$y = mx - \frac{a}{m}$
$x^2 = 4ay$	$xx_1 = 2a(y + y_1)$	$y = mx - am^2$
$x^2 = -4ay$	$xx_1 = -2a(y + y_1)$	$y = mx + am^2$

Tabel 4.3: Persamaan Garis Singgung Pada Parabola Tak Standar

Persamaan	Melalui titik (x_1, y_1)	Bergradien m
$(y-k)^2 = 4a(x-h)$	$(y-y_1)(y-k) = 2a(x-x_1)$	$y = mx - mh + k + \frac{a}{m}$
$(y-k)^2 = -4a(x-h)$	$(y-y_1)(y-k) = -2a(x-x_1)$	$y = mx - mh + k - \frac{a}{m}$
$(x-h)^2 = 4a(y-k)$	$(x-x_1)(x_1-h) = 2a(y-y_1)$	$y = mx - mh + k - am^2$
$(x-h)^2 = -4a(y-k)$	$(x-x_1)(x_1-h) = -2a(y-y_1)$	$y = mx - mh + k + am^2$

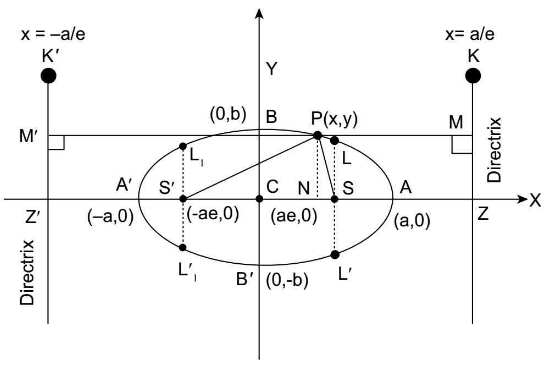
4.3 Latihan

1. Buatlah sketsa grafik untuk parabola yang memiliki persamaan $y^2 = -8x$!
2. Tentukan koordinat titik fokus dan garis direktrik jika diketahui persamaan parabola $y^2 = 10x$!
3. Tentukan persamaan parabola jika diketahui titik fokus $(4, 8)$ dan garis direktrik $x = -4$!
4. Tentukan persamaan parabola dengan puncak titik $(0, 0)$ dan melalui titik $(20, 20)$, jika sumbu simetris parabola berimpit dengan sumbu x!
5. Tentukan titik fokus dari parabola $(y - 1)^2 = 12(x - 2)$!
6. Tentukan titik puncak dari parabola $y^2 + 6x - 2y + 13 = 0$!
7. Tentukan persamaan garis direktrik dari parabola $y^2 + 4y + 4x + 2 = 0$!
8. Tentukan titik puncak, titik fokus, dan garis direktrik dari parabola yang memiliki persamaan $y^2 - 2x - 2y + 5 = 0$!
9. Buktikan bahwa $x^2 - 2xy + y^2 + 3x + 2 = 0$ merupakan persamaan parabola! Lalu buatlah grafiknya menggunakan Geogebra!
10. Tentukan persamaan parabola yang memiliki titik fokus $(4, -3)$ dan titik puncak $(4, -1)$ dengan menggunakan Persamaan 4.6!
11. Tentukan persamaan garis singgung parabola $y^2 = -16x$ yang sejajar garis $x - y = 3$!
12. Tentukan persamaan garis singgung parabola $y^2 + 2y + 6x + 4 = 0$ yang tegak lurus garis $x + 2y = 6$!
13. Tentukan persamaan garis singgung parabola $y^2 - 4x = 0$ yang melalui titik $(-2, -1)$!
14. Tentukan persamaan garis singgung parabola $(y - 2)^2 = -12(x + 1)$ yang melalui titik $(-1, -1)$!

BAB 5

Elips

Pada Bab 4, diketahui bahwa kurva parabola didefinisikan sebagai titik-titik yang rasio (perbandingan) antara jarak dengan titik tetap (fokus) dan jarak dengan garis tetap (garis direktrik) adalah 1. Namun pada Bab 5 ini, rasionya kurang dari 1, artinya titik-titik kurva lebih dekat dengan titik fokus dibanding dengan garis direktrik. Elips adalah tempat kedudukan titik-titik yang bergerak dalam bidang sehingga rasio antara jarak dari titik fokus dan jarak dari garis direktrik selalu konstan, yaitu $e < 1$.



Gambar 5.1: Elips standar jenis ke 1

Perhatikan Gambar 5.1. Misalkan S adalah titik fokus, ZM garis direktrik elips, dan P adalah sebarang titik pada elips sedemikian sehingga PM tegak lurus pada direktrik, maka $\dfrac{|SP|}{|PM|} = e < 1$. Lalu gambarlah $SZ \perp$ pada direktrik ZM dan bagilah segmen garis SZ dengan rasio $e : 1 (e < 1)$. Misalkan A dan A' masing-

masing adalah titik internal dan titik eksternal. Maka

$$|SA| = e|AZ| \tag{5.1}$$
$$|SA'| = e|A'Z|. \tag{5.2}$$

Jelas bahwa A dan A' akan terletak pada kurva elips. Misalkan panjang segmen AA' adalah $2a$, lalu ambil titik C sebagai titik tengahnya,

$$\therefore |CA| = |CA'| = a.$$

Misalkan titik $P(x, y)$ adalah sebarang titik pada elips dengan sumbu koordinat CA dan CB. Kemudian, ketika Persamaan 5.1 dan Persamaan 5.2 dijumlahkan maka diperoleh

$$\begin{aligned}
|SA| + |SA'| &= e(|AZ| + |A'Z|) \\
|AA'| &= e(|CZ| - |CA| + |CA'| + |CZ|) \text{ (dari Gambar 5.1)} \\
|AA'| &= e(2|CZ|) \ \ (\because |CA| = |CA'|) \\
2a &= 2e|CZ| \\
|CZ| &= \frac{a}{e}.
\end{aligned}$$

Oleh karena itu, direktrik ZM adalah garis $x = |CZ| = \frac{a}{e}$ atau $\frac{a}{e} - x = 0$. Dengan melakukan pengurangan Persamaan 5.1 dari Persamaan 5.2, diperoleh

$$\begin{aligned}
|SA'| - |SA| &= e(|A'Z| - |AZ|) \\
(|CA'| + |CS|) - (|CA| - |CS|) &= e|AA'| \\
2|CS| &= e|AA'| \ \ (\because |CA| = |CA'|) \\
2|CS| &= e(2a) \\
|CS| &= ae.
\end{aligned}$$

Oleh karena itu, titik fokusnya adalah $(ae, 0)$.

Lalu gambarlah $PM \perp MZ$. Berdasarkan definisi bahwa $\frac{|SP|}{|PM|} = e$, diperoleh

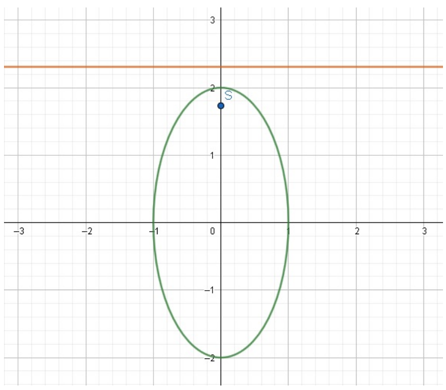
$$\begin{aligned} |SP|^2 &= e^2|PM|^2 \\ (x-ae)^2 + (y-0)^2 &= e^2\left(\frac{a}{e} - x\right)^2 \\ (x-ae)^2 + y^2 &= (a-ex)^2 \\ x^2 + a^2e^2 - 2aex + y^2 &= a^2 - 2aex + e^2x^2 \\ x^2(1-e^2) + y^2 &= a^2(1-e^2) \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} &= 1. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Jika $b^2 = a^2(1-e^2) = |OB|^2$, maka Persamaan 5.3 menjadi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Sumbu mayor untuk Gambar 5.1 adalah AA' dengan panjang $2a$. Sedangkan sumbu minornya adalah BB' dengan panjang $2b$. Titik pusat elips adalah titik potong antara sumbu mayor dan sumbu minor. Dalam kasus elips standar, titik pusatnya adalah titik asal $O(0,0)$. Titik potong kurva elips dengan sumbu mayornya disebut titik puncak.

Perhatikan kembali Gambar 5.1. Ada titik fokus ke dua dan garis direktrik ke dua. Pada sisi negatif sumbu mayor, ambil titik S' sehingga $|SC| = |S'C| = ae$ dan ambil titik Z' sedemikian sehingga $|ZC| = |CZ'| = a/e$. Dalam hal ini, kedudukan titik fokus ke dua adalah $(-ae, 0)$ dan garis direktrik ke dua adalah $x = -\frac{a}{e}$.



Gambar 5.2: Elips standar jenis ke 2 beserta titik fokus dan garis direktriknya

Elips standar jenis kedua adalah elips yang sumbu mayornya sepanjang sumbu y dan sumbu minornya sepanjang sumbu x, seperti pada Gambar 5.2. Dengan persamaan kurvanya adalah

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Baik elips standar jenis pertama maupun elips standar jenis kedua, bahwa selalu dimisalkan $a > b$. Sehingga selalu

$$b^2 = a^2(1 - e^2).$$

Berdasarkan Teorema Pythagoras, diperolehlah hubungan dari panjang titik asal $O(0,0)$ ke titik ujung sumbu mayor (a), ke titik ujung sumbu minor (b) dan ke titik fokus (ae), yaitu

$$(ae)^2 + b^2 = a^2.$$

Nilai e untuk sebuah elips selalu $0 < e < 1$, maka

$$\begin{array}{rccc} 0 & < & e & < & 1 \\ 0 & < & e^2 & < & 1 \\ -1 & < & -e^2 & < & 0 \\ 0 & < & 1 - e^2 & < & 1 \\ 0 & < & a^2(1 - e^2) & < & a^2 \\ 0 & < & b^2 & < & a^2 \\ & & b & < & a. \end{array}$$

Jika nilai $e = 0$, maka $b^2 = a^2(1 - 0) = a^2$, lalu persamaan elips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ menjadi persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$. Oleh karena itu, $e \neq 0$. Karena $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, maka

$$\begin{aligned}
\frac{y^2}{b^2} &= 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} \\
\frac{y^2}{b^2} &= \frac{(a+x)(a-x)}{a^2} \\
\frac{|PN|^2}{b^2} &= \frac{|A'N| \cdot |AN|}{a^2} \\
\frac{|PN|^2}{|AN| \cdot |A'N|} &= \frac{b^2}{a^2} = \frac{|BC|^2}{|AC|^2}.
\end{aligned}$$

5.1 Definisi Kedua Dari Elips

Misalkan diketahui persamaan elips, yaitu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{5.4}$$

Titik fokusnya ada dua, yaitu $(ae, 0)$ dan $(-ae, 0)$. Persamaan garis direktrik MZ dan $M'Z'$ masing-masing adalah $x = \frac{a}{e}$ dan $x = \frac{-a}{e}$. Misalkan $P(x, y)$ sebarang titik pada Persamaan 5.4. Maka

$$\begin{aligned}
|SP| &= e|PM| \\
&= e|NZ| \\
&= e(|CZ| - |CN|) \\
&= e\left[\left(\frac{a}{e} - x\right)\right] \\
&= a - ex,
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
S'P &= e|PM'| \\
&= e|Z'N| \\
&= e(|CZ'| + |CN|) \\
&= e\left[\left(\frac{a}{e} + x\right)\right] \\
&= a + ex.
\end{aligned}$$

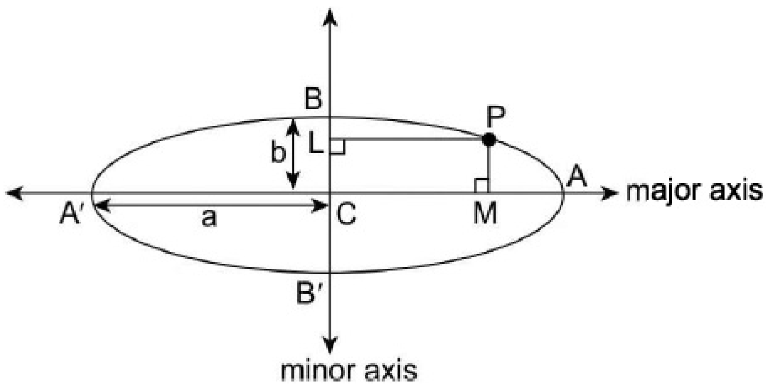
Sehingga $|SP| + |S'P| = 2a = |AA'|$. Oleh karena itu, elips dapat dikatakan sebagai kumpulan titik-titik sedemikian hingga jumlah jaraknya dari pasangan dua titik fokus yang berbeda adalah konstan.

5.2 Bentuk Elips Tak Standar

Bentuk elips tak standar diklasifikasi menjadi 2 jenis. Jenis pertama yaitu jika sumbu mayornya sejajar dengan sumbu x dan sumbu minornya sejajar dengan sumbu y, lalu titik pusat elips bukan titik asal $O(0, 0)$, seperti pada Gambar 5.3. Persamaan elips jenis ini adalah

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \qquad a > b,$$

dengan titik pusat (h, k).



Gambar 5.3: Elips tak standar jenis pertama

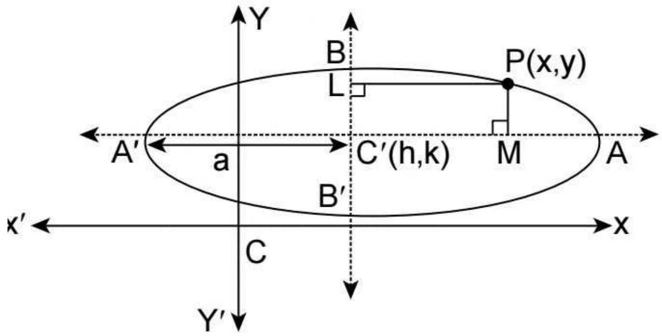
Jika P sebarang titik pada elips dengan sumbu mayor AA' san sumbu minor BB'. Lalu PM tegak lurus dengan sumbu mayor dan PL tegak lurus dengan sumbu minor. Maka diperoleh

$$\frac{|PL|^2}{a^2} + \frac{|PM|^2}{b^2} = 1 \tag{5.5}$$

Misalkan titik pusat elipsnya adalah $C(h, k)$ dengan panjang sumbu mayor $2a$ dan panjang sumbu minor $2b$ seperti pada Gambar 5.4. Dalam hal ini, $|PL| = |x - h|$

dan $|PM| = |y - k|$. Sehingga Persamaan 5.5 menjadi

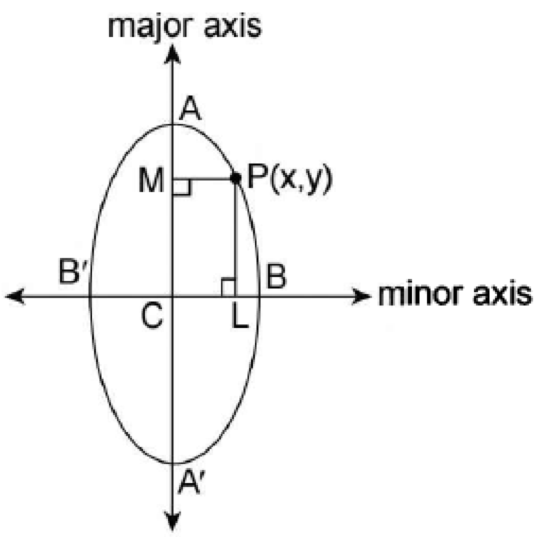
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1. \tag{5.6}$$



Gambar 5.4: Ilustrasi elips tak standar jenis pertama

Jenis kedua elips tak standar yaitu jika sumbu mayornya sejajar dengan sumbu y dan sumbu minornya sejajar dengan sumbu x, lalu titik pusat elips yaitu (h, k), seperti pada Gambar 5.5. Persamaan elips untuk jenis ini adalah

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1, \quad a > b.$$

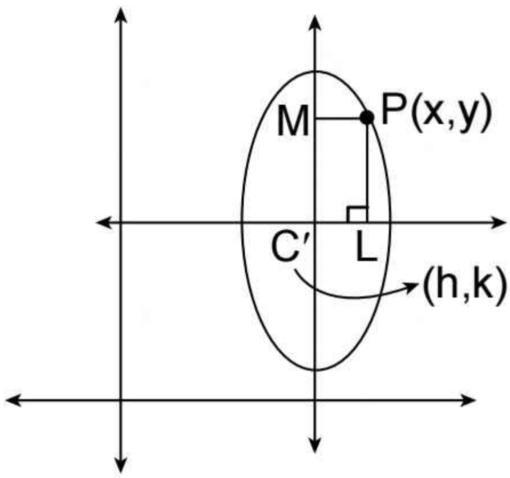


Gambar 5.5: Elips tak standar jenis kedua

Berdasarkan Gambar 5.6, diperoleh

$$\frac{|PL|^2}{a^2} + \frac{|PM|^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{|y-k|^2}{a^2} + \frac{|x-h|^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1. \tag{5.7}$$

Perhatikan bahwa baik elips tak standar jenis pertama maupun elips tak standar jenis kedua, persamaannya tidak mengandung variabel xy. Dalam hal ini, persamaannya memiliki bentuk $ax^2 + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$.



Gambar 5.6: Ilustrasi elips tak standar jenis kedua

Selanjutnya adalah elips tak standar jenis ketiga, yang dalam persamaannya terdapat variabel xy. Misalkan garis $l_1x+m_1y+n_1 = 0$ dan garis $m_1x-l_1y+n_2 = 0$ masing-masing adalah sumbu mayor dan sumbu minor seperti pada Gambar 5.7. Perhatikan bahwa

$$\frac{|PM|^2}{a^2} + \frac{|PL|^2}{b^2} = 1,$$

dengan a adalah panjang sumbu semi mayor dan b adalah panjang sumbu semi minor. Sehingga persamaannya menjadi

$$
\begin{aligned}
\frac{|PM|^2}{a^2}+\frac{|PL|^2}{b^2}&=1\\
\frac{\left(\frac{|m_1x-l_1y+n_2|}{\sqrt{m_1^2+l_1^2}}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{|l_1x+m_1y+n_1|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}}\right)^2}{b^2}&=1\\
\frac{(m_1x-l_1y+n_2)^2}{a^2(m_1^2+l_1^2)}+\frac{(l_1x+m_1y+n_1)^2}{b^2(l_1^2+m_1^2)}&=1\\
\frac{(m_1x-l_1y+n_2)^2}{a^2}+\frac{(l_1x+m_1y+n_1)^2}{b^2}&=l_1^2+m_1^2.
\end{aligned}
$$

Dalam hal ini, $b^2 = a^2(1-e^2)$. Panjang sumbu mayornya adaah $2a$, sedangkan panjang sumbu minornya adalah $2b$. Titik pusat persamaan elips ini adalah titik potong persamaan sumbu mayor dan sumbu minor. Karena persamaan garis sumbu mayor adalah $l_1x+m_1y+n_1=0$ dan persamaan garis sumbu minor adalah $m_1x-l_1y+n_2=0$, maka

$$\frac{x}{m_1n_2+l_1n_1}=\frac{y}{m_1n_1-n_2l_1}=\frac{1}{-(l_1^2+m_1^2)}.$$

Sehingga titik pusatnya adalah

$$C' \equiv \left(\frac{-(m_1n_2+l_1n_1)}{l_1^2+m_1^2},\frac{(n_2l_1-m_1n_1)}{l_1^2+m_1^2}\right).$$

Misalkan titik fokusnya dinyatakan dalam (α,β), maka jaraknya dari sumbu minor adalah ae

$$\frac{(m_1\alpha-l_1\beta+n_2)}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}}=\pm ae, \tag{5.8}$$

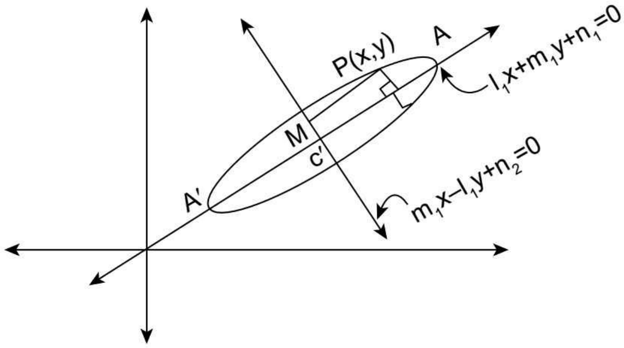
dan jarak titik (α,β) ke sumbu mayor adalah nol

$$\frac{l_1\alpha+m_1\beta+n_1}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}}=0. \tag{5.9}$$

Dengan menyelesaikan solusi Persamaan 5.8 dan Persamaan 5.9 untuk α dan β, maka diperolehlah titik fokus S dan S'. Selanjutnya adalah garis direktrik. Misalkan (x,y) adalah sebarang titik pada garis direktrik, maka jarak titiknya dari sumbu minor selalu a/e. Oleh karena itu, persamaan garis direktriknya adalah

$$\frac{(m_1x - l_1y + n_2)}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}} = \pm\frac{a}{e}.$$

Dalam hal ini, persamaannya mengandung variabel xy yaitu memiliki bentuk $ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$.



Gambar 5.7: Ilustrasi elips tak standar jenis ketiga

Sebagai contoh, akan ditentukan persamaan sumbu mayor, persamaan sumbu minor, titik pusat, titik fokus, dan garis direktrik dari persamaan elips $4(x - 3y + 2)^2 + 9(3x + y + 1)^2 = 54$. Perhatikan bahwa persamaan ini merupakan persamaan elips tak standar jenis ketiga yang dapat dilukiskan oleh Geogebra seperti pada Gambar 5.8. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
4(x-3y+2)^2 + 9(3x+y+1)^2 &= 54\\
4\left(\frac{x-3y+2}{\sqrt{1+9}}\cdot\sqrt{10}\right)^2 + 9\left(\frac{3x+y+1}{\sqrt{9+1}}\cdot\sqrt{10}\right)^2 &= 54\\
4\cdot 10\cdot\left(\frac{x-3y+2}{\sqrt{10}}\right)^2 + 9\cdot 10\left(\frac{3x+y+1}{\sqrt{10}}\right)^2 &= 54\\
\frac{40}{54}\cdot\left(\frac{x-3y+2}{\sqrt{10}}\right)^2 + \frac{90}{54}\left(\frac{3x+y+1}{\sqrt{10}}\right)^2 &= 1\\
\frac{\left(\frac{x-3y+2}{\sqrt{10}}\right)^2}{\left(\frac{27}{20}\right)} + \frac{\left(\frac{3x+y+1}{\sqrt{10}}\right)^2}{\left(\frac{3}{5}\right)} &= 1\\
\frac{\left(\frac{x-3y+2}{\sqrt{10}}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{27}{20}}\right)^2} + \frac{\left(\frac{3x+y+1}{\sqrt{10}}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2} &= 1.
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

- Persamaan sumbu minor, yaitu $x - 3y + 2 = 0$. Dengan panjang

$$2b = 2\sqrt{\frac{3}{5}}$$

- Persamaan sumbu mayor, yaitu $3x + y + 1 = 0$. Dengan panjang

$$2a = 2\sqrt{\frac{27}{20}} = 3\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

- Titik pusat $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, yang merupakan perpotongan sumbu minor dan sumbu mayor.

- Titik fokus.
  Karena $b^2 = a^2(1 - e^2)$, maka

$$\begin{aligned}
\frac{3}{5} &= \frac{27}{20}(1 - e^2) \\
\frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 27} &= 1 - e^2 \\
e^2 &= 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \\
e &= \frac{\sqrt{5}}{3}.
\end{aligned}$$

  Misalkan (α, β) koordinat titik fokus, maka

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha - 3\beta + 2}{\sqrt{10}} &= \pm ae \\
\frac{\alpha - 3\beta + 2}{\sqrt{10}} &= \pm \left[\left(\frac{3}{2}\right)\sqrt{\frac{3}{5}}\right]\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \\
\frac{\alpha - 3\beta + 2}{\sqrt{10}} &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\alpha - 3\beta + 2 &= \pm \frac{\sqrt{30}}{2},
\end{aligned}$$

dan

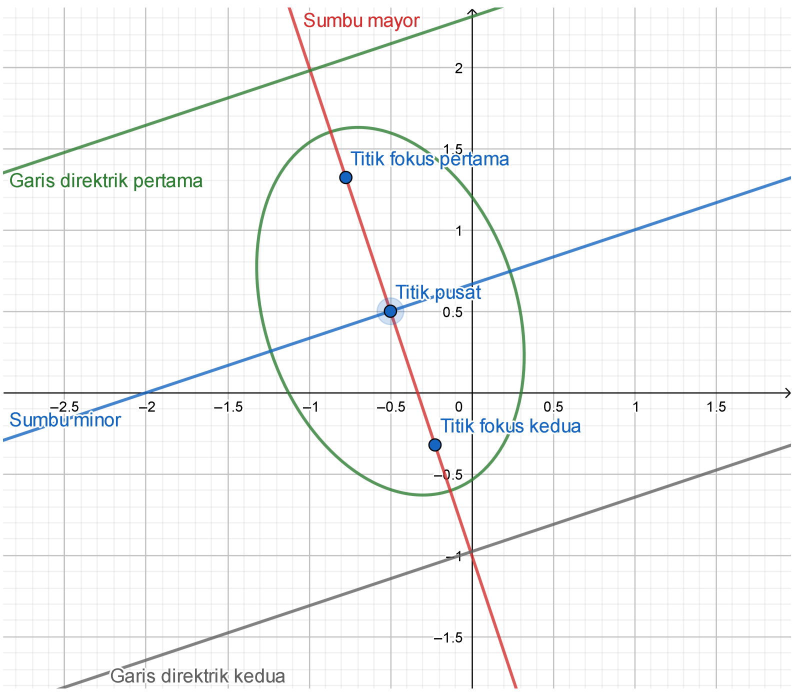
$$3\alpha + \beta + 1 = 0.$$

Oleh karena itu,

$$(\alpha, \beta) \equiv \left(\frac{\sqrt{30} - 10}{20}, \frac{10 - 3\sqrt{30}}{20}\right) \text{ dan } \left(\frac{-\sqrt{30} - 10}{20}, \frac{3\sqrt{30} + 10}{20}\right).$$

- Persamaan garis direktrik.

$$\begin{aligned}
\frac{x - 3y + 2}{\sqrt{1+9}} &= \pm\frac{a}{e} \\
\frac{x - 3y + 2}{\sqrt{1+9}} &= \pm\frac{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \\
\frac{x - 3y + 2}{\sqrt{1+9}} &= \pm\frac{9\sqrt{3}}{10} \\
x - 3y + 2 &= \pm 9\sqrt{\frac{3}{10}}.
\end{aligned}$$



Gambar 5.8: Kurva $4(x - 3y + 2)^2 + 9(3x + y + 1)^2 = 54$ menggunakan Geogebra

5.3 Kedudukan Titik dan Garis Terhadap Elips

Misal diberikan persamaan elips $\frac{x^2}{k_1^2}+\frac{y^2}{k_2^2}=1$. Untuk menentukan apakah titik (x_1, y_1) terletak dalam kurva elips, tepat berada pada kurva elips, atau di luar kurva elips, perlu dilakukan pengujian titik tersebut. Oleh karena itu, dibagi menjadi 3 kasus:

1. Titik terletak dalam kurva elips, jika
$$\frac{x_1^2}{k_1^2}+\frac{y_1^2}{k_2^2}<1.$$
2. Titik terletak pada kurva elips, jika
$$\frac{x_1^2}{k_1^2}+\frac{y_1^2}{k_2^2}=1.$$
3. Titik terletak di luar kurva elips, jika
$$\frac{x_1^2}{k_1^2}+\frac{y_1^2}{k_2^2}>1.$$

Misal diberikan persamaan elips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dan sebuah garis lurus dengan persamaan $y = mx + c$. Dengan melakukan proses substitusi diperoleh

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1 \tag{5.10}$$
$$(a^2m^2+b^2)x^2+2mca^2x+c^2a^2-a^2b^2=0, \tag{5.11}$$

yang merupakan persamaan kuadratik dari variabel x. Selanjutnya untuk menentukan apakah garis lurus tersebut memotong kurva di dua titik berbeda, menyinggung kurva, atau tidak menyentuh kurva, dapat periksa dari diskriminan Persamaan 5.11.

$$\begin{aligned}
D &= 4m^2c^2a^4-4(a^2m^2+b^2)(c^2a^2-a^2b^2)\\
D &= -4a^2b^2c^2+4a^4b^2m^2+4a^2b^4\\
D &= 4(a^2b^2)(-c^2+a^2m^2+b^2).
\end{aligned}$$

Sehingga dibagi menjadi 3 kasus, yaitu

1. Garis memotong kurva, jika

$$\begin{aligned} D &> 0 \\ 4(a^2b^2)(-c^2 + a^2m^2 + b^2) &> 0 \\ a^2m^2 + b^2 &> c^2. \end{aligned}$$

2. Garis menyinggung kurva, jika

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ 4(a^2b^2)(-c^2 + a^2m^2 + b^2) &= 0 \\ c^2 &= a^2m^2 + b^2. \end{aligned}$$

3. Garis tidak menyentuh kurva, jika

$$\begin{aligned} D &< 0 \\ 4(a^2b^2)(-c^2 + a^2m^2 + b^2) &< 0 \\ a^2m^2 + b^2 &< c^2. \end{aligned}$$

Garis $y = mx + c$ menyinggung kurva elips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ jika $c^2 = a^2m^2 + b^2$ atau $c = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$. Oleh karena itu, garis singgung kurva elips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ adalah

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}, \forall\ m \in \mathbb{R}.$$

Hal ini berarti $c \leq -b$ atau $c \geq b$. Jika gradien garis m diketahui, maka nilai c tersebut dapat segera ditentukan. Jika gradien garis menuju tak hingga, yaitu $\lim\limits_{m\to\infty} m = \lim\limits_{k\to 0} \frac{1}{k}$, maka garis singgungnya adalah

$$\begin{aligned} y &= \lim_{k\to 0} \left(\frac{x}{k} \pm \frac{1}{k}\sqrt{a^2 + b^2k^2} \right) \\ 0 &= x \pm a \\ x &= \pm a, \end{aligned}$$

yang merupakan garis vertikal.

Jika diketahui titik pada kurva elips, maka garis singgung kurva yang melalui titik tersebut juga mudah diperoleh. Misalkan koordinat titik tersebut adalah (x_1, y_1).

1. Jika persamaan elipsnya adalah $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, maka persamaan garis singgungnya adalah $\frac{x \cdot x_1}{a^2} + \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 1$.
2. Jika persamaan elipsnya adalah $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, maka persamaan garis singgungnya adalah $\frac{x \cdot x_1}{b^2} + \frac{y \cdot y_1}{a^2} = 1$.
3. Jika persamaan elipsnya adalah $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, maka persamaan garis singgungnya adalah $\frac{(x-h)(x_1-h)}{a^2} + \frac{(y-k)(y_1-k)}{b^2} = 1$.
4. Jika persamaan elipsnya adalah $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$, maka persamaan garis singgungnya adalah $\frac{(x-h)(x_1-h)}{b^2} + \frac{(y-k)(y_1-k)}{a^2} = 1$.

5.4 Latihan

1. Sketsalah kurva $9x^2 + 25y^2 = 225$!
2. Buatlah kurva $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ menggunakan Geogebra, lalu tentukan titik fokusnya!
3. Tentukan persamaan elips jika titik puncaknya di $(0, -8)$ dan $(0, 8)$, dan jika diketahui titik-titik ujung sumbu minornya di $(-3, 0)$ dan $(3, 0)$!
4. Tentukan persamaan elips dengan pusat $(0, 0)$, dan diketahui salah satu titik puncaknya $(0, 13)$, dan salah satu titik fokusnya $(0, 12)$!
5. Sketsalah kurva $3x^2 + 5y^2 - 6x + 20y + 8 = 0$!
6. Tentukan persamaan elips jika diketahui memiliki titik pusat $(2, 4)$ dengan panjang sumbu mayornya adalah 4 dan panjang sumbu minornya adalah 3!
7. Tentukan persamaan elips jika diketahui titik ujung sumbu minor di $(-2, 8)$ dan $(-2, -16)$ dan salah satu fokusnya adalah $(3, -4)$!
8. Tentukan panjang segmen garis yang menghubungkan dua titik fokus pada elips $4(x - 3y + 2)^2 + 9(3x + y + 1)^2 = 54$!

9. Tentukan jarak antara dua garis direktrik dari persamaan elips $2x^2 + 4y^2 + 4xy - 8 = 0$!

10. Tentukan titik pusat, titik fokus, dan persamaan garis direktrik dari persamaan $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 8 = 0$!

11. Tentukan kedudukan titik $(4, -3)$ terhadap persamaan elips $5x^2 + 7y^2 = 140$!

12. Tentukan nilai α sedemikian sehingga titik $P(\alpha, -\alpha)$ berada di dalam kurva elips $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$!

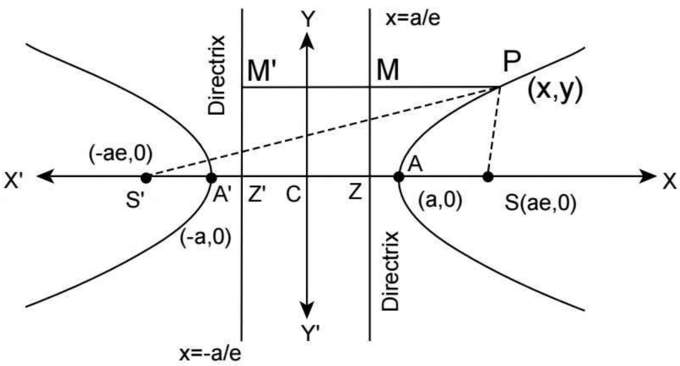
13. Tentukan konstanta λ sedemikian sehingga garis $3x - 4y + \lambda = 0$ memotong kurva $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ di dua titik berbeda!

14. Tentukan persamaan garis singgung elips $9x^2 + 2y^2 - 18x + 4y - 7 = 0$ yang melalui titik $(0, 2)$! Lalu gambarlah menggunakan Geogebra!

BAB 6

Hiperbola

Pada Bab 6 ini, diketahui bahwa ada suatu kurva yang didefinisikan sebagai titik-titik yang rasio antara jarak dengan titik tetap (fokus) dan jarak dengan garis tetap (garis direktrik) adalah $e > 1$. Tentu kurva ini berbeda dengan kurva elips yang dibahas pada Bab 5 (dengan perbandingan $e < 1$). Kurva yang dibahas dalam bab ini adalah hiperbola yang didefinisikan sebagai tempat kedudukan titik-titik yang bergerak dalam bidang sehingga rasio antara jarak dari titik fokus dan jarak dari garis direktrik selalu konstan, yaitu $e > 1$.



Gambar 6.1: Hiperbola standar jenis ke 1

Misalkan S adalah titik fokus dan ZM adalah garis direktrik hiperbola. Lalu gambarlah $SZ \perp ZM$, sehingga seperti pada Gambar 6.1. Misalkan A dan A'

masing-masing adalah titik internal dan titik eksternal. Maka

$$|SA| = e|AZ| \tag{6.1}$$
$$|SA'| = e|A'Z|. \tag{6.2}$$

Jelas bahwa A dan A' akan terletak pada kurva hiperbola. Misalkan $|AA'| = 2a$ dan ambil titik tengah dari segmen garis AA' sebagai titik asal.

$$\therefore |CA| = |CA'| = a.$$

Misalkan $P(x, y)$ adalah sebarang titik pada hiperbola dan CA terletak pada sumbu x, garis yang tegak lurus dengan CA di titik C adalah sumbu y. Kemudian Persamaan 6.1 dan Persamaan 6.2 dijumlahkan menghasilkan

$$\begin{aligned} |SA| + |SA'| &= e(|AZ| + |A'Z|) \\ |CS| - |CA| + |CS| + |CA'| &= e(|AA'|) \ (\because |CA| = |CA'|) \\ 2|CS| &= e(2a) \\ |CS| &= ae. \end{aligned}$$

Sehingga, titik fokusnya adalah $(ae, 0)$. Jika dilakukan operasi pengurangan pada Persamaan 6.1 dan Persamaan 6.2, diperoleh

$$\begin{aligned} |SA'| - |SA| &= e(|A'Z| - |AZ|) \\ |AA'| &= e[(|CA'| + |CZ|) - (|CA| - |CZ|)] \\ 2a &= e(2|CZ|) \\ |CZ| &= a/e. \end{aligned}$$

Dengan demikian persamaan garis direktrik MZ adalah garis $x = a/e$ atau garis $x - a/e = 0$. Perhatikan bahwa

$$\because e > 1, \ \therefore \frac{a}{e} < a.$$

Lalu gambarlah $PM \perp MZ$. Berdasarkan definisi bahwa $\frac{|SP|}{|PM|} = e$, diperoleh

$$\begin{aligned}
|SP|^2 &= e^2|PM|^2 \\
(x-ae)^2 + (y-0)^2 &= e^2\left(x - \frac{a}{e}\right)^2 \\
(x-ae)^2 + y^2 &= (ex-a)^2 \\
x^2 + a^2e^2 - 2aex + y^2 &= e^2x^2 - 2aex + a^2 \\
x^2(e^2-1) - y^2 &= a^2(e^2-1) \\
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2-1)} &= 1 \\
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1, \qquad (6.3)
\end{aligned}$$

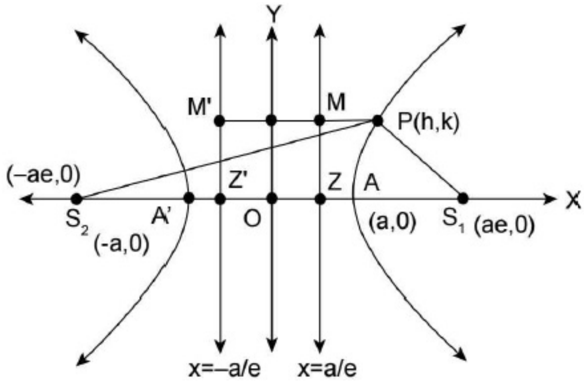
dengan $b^2 = a^2(e^2-1)$. Persamaan hiperbola 6.3 berpusat di titik asal $O(0,0)$. Titik-titik fokus dan garis-garis direktriknya masing-masing adalah titik $(\pm ae, 0)$ dan garis $x = \pm\frac{a}{e}$.

Berdasarkan Gambar 6.1, sumbu x disebut sumbu transversal (*transverse axis*) dari hiperbola standar jenis pertama dan sumbu y disebut sumbu sekawannya (*conjugate axes*). Dalam hal ini, titik fokus (S dan S'), titik puncak (A dan A'), dan titik pusat C dari hiperbola terletak pada sumbu transversal. Untuk hiperbola dengan Persamaan 6.3, jarak antar kedua titik puncak (atau panjang sumbu transversal) adalah $2a$ dan panjang sumbu sekawannya adalah $2b$. Jika sumbu y sebagai sumbu transversal dan sumbu y sebagai sumbu sekawannya, maka persamaan hiperbola menjadi $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, yang merupakan persamaan hiperbola standar jenis kedua.

6.1 Definisi Kedua Dari Hiperbola

Hiperbola adalah himpunan semua titik (x,y) pada bidang sedemikian hingga selisih jarak titik (x,y) terhadap dua titik tertentu (titik fokus S_1 dan titik fokus S_2) adalah konstanta $2a$. Perhatikan Gambar 6.2, bahwa

$$|S_1P| = e|PM| = e\left(h - \frac{a}{e}\right) = eh - a$$



Gambar 6.2: Ilustrasi definisi kedua hiperbola standar

dan

$$|S_2P| = e|PM'| = e\left(\frac{a}{e} + h\right) = eh + a.$$

Oleh karena itu, selisih antara $|S_1P|$ dan $|S_2P|$ adalah $2a$, yang merupakan panjang sumbu transversal. Jika $2a < |S_1S_2| = 2ae$, maka terbentuklah hiperbola. Jika selisih antara $|S_1P|$ dan $|S_2P|$ adalah $|S_1S_2|$, maka terbentuklah gabungan dua *rays* seperti pada Gambar 6.3. Namun jika selisih antara $|S_1P|$ dan $|S_2P|$ lebih besar dari $|S_1S_2|$, maka tidak ada kurva yang terbentuk karena melanggar ketidaksamaan segitiga.

Gambar 6.3: Ilustrasi *rays* yang terpotong

6.2 Persamaan Hiperbola Sekawan

Untuk suatu hiperbola H, ada hiperbola C yang sumbu transversalnya adalah sumbu sekawan dari hiperbola H dan sumbu sekawannya adalah sumbu transversal dari H. Jika diketahui persamaan hiperbola

$$H \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

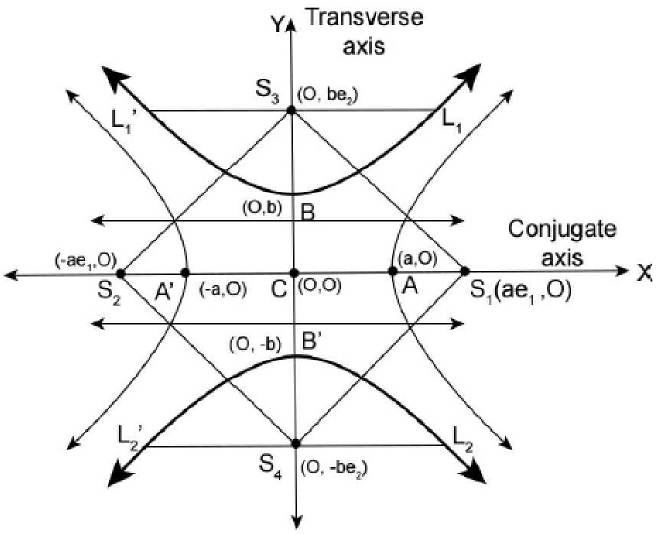
maka persamaan hiperbola sekawannya adalah

$$C \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0.$$

Ilustrasi hiperbola sekawan dapat dilihat pada Gambar 6.4. Adapun sifat-sifat dari hiperbola sekawan adalah sebagai berikut

1. keeksentrikan hiperbola sekawan adalah $e_2 = \sqrt{1 + \left(\frac{a^2}{b^2}\right)}$.
2. titik fokus terletak pada $(0, \pm be_2)$.
3. sumbu transversalnya adalah $x = 0$ dengan panjang $2b$.
4. jika keeksentrikan suatu hiperbola adalah $e_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{b^2}{a^2}\right)}$ dan keeksentrikan hiperbola sekawan adalah $e_2 = \sqrt{1 + \left(\frac{a^2}{b^2}\right)}$, maka berlaku

$$\frac{1}{e_2^2} + \frac{1}{e_1^2} = \frac{b^2}{a^2 + b^2} + \frac{a^2}{a^2 + b^2} = 1.$$



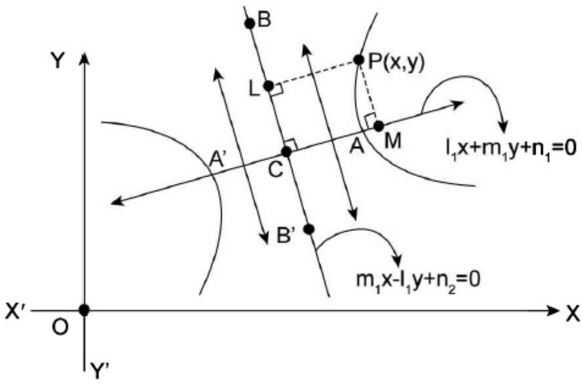
Gambar 6.4: Ilustrasi hiperbola sekawan

6.3 Persamaan Tak Standar

Persamaan hiperbola tak standar pertama adalah persamaan yang memiliki titik pusat (α, β) adalah

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1.$$

Sumbu transversal persamaan ini adalah $y = \beta$ dengan panjang $2a$, sedangkan sumbu sekawannya adalah $x = \alpha$ dengan panjang $2b$. Persamaan ini memiliki titik-titik fokus $(\alpha \pm ae, \beta)$ dan titik-titik ujung $(\alpha \pm a, \beta)$.



Gambar 6.5: Ilustrasi hiperbola tak standar

Selanjutnya adalah persamaan hiperbola tak standar, yang kedua sumbunya baik sumbu transversal maupun sumbu sekawan tidak sejajar dengan sumbu koordinat kartesius. Misalkan

$$l_1 x + m_1 y + n_1 = 0 \tag{6.4}$$

dan

$$m_1 x - l_1 y + n_2 = 0, \tag{6.5}$$

adalah dua garis lurus yang saling tegak lurus. Perhatikan Gambar 6.5. Misalkan Persamaan 6.4 sebagai sumbu transversal dengan panjang $|AA'| = 2a$ dan Persamaan 6.5 sebagai sumbu sekawan dengan panjang $|BB'| = 2b$. Maka persamaan hiperbola yang diberikan adalah

$$\frac{|PL|^2}{a^2} - \frac{|PM|^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{\left(\frac{m_1x - l_1y + n_2}{\sqrt{m_1^2 + l_1^2}}\right)^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{l_1x + m_1y + n_1}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}}\right)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(m_1x - l_1y + n_2)^2}{a^2\left(\sqrt{m_1^2 + l_1^2}\right)^2} - \frac{(l_1x + m_1y + n_1)^2}{b^2\left(\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\right)^2} = 1.$$

Adapun sifat-sifat untuk persamaan hiperbola ini adalah

1. titik pusat.

   Titik pusat persamaan hiperbola ini adalah titik potong antara garis $l_1x + m_1y + n_1 = 0$ dan garis $m_1x - l_1y + n_2 = 0$.

2. garis direktrik.

   Jika (x, y) adalah sebarang titik pada garis direktrik, maka jarak dari sumbu sekawan $m_1x - l_1y + n_2 = 0$ adalah $\frac{a}{e}$. Oleh karena itu, persamaan garis direktriknya adalah

$$\frac{m_1x - l_1y + n_2}{\sqrt{m_1^2 + l_1^2}} = \pm\frac{a}{e}.$$

3. titik pusat.

   Titik pusatnya dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan

$$l_1x + m_1y + n_1 = 0 \tag{6.6}$$

   dan pasangan persamaan yang disebut *Latera Recta*

$$\frac{m_1x - l_1y + n_2}{\sqrt{m_1^2 + l_1^2}} = \pm ae. \tag{6.7}$$

   Adapun panjang jarak antar setiap *Latera Recta* adalah $\frac{2b^2}{a}$.

Perhatikan bahwa persamaan tak standar kedua ini memiliki bentuk $ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$, dengan $h \neq 0$ dan $h^2 - ab > 0$. Jika $h = 0$, maka sumbu transversal dan sumbu sekawan hiperbola akan sejajar dengan sumbu koordinat kartesius.

Misal akan ditunjukkan bahwa salah satu *Latera Recta* dari persamaan hiperbola

$$(10x-5)^2+(10y-2)^2=9(3x+4y-7)^2$$

adalah $30x+40y-23=0$. Pertama jabarkan persamaan hiperbolanya,

$$\begin{aligned}(10x-5)^2+(10y-2)^2&=9(3x+4y-7)^2\\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{5}\right)^2&=\frac{9}{4}\left(\frac{3x+4y-7}{5}\right)^2.\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh titik fokus $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{5}\right)$, keeksentrikan $e=\frac{3}{2}$, dan garis direktrik $3x+4y-7=0$. Karena persamaan *Latera Recta* hiperbola sejajar dengan garis direktrik maka persamaannya memiliki bentuk $3x+4y+\lambda=0$ dan melalui titik $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{5}\right)$ maka

$$\begin{aligned}3\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{5}+\lambda&=0\\ \lambda&=-\frac{23}{10}.\end{aligned}$$

Oleh karena itu diperoleh persamaan *Latera Recta*

$$\begin{aligned}3x+4y-\frac{23}{10}&=0\\ 30x+40y-23&=0.\end{aligned}$$

Pandang persamaan hiperbola $F\equiv x^2-3xy+y^2+10x-10y+21=0$. Titik pusat dapat diperoleh dengan menyelesaikan solusi persamaan

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x-3y+10=0$$

dan

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-3x+2y-10=0.$$

Sehingga diperoleh titik pusat $(-2, 2)$. Lalu geser titik asal ke titik pusat $(-2, 2)$ dengan mensubstitusi

$$x = x' + (-2) \text{ dan } y = y' + 2$$

atau dengan kata lain, mensubstitusi variabel x menjadi $x-2$ dan variabel y menjadi $y+2$. Sehingga persamaan hiperbola dengan titik pusat di titik asal $O(0, 0)$ adalah

$$\begin{aligned} (x-2)^2 - 3(x-2)(y+2) + (y+2)^2 + 10(x-2) - 10(y+2) + 21 = 0 \\ x^2 + y^2 - 3xy + 1 = 0. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Misalkan sumbu transversal dan sumbu sekawan dirotasi dengan sudut θ, maka

$$\begin{aligned} \tan 2\theta &= \frac{2h}{a-b} \\ \tan 2\theta &= \frac{-3}{1-1} \\ 2\theta &= \frac{\pi}{2} \\ \theta &= \frac{\pi}{4} = 45°. \end{aligned}$$

Adapun penerapan konsep rotasi sumbu transversal dan sumbu sekawan dirotasi dengan sudut θ dapat dilihat pada Tabel 6.1.

Tabel 6.1: Konsep Rotasi dengan Sudut $\theta = 45°$

	x	y
x'	$\cos\theta$	$\sin\theta$
y'	$-\sin\theta$	$\cos\theta$

Sehingga diperoleh koordinat yang baru

$$x' = \frac{x-y}{\sqrt{2}} \text{ dan } y' = \frac{x+y}{\sqrt{2}}.$$

Maka Persamaan 6.8 menjadi

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2-3\left(\frac{y}{\sqrt{2}}+\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)+1&=0\\
x^2+y^2-2xy+y^2+x^2+2xy+3y^2-3x^2+2&=0\\
5y^2-x^2+2&=0\\
x^2-5y^2&=2\\
\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2/5}&=1\\
\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{2/5})^2}&=1.
\end{aligned}
$$

Panjang sumbu mayornya adalah $2a=2\sqrt{2}$ dan panjang sumbu minornya adalah $2b=2\sqrt{\frac{2}{5}}$. Nilai keeksentrikannya adalah

$$
\begin{aligned}
b^2&=a^2(e^2-1)\\
\frac{2}{5}&=2(e^2-1)\\
e^2&=\frac{6}{5}\\
e&=\sqrt{\frac{6}{5}}.
\end{aligned}
$$

Persamaan sumbu transversalnya adalah

$$
\begin{aligned}
(y-2)&=1(x+2)\\
x-y+4&=0.
\end{aligned}
$$

Persamaan sumbu sekawannya adalah

$$
\begin{aligned}
(y-2)&=-1(x+2)\\
x+y&=0.
\end{aligned}
$$

Titik puncak diperoleh dari

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{\cos 45^\circ} = \frac{y-2}{\sin 45^\circ} = \pm\sqrt{2} \\ x=-1, y=3 \text{ dan } x=-3, y=1\end{aligned}$$

maka titik puncaknya $(-1,3)$ dan $(-3,1)$. Selanjutnya titik fokus dari persamaan $x^2-3xy+y^2+10x-10y+21=0$, yang diperoleh dari

$$\frac{x+2}{\cos 45^\circ} = \frac{y-2}{\sin 45^\circ} = \pm ae = \pm\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\right) = \pm\sqrt{\frac{12}{5}}$$

maka titik fokusnya adalah

$$\left(-2+\sqrt{\frac{6}{5}}, 2+\sqrt{\frac{6}{5}}\right) \text{ dan } \left(-2-\sqrt{\frac{6}{5}}, 2-\sqrt{\frac{6}{5}}\right).$$

Persamaan garis direktrik diperoleh dari

$$\begin{aligned}\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right| &= \frac{a}{e} \\ x+y &= \pm\sqrt{2}\frac{a}{e} \\ x+y &= \pm\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{5}{6}} \\ x+y &= \pm 2\sqrt{\frac{5}{6}}.\end{aligned}$$

Panjang antar *Latera Recta* adalah $4a = 4\sqrt{2}$ satuan.

6.4 Kedudukan Titik dan Garis Terhadap Hiperbola

Pandang persamaan hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Untuk menentukan apakah suatu titik $P(x_1,y_1)$ terletak di luar hiperbola (ke arah titik fokus), terletak pada hiperbola, atau terletak di dalam hiperbola (ke arah titik pusat) dapat ditentukan dengan melihat nilai $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}-1$:

1. Titik terletak dalam kurva hiperbola, jika

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1 < 0.$$

2. Titik terletak pada kurva hiperbola, jika

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0.$$

3. Titik terletak di luar kurva hiperbola, jika

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1 > 0.$$

Misal diberikan persamaan hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{6.9}$$

dan suatu garis

$$y = mx + c. \tag{6.10}$$

Dengan mengeliminasi variabel y dari Persamaan 6.9 dan Persamaan 6.10, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx+c)^2}{b^2} &= 1 \\ b^2x^2 - a^2(mx+c)^2 &= a^2b^2 \\ (a^2m^2 - b^2)x^2 + 2mca^2x + a^2(b^2 + c^2) &= 0. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Kedudukan garis pada Persamaan 6.10 terhadap persamaan hiperbola 6.9, dapat ditentukan berdasarkan nilai diskriminan Persamaan 6.11. Sehingga dibagi menjadi 3 kasus, yaitu

1. Garis memotong kurva, jika $c^2 > a^2m^2 - b^2$.

2. Garis menyinggung kurva, jika $c^2 = a^2m^2 - b^2$.

3. Garis tidak menyentuh kurva, jika $c^2 > a^2m^2 - b^2$.

Maka suatu garis $y = mx + c$ dikatakan garis singgung hiperbola jika $c^2 = a^2m^2 - b^2$ atau $c = \pm\sqrt{a^2m^2 - b^2}$. Sehingga diperoleh garis singgungnya yaitu $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$.

Selanjutnya adalah garis singgung hiperbola yang melalui titik (x_1, y_1). Adapun bentuk persamaan garis singgungnya adalah sebagai berikut.

1. Jika diberikan persamaan hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, maka persamaan garis singgungnya adalah $\frac{x \cdot x_1}{a^2} - \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 1$.
2. Jika diberikan persamaan hiperbola $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, maka persamaan garis singgungnya adalah $-\frac{x \cdot x_1}{a^2} + \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 1$.
3. Jika diberikan persamaan hiperbola $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, maka persamaan garis singgungnya adalah $\frac{(x-h)\cdot(x_1-h)}{a^2} - \frac{(y-k)\cdot(y_1-k)}{b^2} = 1$.
4. Jika diberikan persamaan hiperbola $\frac{-(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, maka persamaan garis singgungnya adalah $-\frac{(x-h)\cdot(x_1-h)}{a^2} + \frac{(y-k)\cdot(y_1-k)}{b^2} = 1$.

Dalam hal ini, perlu diuji terlebih dahulu apakah titik (x_1, y_1) tersebut terletak pada kurva hiperbola.

6.5 Latihan

1. Sketsalah kurva $25y^2 - 9x^2 + 225 = 0$!
2. Tentukan persamaan hiperbola yang memiliki titik-titik ujung $(0, -2)$ dan $(0, 2)$, dengan titik-titik fokusnya adalah $(0, -4)$ dan $(0, 4)$!
3. Tentukan panjang sumbu transversal dan titik-titik fokus untuk hiperbola sekawan dari $25y^2 - 9x^2 + 225 = 0$!
4. Tentukan titik pusat, titik-titik ujung dan titik-titik fokus dari persamaan hiperbola $16x^2 - 9y^2 + 32x + 36y - 164 = 0$!
5. Sketsalah persamaan hiperbola $x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0$!
6. Tentukan posisi titik $(5, -4)$ terhadap hiperbola $9x^2 - y^2 = 1$!

7. Tentukan persamaan garis singgung hiperbola $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ yang tegak lurus dengan garis $x - 2y + 3 = 0$!

BAB 7

Persamaan Parametrik

Penggambaran suatu kurva secara manual biasanya dimulai dari satu titik. Lalu titik awal tersebut dikumpulkan dengan tak hingga titik lainnya dalam lintasan kurva. Sebagai elemen koordinat, posisi absis dan posisi ordinat suatu titik masing-masing dapat dinyatakan sebagai fungsi waktu t. Diasumsikan kedua fungsi tersebut adalah kontinu dalam interval I. Dalam hal ini, variabel t disebut parameter. Pandang fungsi-fungsi dalam parameter t berikut.

$$\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t). \end{aligned}$$

Setiap nilai t mendefinisikan titik $(x, y) = (f(t), g(t))$. Koleksi semua titik dari domain t yang mungkin adalah grafik persamaan-persamaan parametrik dan disebut kurva parametrik.

Misal diberikan persamaan parameter

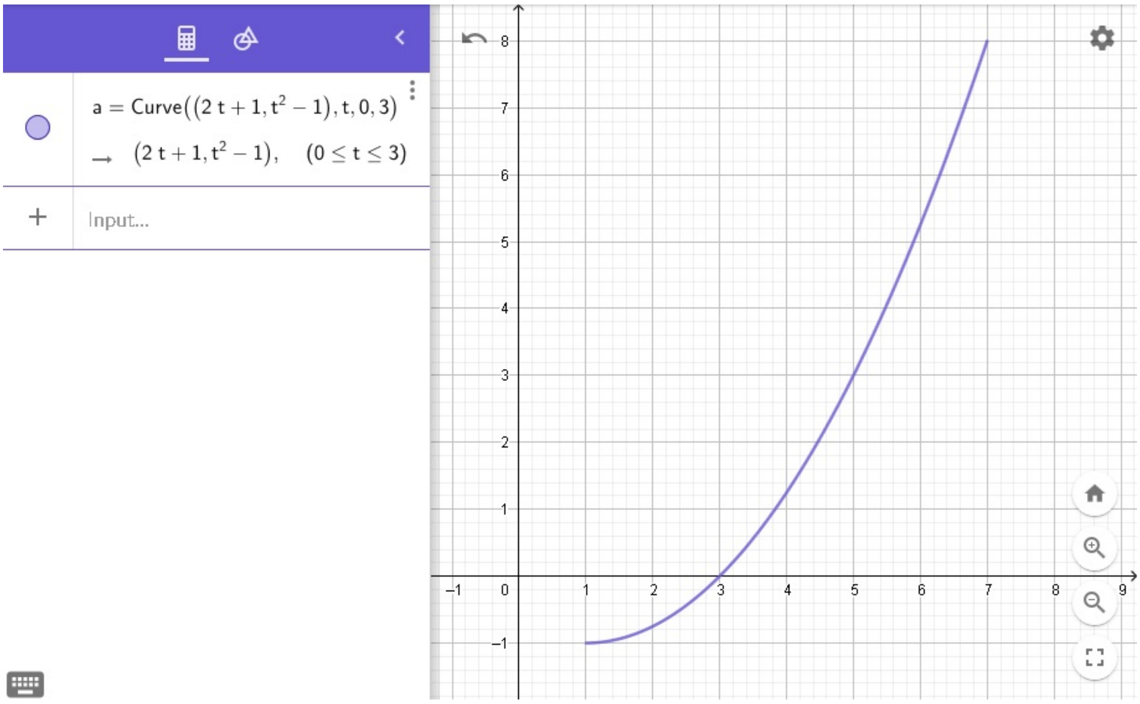
$$\begin{aligned} x(t) &= 2t + 1 \\ y(t) &= t^2 - 1, \end{aligned}$$

untuk $0 \leq t \leq 3$. Perhatikan bahwa t merupakan parameter dari fungsi $x(t)$ dan $y(t)$. Maka berdasarkan domain t, dapat diperoleh koleksi titik (x, y) seperti pada Tabel 7.1. Semakin banyak nilai t yang dihitung, maka semakin banyak pula pasangan absis dan ordinat untuk titik yang digambarkan. Lalu dengan menggunakan

Geogebra diperoleh kurva parametrik seperti pada Gambar 7.1.

Tabel 7.1: Perhitungan Titik-titik Berdasarkan Parameter t

t	x	y
0	1	-1
1	3	0
2	5	3
3	7	8



Gambar 7.1: Menggambar kurva parametrik menggunakan Geogebra

Selain menggunakan perhitungan tabel, metode lainnya untuk menggambarkan kurva parametrik adalah dengan mencari hubungan antara variabel x dan variabel y. Misal diberikan persamaan parameter

$$x(t) = 2t - 4$$
$$y(t) = 4t^2 + 1,$$

untuk $-1 \leq t \leq 2$. Perhatikan bahwa dari persamaan $x = 2t - 4$ diperoleh

$$t = \frac{x+4}{2}.$$

Sehingga

$$
\begin{aligned}
y &= 4t^2 + 1 \\
&= 4\left(\frac{x+4}{2}\right)^2 + 1 \\
&= (x+4)^2 + 1.
\end{aligned}
$$

Maka kurva dari persamaan parameter tersebut adalah parabola $(y-1) = (x+4)^2$. Karena $-1 \leq t \leq 2$, maka

$$
\begin{array}{rcl}
-1 \leq & t & \leq 2 \\
-2 \leq & 2t & \leq 4 \\
-6 \leq & 2t-4 & \leq 0 \\
-6 \leq & x & \leq 0.
\end{array}
$$

Misal diberikan fungsi

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

yang merupakan kurva asteroid. Kurva ini dapat digambar melalui persamaan-persamaan parametrik

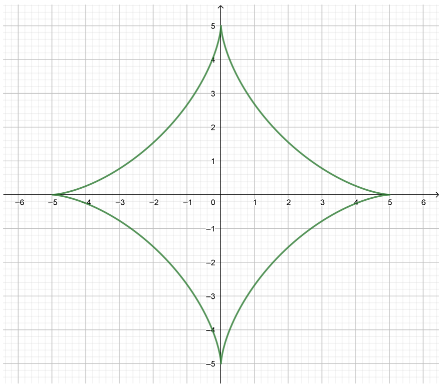
$$
\begin{aligned}
x(t) &= a\cos^3(t) \\
y(t) &= a\sin^3(t).
\end{aligned}
$$

Berdasarkan persamaan parameter tersebut, diperolehlah kurva asteroid seperti pada Gambar 7.2.

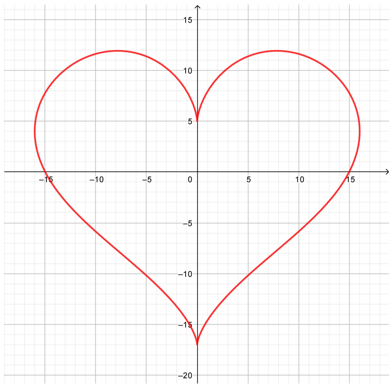
Kurva parametrik dapat menggambar kurva yang unik, seperti kurva *love* yang didefinisikan sebagai

$$
\begin{aligned}
x &= 16\sin^3(t) \\
y &= 13\cos(t) - 5\cos(2t) - 2\cos(3t) - \cos(4t),
\end{aligned}
$$

untuk $0 \leq t \leq 2\pi$. Sehingga diperoleh kurva seperti pada Gambar 7.3. Selain kurva *love*, banyak sekali kurva parametrik yang unik yang dapat dilihat pada [3].



Gambar 7.2: Kurva asteroid dengan $a = 5$

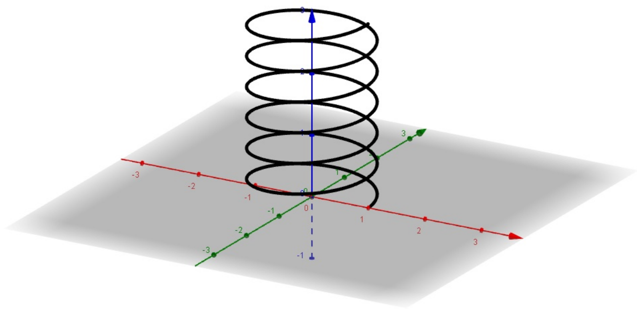


Gambar 7.3: Kurva *love*

Persamaaan-persamaan parametrik dapat juga menggambarkan kurva dalam 3 dimensi. Misalkan

$$x = \sin(t)$$
$$y = \cos(t)$$
$$z = \frac{t}{4\pi},$$

untuk $t \in [0, 12\pi]$. Maka kurva parametrik yang terbentuk seperti pada Gambar 7.4. Perhatikan bahwa proyeksi kurva tersebut pada bidang koordinat XOY akan menghasilkan kurva lingkaran.



Gambar 7.4: Kurva parametrik 3 dimensi

7.1 Panjang Kurva Parametrik

Perhatikan kembali persamaan parameter berikut

$$x = f(t)$$
$$y = g(t),$$

untuk $a \leq t \leq b$. Selanjutnya partisi pada interval $[a, b]$ menjadi n sub-interval dengan titik-titik ujung

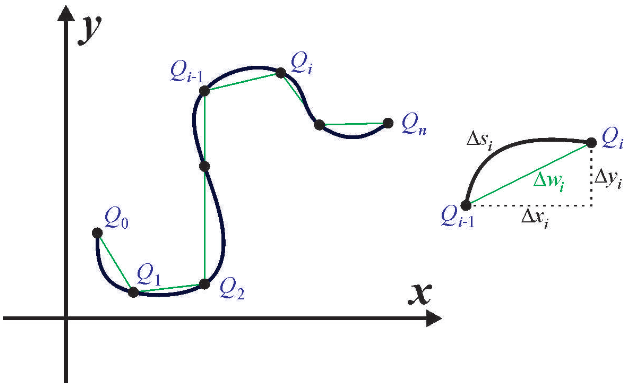
$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b.$$

Akibatnya, kurva dari persamaan parameter tersebut terpartisi oleh titik-titik Q_0, Q_1, Q_2, …, Q_{n-1}, dan Q_n. Perhatikan Gambar 7.5. Panjang Δs_i dapat diaproksimasi oleh

$$\begin{aligned}\Delta s_i \approx \Delta w_i &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}\\ &= \sqrt{(f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 + (g(t_i) - g(t_{i-1}))^2}.\end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema Nilai Rata-rata untuk turunan, bahwa

$$\begin{aligned}\frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} &= f'(\tilde{t}_i)\\ f(t_i) - f(t_{i-1}) &= f'(\tilde{t}_i)\Delta t_i\end{aligned}$$



Gambar 7.5: Ilustrasi partisi kurva parametrik

dan

$$\begin{aligned}\frac{g(t_i)-g(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}} &= g'(\hat{t}_i)\\ g(t_i)-g(t_{i-1}) &= g'(\hat{t}_i)\Delta t_i.\end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}\Delta w_i &= \sqrt{(f(t_i)-f(t_{i-1}))^2+(g(t_i)-g(t_{i-1}))^2}\\ &= \sqrt{\left[f'(\tilde{t}_i)\Delta t_i\right]^2+\left[g'(\hat{t}_i)\Delta t_i\right]^2}\\ &= \sqrt{\left[f'(\tilde{t}_i)\right]^2+\left[g'(\hat{t}_i)\right]^2}\Delta t_i.\end{aligned}$$

Oleh karena itu, jumlah keseluruhannya menjadi

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta w_i = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left[f'(\tilde{t}_i)\right]^2+\left[g'(\hat{t}_i)\right]^2}\Delta t_i.$$

Dengan demikian, jika banyaknya sub interval semakin besar (menuju tak hingga) maka diperoleh panjang kurva yang diinginkan. Jadi,

$$\begin{aligned}s &= \int_a^b \sqrt{\left[f'(\tilde{t}_i)\right]^2+\left[g'(\hat{t}_i)\right]^2}\,dt\\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.\end{aligned}$$

7.2 Garis Singgung Persamaan Parametrik

Diberikan persamaan-persamaan parametrik

$$\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t), \end{aligned}$$

untuk $t \in I$. Garis singgung (baik horisontal maupun vertikal) dari persamaan-persamaan parametrik tersebut dapat ditemukan dengan menentukan dimana titik stasioner tersebut. Posisi titik yang menjadi titik stationer dari garis singgung horisontal dapat dicari dengan menyelesaikan

$$\frac{dy}{dt} = 0,$$

sedangkan titik stationer dari garis singgung vertikal dapat ditemukan dengan menyelesaikan persamaan

$$\frac{dx}{dt} = 0.$$

Misal diberikan persamaan-persamaan parametrik berikut

$$\begin{aligned} x &= t^3 - 3t \\ y &= t^2 - 3. \end{aligned}$$

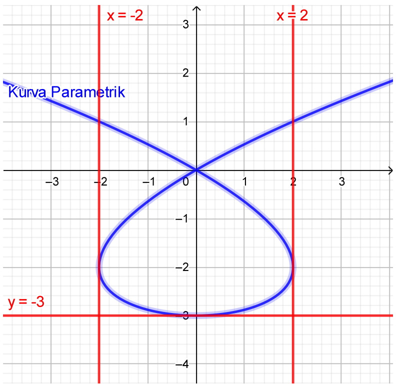
Garis singgung horisontal dapat ditemukan dengan menyelesaikan

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= 0 \\ 2t &= 0 \\ t &= 0. \end{aligned}$$

Artinya ketika $t = 0$, maka posisi titik tersebut adalah titik stasioner untuk garis singgung horisontal. Jika $t = 0$, maka $(0, -3)$ adalah titik yang dimaksud. Oleh karena itu, garis singgung horisontalnya adalah $y = -3$. Selanjutnya adalah menemukan titik stationer dari garis singgung vertikal. Karena

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 0\\ 3t^2 - 3 &= 0\\ t &= \pm 1,\end{aligned}$$

maka titik $(-2, -2)$ dan titik $(2, -2)$ masing-masing adalah titik stationer yang dimaksud. Oleh karena itu, garis $x = -2$ dan garis $x = 2$ merupakan garis-garis singgung vertikal dari persamaan-persamaan parametrik yang diberikan. Hal ini sesuai dengan kurva yang dihasilkan oleh Geogebra pada Gambar 7.6.



Gambar 7.6: Ilustrasi garis singgung horisontal dan vertikal dari persamaan parametrik

Secara umum, gradien garis singung untuk persamaan-persamaan parametrik adalah

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Misal diberikan persamaan-persamaan parametrik berikut

$$\begin{aligned}x &= t\sin(t)\\ y &= t\cos(t).\end{aligned}$$

Maka

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos(t) - t\sin(t)}{\sin(t) + t\cos(t)}.$$

Ketika $t = \frac{\pi}{2}$, maka diperoleh titik $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Lalu garis singgung di titik tersebut memiliki gradien

$$m = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - t\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + t\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{0 - \frac{\pi}{2}\cdot 1}{1 + \frac{\pi}{2}\cdot 0} = -\frac{\pi}{2}.$$

Karena kurva parametrik dilalui titik $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, maka garis singgung di titik tersebut adalah

$$\begin{aligned}(y-0) &= -\frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\\ y &= -\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$

7.3 Persamaan Parametrik Untuk Garis

Misalkan gradien garis dinyatakan sebagai $m = \frac{y_s}{x_s}$. Maka suatu garis $y = mx + c$ dapat dinyatakan sebagai persamaan-persamaan parametrik

$$x = x_1 + x_s \cdot t \tag{7.1}$$

$$y = y_1 + y_s \cdot t, \tag{7.2}$$

Perhatikan bahwa berdasarkan Persamaan 7.1 dan Persamaan 7.2, diperoleh

$$\begin{aligned}t &= \frac{x - x_1}{x_s}\\ t &= \frac{y - y_1}{y_s}.\end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}t &= t\\ \frac{x - x_1}{x_s} &= \frac{y - y_1}{y_s}\\ y - y_1 &= \frac{y_s}{x_s}(x - x_s),\end{aligned}$$

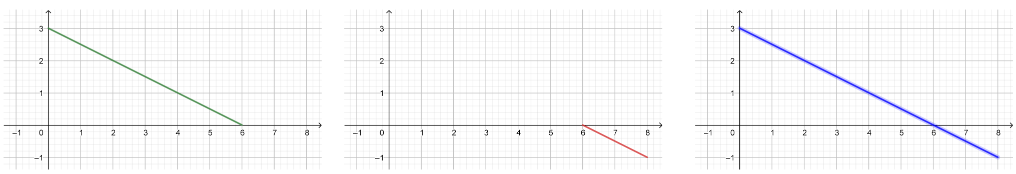
dengan $\frac{y_s}{x_s}$ merupakan gradien garis tersebut. Oleh karena itu, persamaan-persamaan parametrik suatu garis yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ adalah

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t$$
$$y = y_1 + (y_2 - y_1)t.$$

Misal diberikan persamaan garis $y = -\frac{1}{2}x + 3$. Diperoleh gradien $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{2} = \frac{-1}{2} = \frac{1}{-2}$. Maka pilih $x_s = 2$ dan $y_s = -1$. Dalam hal ini, juga dapat dipilih $x_s = -2$ dan $y_s = 1$ atau kombinasi pasangan yang lainnya. Ambil titik P sebagai titik awal. Berdasarkan garis $y = -\frac{1}{2}x + 3$, untuk $y = 0$ maka $x = 6$, sehingga diperoleh titik $P(6, 0)$. Dalam hal ini, boleh memilih titik lain sebagai titik awal. Lalu substitusikan nilai-nilai $x_1 = 6$, $y_1 = 0$, $x_s = 2$, dan $y_s = -1$ ke persamaan-persamaan parameter untuk garis. Dengan demikian diperolehlah persamaan-persamaan parameter berikut.

$$x = x_1 + x_s \cdot t = 6 + 2t$$
$$y = y_1 + y_s \cdot t = -t.$$

Kurva parametrik untuk garis $y = -\frac{1}{2}x + 3$ dapat dilihat Gambar 7.7.



(a) $t \in [-3, 0]$ (b) $t \in [0, 1]$ (c) $t \in [-3, 1]$

Gambar 7.7: Kurva parametrik garis $y = -\frac{1}{2}x + 3$ dengan domain t yang berbeda

7.4 Persamaan Parametrik Untuk Irisan Kerucut

Kurva parametrik juga dapat menggambar semua fungsi implisit, terutama irisan kerucut. Persamaan implisit lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ dapat diubah menjadi persamaan-

persamaan parametrik

$$x = r\cos(t)$$
$$y = r\sin(t),$$

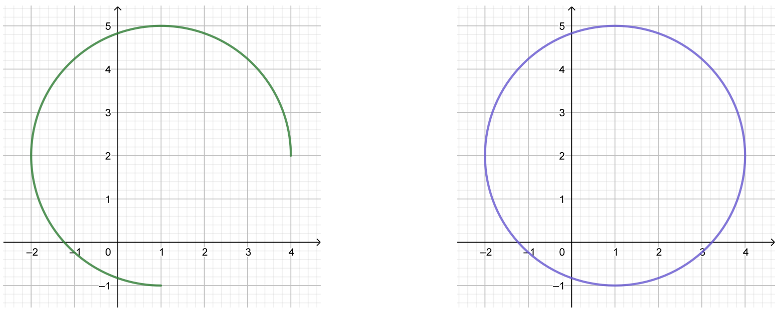
untuk $0 \leq t \leq 2\pi$. Selanjutnya persamaan-persamaan parametrik dari persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ didefinisikan sebagai

$$x = -g + r\cos(t)$$
$$y = -f + r\sin(t),$$

dengan $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ merupakan radius lingkaran. Kurva parametrik untuk lingkaran dengan persamaan-persamaan parametrik

$$x = 1 + 3\cos(t)$$
$$y = 2 + 3\sin(t),$$

dapat dilihat pada Gambar 7.8.



(a) $t \in [0, 3\pi/2]$ (b) $t \in [0, 2\pi]$

Gambar 7.8: Kurva parametrik dari persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

Persamaan-persamaan parametrik untuk parabola $y^2 = 4ax$ adalah

$$x = at^2$$
$$y = 2at.$$

Kemudian persamaan-persamaan parametrik untuk parabola $x^2 = -4ay$ adalah

$$\begin{aligned} x &= 2at \\ y &= -at^2. \end{aligned}$$

Untuk parabola tak standar $(y-h)^2 = 4a(x-k)$, persamaan-persamaan parametriknya adalah

$$\begin{aligned} x &= h + at^2 \\ y &= k + 2at. \end{aligned}$$

Persamaan-persamaan parametrik untuk elips sangat mirip dengan lingkaran. Jika panjang sumbu mayor adalah sama dengan panjang sumbu minor, maka suatu elips dapat dikatakan lingkaran. Oleh karena itu, kurva persamaan elips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dapat dibentuk dari persamaan-persamaan berikut

$$\begin{aligned} x &= a\cos(t) \\ y &= b\sin(t). \end{aligned}$$

Untuk elips $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, maka persamaan-persamaan parametriknya adalah

$$\begin{aligned} x &= h + a\cos(t) \\ y &= k + b\sin(t). \end{aligned}$$

Persamaan-persamaan parametrik untuk hiperbola $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} x &= h \pm a\cosh(t) \\ y &= k \pm b\sinh(t). \end{aligned}$$

7.5 Latihan

1. Sketsalah kurva parametrik berdasarkan persamaan-persamaan parametrik $x = t^2 + t$ dan $y = 2t - 1$, dengan $-1 \leq t \leq 1$!

2. Sketsalah kurva parametrik berdasarkan persamaan-persamaan parametrik $x = 2\cos(t)$ dan $y = \sin(2t)$, untuk $0 \leq t \leq 2\pi$!

3. Tentukan persamaan-persamaan parameterik untuk garis lurus yang melalui titik $A(-2, 0)$ dan $B(2, 2)$!

4. Tentukan persamaan semi-lingkaran jika diketahui persamaan-persamaan parametrik untuk lingkaran: $x = \frac{2rt}{1+t^2}$ dan $y = \frac{r(1-t^2)}{1+t^2}$, untuk $t \in (-1, 1)$ dan $r > 0$! *Clue*: $t = \tan(\theta)$.

5. Tentukan persamaan-persamaan parametrik dari $(x + 1)^2 = 4(y - 1)$!

6. Tentukan panjang kurva dari persamaan-persamaan parametrik $x = 2\cos(t)$ dan $y = \sin(t)$, untuk $0 \leq t \leq 2\pi$!

7. Tentukan persamaan garis singgung dari persamaan-persamaan parametrik $x = 1 + \cos(t)$ dan $y = 1 + 2\sin(t)$ di titik $\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right)$!

Daftar Pustaka

[1] Mishra, Sanjay. (2015). *Fundamentals of Mathematics: Coordinate Geometry*, 2nd ed. Delhi: Pearson.

[2] Silverman, Richard A. (2012). *Modern Calculus and Analytic Geometry.* New York: MacMillan Company.

[3] Kokoska, Stephen. (2013). *Fifty Famous Curves, Lots of Calculus Questions, And a Few Answers.* Bloomsburg: Department of Mathematics, Computer Science, and Statistics, Bloomsburg University.