

# APPUNTI DI SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICI

Istituti Professionali  
Indirizzo M.A.T.

Ing. Enrico Cinalli  
Rev. 01/15

# Sistemi e modelli

APPUNTI MODULO 1

Ing. Enrico Cinalli

4-5 T.I.E.

ISTITUTO PROFESSIONALE PER L'INDUSTRIA L'ARTIGIANATO

## SISTEMI e MODELLI

Sistemi, automazione e organizzazione della produzione

## 1 - INTRODUZIONE

L'*automazione* ha assunto un'importanza e uno sviluppo quasi imprevedibili nei decenni successivi alla seconda guerra mondiale.

Con il termine *automazione* si deve intendere l'insieme di quelle tecniche che affidano alle macchine la produzione e il controllo di essa al fine di ridurre o eliminare l'intervento dell'uomo.

Con il termine *controllo* ci si riferisce a un complesso di operazioni automatizzate che hanno lo scopo di mantenere i valori di una o più grandezze entro i limiti prefissati.

La lavatrice e la lavastoviglie, per esempio, sono macchine utilizzate per eseguire in modo automatico cicli di lavaggio.

In campo industriale l'automazione ha trovato larga applicazione nei processi produttivi delle sostanze nocive, nonché in tutti i cicli di lavorazione, come quello della verniciatura delle automobili, che comportano un rischio per l'integrità fisica dell'uomo. Originariamente l'automazione era basata su una tecnologia di tipo prevalentemente meccanico ed idraulico, solo successivamente fu introdotta quella elettromeccanica.

L'avvento dell'elettronica ha permesso di costruire e dispositivi automatici di controllo più sofisticati: l'impianto di riscaldamento centralizzato di un edificio che eroga calore in funzione della temperatura esterna e di quella interna è un altro esempio di sistema con controllo automatico.

L'introduzione dei circuiti integrati e l'evoluzione dei calcolatori elettronici hanno consentito l'utilizzazione di una *automazione intelligente*, nel senso che è possibile adeguare, entro certi limiti, in un impianto industriale a nuove esigenze di produzione apportando modifiche al software che gestisce l'impianto.

L'automazione, con l'evoluzione della tecnologia, ha conquistato nuove e numerose applicazioni: si pensi ai satelliti artificiali teleguidati in grado di trasmettere dati e immagini di pianeti distanti milioni di chilometri dalla terra. L'interesse non solo scientifico, ma anche industriale, è stato dalle possibilità offerte dall'automazione ha portato alla nascita della *scienza dell'automazione e della tecnologia dell'automazione*. Sono state così formulate leggi, indicate metodologie di analisi e di sintesi, definiti i termini che devono essere utilizzati nella trascrizione di atti e nelle pubblicazioni di comunicazioni scientifiche.

Tra i termini maggiormente ricorrenti nell'ambito della scienza dell'automazione, la parola *sistema* merita particolare attenzione per la valenza che essa assume e per i contenuti concettuali che racchiude.

La parola **sistemi** è molto usata nel linguaggio corrente per descrivere un insieme di parti collegate tra di loro in diversi modi per raggiungere uno scopo comune preciso.

Molto ricorrente ad esempio il termine **sistema scuola** con il quale si indica l'insieme delle persone fisiche (personale docente e non, studenti), delle strutture, delle leggi, dei programmi, ecc. che concorrono per ottenere l'educazione - formazione degli alunni.

Altra espressione molto usata è **sistema sanità** con la quale si intende indicare tutte quelle componenti (personale medico o paramedico, ospedali, ricerca, ecc.) che mirano alla salvaguardia e alla cura della salute.

Spesso si parla di **sistema economico** o **sistema azienda** per esprimere concetti molto generali. Ad esempio con il termine sistema azienda si vuole descrivere l'insieme degli elementi necessari per rappresentare l'azienda moderna:

risorse umane, ricerca, tecnologie, marketing ecc. Il termine sistema intende dare un'indicazione di globalità nell'affrontare l'argomento.

Un elaboratore è un sistema elettronico costituito da una scheda madre contenente circuiti integrati ed altri componenti elettronici, da un terminale video, da una tastiera, dai drive per floppy disk, ecc.

Si possono citare numerosi altri esempi che confermano che il concetto di sistema è comunque del tutto generale e dunque applicabile in qualsiasi campo

## 2 - DEFINIZIONE DI SISTEMA

In modo intuitivo si possono dare le seguenti definizioni dedotte dagli esempi dati nel paragrafo precedente.

↳ **Un sistema è un insieme formato da più elementi interagenti tra di loro, connessi in modo da costituire un'unica entità e organizzati al fine di ottenere un obiettivo prefissato**

↳ **Un sistema di controllo è un insieme di più elementi connessi tra loro e interagenti in modo tale da autoregolarsi.**

L'aspetto più significativo della definizione è che gli elementi o le parti che costituiscono il sistema sono interagenti tra loro, nel senso che il comportamento di ogni elemento dipende dalle azioni che gli altri elementi compiono su di esso.

**Per studiare il comportamento di un qualsiasi sistema è necessario definire i criteri di analisi e di sintesi che bisogna seguire.**

A tal fine possono essere adottate due diverse metodologie:

**1. METODO ANALITICO:** lo studio di un sistema inizia scomponendo il sistema in sottosistemi di minore complessità: i componenti elementari che lo compongono sono isolati dal contesto generale unitamente alle variabili che li caratterizzano e sono studiati singolarmente.

**2. METODO SISTEMISTICO:** affronta lo studio nella sua globalità, considerando i legami esistenti tra le parti e gli elementi di ciascuna di esse

L'approccio di tipo **sistemistico** per la risoluzione dei problemi è oggi molto utilizzato. In pratica si affronta il problema nel modo più generale possibile considerando tutte le componenti che concorrono a formarlo o che ne influenzano il comportamento.

In seguito generalmente si passa alla sua scomposizione in sottoproblemi fino a raggiungere un livello di semplificazione che permette di studiare approfonditamente e più facilmente ognuno di questi tramite il sottosistema che lo rappresenta; infatti la

scomposizione permette di ottenere sottosistemi più elementari e dunque più facilmente studiabili con delle leggi semplici rispetto al sistema iniziale. Questa seconda parte rappresenta un'analisi di tipo classico o **analitico** di ogni sottosistema.

Infatti la parte sistemistica, che affronta lo studio nella sua globalità, spesso ad un certo punto necessita dell'approccio analitico che permette la scomposizione del problema che risulterebbe difficilmente risolvibile nella sua interezza. Il metodo analitico studia ogni singolo sottosistema e le sue interazioni con gli altri determinandone la propria risposta alla sollecitazione. Non sempre comunque è possibile effettuare la scomposizione. Si pensi ad esempio al sistema ecomarino, risulta improponibile pensare di studiare il comportamento di una specie animale o vegetale separandola dal resto dell'ambiente dove è inserita; infatti è necessario studiare il comportamento dell'ambiente marino nel suo complesso. In questo caso l'unico approccio valido è pertanto quello sistemistico.

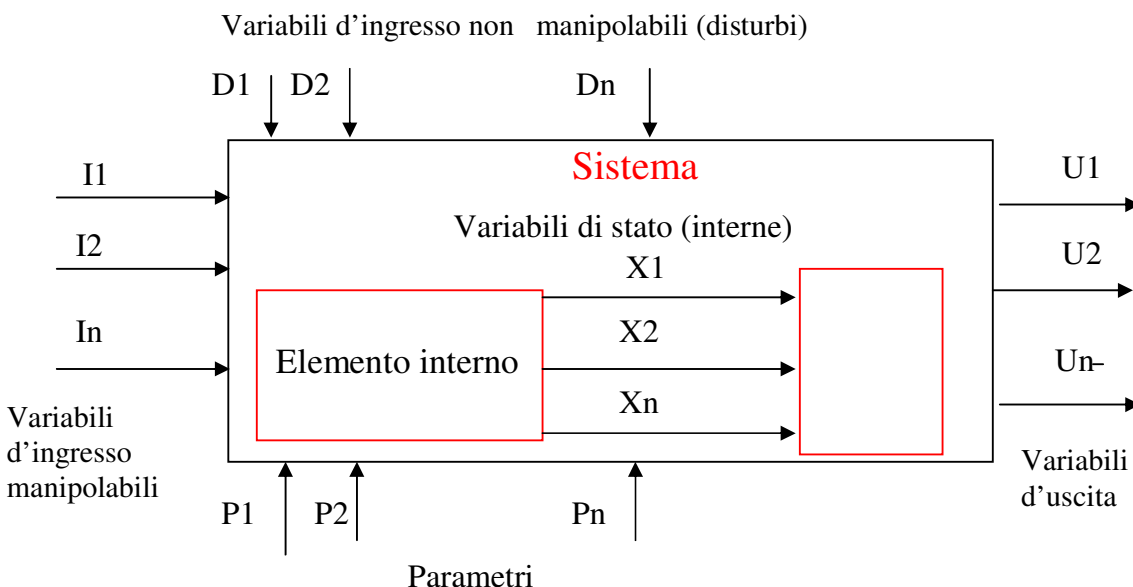
I metodi di risoluzione più convenienti nel campo tecnico, in generale, sono un misto tra quello sistemistico e quello analitico.

A causa delle interazioni tra gli elementi, si intuisce che un sistema non è sempre una semplice somma delle sue parti ma qualcosa di più; in particolare rispetto agli effetti ottenuti.

Per studiare il comportamento di un sistema già esistente o per affrontare i problemi legati alla realizzazione di un nuovo sistema, è necessario delimitarlo, identificare i suoi elementi fondamentali e le interazioni che intercorrono tra essi, individuare le **variabili** che si vogliono analizzare, ossia le grandezze suscettibili di essere modificate direttamente o indirettamente, e come esse possono essere misurate.

In un sistema si definiscono:

- le variabili d'ingresso (I1, I2, I3, .....In)
- le variabili d'uscita (U1, U2, U3, ...Un)
- i parametri (P1, P2, P3, ...Pn)
- le variabili interne o di stato (X1, X2, X3, ...Xn)



**Variabili d'ingresso:** le sollecitazioni che entro certi limiti possono essere variate dall'intervento dell'uomo si chiamano grandezze manipolabili e sono indicate con  $(I_1, I_2, I_3, \dots, I_n)$ , mentre le sollecitazioni che variano indipendentemente da ogni controllo sono le grandezze non manipolabili o disturbi e sono indicate con  $(D_1, D_2, D_3, \dots, D_n)$ .

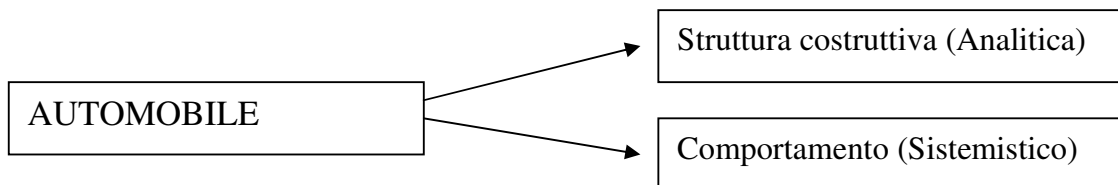
**Variabili d'uscita:** le variabili d'uscita o variabili dipendenti, indicate con  $(U_1, U_2, U_3, \dots, U_n)$  rappresentano le azioni che il sistema esercita sull'ambiente, ossia la risposta del sistema alle sollecitazioni ad esso applicate.

**Parametri:**, indicati con  $(P_1, P_2, P_3, \dots, P_n)$ , sono grandezze caratteristiche del sistema. Ad esempio in un sistema elettrico composto da induttori, resistori e condensatori, i parametri sono la resistenza, la capacità e l'induttanza espressi rispettivamente in Ohm, Farad e Henry.

**Variabili interne o variabili di stato:**, indicate con  $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ , descrivono l'evoluzione interna del sistema, contengono informazioni sulla sua storia passata e consentono di determinare gli stati futuri quando sono note le condizioni iniziali e le sollecitazioni ad esso applicate.

*Si indicano con il termine variabili quelle grandezze, all'interno dei sistemi, soggette a variazioni nel tempo. Le funzioni che rappresentano l'andamento di queste variabili si dicono segnali.*

Un esempio di sistema è l'automobile. Infatti un'automobile può essere esaminata e studiata come una semplice struttura costruttiva oppure, adottando un'ottica sistemistica, se ne può studiare il comportamento durante il funzionamento.



Ad esempio possiamo studiarne la traiettoria ed il modo con cui quest'ultima può variare agendo sui comandi.

L'automobile vista come un "oggetto astratto", costituisce un sistema e si considerano caratteristiche rilevanti per lo studio che ci siamo proposti:

posizione	velocità	accelerazione	posizione del volante	pressione sul pedale
-----------	----------	---------------	-----------------------	----------------------

Queste grandezze, funzioni del tempo, che collegano l'automobile (il nostro oggetto) con l'ambiente esterno, sono le variabili.

La posizione, la velocità e l'accelerazione dell'automobile sono le grandezze che vogliamo studiare, osservare e pertanto vengono indicate come **variabili di osservazione o di uscita** del sistema.

La posizione del volante e la pressione sul pedale sono invece le grandezze sulle quali possiamo agire e vengono dette **variabili di ingresso**.

Graficamente distinguiamo questi due tipi di variabili rappresentando quelle d'ingresso con delle frecce entranti verso il sistema e quelle di osservazione (uscita) con delle frecce uscenti, come mostra la fig.1.

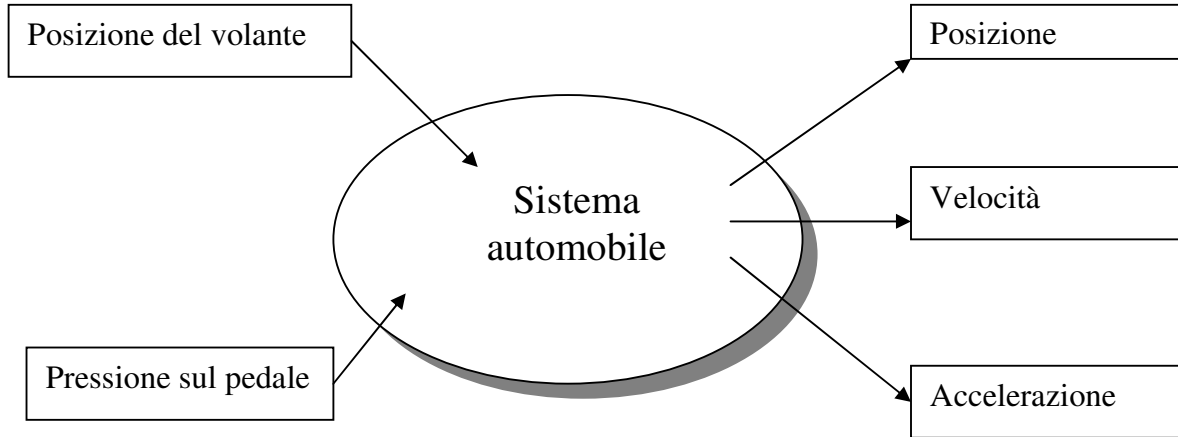


Fig.1

L'evoluzione di alcune variabili è conseguenza di altre. Infatti le variabili d'ingresso sono dette anche indipendenti, o cause, mentre quelle di uscita sono dipendenti, o effetti. Nel nostro esempio modificando la pressione sul pedale dell'acceleratore variano posizione, velocità e accelerazione dell'automobile. Quando si può distinguere tra variabili d'ingresso e d'uscita il sistema si dice orientato.

Il modo più comune per rappresentare un sistema è quello di utilizzare un rettangolo (detto anche scatola nera perché non si prende in considerazione la sua struttura interna) con una freccia per ogni variabile sia d'ingresso che d'uscita (fig.2).

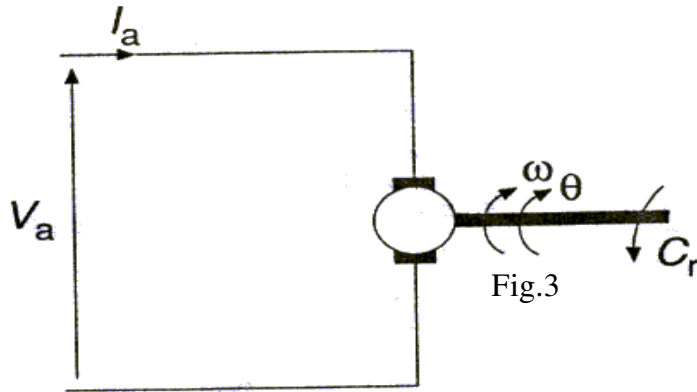


Fig.2

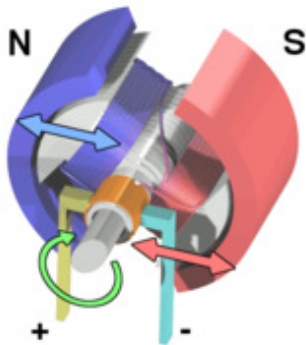


**ESEMPIO -1**

Il motore in corrente continua a magnete permanente schematizzato in fig.3 è un sistema: è un insieme di componenti che interagiscono per fare girare l'asse; in esso si possono individuare diverse variabili:



$V_a$	Tensione di armatura
$I_a$	Corrente di armatura
$C_r$	Coppia resistente
$\omega$	Velocità angolare
$\theta$	Posizione angolare



Analizziamo queste variabili: il circuito di armatura viene alimentato dal generatore di tensione  $V_a$  (variabile d'ingresso). La corrente  $I_a$  è legata alla tensione  $V_a$ , pertanto  $I_a$  è una variabile d'uscita.

La coppia resistente rappresenta il carico che noi applichiamo sull'albero del motore, il suo valore influenza la velocità di rotazione e dunque  $C_r$  è una variabile d'ingresso.

Chiaramente la posizione angolare e la velocità angolare sono effetti dovuti alla rotazione del motore; questa rotazione dipende dalle variabili d'ingresso  $V_a$  e  $C_r$  dunque  $\theta$  e  $\omega$  sono variabili d'uscita. Il sistema motore in corrente continua può dunque essere rappresentato con un blocco con 2 variabili d'ingresso e 3 d'uscita (fig.4)

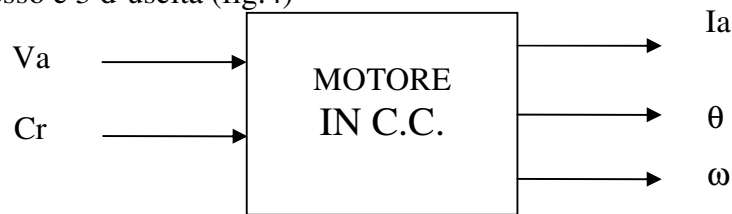


Fig.4

Spesso capita che interessi studiare o osservare solamente alcune delle variabili di uscita. Per il motore in C.C. spesso interessa osservare solamente l'andamento della velocità angolare in funzione della tensione di armatura con ( $C_r$  costante).

Il sistema si rappresenta allora con il blocco di fig.5

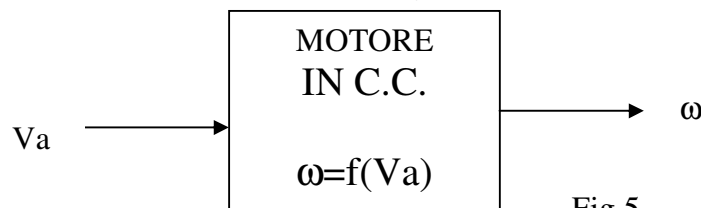


Fig.5

**ESEMPIO - 2**

Il potenziometro: esempio di trasduttore di posizione angolare. (Fig. 6)

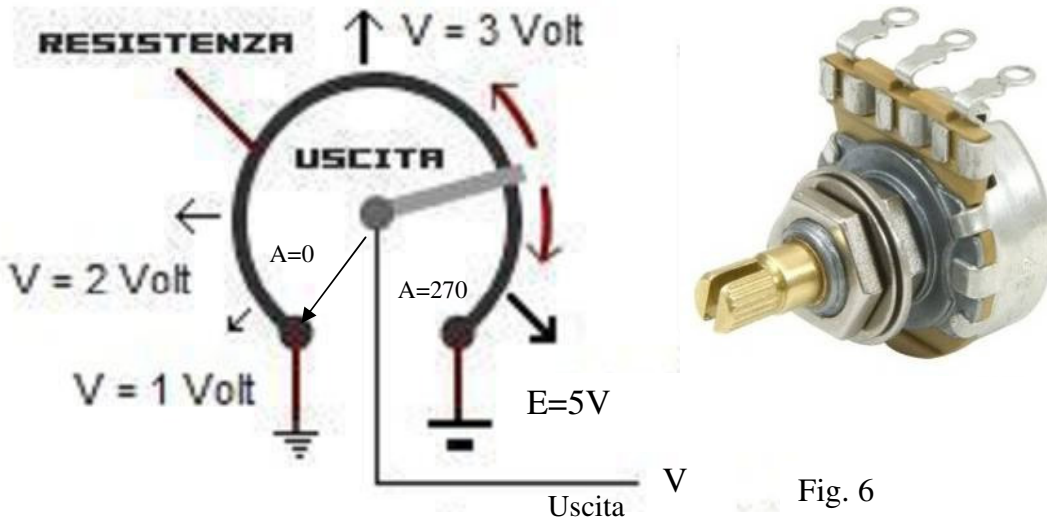


Fig. 6

L'indice del potenziometro, scorrendo lungo la pista ad arco di circonferenza preleva una tensione proporzionale all'angolo di rotazione.

L'angolo di rotazione complessivo è =  $270^\circ$  ; all'angolo di rotazione =  $0$  corrisponde la tensione =  $0$  Volt; all'angolo di rotazione =  $270^\circ$  corrisponde la tensione =  $5$  Volt; ad ogni posizione intermedia corrisponderà una tensione intermedia.

Le variabili del sistema sono:

Simbolo	Descrizione	Ingresso/Uscita
A	Angolo di rotazione	Ingresso
E	Tensione d'ingresso costante	Ingresso
R	Resistenza	Uscita
V	Tensione d'uscita	Uscita

Possiamo rappresentare il sistema con due ingressi (A, E) e un'uscita (V) (fig.7)

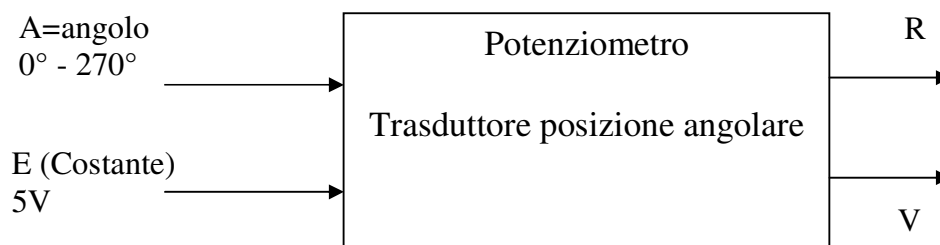
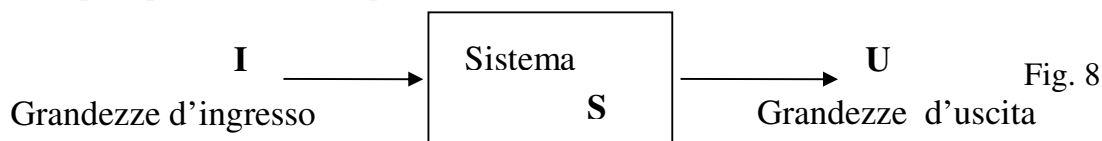


Fig. 7

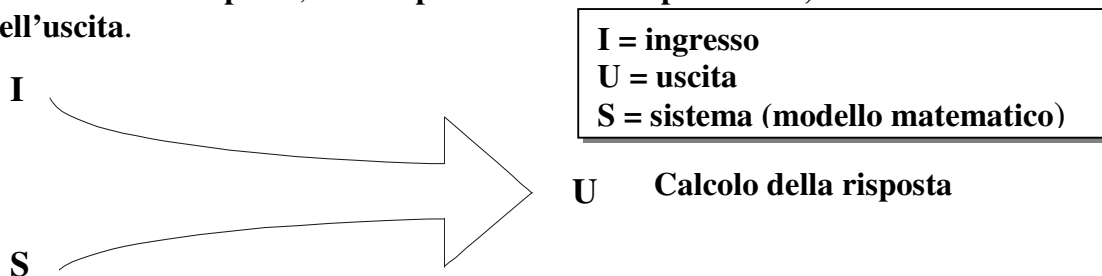
### 3 - CLASSIFICAZIONE DEI SISTEMI.

Nei paragrafi precedenti è stata data una definizione del tutto generale per i sistemi che risulta però poco utile ai fini pratici che ci interessano.

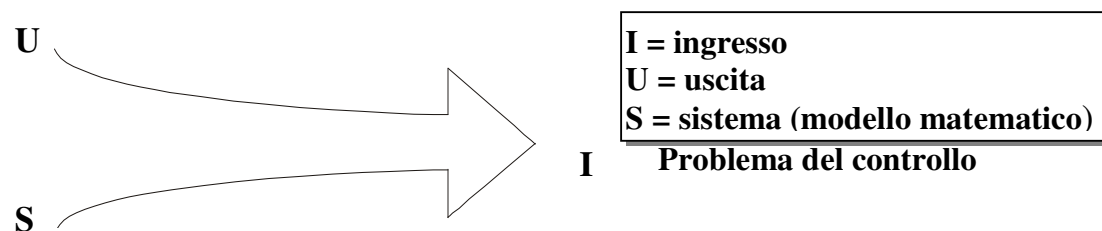


Riferendoci alla fig. 8 i problemi di cui si occupa la teoria dei sistemi sono essenzialmente tre, che si possono riassumere come segue.

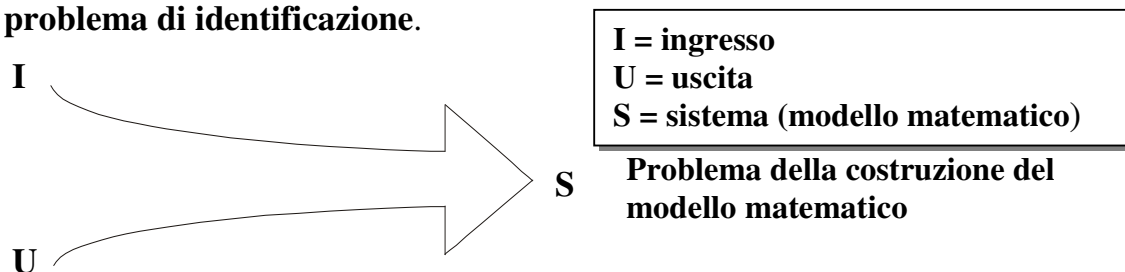
- 1) Sono noti l'ingresso **I** ed il sistema **S** (modello matematico) e si vuole determinare l'uscita **U**, cioè si vuole prevedere come reagirà il sistema **S**. Si parla in questo caso di **calcolo della risposta**, o di **problema della previsione**, o anche di **calcolo dell'uscita**.



- 2) Noti **U** ed **S** vogliamo conoscere l'ingresso **I**. In altre parole, vogliamo sapere quale deve essere l'ingresso da applicare al sistema di cui è noto il modello per ottenere determinate uscite. Un esempio tipico è quello del lancio spaziale: quale deve essere l'ingresso (velocità iniziale e direzione) per lanciare in orbita un satellite? Questo tipo di problema viene detto **problema del controllo**.



- 3) Noti **I** ed **U** vogliamo conoscere il sistema **S**. Si tratta di un problema un pò più complesso. Nei primi due casi infatti essendo noto **S** conosciamo il modello e quindi la corrispondenza tra ingressi e uscite corrispondenti, quindi abbiamo tutte possibili coppie ingresso - uscita. In questo caso invece abbiamo solo alcune coppie ingresso - uscita, magari ottenute per via sperimentale. Dalla loro conoscenza possiamo determinare il loro modello matematico? Questo tipo di problema è detto **problema della costruzione del modello matematico** oppure **problema di identificazione**.



E' importante identificare le caratteristiche e le proprietà più significative dei sistemi al fine di farne una classificazione che ne faciliti lo studio in modo che sistemi appartenenti alla stessa classe possono essere studiati utilizzando le medesime metodologie.

Di seguito viene data una classificazione dei sistemi precisando che uno stesso sistema può, per le sue caratteristiche, appartenere anche a più classi.

**Le principali classi sono:**

1. *sistemi fisici ed astratti;*
2. *sistemi naturali, artificiali e misti;*
3. *sistemi aperti e chiusi;*
4. *sistemi deterministici e probabilistici;*
5. *sistemi continui e discreti;*
6. *sistemi statici e dinamici;*
7. *sistemi invariati e varianti;*
8. *sistemi lineari e non lineari.;*

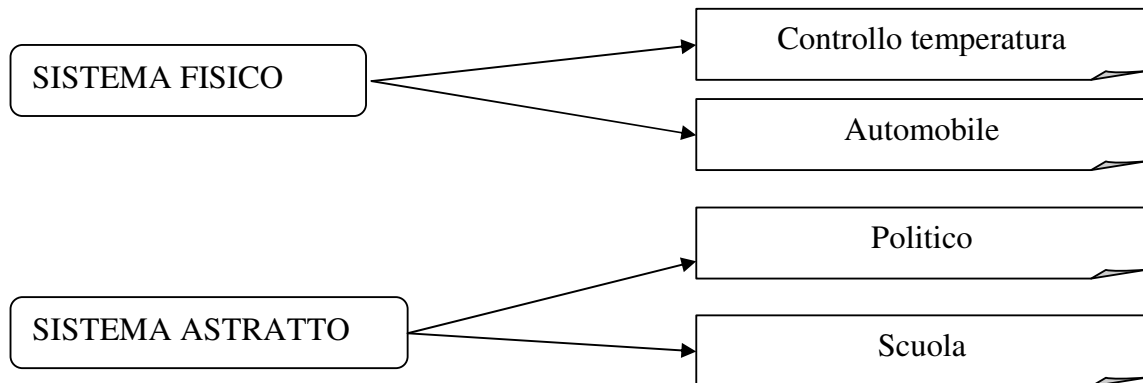
**Le principali classi per lo studio dei sistemi elettrici – elettronici sono:**

- a) *sistemi continui e discreti;*
- b) *sistemi statici e dinamici;*
- c) *sistemi lineari e non lineari.*

### 3.1 - Sistemi fisici ed astratti.

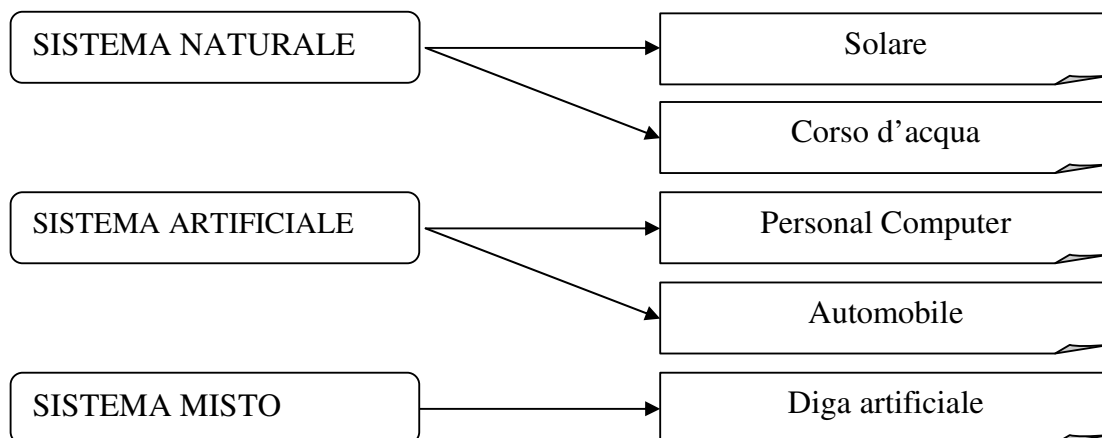
Un sistema si dice **fisico** quando le grandezze che lo caratterizzano sono direttamente misurabili; in caso contrario il sistema si dice **astratto**.

Per determinare il tipo di sistema bisogna dunque determinare le grandezze che lo caratterizzano e verificare se queste sono misurabili. Ad esempio il sistema di controllo della temperatura, umidità e pressione in un ambiente è di tipo fisico perché possiamo misurare queste grandezze nella loro unità (°C, atm, ecc.); il sistema politico invece è astratto: non è possibile tenere sotto controllo, ad esempio, le “correnti di partito” o i nuovi orientamenti politici. Anche il sistema automobile, introdotto in precedenza, è di tipo fisico; infatti se studiamo la sua traiettoria, posizione, velocità e accelerazione sono grandezze misurabili. Contrariamente il sistema scuola risulta astratto perché se consideriamo la qualità dell’insegnamento non è possibile misurarla secondo le classiche unità di misura.



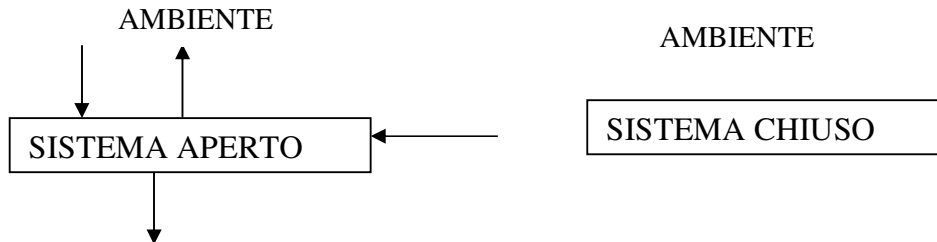
### 3.2 - Sistemi naturali, artificiali e misti.

I sistemi **naturali** sono quelli che già esistono in natura, mentre quelli **artificiali** sono creati dall'uomo. Quando l'intervento dell'uomo agisce su un sistema naturale e ne modifica alcune caratteristiche, allora il sistema si definisce **misto**.



### 3.3 - Sistemi aperti e chiusi.

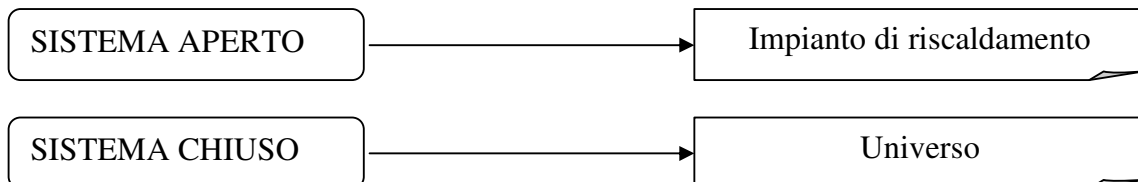
Un sistema si dice **aperto** se è in grado di scambiare energia o informazioni con l'ambiente che lo circonda, mentre si dice **chiuso** se non interagisce con elementi esterni ad esso



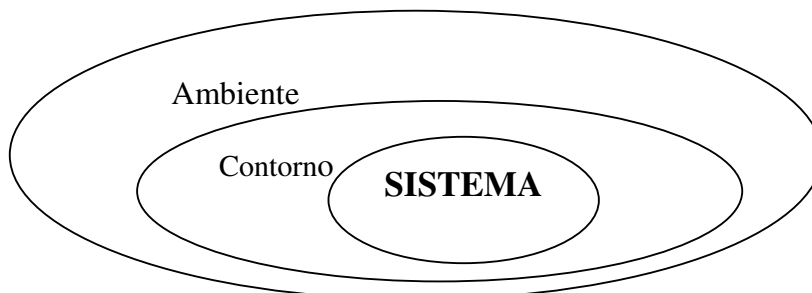
Un impianto di riscaldamento è un sistema aperto perché interagisce con l'ambiente esterno dal quale riceve energia che poi restituisce all'ambiente stesso in tempi più o meno lunghi.

L'universo nella sua totalità è un sistema chiuso e naturalmente, in un sistema di questo tipo, le uniche variabili ammissibili sono quelle interne.

In realtà non esistono sistemi chiusi perché qualsiasi sistema interagisce, anche se in modo non evidente, con l'ambiente che lo circonda. In pratica un sistema aperto può essere considerato chiuso se le sue interazioni con l'ambiente che lo circonda sono così deboli da poter essere trascurate. Ad esempio il sistema solare può essere considerato un sistema chiuso solo se vengono trascurati gli scambi di materia e di energia con la parte restante della galassia alla quale appartiene



È possibile definire il **contorno** di un sistema la zona che permette di determinare quali elementi sono contenuti nel sistema stesso



## Ambiente

Tutti quei sistemi in cui la temperatura ambiente influenza il loro comportamento sono es. di sistemi aperti come nel caso di un sistema di riscaldamento.

Ovviamente le interazioni possono essere di altro tipo:

1. elettromagnetico
2. ambientale
3. sociale

In realtà tutti i sistemi reali sono aperti in quanto ci sono sempre interazione anche minime con l'ambiente.

**Quando questi scambi tra sistema es. ambiente producono effetti trascurabili sul comportamento rispetto a quello dovuti agli elementi interni, il sistema è considerato chiuso.**

Un esempio di sistema chiuso è l'universo.

### 3.4 - Sistemi deterministici e probabilistici.

I sistemi sono classificati in *deterministici* e *probabilistici* in relazione alla risposta che essi forniscono quando sono sottoposti ad una medesima sollecitazione.

I sistemi **deterministici** forniscono sempre la stessa risposta se la medesima sollecitazione, a parità di condizioni iniziali, è applicata al loro ingresso.

Quando si conoscono le condizioni iniziali di un sistema deterministico, le sollecitazioni ad esso applicate e le relazioni matematiche che legano le variabili d'ingresso a quelle d'uscita, è sempre possibile prevedere la sua evoluzione, ossia lo stato nel quale esso verrà a trovarsi dopo un certo intervallo di tempo.

L'impianto di riscaldamento di una stanza è un sistema deterministico perché è possibile determinare quale sarà la temperatura della stanza in ogni istante, note la cubatura della stanza, la sua temperatura iniziale, la quantità di calore fornita dall'impianto, la dispersione di calore attraverso le pareti e alcune ipotesi semplificative.

Un sistema **probabilistico**, a differenza di quello deterministico, presenta nella sua evoluzione fenomeni di casualità perché la grandezza misurata all'uscita del sistema evolve verso stati che non portano alla medesima risposta, anche a parità di condizioni iniziali e delle sollecitazioni ad esso applicate.

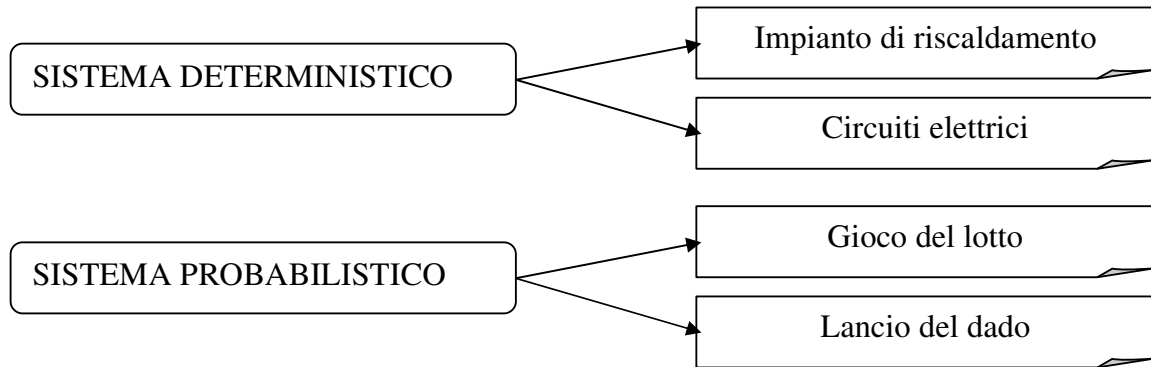
Nei sistemi *probabilistici* si può prevedere solo la *probabilità* che la grandezza d'uscita assuma un determinato valore.

Il gioco del lotto è un sistema probabilistico perché non si può avere la certezza che un determinato numero venga estratto, ma si può calcolare solo la probabilità con la quale accade l'evento.

Nella realtà anche i sistemi deterministici sono probabilistici perché l'ambiente esterno esercita su di essi disturbi casuali.

L'impianto di riscaldamento precedentemente considerato non può essere considerato deterministico perché la sua risposta dipende dalla temperatura esterna la quale, variando in modo non prevedibile, incide in modo casuale sulla dispersione di calore verso l'esterno. Tuttavia, se in un certo intervallo di tempo le variazioni della temperatura

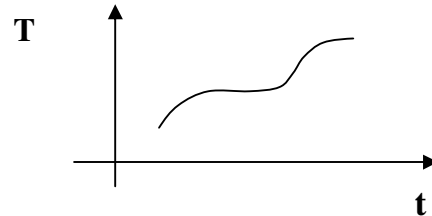
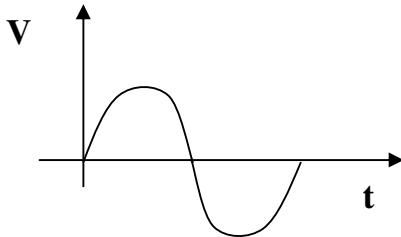
esterna sono di entità tanto modeste da poter essere trascurate, allora il sistema può essere considerato deterministico.



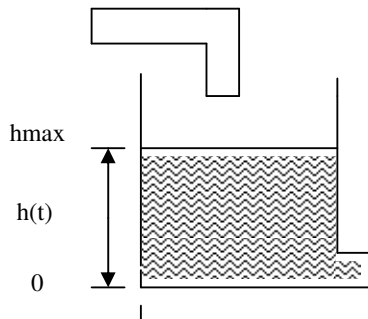
### 3.5 – Sistemi continui e discreti

I sistemi, con riferimento ai valori che possono assumere le variabili d'uscita possono essere classificati in continui e discreti.

Un sistema si definisce **continuo** quando tutte le variabili che lo caratterizzano sono continue (grandezze analogiche), oppure se i valori significativi delle variabili d'uscita possono essere messi in corrispondenza con quelli appartenenti a un sottoinsieme  $R$  dei numeri reali (Es: tensione sinusoidale, variazione della temperatura)

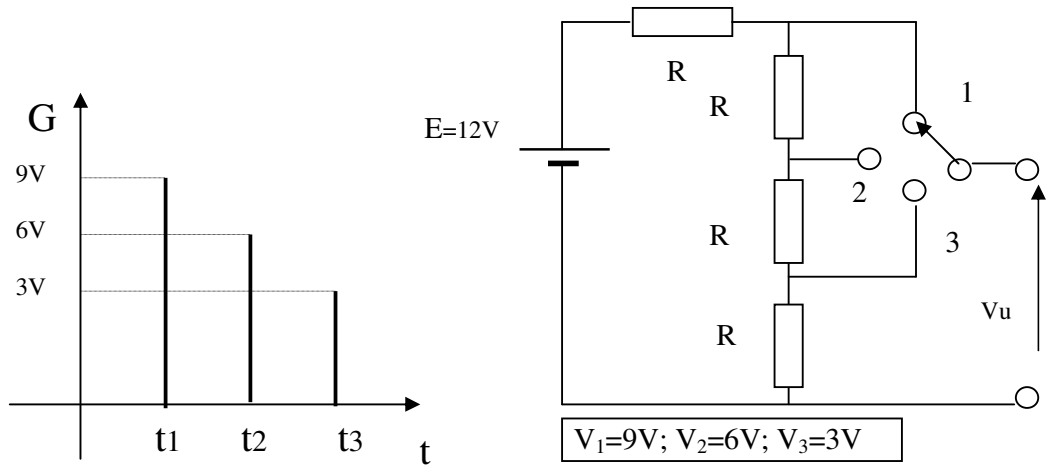


Ad esempio il serbatoio idrico di accumulo rappresentato in figura è un sistema continuo perché il livello  $h$  del liquido nel serbatoio (variabile d'uscita) può assumere tutti i valori compresi tra  $h = 0$  e  $h = h_{max}$  che possono differire l'uno dall'altro anche di un  $\Delta h$  infinitesimo.



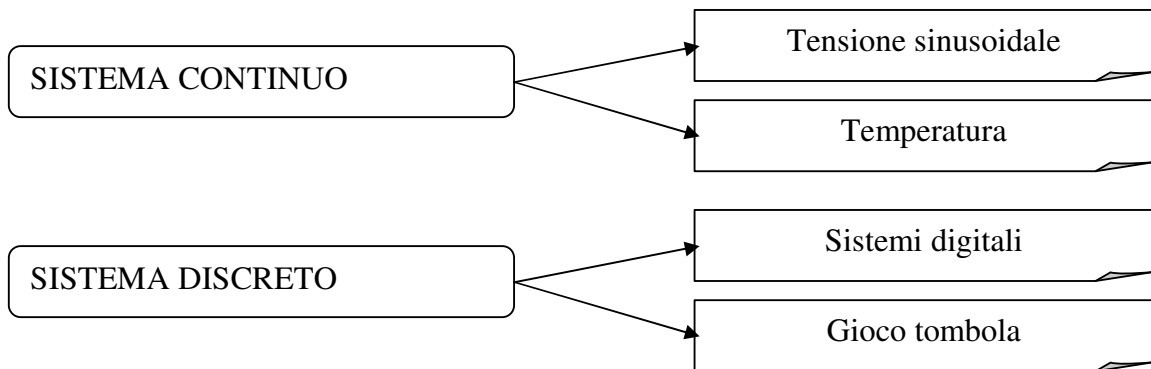


Un sistema si definisce **discreto** se almeno una grandezza è discreta, i valori possibili della grandezza appartengono ad un insieme di valori prefissati, oppure se i valori significativi di almeno una delle variabili di uscita possono essere messi in corrispondenza con quelli appartenente a un sottoinsieme  $Z$  dei numeri interi; i valori possibili della grandezza appartengono ad un insieme prefissato di valori (esempio: sistemi digitali 0 a 1; lancio di un dado; gioco della tombola ; ecc....).



$$V_1 = \frac{E}{4R} \cdot 3R = 9V \qquad V_2 = \frac{E}{4R} \cdot 2R = 6V \qquad V_3 = \frac{E}{4R} \cdot R$$

Il sistema elettrico rappresentato in figura è un sistema discreto perché la tensione d'uscita  $V_u$  (variabile d'uscita) può assumere, in relazione alla posizione del deviatore, solo tre valori (9V, 6V, 3V) che costituiscono un insieme discreto.



### 3.6 Sistemi statici e dinamici

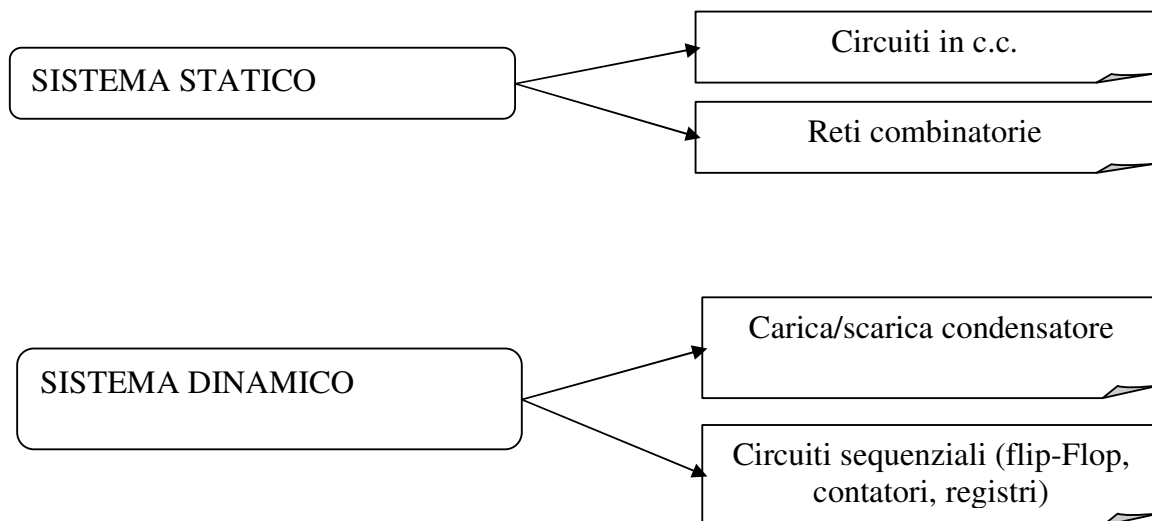
Un sistema si definisce **statico** quando le grandezze che lo caratterizzano non variano nel tempo

Esempio: circuito resistivo in c.c., la corrente  $I$  assume sempre lo stesso valore indipendentemente dal tempo, sono costanti i valori di  $R$  e di  $E$ .

Un sistema si definisce **dinamico** quando le grandezze che lo caratterizzano variano nel tempo.

Esempio: circuito per la carica e scarica del condensatore, la tensione ai capi del condensatore varia nel tempo

In un sistema dinamico è come se fosse presente una memoria: l'uscita è funzione anche dai valori assunti in precedenza (oltre che della sollecitazione applicata). Il valore dell'uscita nell'istante  $t$  dipende anche dal suo andamento negli istanti precedenti; di conseguenza nello studio di un tale sistema è fondamentale la conoscenza delle condizioni iniziali.



Esempio sistemi con memoria, circuiti con induttanza e capacità, sistemi meccanici con molle, circuiti digitali flip-flop: contatori-memorie-registri.

Esempio: una capacità immagazzina energia

$$E = \frac{1}{2} CV^2$$

### 3.7 Sistemi varianti e invariati

Un sistema si dice **variante o non stazionario** quando le caratteristiche non sono costanti nel tempo.

Un sistema si dice **invariante o stazionario** se i parametri che lo caratterizzano rimangono costanti nel tempo e di conseguenza anche le leggi che legano le sollecitazioni alle risposte rimangono invariate nel tempo.

Un sistema nel quale il legame tra le variabili d'uscita  $Y$  e quelle d'ingresso  $I$  sia espresso da una relazione del tipo:

$$Y=K.I$$

è invariante nel tempo perché il parametro  $K$ , e di conseguenza anche la legge che lega la sollecitazione alla risposta, non varia nel tempo.

Un sistema descritto dalla relazione

$$Y=K(t).I$$

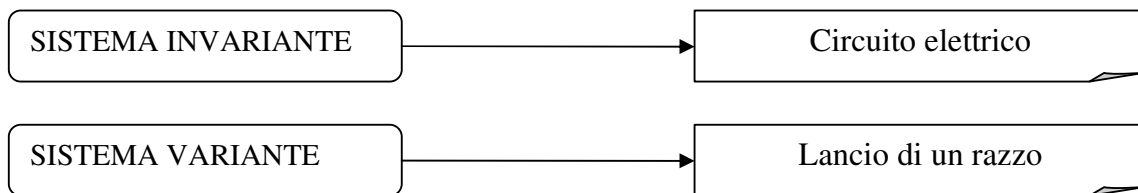
E invece un sistema variante nel tempo perché il parametro  $K$  è funzione del tempo.

Se consideriamo un razzo lanciato nello spazio esso perde materia durante il tragitto, in quanto espelle i gas combusti, pertanto le sue caratteristiche (la sua massa) non sono costanti e si tratta di un sistema **non stazionario o variante**.

Invece il più delle volte un circuito elettrico ha caratteristiche costanti (i componenti mantengono i propri valori nel tempo) e rappresenta un sistema **invariante o stazionario**.

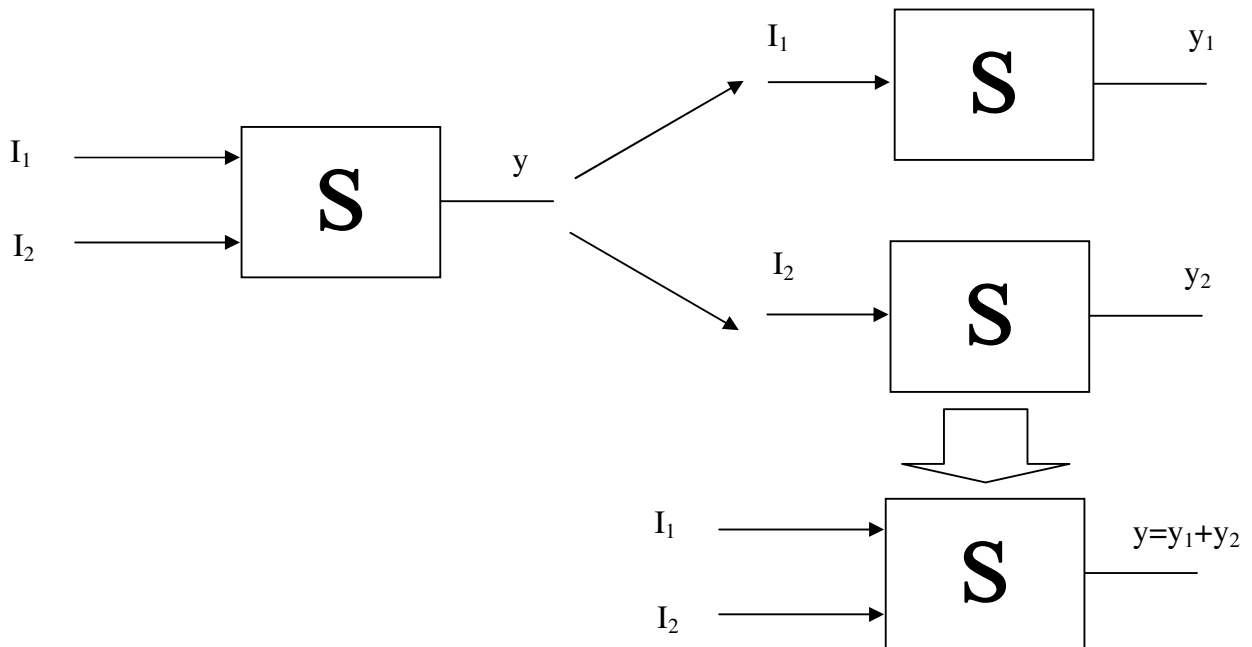
In definitiva un sistema invariante nel tempo fornisce, a parità di condizioni iniziali e di sollecitazione applicata, la medesima risposta indipendentemente dall'istante in cui esso è sollecitato.

In realtà quasi tutti i sistemi sono varianti perché modificano nel tempo, a più o meno breve termine, le loro caratteristiche come ad esempio la resistenza il cui valore può subire delle variazioni dopo anni.



### 3.8 Sistemi lineari e non lineari

Un sistema si dice **lineare** se è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti.



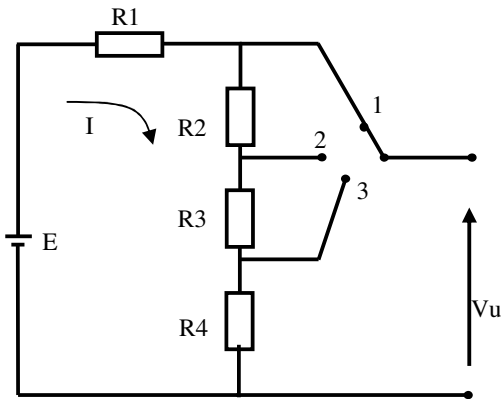
Per un sistema lineare gli effetti dovuti a più cause sono la risultante, **somma algebrica**, degli effetti prodotti da ogni causa applicata singolarmente.

Lo studio dei sistemi lineari risulta così semplificato perché riportato allo studio di sottosistemi più semplici.

È fondamentale lo studio dei sistemi **stazionari e lineari**, con i quali inoltre si cerca di lavorare soprattutto nel campo tecnico.

**Esercizio N°1 (sistema discreto)**

Dato il circuito di figura calcolare le tre tensioni d'uscita.

**DATI**

$$E = 120V$$

$$R2 = 2R1$$

$$R3 = 3R1$$

$$R4 = 4R1$$

$$I = \frac{E}{R1 + R2 + R3 + R4} = \frac{120}{R1 + 2R1 + 3R1 + 4R1} = \frac{120}{10R1}$$

$$V_3 = R4 * I = \frac{4R1 * 120}{10R1} = 48V$$

$$V_2 = (R3 + R4) * I = (3R1 + 4R1) * \frac{120}{10R1} = \frac{7R1 * 120}{10R1} = 84V$$

$$V_1 = (R3 + R2 + R4) * I = (2R1 + 3R1 + 4R1) * \frac{120}{10R1} = \frac{9R1 * 120}{10R1} = 108V$$

**Esercizio N°2 (sistema lineare)**

Dato il circuito di fig.1 (sistema lineare) calcolare la differenza di potenziale  $V_{AB}$

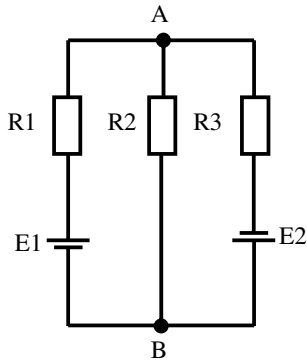


Fig.1

**DATI**

$$E1 = 100V$$

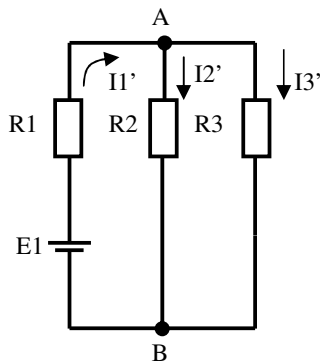
$$E2 = 200V$$

$$R1 = R2 = R3 = 10K$$

**1ª FASE**

$V_{AB}' \rightarrow E1$  ( $E2 = 0 \rightarrow$  CORTO CIRCUITO)

Lo schema di Fig.1 si semplifica nello schema di Fig.2



$$I1' = \frac{E1}{R2 // R3 + R1} = \frac{100}{(5+10) * 10^3} = \frac{100}{15} mA$$

$$V_{AB}' = R2 // R3 * I1' = 5 * 10^3 * \frac{100}{15} * 10^{-3} = \frac{100}{3} V$$

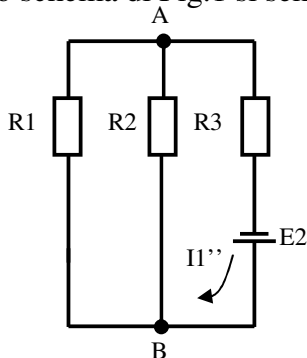
$$V_{AB}' = \frac{100}{3} V$$

Fig.2

**2ª FASE**

$V_{AB}'' \rightarrow E2$  ( $E1 = 0 \rightarrow$  CORTO CIRCUITO)

Lo schema di Fig.1 si semplifica nello schema di Fig.3



$$I1'' = \frac{E2}{R1 // R2 + R3} = \frac{200}{(5+10) * 10^3} = \frac{200}{15} mA$$

$$V_{AB}'' = -R1 // R2 * I1'' = -5 * 10^3 * \frac{200 * 10^{-3}}{15} = -\frac{200}{3} V$$

$$V_{AB}'' = -\frac{200}{3} V$$

Fig.3

**3ª FASE**

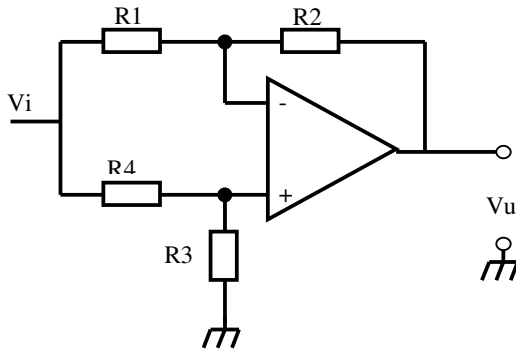
Somma algebrica

$$V_{AB} = V_{AB}' + V_{AB}'' = \frac{100}{3} - \frac{200}{3} = -\frac{100}{3} = -33,3V$$

$$V_{AB} = -33,3V$$

**Esercizio N°3 (sistema lineare)**

Dato il circuito di Fig.1 (sistema lineare) calcolare  $V_u$



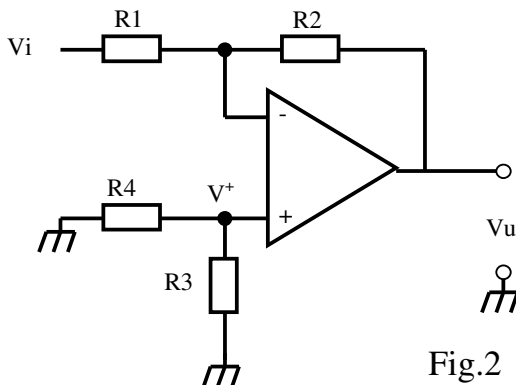
DATI

- $V_i = 2V$
- $R_1 = 10K$
- $R_2 = 20K$
- $R_3 = 30K$
- $R_4 = 40K$

Fig.1

**1ª FASE CONTRIBUTO INVERTENTE**

Lo schema di Fig.1 si semplifica nello schema di Fig.2.



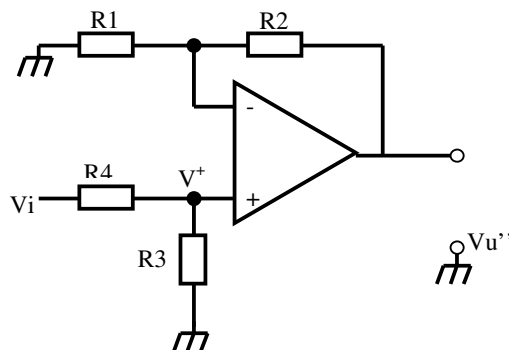
$$V_U' = -\frac{R_2}{R_1} * V_i = -\frac{20 * 10^3}{10 * 10^3} * 2 = -4V$$

$$V_U' = -4V$$

Fig.2

**2ª FASE CONTRIBUTO NON INVERTENTE**

Lo schema di Fig.1 si semplifica nello schema di Fig.3.



$$V_U'' = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) * V^+$$

$$V_U'' = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) * \frac{V_i}{R_4 + R_3} * R_3$$

$$V_U'' = \left(1 + \frac{20 * 10^3}{10 * 10^3}\right) * \frac{2}{(40 + 30) * 10^3} * 30 * 10^3$$

$$V_U'' = (1 + 2) * \frac{2 * 30}{70} = \frac{18}{7}V$$

Fig.3

$$V_U'' = \frac{18}{7}V$$

$$V_U = V_U' + V_U''$$

**3ª FASE SOMMA ALGEBRICA**

$$V_U = -4 + \frac{18}{7} = \frac{-28 + 18}{7} = \frac{-10}{7} = -1,43V$$

$$V_U = -1,43V$$

**Esercizio N°5 SISTEMA DI RILEVAMENTO DELLA VELOCITA'**

Il sistema di rilevamento, schematizzato in Fig.1, è costituito da due fotocellule, a raggi infrarossi, distanti 1m l'una dall'altra e da un contatore.

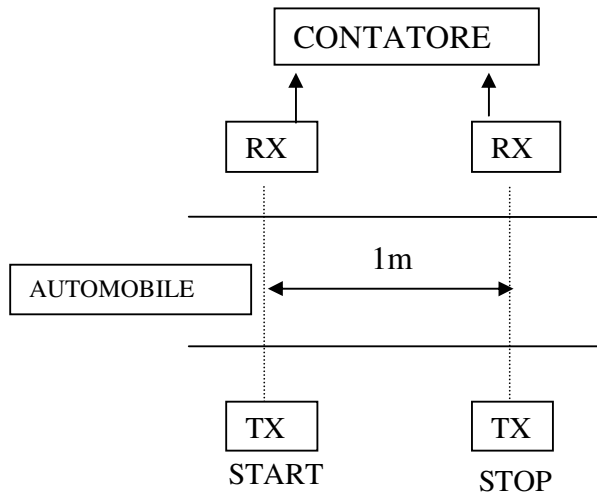


Fig.1

Il segnale di start, che avvia il conteggio, è generato quando un autoveicolo in moto interrompe il raggio emesso dal primo dispositivo TX (start).

Il segnale di stop, che arresta il conteggio, viene generato quando l'autoveicolo, dopo aver percorso 1m, distanza delle fotocellule, interrompe il raggio emesso dal secondo dispositivo TX.

La velocità scalare media dell'autoveicolo è:  $V = \frac{S}{T}$        $S = 1m$

Dall'esame dello schema di Fig.1 ricavare :

1. variabili d'ingresso;
2. variabili d'uscita;
3. parametri del sistema;
4. classificare il sistema;

**SOLUZIONE**

Il sistema indicato in Fig.1 può essere schematizzato nello schema di Fig.2.

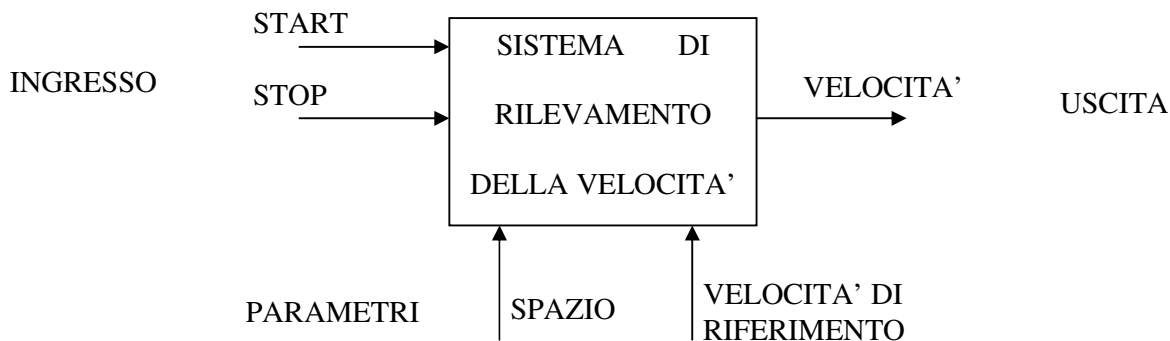


Fig.2



Le variabili d'ingresso sono:

1. start;
2. stop.

Le variabili d'uscita sono:

1. velocità.

I parametri sono:

1. spazio;
2. velocità di riferimento.

Il sistema può essere così classificato:

- **DETERMINISTICO** perché è possibile determinare con certezza la velocità dell'autoveicolo.
- **INVARIANTE NEL TEMPO** perché si suppone che gli elementi del sistema conservino invariate nel tempo le loro caratteristiche.
- **CONTINUO** perché la variabile d'uscita assume tutti i valori che possono essere messi in corrispondenza con un sottoinsieme di numeri reali.
- **SENZA MEMORIA** perché la variabile d'uscita dipende dai segnali di start e di stop generati durante il passaggio dell'autoveicolo. Al termine di ogni rilevamento il sistema è automaticamente inizializzato.

**Esercizio N°6 SISTEMA DI RILEVAMENTO DELLA CONCENTRAZIONE DI GAS**

Il sistema di rilevamento della concentrazione di gas presente in una stanza è costituito da un opportuno sensore di gas, da un circuito elettronico adatto a trasformare una variazione della concentrazione di gas in una variazione di tensione ad essa proporzionata.

Questo sistema può essere collegato ad un sistema di allarme che deve azionare un'elettrovalvola per arrestare il flusso del gas e contemporaneamente una sirena di segnalazione nel caso in cui i valori della concentrazione del gas superino quelli prestabiliti corrispondenti ad una determinate tensione di riferimento.

In condizioni normali l'elettrovalvola deve rimanere aperta.

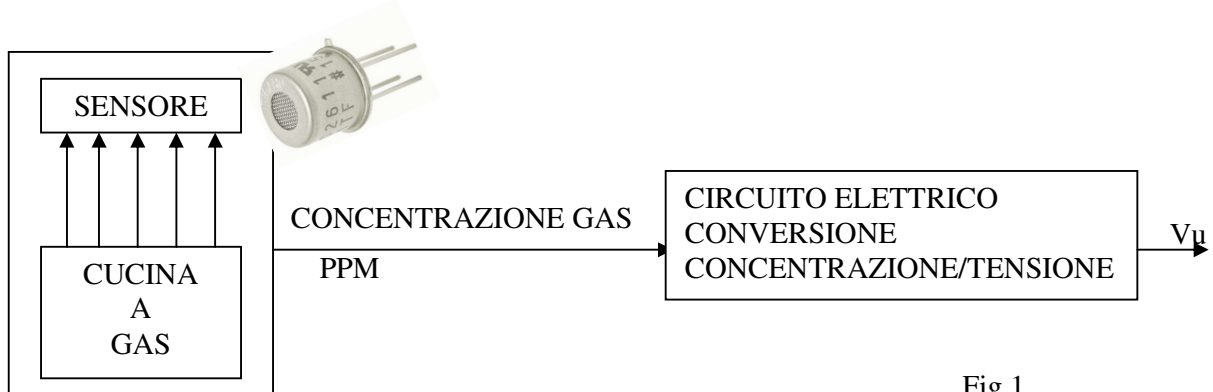


Fig.1

Dalla descrizione del sistema ricavare:

1. variabili d'ingresso;
2. variabili d'uscita;
3. parametri del sistema;
4. classificare il sistema.

**SOLUZIONE**

Lo schema di Fig.1 viene semplificato nello schema a blocchi di Fig.2

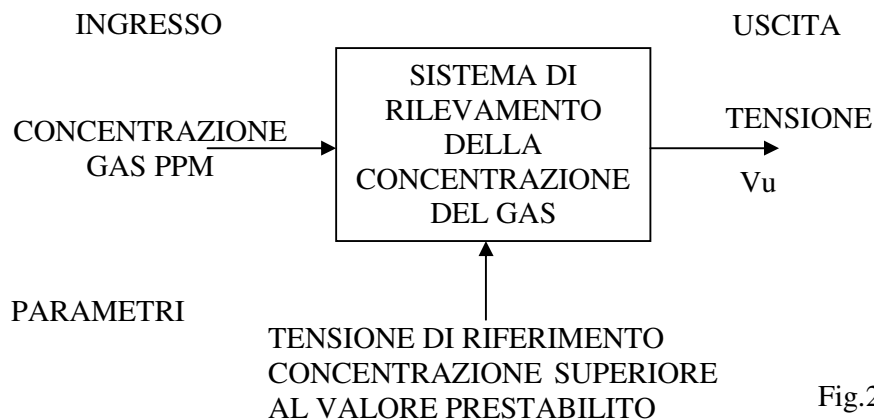


Fig.2

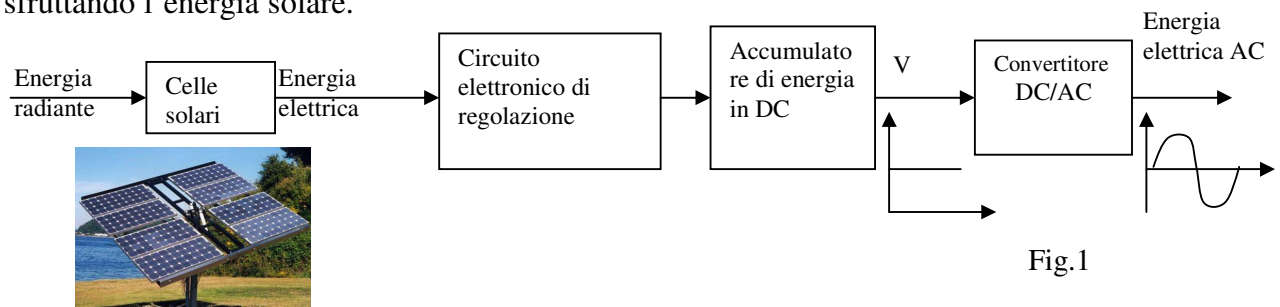
1. variabili d'ingresso: concentrazione gas PPM
2. variabili d'uscita: tensione  $V_u$
3. parametri: tensione di riferimento concentrazione superiore al valore prestabilito.

Sulla base della descrizione verbale e dello schema a blocchi di Fig.1, il sistema è classificato:

- **DETERMINISTICO** perché è possibile calcolare il valore della tensione d'uscita se si conosce la concentrazione del gas.
- **CONTINUO** perché i valori che può assumere la tensione d'uscita possono essere messi in corrispondenza con un sottoinsieme dei numeri reali (es. compresi nell'intervallo 0-5V).
- **APERTO** perché interagisce con l'ambiente.
- **SENZA MEMORIA** perché la tensione d'uscita all'istante T dipende dal valore della concentrazione del gas presente nell'ambiente nel medesimo istante T.

### Esercizio N°7 SISTEMA DI PRODUZIONE DELL'ENERGIA ELETTRICA CON PANNELLI SOLARI.

Il sistema schematizzato in Fig.1 costituisce un esempio di produzione di energia elettrica sfruttando l'energia solare.



Esso è costituito da un certo numero di pannelli solari che convertono l'energia solare in energia elettrica (tensione continua). Il circuito elettronico di regolazione ottimizza il rendimento del sistema e protegge, tra le altre funzioni svolte, i pannelli solari nei periodi in cui essi non ricevono la radiazione luminosa.

L'energia in DC viene infine trasformata da un apposito sottosistema in alternata (convertitore DC/AC)

Dalla descrizione del sistema ricavare:

1. variabili d'ingresso;
2. variabili d'uscita;
3. classificare il sistema.

Il sistema indicato in Fig.1 può essere schematizzato nello schema a blocchi di Fig.2



## SOLUZIONE

1. variabili d'ingresso: energia radiante.
  2. variabili d'uscita: energia elettrica AC.
  3. classificazione del sistema:
- **DETERMINISTICO** perché è possibile determinare l'energia prodotta dal sistema a parità di energia variante incidente sulla superficie dei pannelli.
  - **INVARIANTE** tutti i componenti mantengono inalterate le loro caratteristiche nel tempo.
  - **APERTO** perché il sistema interagisce con l'ambiente.
  - **CONTINUO** perché la variabile d'uscita (tensione AC) può assumere tutti i valori compresi in un intervallo definito (220V)
  - **DINAMICO** perché la variabile d'uscita all'istante generico T dipende dall'energia radiante sui pannelli in quell'istante e dall'energia immagazzinata nell'accumulatore.

## 4.1 - Modelli.

Nel corso dello sviluppo scientifico l'uomo ha formulato le leggi relative ai fenomeni naturali, operando semplificazioni e approssimazioni con il risultato di pervenire a rappresentazioni astratte della realtà.

La semplificazione e l'astrazione rispetto alla realtà porta alla costruzione di quello che nel linguaggio scientifico viene definito modello, termine con il quale si deve intendere una rappresentazione astratta e semplificata di un fenomeno o di un sistema, adatta a far comprendere l'evoluzione e le caratteristiche di esso (fenomeno o sistema)

Il modello classico di un atomo richiama immediatamente l'immagine di un nucleo centrale, costituito da protoni e neutroni, attorno al quale si muovono gli elettroni.

La peculiarità principale di un buon modello risiede nella semplicità, nella aderenza alla realtà e nella generalità. Pertanto nel costruire il modello di un fenomeno o di un sistema è buona norma assumere ipotesi semplificative, saper scegliere le caratteristiche essenziali e tralasciare inizialmente le altre. In tal modo si semplifica il calcolo per lo studio di esso.

La scelta delle caratteristiche non importanti dipende dal punto di vista con il quale si intende affrontare lo studio del fenomeno o del sistema. È noto infatti che la medesima realtà può essere rappresentata con modelli diversi.

Un tecnico dell' hardware vede un personal computer come un insieme di schede e circuiti integrati, egli ritiene che il software sia una caratteristica non essenziale del sistema. Un programmatore vede un personal computer come un sistema in grado di gestire programmi di applicazione. Dal suo punto di vista è irrilevante sapere in che modo i programmi siano eseguiti dall' hardware.

In realtà il sistema è un'entità complessa costituita da tanti elementi che interagiscono tra di loro: la validità del modello costruito per un'applicazione scientifica specifica comincia a non essere più aderente alla realtà quando è applicato oltre i limiti consentiti. Allora il programmatore si renderà conto che il suo modello di personal, costituito da soli programmi, ha dei limiti in quanto lo sviluppo di un programma non può prescindere dalle caratteristiche hardware della macchina (ad esempio la capacità di memoria). Analogamente il tecnico dell' hardware deve tener presente, nel momento in cui progetta alcune parti del personal, i fondamenti del linguaggio macchina del microprocessore utilizzato.

In definitiva un modello è la rappresentazione semplificata di una realtà complessa: esso è costruito con lo scopo di analizzare gli aspetti significativi dell'applicazione specifica rispetto all'insieme generale.

Studiare il comportamento

Sistema

Es. Schema elettrico

## 4.2 - Classificazione dei modelli.

La parola modello richiama un'auto in scala o il plastico di un edificio.

Sebbene i modelli in scala siano molto noti tra la gente e siano stati utilizzati fin dai tempi più antichi, tuttavia essi non costituiscono l'unico modo possibile per rappresentare la realtà.

Di seguito viene riportata una classificazione dei modelli:

- **Modelli iconici.**
- **Modelli analoghi.**
- **Modelli astratti.**

### • Modelli iconici.

I modelli iconici o modelli fisici sono una rappresentazione grafica in scala del sistema.

Esempi di modelli iconici sono:

- lo schema di un impianto elettrico;
- la pianta di un edificio o di un impianto industriale.

Il significato di modello iconico si estende anche a quei modelli che rappresentano il prototipo del sistema in scala ridotta o a dimensioni reali (1:1).

Il plastico di una diga è un esempio di modello iconico in scala ridotta.

Un'auto utilizzata nella galleria del vento è un esempio di modello iconico in grandezza naturale.

I modelli iconici sono utilizzati per valutare le caratteristiche del sistema in fase di progettazione e di collaudo.

### • Modelli analoghi.

I modelli analoghi vengono utilizzati per simulare il comportamento di sistemi meccanici, idraulici, termici, ecc. con sistemi elettrici

Due sistemi si definiscono analoghi quando, pur essendo di natura diversa (per esempio sistema meccanico ed elettrico), le loro variabili sono legate dalle medesime relazioni matematiche. Il comportamento del sistema idraulico rappresentato in fig.1 è analogo a quello del sistema elettrico di fig.2.

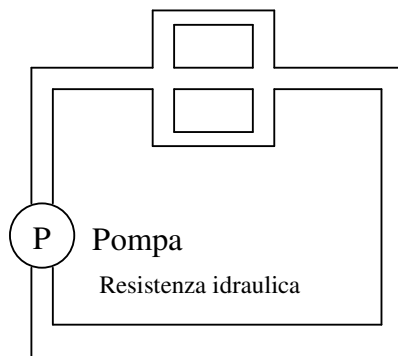


Fig. 1

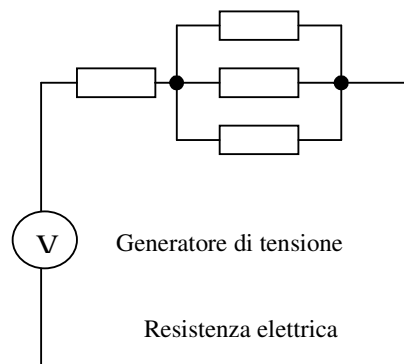


Fig.2

Il comportamento del sistema meccanico massa-molla rappresentato in fig.3 può essere simulato con il circuito oscillante costituito da un condensatore e da un induttore (fig. 4).

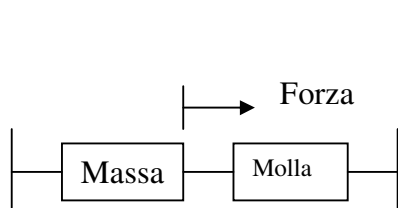


Fig. 3

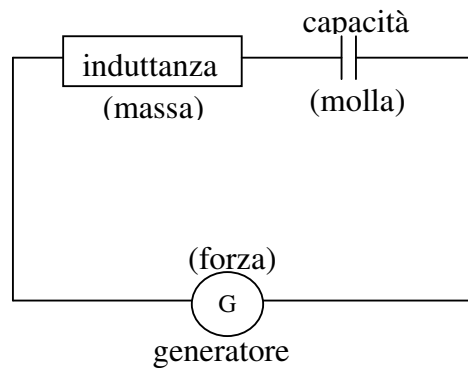


Fig.4

- **Modelli astratti**

Si definiscono modelli astratti

- **lo schema a blocchi;**
- **il modello matematico/deterministico, modello matematico/statistico**
- **il modello grafico**

- **Schema a blocchi**

Lo consente di rappresentare un sistema mediante uno o più blocchi.

In ogni blocco si individuano le linee entranti che rappresentano le sollecitazioni o variabili d'ingresso applicate al blocco e le linee uscenti che rappresentano le risposte o le variabili d'uscita del blocco (fig. 5)

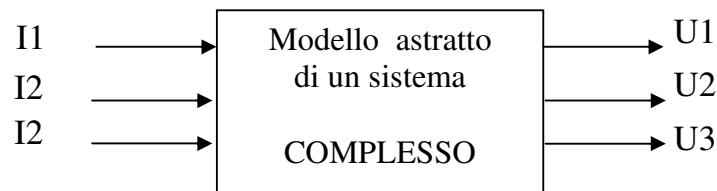


Fig.5

Ogni blocco è interconnesso agli altri con linee orientate che indicano il verso di propagazione dei segnali. Ogni blocco, inoltre, può rappresentare sia singoli elementi del sistema, sia tante parti distinte ma riunite in modo da formare un'unica entità.

La rappresentazione di un sistema complesso mediante uno schema a blocchi si rivela utile perché consente di identificare gli elementi fondamentali del sistema e le interazioni che esistono tra i singoli elementi, ma è limitativa perché non consente di fare valutazioni quantitative sul comportamento del sistema

- **Modello matematico/deterministico, modello matematico/statistico**

Il modello matematico di un sistema, a differenza dello schema a blocchi, consente invece di risolvere numerosi problemi legati all'analisi e alla sintesi dei sistemi.

Per modello matematico di un sistema, o meglio per rappresentazione matematica del modello di un sistema, si deve intendere la rappresentazione astratta del sistema espressa mediante un insieme di relazioni matematiche che legano le variabili e i parametri caratteristici del sistema. Il modello matematico consente, di definire lo stato

nel quale verrà a trovarsi il sistema in un determinato istante se si conoscono le sue condizioni iniziali e alcune informazioni sulle variabili e sui parametri del sistema.

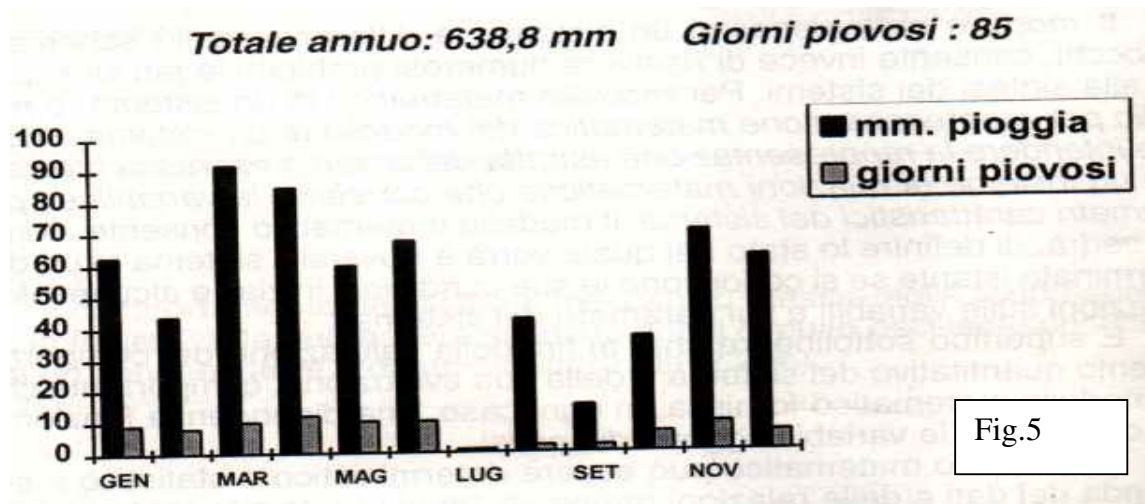
Un modello matematico può essere **deterministico** o **statistico** a seconda dei dati e delle relazioni matematiche utilizzate per costruirlo.

Se il fenomeno o il sistema presentano caratteristiche di casualità di importanza rilevante è necessario prevedere relazioni probabilistiche e funzioni di distribuzione di probabilità. In tal caso si parlerà di modello probabilistico. Se invece le caratteristiche di casualità presenti nel sistema sono irrilevanti, allora si dovrà pensare a un modello deterministico.

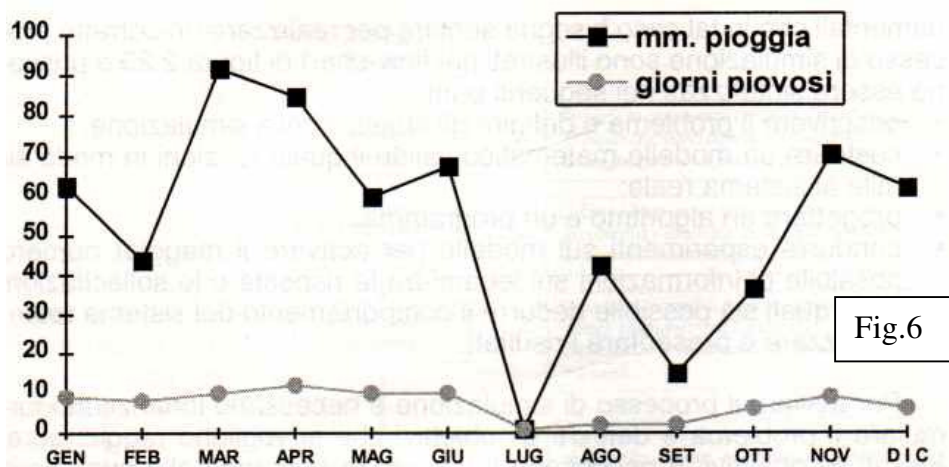
### • Modello grafico

Quando le relazioni che legano le variabili del sistema sono costituite da tabelle o da grafici anziché da equazioni, allora si parla di **modelli grafici**.

La rappresentazione grafica fornisce una visione immediata di alcuni aspetti significativi del sistema. Il grafico di fig.5 (istogramma), e quello di fig.6 (XY), indicano rispettivamente il numero di millimetri di pioggia caduti ogni mese nel 1988 ed il numero di giorni di piovosità che si sono avuti in ogni mese del medesimo anno.



Dai grafici si rileva immediatamente che la massima piovosità si è avuta nel mese di marzo, con 90 millimetri di pioggia, mentre la minima piovosità si è avuta nel mese di luglio insieme al minor numero di giorni piovosi.





### 4.3 - SIMULAZIONE.

Lo studio dei sistemi si prefigge di capire quale possa essere l'andamento della risposta del sistema quando è sollecitato da variabili d'ingresso di vario tipo.

Per raggiungere l'obiettivo è necessario in primo luogo aver definito limiti del sistema e identificato gli elementi che lo costituiscono, in altre parole è necessario che il sistema oggetto di studio esista realmente. A tal fine si potrebbero utilizzare i sistemi naturali e quelli artificiali già costruiti, ma quelli artificiali in corso di progettazione non sarebbero in ogni caso disponibili. Inoltre, qualora si volessero sottoporre a prove i sistemi naturali ed artificiali già esistenti, si correrebbe il rischio di danneggiarli o distruggerli in modo irreparabile. Se in laboratorio è possibile sollecitare al massimo il motore di un'automobile fino alla sua distruzione non è possibile, invece, caricare le strutture di un ponte oltre certi limiti perché, così facendo, potrebbe essere danneggiato permanentemente.

Molti problemi sopra citati sono stati ormai superati con l'utilizzazione di tecniche di simulazione al calcolatore, che consentono di analizzare il comportamento di un sistema economico, industriale, naturale, ecc. senza dover intervenire direttamente sul sistema reale.

**Per simulazione si intende la possibilità di costruire il modello di un sistema reale, condurre esperimenti su di esso al fine di ricavare informazioni dalle quali sia possibile dedurre il comportamento e la sua evoluzione temporale.**

Simulare il comportamento di un sistema significa dunque costruire il suo modello, condurre su di esso esperimenti e trasferire al sistema reale, per la verifica, i risultati delle conoscenze così acquisite. La simulazione è applicata sia a problemi prettamente ingegneristici, quali il dimensionamento di sistemi di controllo, sia a problemi gestionali, sociali, biologici, ecc.

**Esempio: simulazione del funzionamento di un circuito elettronico tramite il software Workbench**

La simulazione richiede l'uso del calcolatore con relativo software. I criteri fondamentali che in tal caso bisogna seguire per realizzare un corretto processo di simulazione sono illustrati nel flow-chart di figura 7 e possono essere sintetizzati nei seguenti punti:

- descrivere il problema e definire gli obiettivi della simulazione;
- costruire un modello matematico valido il quale funzioni in modo simile al sistema reale;
- progettare un algoritmo e un programma;
- condurre esperimenti sul modello per ricavare il maggior numero possibile di informazioni sui legami tra le risposte e le sollecitazioni dalle quali sia possibile dedurre il comportamento del sistema reale;
- analizzare e presentare i risultati.

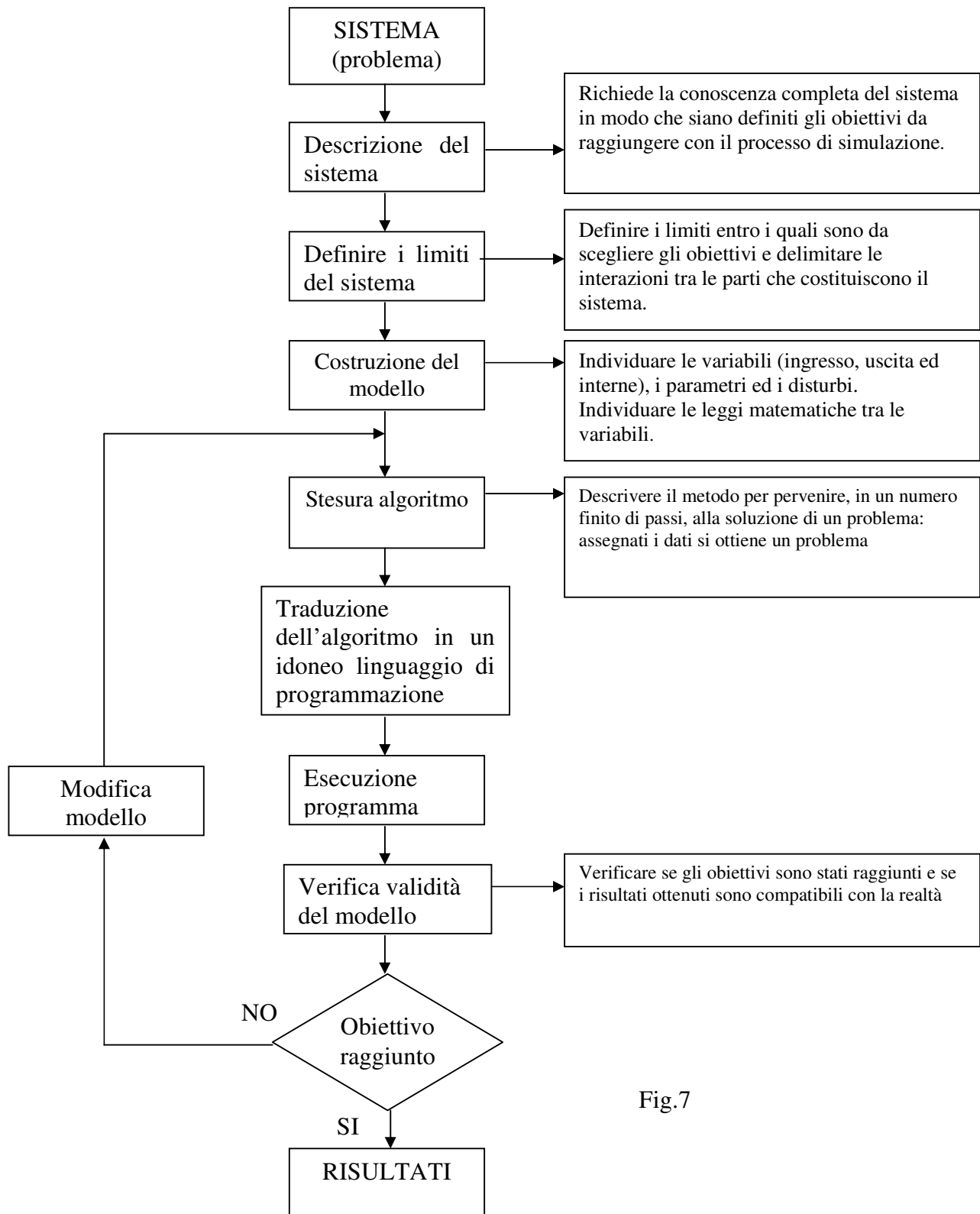


Fig.7

Per avviare il processo di simulazione è necessario innanzitutto formulare il problema e definire gli obiettivi che si vogliono raggiungere. Fissati gli obiettivi, è necessario formulare le domande alle quali deve essere data risposta, scegliere le ipotesi da verificare e stimare gli effetti.

Costruire il modello matematico significa individuare gli elementi del sistema, identificare le variabili (d'ingresso, d'uscita e i parametri) e le relazioni funzionali che le legano.

Le relazioni funzionate devono essere ben definite, in modo che il sistema sia descritto solo mediante leggi matematiche e/o logiche che legano le variabili.

Terminata la fase di costruzione del modello è necessario provvedere alla ricerca dell'algoritmo e alla stesura del programma di simulazione in un linguaggio di programmazione. Quest'ultima fase deve comprendere la preparazione del flow-chart, la codifica vera e propria, la ricerca degli errori di programma ed infine, nel caso esista un sistema reale, la elaborazione su una situazione già nota, in modo da rilevare eventuali errori di logica che non siano stati precedentemente individuati. È necessario poi collaudare il modello sottoponendolo a molte verifiche sperimentali. Una volta accertata la validità del modello, è possibile passare alle prove di simulazione che consistono nel far funzionare il modello applicando al suo ingresso sollecitazioni di tipo diverso. Le prove devono essere ripetute fino a quando non si ritiene che il numero dei dati acquisiti sia sufficiente a garantire la validità prefissata. È importante, in ultimo, che i dati siano raccolti in forma di grafici o tabelle da cui risultino evidenti le relazioni tra le variabili e siano disponibili in tutte le fasi della simulazione, compresa quella di collaudo.

# La funzione di trasferimento

APPUNTI MODULO 2

Ing. Enrico Cinalli

4-5 T.I.E.

## **SISTEMI e MODELLI**

**■** Analisi numerica:

- richiamo numeri complessi
- variabile complessa, funzione di variabile complessa
- definizione di POLI e ZERI di una funzione  $F(s)$ ;
- funzione di trasferimento;
- Trasformata di Laplace (concetti fondamentali)

### 3.LA TRASFORMATATA DI LAPLACE

#### 3.1 – Introduzione

Lo studio dei sistemi richiede conoscenze specifiche di matematica. Per studiare il comportamento di un sistema nel dominio del tempo e nel dominio della frequenza è necessaria la conoscenza dei numeri complessi, delle funzioni di variabile complessa e dei metodi di soluzione delle equazioni differenziali, quindi, si ritiene opportuno richiamare le operazioni fondamentali che possono essere eseguite con i numeri complessi, esaminare alcuni concetti elementari relativi alle funzioni di variabile complessa e formalizzare le proprietà fondamentali della trasformata di Laplace.

#### 3.2 – Numeri complessi

Un numero complesso  $Z$ , costituito da una parte reale e una parte immaginaria, è scritto nella seguente forma:

$$Z = x + jy$$

dove  $x$  e  $y$  sono numeri reali,  $j$  è l'unità immaginaria definita dalla relazione

$$j^2 = -1 \qquad j = \sqrt{-1}$$

e il segno “+” non indica l'operazione di addizione ma è parte integrante del numero complesso. La parte reale e quella immaginaria del numero complesso  $Z$ , indicate anche con  $\text{Re}(Z)$  e  $j\text{Im}(Z)$ , sono uguali rispettivamente a  $x$  e  $jy$ .

Il numero complesso  $Z$  è rappresentato sul piano complesso nel quale l'asse delle ordinate è l'asse immaginario e l'asse delle ascisse è quello reale (fig.1).

Definizione di:

- **coniugato**
- **modulo**
- **fase o argomento**
- Si definisce **coniugato** del numero complesso  $Z = x + jy$ , il numero complesso  $Z^*$  che ha il coefficiente della sua parte immaginaria opposto a quello di  $Z$  :

$$Z = x + jy \qquad \text{coniugato } Z^* = x - jy$$

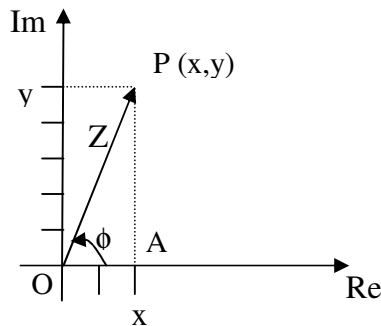


Fig.1

- Si definisce **modulo**  $|Z|$  del numero complesso  $Z$  la radice quadrata della parte reale al quadrato più la parte immaginaria al quadrato.

$$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

## La trasformata di Laplace

- Si definisce **fase o argomento** di un numero complesso  $Z$ , definito a meno di multipli interi di  $2\pi$ , l'angolo la cui tangente goniometrica è uguale al rapporto tra il coefficiente  $y$  della parte immaginaria e la parte reale  $x$ :

$$\phi = \arctg \frac{y}{x} \quad \text{e nella forma completa si ha: } \phi = \arctg \frac{y}{x} \pm 2k\pi \text{ con } k \text{ intero positivo.}$$

Al numero complesso  $Z$  è associato un vettore  $OP$  che individua un punto  $P$  del piano complesso avente coordinate  $(x,y)$ . Sono considerati positivi gli angoli  $\phi$  misurati rispetto all'asse reale del vettore  $OP$  che ruota in senso (Fig.1), quindi:

$$x = |Z| \cos \phi \quad y = |Z| \sin \phi$$

e pertanto un numero complesso  $Z = x + j y$  può essere scritto in forma **trigonometrica**

$$Z = x + j y \quad Z = |Z| \cdot (\cos \phi + j \sin \phi)$$

Un numero complesso può essere rappresentato nelle seguenti forme equivalenti

**forma trigonometrica**  $z = |z| (\cos \phi + j \sin \phi)$

**forma cartesiana**  $z = x + j y$

**forma esponenziale**  $z = |z| e^{j\phi}$

**forma polare**  $z = |z| \angle \phi$

### Esempio

Dato il numero complesso  $Z = 2 + j5$ :

1. rappresentare il vettore nel piano complesso;
2. calcolare il suo coniugato;
3. calcolare il suo modulo;
4. calcolare la fase o argomento.

#### 1- Rappresentazione grafica (Fig. 2)

#### 2- Coniugato

$$Z = 2 + j5 \quad \rightarrow \text{Coniugato} \quad Z^* = 2 - j5$$

#### 3- Modulo

$$|Z| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29} = 5,4$$

#### 4- Fase

$$\phi = \arctg \frac{5}{2} = \arctg 2,5 = 68,2^\circ$$

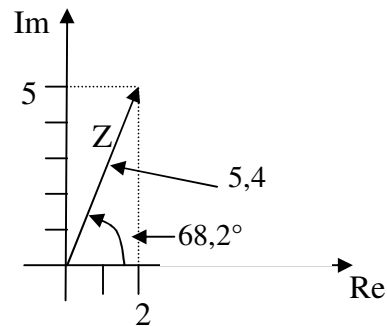


Fig. 2

### 3.2.1- Operazioni con i numeri complessi.

- **Addizione.**

La somma di due numeri complessi  $z_1 = x_1 + j y_1$  e  $z_2 = x_2 + j y_2$  è il numero complesso  $z$  che ha la parte reale uguale alla somma algebrica delle parti reali di  $z_1$  e  $z_2$  e il coefficiente della parte immaginaria uguale alla somma algebrica dei coefficienti delle parti immaginarie di  $z_1$  e di  $z_2$ :

$$Z = Z_1 + Z_2 = (x_1 + j y_1) + (x_2 + j y_2) \quad \rightarrow \quad z = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

Esempio:  $Z_1 = 3 + j4$       $Z_2 = 5 + j2$       $Z_1 + Z_2 = (3 + j4) + (5 + j2) = 8 + j6$

- **Sottrazione.**

La differenza  $z_1 - z_2$  di due numeri complessi, essendo  $z_1 = x_1 + j y_1$  il minuendo e  $z_2 = x_2 + j y_2$  il sottraendo, è il numero complesso  $z$  che ha la parte reale uguale alla differenza delle parti reali di  $z_1$  e di  $z_2$ , mentre il coefficiente della parte immaginaria è uguale alla differenza dei coefficienti delle parti immaginarie di  $Z_1$  e di  $Z_2$ :

$$Z = Z_1 - Z_2 = (x_1 + j y_1) - (x_2 + j y_2) \quad \rightarrow \quad Z = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

Esempio:  $Z_1 = 3 + j4$       $Z_2 = 5 + j2$       $Z = Z_1 - Z_2 = (3 + j4) - (5 + j2) = -2 + j2$

- **Prodotto.**

Il prodotto di due numeri complessi  $Z_1 = x_1 + j y_1$  e  $Z_2 = x_2 + j y_2$  è il numero complesso  $Z$  così definito:

$z = (x_1 + j y_1) \cdot (x_2 + j y_2)$  Eseguendo le operazioni indicate e ricordando che  $j^2 = -1$  si ha:

$$Z = x_1 \cdot x_2 + j \cdot x_1 \cdot y_2 + j \cdot y_1 \cdot x_2 + j^2 \cdot y_1 \cdot y_2 \quad Z = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + j(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$$

Esempio:  $Z_1 = 3 + j4$       $Z_2 = 5 + j2$       $Z = Z_1 \cdot Z_2 = (3 + j4) \cdot (5 + j2) = 15 + j6 + j20 + j^2 8 \quad Z = 7 + j26$

- **Divisione.**

Il quoziente di due numeri complessi  $Z_1 = x_1 + j y_1$  e  $Z_2 = x_2 + j y_2$  con  $Z_1$  dividendo e  $Z_2$  divisore, è uguale a

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{x_1 + j y_1}{x_2 + j y_2}$$

Moltiplicando il numeratore e il denominatore per il complesso coniugato del denominatore si ottiene il quoziente  $Z$  nella forma nota  $Z = x + j y$

$$Z = \frac{(x_1 + j y_1) \cdot (x_2 - j y_2)}{(x_2 + j y_2) \cdot (x_2 - j y_2)} \quad Z = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{(x_2^2 + y_2^2)} + j \frac{(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{(x_2^2 + y_2^2)}$$

Esempio:  $Z_1 = 1 + j3$ ,  $Z_2 = 3 + j2$       $Z = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1 + j3}{3 + j2} = \frac{(1 + j3) \cdot (3 - j2)}{(3 + j2) \cdot (3 - j2)} = \frac{3 - j2 + j9 - j^2 6}{3^2 + 2^2}$

$$Z = \frac{9 + j7}{13} = \frac{9}{13} + j \frac{7}{13}$$



### 3.3 - Variabile complessa.

Dato un insieme di numeri complessi, si definisce variabile complessa  $s$  un elemento qualsiasi dell'insieme tale che sia:

$$s = \sigma + j\omega \qquad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \text{ in regime sinusoidale } \sigma=0, \text{ quindi } s=j\omega$$

$\omega$  = pulsazione del segnale sinusoidale.  $f$  = frequenza del segnale.  $T$  = periodo del segnale.

Dal punto di vista grafico la parte reale  $\sigma$  è rappresentata sull'asse orizzontale e quella immaginaria  $j\omega$  sull'asse verticale del piano complesso  $s$  (fig. 3).

Vi è una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano complesso  $s$  e gli elementi  $s$  dell'insieme dei numeri complessi. Ad un arbitrario punto  $P_0$  del piano complesso  $s$  si fa corrispondere la variabile complessa  $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ , avente parte reale  $\sigma_0$  e parte immaginaria  $j\omega_0$  e al numero complesso  $s_0$  si fa corrispondere il punto  $P_0$  del piano complesso.

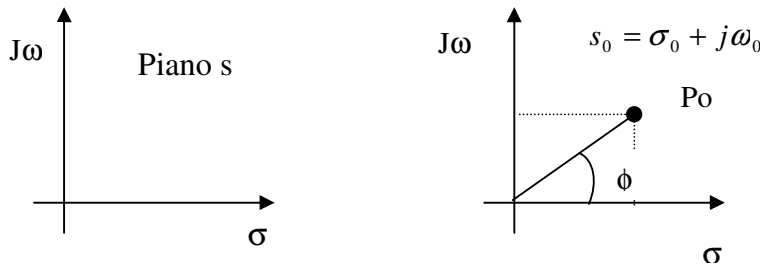


Fig. 3

Il modulo  $|s_0|$  e la fase  $\phi$  della variabile  $s_0$  sono uguali a:

$$|s_0| = \sqrt{\sigma_0^2 + \omega_0^2} \qquad \phi = \arctg \frac{\omega_0}{\sigma_0}$$

### 3.4 - Funzione di variabile complessa.

Una funzione  $F(s)$  è detta funzione della variabile complessa  $s$  quando ad ogni  $s$  corrisponde una  $F(s)$  tale che

$$F(s) = \text{Re}[F(s)] + j\text{Im}[F(s)]$$

dove  $\text{Re}[F(s)]$  e  $\text{Im}[F(s)]$  sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria della funzione  $F(s)$ . Il modulo e la fase vengono calcolati con le stesse regole viste nei punti precedenti

Per rappresentare la  $F(s)$  sono necessari due grafici bidimensionali. Il primo, rappresentato sul piano  $s$ , è un grafico che riporta la parte reale  $\sigma$  sull'asse delle ascisse e quella immaginaria  $j\omega$  su quello delle ordinate (fig. 4a). Il secondo, rappresentato sul piano  $F(s)$ , si ottiene rappresentando la parte reale  $\text{Re}[F(s)]$  sull'asse delle ascisse e la parte immaginaria  $\text{Im}[F(s)]$  su quello delle ordinate (fig. 4b).

Le funzioni di variabile complessa che sono oggetto di studio nella teoria dei sistemi sono quelle "univoche", così dette perché ad ogni valore  $s_0$  della variabile complessa  $s$  corrisponde una ed una sola funzione; ne  $F(s_0)$  nel piano  $F(s)$ .

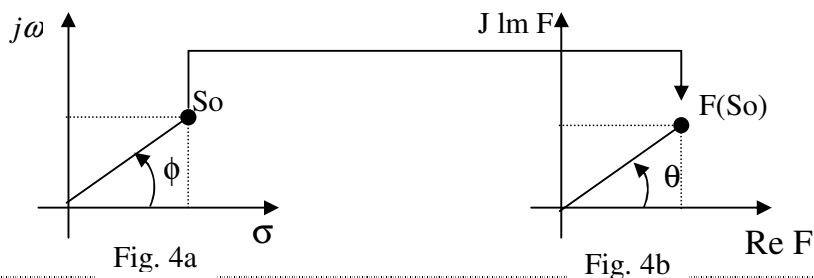


Fig. 4a

Fig. 4b

### 3.5 - Definizione di POLI e ZERI di una funzione F(s).

Molte applicazioni della teoria dei sistemi implicano lo studio di funzioni di variabile complessa espresse come rapporto di due polinomi in s del tipo

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

#### ZERI della funzione F(s)

Uguagliando a zero il numeratore (  $N(s)=0$  ) e risolvendo rispetto a s si ottengono **m** radici, indicate con **z1, z2, z3, ... zm** o **ZERI** della funzione F(s).

#### POLI della funzione F(s)

Uguagliando a zero il denominatore (  $D(s)=0$  ) e risolvendo rispetto a s si ottengono **n** radici, indicate con **p1, p2, p3, ... pn** o **POLI** della funzione F(s)

I POLI e gli ZERI, in quanto radici delle equazioni ottenute uguagliando a zero polinomi con coefficienti reali, possono essere:

1. reali semplici;
2. reali con molteplicità r;
3. complessi coniugati;
4. complessi coniugati con molteplicità r.

Applicando le regole dell'algebra si ottiene::

$$F(s) = \frac{N(s)}{d(s)} = k_0 \cdot \frac{(s - z_1) \cdot (s - z_2) \cdot \dots \cdot (s - z_m)}{(s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot \dots \cdot (s - p_n)}$$

dove:

1.  $k_0$  coefficiente numerico
2.  $z_1, z_2, z_m$  ZERI della funzione F(s)
3.  $p_1, p_2, p_n$  POLI della funzione F(s)

#### Esempio

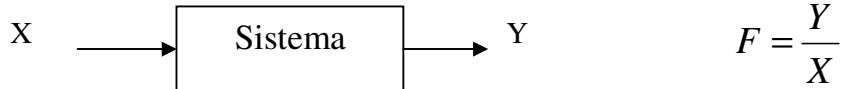
Si consideri la funzione

$$F(s) = \frac{5 \cdot (s + 3)}{s \cdot (s + 2) \cdot (s + 4)^2}$$

1.  $k_0=5$
2. Uguagliando a zero il numeratore si ottengono, gli **ZERI**:  $s+3=0$ , quindi **z1=-3**
3. Uguagliando a zero il suo denominatore si ottengono, i **POLI**:  $s \cdot (s+2) \cdot (s+4)^2$ , quindi: **p1=0, p2=-2, p3=-4** con molteplicità pari a **2**

### 3-6 Funzione di trasferimento (f.d.t.)

Dato un sistema si definisce funzione di trasferimento il rapporto tra la grandezza d'uscita e la grandezza d'ingresso (Fig. 5)



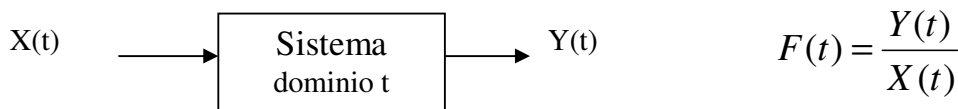
$$F = \frac{Y}{X}$$

Fig. 5

Si possono presentare due casi:

1. Studio del sistema nel dominio del tempo, quindi f.d.t. nel dominio del tempo
2. Studio del sistema nel dominio delle frequenze, quindi f.d.t. nel dominio s

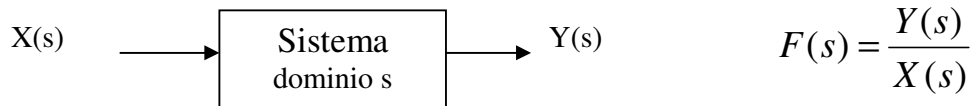
#### 3-6-1 Dominio del tempo (fig.6) esempio carica scarica condensatore



$$F(t) = \frac{Y(t)}{X(t)}$$

Fig. 6

#### 3-6-2 Dominio s (fig.7) esempio risposta in frequenza di un filtro



$$F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Fig. 7

### 3-7 Trasformata di LAPLACE

La ricerca del legame ingresso uscita (f.d.t. funzione di trasferimento) in un qualsiasi sistema (es. sistema di controllo), porta in generale ad identificare la struttura matematica di un'equazione integro-differenziale, un'equazione che ha come incognite le funzioni che rappresentano analiticamente l'andamento nel tempo delle grandezze d'ingresso e d'uscita (Fig.8)

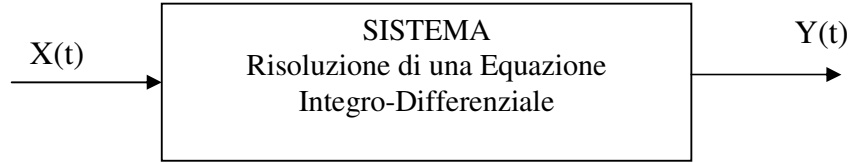


Fig. 8

La risoluzione del circuito con equazione integro-differenziale risulta molto complessa quindi si preferisce trasformare l'equazione in un'equazione di tipo algebrica. Nella trasformazione in equazione algebrica basta conoscere le singole parti a blocchi funzionali e saper combinare i singoli blocchi. Per ottenere questa trasformazione da equazione integro-differenziale a equazione algebrica si utilizza la **trasformata di Laplace** (Fig.9).

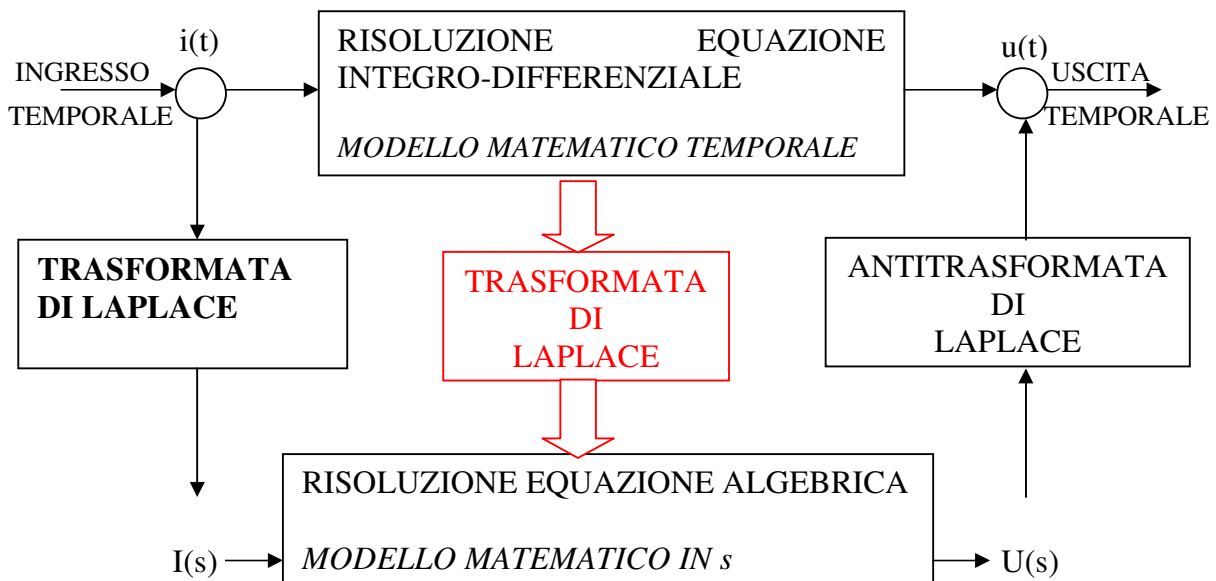


Fig. 9

Nella pratica il modello matematico del sistema e la sollecitazione ad esso applicata, funzioni della variabile tempo (t), sono trasformati in funzione della variabile complessa s. dopo aver definito le relazioni algebriche che descrivono il comportamento del sistema nel dominio della variabile s, con un'operazione di antitrasformazione si ottiene la risposta cercata u(t) la quale è funzione del tempo. La conoscenza della u(t) permette così di analizzare il comportamento del sistema nel dominio del tempo. La risoluzione delle equazioni integro-differenziali si riduce alla risoluzione di più semplici equazioni algebriche, facilitando così lo studio di sistemi formati da molti componenti.

## La trasformata di Laplace

L'operazione di trasformazione (Fig. 10) stabilisce una corrispondenza biunivoca tra gli elementi dell'insieme di partenza definito da una funzione  $f(t)$  del tempo e quelli dell'insieme di arrivo definito da una funzione  $F(s)$  dipendente dalla variabile complessa  $s$ .

$$s = \sigma + j\omega \quad \omega = 2\pi f \quad \text{in regime sinusoidale } \sigma = 0, \text{ quindi } s = j\omega$$

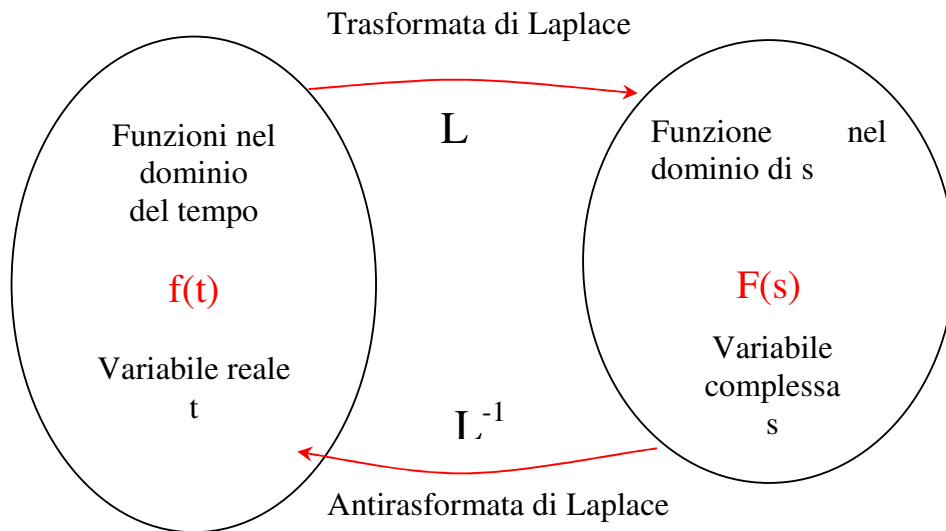


Fig. 10

Data una funzione del tempo  $f(t)$  tale che  $f(t)=0$  per  $t<0$  si definisce trasformata di Laplace della funzione  $f(t)$  e si indica con  $L[f(t)] = F(s)$ , la funzione  $F(s)$  della variabile complessa  $S$

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} * f(t) * dt$$

La trasformata di Laplace viene utilizzata per semplificare le soluzioni delle equazioni differenziali a coefficienti costanti, permette di semplificare lo studio dei sistemi complessi riducendoli a schemi a blocchi. In fig. 11 la trasformazione dei componenti R, L, C.

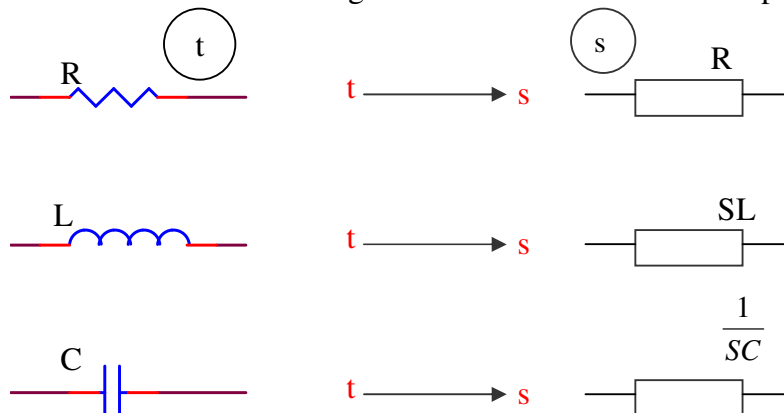








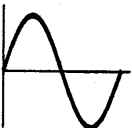
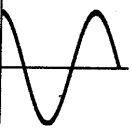
Fig. 11

Vi sono alcuni segnali utilizzati come segnali standard (impulso unitario: gradino, rampa lineare, sinusoidale, ecc.) d'ingresso nell'analisi delle prestazioni dei sistemi di controllo sia in regime transitorio che stazionario; tali segnali vengono chiamati segnali canonici e sono fondamentali perché la risposta di un sistema lineare può essere ricavata come combinazione lineare delle risposte dello stesso sistema ai segnali canonici.

## La trasformata di Laplace

Per eseguire la trasformata delle funzioni principali (impulso unitario; gradino, rampa lineare, sinusoidale, ecc.), si utilizza la tabella 1, tale tabella viene utilizzata anche per l'antitrasformazione.

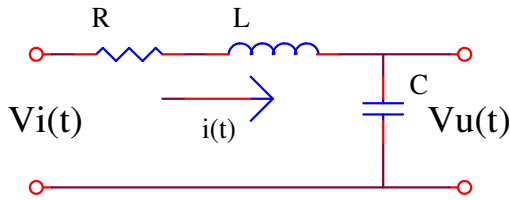
**Tabella -1**

N°	Grafici	Funzione $f(t)$	Trasformata $F(s)$	Denominazione
1		$f(t) = \delta(t)$	$F(s) = 1$	Funzione di Dirac
2		$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$	$F(s) = \frac{1}{s}$	Funzione a gradino di ampiezza unitaria
3		$f(t) = \begin{cases} E & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$	$F(s) = \frac{E}{s}$	Funzione a gradino di ampiezza E
4		$f(t) = \begin{cases} t & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$	$F(s) = \frac{1}{s^2}$	Funzione a rampa unitaria
5		$f(t) = \begin{cases} k \cdot t & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$	$F(s) = \frac{k}{s^2}$	Funzione a rampa con coefficiente angolare k
6		$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$	$F(s) = \frac{2}{s^3}$	Funzione a parabola unitaria
7		$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ \text{sen}(\omega \cdot t) & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$	$F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	Funzione sinusoidale
8		$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ \text{cos}(\omega \cdot t) & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$	$F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$	Funzione cosinusoidale

• **Esempio-1**

Esempio di f.d.t di un circuito RLC nel dominio del tempo e nel dominio S

**DOMINIO t**



$$f.d.t. = \frac{Vu(t)}{Vi(t)}$$

$$Vu(t) = \frac{1}{C} \int i(t) * d(t)$$

$$Vi(t) = R * i(t) + L * \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) * d(t)$$

$$f.d.t. = \frac{Vu(t)}{Vi(t)} = \frac{\frac{1}{C} \int i(t) * d(t)}{R * i(t) + L * \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) * d(t)}$$

**DOMINIO S**

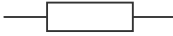
Trasformazione con Laplace dalla variabile reale tempo alla variabile complessa S:


$$t \rightarrow s$$

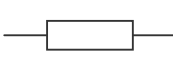
$$Vi(t) \rightarrow Vi(s)$$

$$i(t) \rightarrow I(s)$$

$$Vu(t) \rightarrow Vu(s)$$

$$R \rightarrow R$$


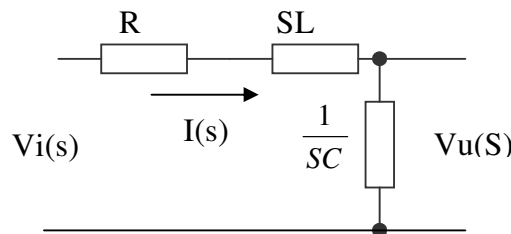
$$L \rightarrow SL$$


$$C \rightarrow \frac{1}{sC}$$


$$XC = \frac{1}{2\pi f c} = \frac{1}{\omega C} \quad \text{Reattanza capacitiva}$$

$$XL = 2\pi f L = \omega L \quad \text{Reattanza induttiva}$$

si ridisegna il circuito utilizzando la nuova simbologia



$$f.d.t. \rightarrow F(s) = \frac{Vu(s)}{Vi(s)}$$

$$Vu(s) = \frac{1}{sC} * Is$$

$$Vi(s) = R * I(s) + SL * I(s) + \frac{1}{sC} * I(s)$$

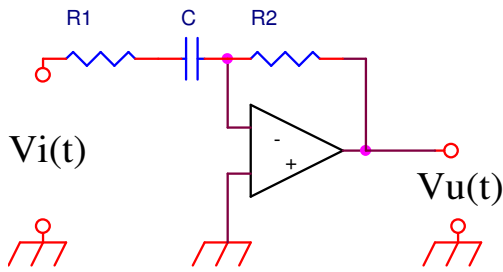
$$F(s) = \frac{Vu(s)}{Vi(s)} = \frac{\frac{1}{sC} * I(s)}{\left( R + SL + \frac{1}{sC} \right) * I(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{SRC + S^2LC + 1}{sC}}$$

$$F(s) = \frac{1}{S^2LC + SRC + 1}$$

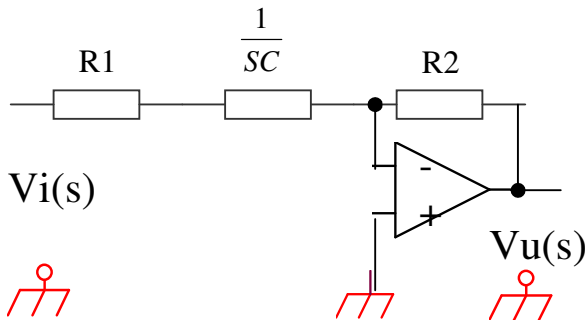
La funzione non ha zeri perché il numeratore è costante ed ha due poli perché il denominatore è un'equazione di secondo grado.

**Esercizio-1 Derivatore reale**

Dato il circuito di figura determinare la f.d.t. nel dominio S  
Derivatore reale (filtro attivo)



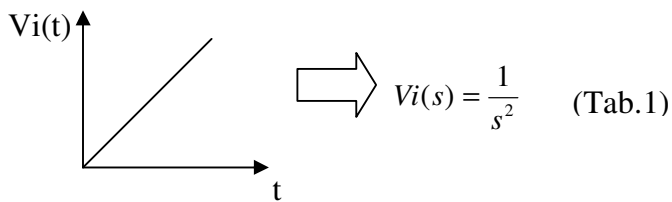
t	s
Vi(t)	Vi(s)
Vu(t)	Vu(s)
R1	$\frac{1}{sC}$
R2	$\frac{1}{sC}$
C	



$$F(s) = \frac{Vu(s)}{Vi(s)} = -\frac{R2}{R1 + \frac{1}{sC}} = -\frac{R2}{\frac{SR_1C + 1}{sC}} = -\frac{SR_2C}{SR_1C + 1}$$

$$F(s) = -\frac{SR_2C}{1 + SR_1C}$$

La funzione ha un polo e uno zero  
Calcolare l'uscita Vu(s) se Vi(s) è una rampa unitaria



$$F(s) = -\frac{SR_2C}{1 + SR_1C}$$

$$F(s) = \frac{Vu(s)}{Vi(s)} \Rightarrow Vu(s) = Vi(s) * F(s)$$

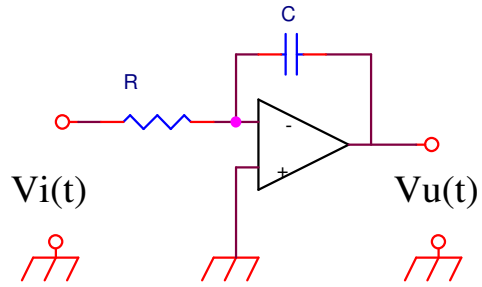
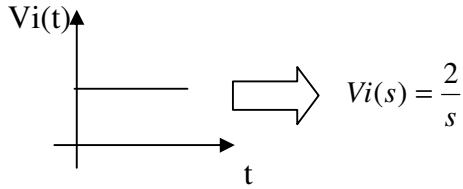
$$Vu(s) = -\frac{1}{s^2} * \frac{SR_2C}{1 + SR_1C}$$

$$Vu(s) = -\frac{R_2C}{s(1 + SR_1C)}$$

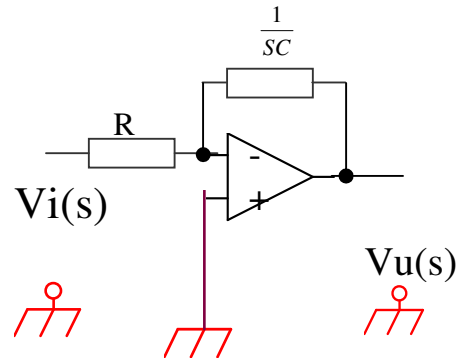


**Esercizio-2 Integratore Ideale**

Dato il circuito di figura determinare la f.d.t. nel dominio s e l'uscita  $V_u(s)$  nell'ipotesi che all'ingresso venga applicato un segnale a gradino di ampiezza 2V.



t	s
$V_i(t)$	$V_i(s)$
$V_u(t)$	$V_u(s)$
R	R
C	$\frac{1}{sc}$



$$F(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = -\frac{1}{sRC}$$

$$F(s) = -\frac{1}{sRC} \begin{cases} \text{N}^\circ \text{ ZERI} = 0 \\ \text{N}^\circ \text{ POLI} = 1 \end{cases}$$

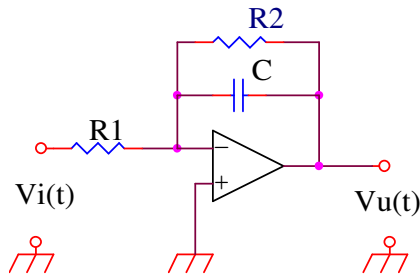
$$V_u(s) = V_i(s) * F(s) = -\frac{2}{s} * \frac{1}{sRC}$$

$$V_u(s) = \frac{2}{s^2 RC}$$

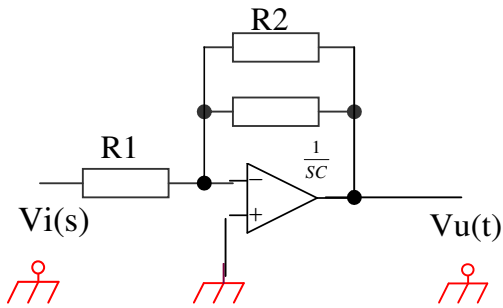
Per passare da  $V_u(s)$  a  $V_u(t)$  si esegue l'antitrasformata di Laplace  $V_u(t) = L^{-1}[V_u(s)]$

**Esercizio-3 Integratore Reale**

Dato il circuito di figura determinare la f.d.t. nel dominio S



t	s
Vi(t)	Vi(s)
Vu(t)	Vu(s)
R1	R1
R2	R2
C	$\frac{1}{sC}$

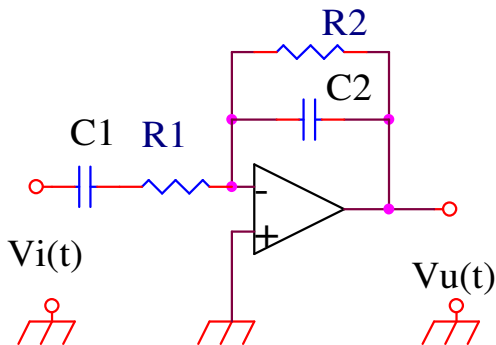


$$Z_f = R2 \parallel \frac{1}{sC} = \frac{R2 * \frac{1}{sC}}{R2 + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{R2}{sC}}{\frac{sR2C + 1}{sC}} = \frac{R2}{sR2C + 1}$$

$$F(s) = \frac{Z_f}{R1} = -\frac{\frac{R2}{sR2C + 1}}{R1} = -\frac{R2}{R1(sR2C + 1)} = -\frac{R2}{R1} * \frac{1}{sR2C + 1}$$

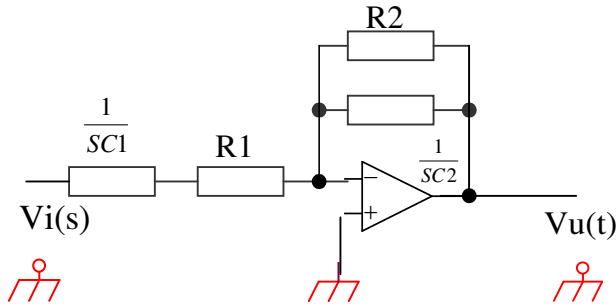
**Esercizio -4 – Filtro Passa Banda**

Dato il circuito di figura determinare la f.d.t. nel dominio S.



t	s
Vi(t)	Vi(s)
Vu(t)	Vu(s)
R1	R1
R2	R2
C1	$\frac{1}{sC1}$
C2	$\frac{1}{sC2}$

## La trasformata di Laplace



$$Z_f = R2 \parallel \frac{1}{SC2} = \frac{R1 * \frac{1}{SC2}}{R2 + \frac{1}{SC2}} = \frac{\frac{R2}{SC2}}{\frac{SR2C2 + 1}{SC2}} = \frac{R2}{SR2C2 + 1}$$

$$Z_i = \frac{1}{SC1} + R1 = \frac{SR1 + C1 + 1}{SC}$$

$$F(s) = \frac{Vu(s)}{Vi(s)} = -\frac{Z_f}{Z_i} = \frac{\frac{R2}{SR2C2 + 1}}{\frac{SR1 + C1 + 1}{SC1}} = \frac{R2}{SR2C2 + 1} * \frac{SC1}{SR1C1 + 1} = \frac{SR2C1}{(SR2C2 + 1)} * \frac{1}{(SR1C1 + 1)}$$

### Esercizio-5

Determinare il valore della funzione di F(s) corrispondente a:

$$S = 0 + J2 \quad F(s) = \frac{S^2 + 5 * (S + 7)}{(S + 3) * (S + 2)}$$

$$\frac{-4 + J10 + 35}{2 + J10} = \frac{31 + J10}{2 + J10} * \frac{2 - J10}{2 - J10} = \frac{62 - J310 + J20 + 100}{4 + 100 + J20 - J20} = \frac{-J290 + 162}{104} = \frac{162}{104} - \frac{J290}{104}$$

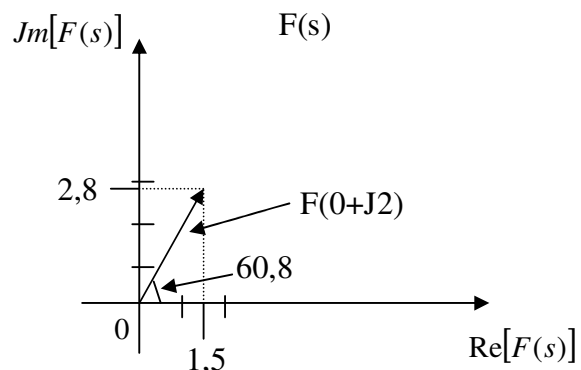
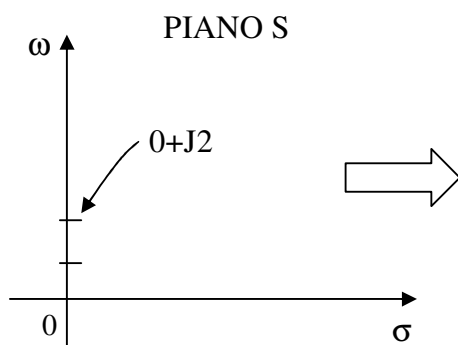
#### • Modulo

$$|F(0 + J2)| = \sqrt{\left(\frac{162}{104}\right)^2 + \left(\frac{290}{104}\right)^2} = \sqrt{2,4 + 7,7} = 3,2$$

#### • Fase

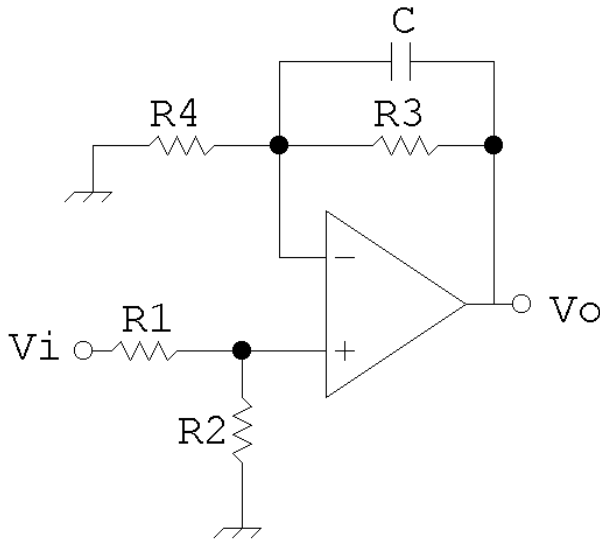
$$\varphi = \arctg \frac{\frac{290}{104}}{\frac{162}{104}} = \arctg \frac{290}{104} * \frac{104}{162} = 60,8^\circ$$

$$S = 0 + J2 \Rightarrow F_{(0+J2)} = \frac{162}{104} - \frac{J290}{104} = 1,5 - J2,8$$

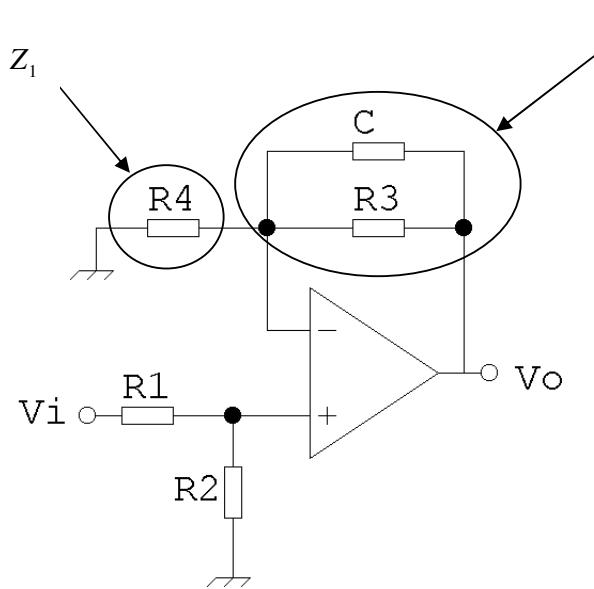


**Esercizio -6**

Dato il circuito di figura determinare la f.d.t. nel dominio S.



- $V_{1(t)} \Rightarrow V_{1(s)}$
- $V_{U(t)} \Rightarrow V_{U(s)}$
- $R1 \Rightarrow R1 \Rightarrow$
- $R2 \Rightarrow R2 \Rightarrow$
- $R3 \Rightarrow R3 \Rightarrow$
- $R4 \Rightarrow R4 \Rightarrow$
- $C \Rightarrow \frac{1}{sC} \Rightarrow$



$$Z_f \quad V_{U(s)} = \left(1 + \frac{Z_f}{Z_1}\right) * V_{1(s)}^+$$

$$V_{1(s)}^+ = \frac{R2}{R1 + R2} * V_{1(s)}$$

$$V_{U(s)} = \left(1 + \frac{Z_f}{Z_1}\right) * \frac{R2}{R1 + R2} * V_{1(s)}$$

$$F_{(s)} = \frac{V_{U(s)}}{V_{1(s)}} = \left(1 + \frac{Z_f}{Z_1}\right) * \frac{R2}{R1 + R2}$$

$$Z_f = \frac{1}{\frac{1}{sC} // R3} = \frac{\frac{1}{sC} * R3}{\frac{1}{sC} + R3} = \frac{\frac{R3}{sC}}{\frac{R3sC + 1}{sC}} = \frac{R3}{sCR3 + 1}$$

$$Z_1 = R4$$

$$F_{(s)} = \left( 1 + \frac{\frac{R3}{SCR3+1}}{R4} \right) * \frac{R2}{R1+R2}$$

$$F_{(s)} = \left[ 1 + \frac{R3}{R4(SCR3+1)} \right] * \frac{R2}{R1+R2}$$

$$F_{(s)} = \left[ \frac{R4(1+SCR3)+R3}{R4(1+SCR3)} \right] * \frac{R2}{R1+R2}$$

$$F_{(s)} = \frac{R2}{R1+R2} * \left[ \frac{R3+R4+SCR3R4}{R4(1+SCR3)} \right]$$

$$F_{(s)} = \frac{R2}{R4(R1+R2)} * \left[ \frac{R3+R4+SCR3R4}{1+SCR3} \right]$$

$$F_{(s)} = \frac{R2(R3+R4)}{R4(R1+R2)} * \left[ \frac{1+SC}{1+SCR3} \right]$$

## TRASFORMATATA DI LAPLACE PRINCIPALI PROPRIETÀ E TEOREMI

Si definisce trasformata di Laplace della funzione  $f(t)$  la seguente funzione  $F(s)$ :

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad t > 0$$

La trasformata di Laplace di una funzione tempo-variabile  $f(t)$ , viene espressa con la seguente scrittura:

$$f(t) \longrightarrow L\{f(t)\} = F(s)$$

La trasformazione inversa, detta *antitrasformata di Laplace*, viene indicata nel modo seguente:

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

Nella tabella successiva sono riportate le principali proprietà delle trasformate di Laplace.

	<b>Dominio del tempo con <math>t &gt; 0</math></b>	<b>Dominio della variabile <math>s</math></b>
A	$k \cdot f(t)$	$k \cdot F(s)$
B	$f(t) + g(t) + h(t)$	$F(s) + G(s) + H(s)$
C	$\frac{df(t)}{dt}$	$s \cdot F(s) - f(0)$
D	$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - \frac{df(0)}{dt}$
E	$\int f(t) dt$	$\frac{F(s)}{s}$
F	$f(t-a)$	$e^{-as} \cdot F(s)$

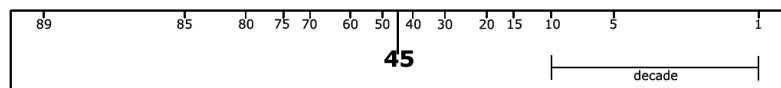
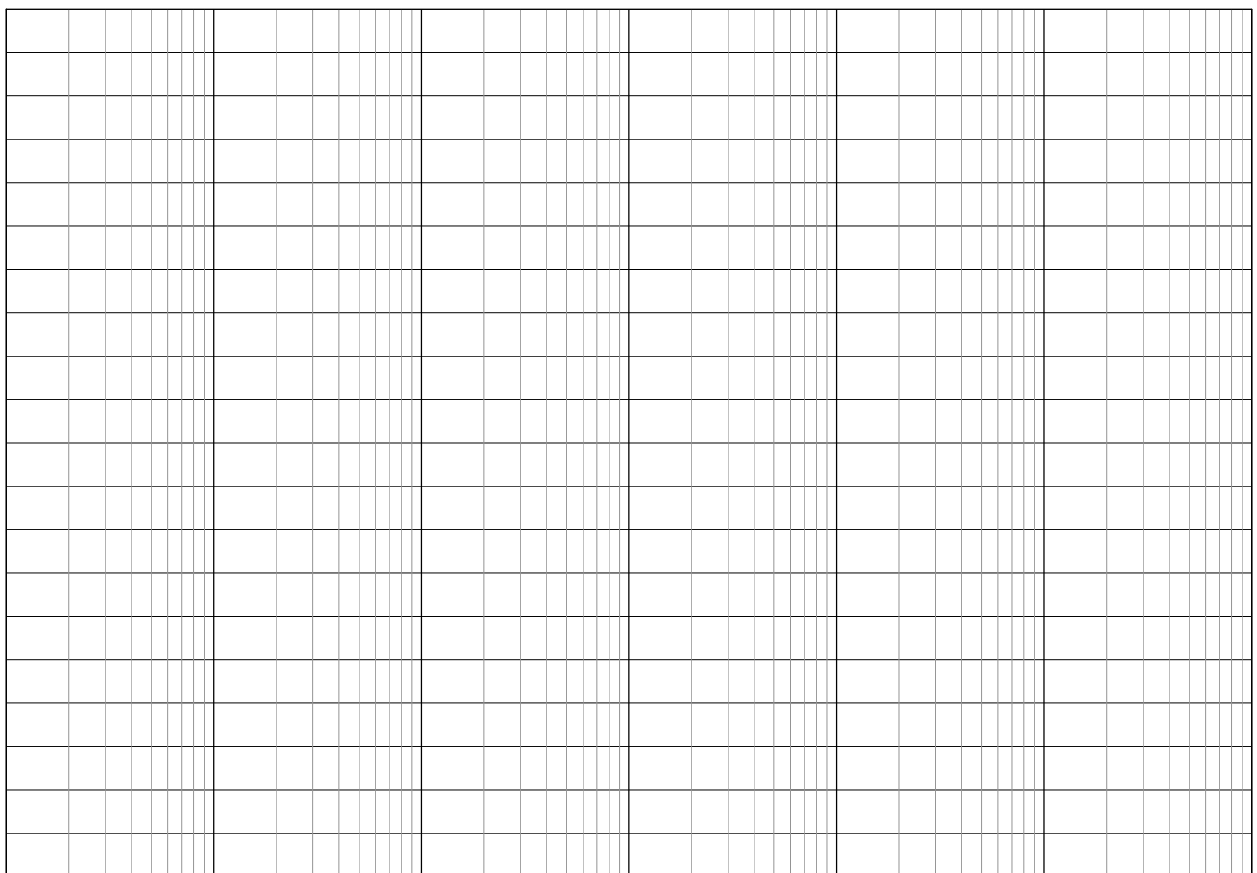
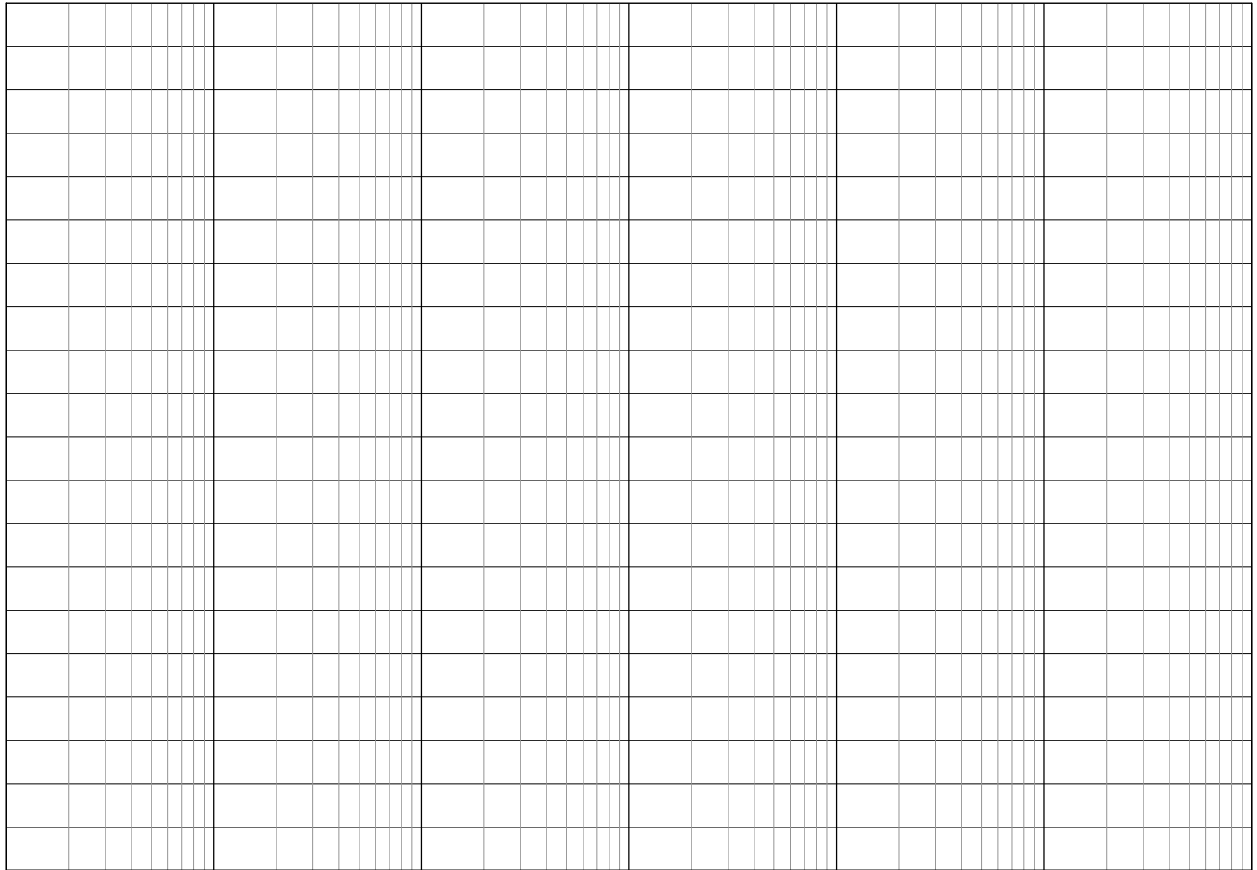
La trasformazione e l'antitrasformazione di Laplace possono essere effettuate mediante l'ausilio delle tabelle delle principali funzioni.

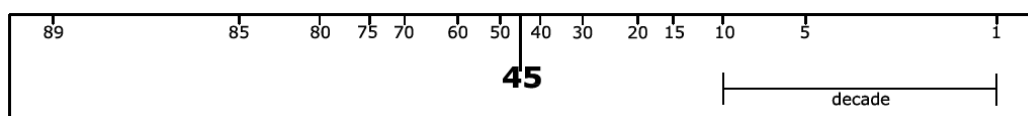
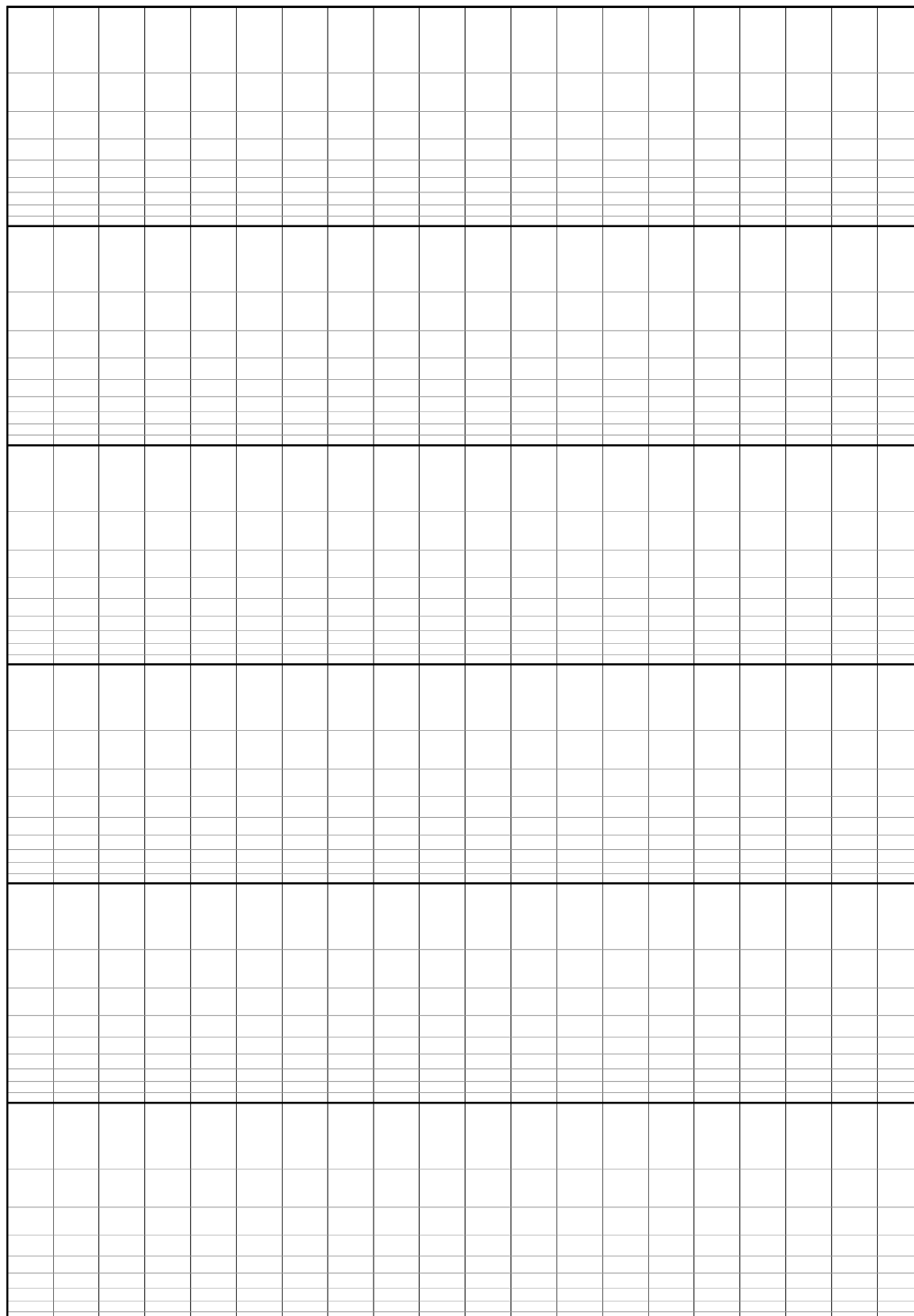
La tabella seguente riporta le principali trasformate di Laplace.

N.	F(s)	f(t) t > 0
1	1	$\delta(t)$ Impulso unitario
2	$e^{-Ts}$	$\delta(t - T)$ Impulso ritardato
3	$\frac{1}{s}$	sca(t) Gradino unitario
4	$\frac{1}{s} \cdot e^{-Ts}$	sca(t-T) Gradino unitario ritardato di T
5	$\frac{1}{s^2}$	ram(t) Rampa unitaria
6	$\frac{1}{s^n}$ n = 1, 2, 3, ...	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ 0! = 1
7	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}$
8	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} \cdot t^{n-1} \cdot e^{-at}$ n = 1, 2, 3, ...
9	$\frac{1}{s \cdot (1+as)}$	$(1 - e^{-\frac{t}{a}})$
10	$\frac{1}{s \cdot (s+a)}$	$\frac{1}{a} \cdot (1 - e^{-at})$
11	$\frac{s+z}{s \cdot (s+a)}$	$\frac{z}{a} + \left(1 - \frac{z}{a}\right) \cdot e^{-at}$
12	$\frac{1}{s \cdot (s+a) \cdot (s+b)}$ con a e b numeri reali e b > a	$\frac{1}{ab} \cdot \left(1 - \frac{b \cdot e^{-at}}{b-a} + \frac{a \cdot e^{-bt}}{b-a}\right)$
13	$\frac{s+z}{s \cdot (s+a) \cdot (s+b)}$	$\frac{1}{a \cdot b} \cdot \left(z - \frac{b \cdot (z-a) \cdot e^{-at}}{b-a} + \frac{a \cdot (z-b) \cdot e^{-bt}}{b-a}\right)$
14	$\frac{1}{(1+as) \cdot (1+bs)}$	$\frac{1}{a-b} \cdot \left(e^{-\frac{t}{a}} - e^{-\frac{t}{b}}\right)$
15	$\frac{1}{(s+a) \cdot (s+b)}$	$\frac{1}{b-a} \cdot (e^{-at} - e^{-bt})$
16	$\frac{s}{(s+a) \cdot (s+b)}$	$\frac{1}{a-b} \cdot (a \cdot e^{-at} - b \cdot e^{-bt})$
17	$\frac{s+z}{(s+a) \cdot (s+b)}$	$\frac{1}{b-a} \cdot [(z-a) \cdot e^{-at} - (z-b) \cdot e^{-bt}]$

N.	F(s)	f(t) t > 0
18	$\frac{1}{s \cdot (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$ Se $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ ha soluzioni complesse coniugate	$\frac{1}{\omega_n^2} - \frac{1}{\omega_n \cdot \omega_d} \cdot e^{-\zeta\omega_n t} \cdot \sin(\omega_d \cdot t + \phi)$ $\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}$ $\phi = \cos^{-1} \zeta$ $0 < \zeta < 1$
19	$\frac{1}{s \cdot (s^2 + \omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2} \cdot (1 - \cos \omega t)$
20	$\frac{1}{s \cdot (s + a)^2}$	$\frac{1}{a^2} \cdot (1 - e^{-at} - a \cdot t \cdot e^{-at})$
21	$\frac{s + z}{s \cdot (s + a)^2}$	$\frac{1}{a^2} \cdot [z - z \cdot e^{-at} + a \cdot (a - z) \cdot t \cdot e^{-at}]$
22	$\frac{s + z}{s \cdot (s^2 + \omega^2)}$	$\frac{z}{\omega^2} - \sqrt{\frac{z^2 + \omega^2}{\omega^4}} \cdot \cos(\omega t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{z}\right)$
23	$\frac{1}{(s + a) \cdot (s + b) \cdot (s + c)}$	$\frac{e^{-at}}{(b-a) \cdot (c-a)} + \frac{e^{-bt}}{(c-b) \cdot (a-b)} + \frac{e^{-ct}}{(a-c) \cdot (b-c)}$
24	$\frac{s + z}{(s + a) \cdot (s + b) \cdot (s + c)}$	$\frac{(z-a) \cdot e^{-at}}{(b-a) \cdot (c-a)} + \frac{(z-b) \cdot e^{-bt}}{(c-b) \cdot (a-b)} + \frac{(z-c) \cdot e^{-ct}}{(a-c) \cdot (b-c)}$
25	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$
26	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
27	$\frac{s + z}{s^2 + \omega^2}$	$\sqrt{\frac{z^2 + \omega^2}{\omega^2}} \cdot \sin(\omega t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{z}\right)$
28	$\frac{s \cdot \sin \phi + \omega \cdot \cos \phi}{s^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega t + \phi)$
29	$\frac{1}{(s + a)^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} \cdot e^{-at} \cdot \sin \omega t$
30	$\frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\frac{1}{\omega_d} \cdot e^{-\zeta\omega_n t} \cdot \sin \omega_d t$ $\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}$
31	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \cdot \cos \omega t$
32	$\frac{s + z}{(s + a)^2 + \omega^2}$	$\sqrt{\frac{(z-a)^2 + \omega^2}{\omega^2}} \cdot e^{-at} \cdot \sin(\omega t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{z-a}\right)$
33	$\frac{1}{s^2 \cdot (s + a)}$	$\frac{1}{a^2} \cdot (a \cdot t - 1 + e^{-at})$
34	$\frac{z_1}{s + z_{p1}} + \frac{\bar{z}_1}{s + z_{p2}}$ $z_{p1} = a + bj$ $z_1$ e $\bar{z}_1$ complessi coniugati	$2 \cdot k \cdot e^{-at} \cdot \cos(bt + \phi)$ con $k =  z_1 $ e $\phi =  \angle z_1 $







SISTEMI, AUTOMAZIONE E ORGANIZZAZIONE DELLA  
PRODUZIONE

# I Diagrammi di Bode

APPUNTI MODULO 3

Ing. Enrico Cinalli

4-5 T.I.E.

## 1 - DIAGRAMMI DI BODE

$G(s) \longrightarrow$  Diagramma dei moduli ( $\alpha$ )  
 Diagramma delle fasi ( $\beta$ )

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |G(j\omega)| \quad (\alpha)$$

$$\angle G(j\omega) = \arctg \frac{\text{Im}G(j\omega)}{\text{Re}G(j\omega)} \quad (\beta)$$

$$G(s) = K_1 \cdot \frac{b_0 + b_1 s + \dots + s^m}{s^h (a_h + a_{h+1} s + \dots + s^n)}$$

$$G(s) = K_1 \cdot \frac{\left(s + \frac{1}{\tau'_1}\right) \cdot \left(s + \frac{1}{\tau'_2}\right) \dots \left(s^2 + 2\zeta_1 \omega'_{n1} s + \omega'_{n1}{}^2\right) \cdot \left(s^2 + 2\zeta_2 \omega'_{n2} s + \omega'_{n2}{}^2\right)}{s^h \left(s + \frac{1}{\tau_1}\right) \cdot \left(s + \frac{1}{\tau_2}\right) \dots \left(s^2 + 2\zeta_1 \omega_{n1} s + \omega_{n1}{}^2\right) \cdot \left(s^2 + 2\zeta_2 \omega_{n2} s + \omega_{n2}{}^2\right)}$$

$$G(s) = K \cdot \frac{(1 + \tau'_1 s) \cdot (1 + \tau'_2 s) \dots \left(1 + 2\zeta'_1 \frac{s}{\omega'_{n1}} + \frac{s^2}{\omega'_{n1}{}^2}\right) \cdot \left(1 + 2\zeta'_2 \frac{s}{\omega'_{n2}} + \frac{s^2}{\omega'_{n2}{}^2}\right)}{s^h (1 + \tau_1 s) \cdot (1 + \tau_2 s) \dots \left(1 + 2\zeta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega_{n1}{}^2}\right) \cdot \left(1 + 2\zeta_2 \frac{s}{\omega_{n2}} + \frac{s^2}{\omega_{n2}{}^2}\right)}$$

$$\text{con } k = \frac{\tau_1 + \tau_2 \dots \omega'_{n1}{}^2 \cdot \omega'_{n2}{}^2}{\tau'_1 + \tau'_2 \dots \omega_{n1}{}^2 \cdot \omega_{n2}{}^2}$$

Posto  $s = j\omega$  si ha:

$$G(j\omega) = K \cdot \frac{(1 + j\omega\tau'_1) \cdot (1 + j\omega\tau'_2) \dots \left(1 + 2\zeta'_1 \frac{j\omega}{\omega'_{n1}} - \frac{\omega^2}{\omega'_{n1}{}^2}\right) \cdot \left(1 + 2\zeta'_2 \frac{j\omega}{\omega'_{n2}} - \frac{\omega^2}{\omega'_{n2}{}^2}\right)}{(j\omega)^h (1 + j\omega\tau_1) \cdot (1 + j\omega\tau_2) \dots \left(1 + 2\zeta_1 \frac{j\omega}{\omega_{n1}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n1}{}^2}\right) \cdot \left(1 + 2\zeta_2 \frac{j\omega}{\omega_{n2}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n2}{}^2}\right)}$$

se  $h=0$  allora  $K$  è detta **costante di guadagno statico**

se  $h=1$  allora  $K$  è detta **costante di velocità**

se  $h=2$  allora  $K$  è detta **costante di accelerazione**

Abbiamo così che la  $G(j\omega)$  è il prodotto di termini del tipo:

(1)  $K$

(2)  $(j\omega)^{-h}$

(3)  $(1+j\omega\tau)^{\pm 1}$

(4)  $\left(1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^{\pm 1}$

si ha che:

$$\alpha = |G(j\omega)|_{dB} = \sum \text{dei grafici relativi ai singoli termini}$$

$$\beta = \angle G(j\omega) = \sum \text{dei grafici relativi ai singoli termini}$$

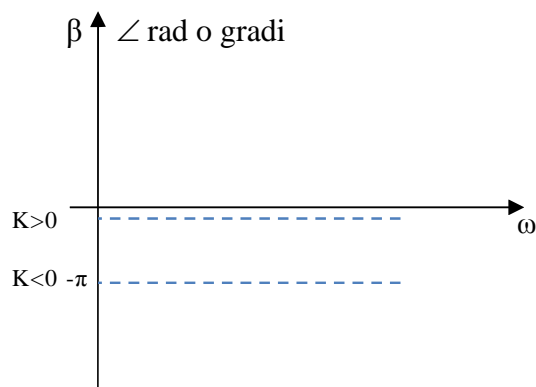
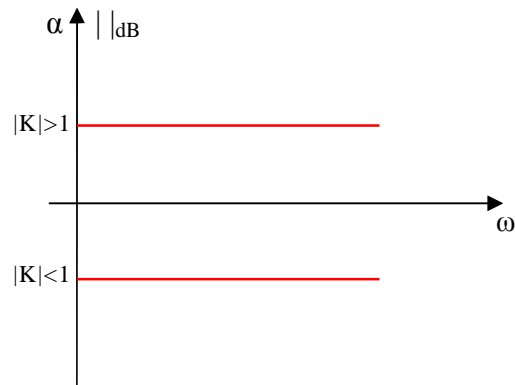
Il diagramma delle fasi è legato a quello delle ampiezze tanto che se la funzione di trasferimento è **A FASE MINIMA**<sup>(\*)</sup> il diagramma  $\beta$  si determina univocamente a partire dal diagramma  $\alpha$ .

(\*) Definizione

**Una  $F_T(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$  è detta a fase minima se non esistono né poli, né zeri nel semipiano destro.**

Diagrammi di Bode

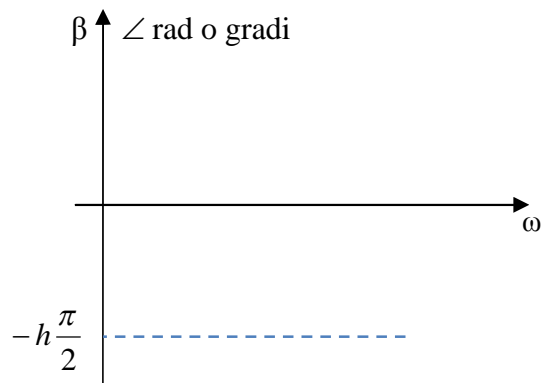
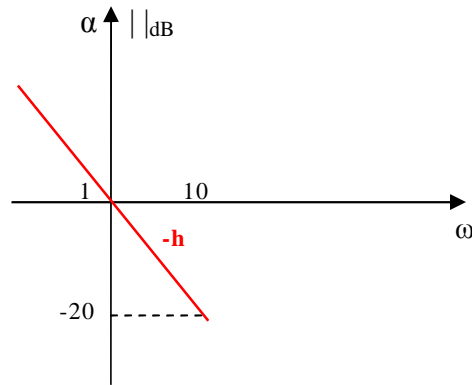
(1)  $G(j\omega) = K$



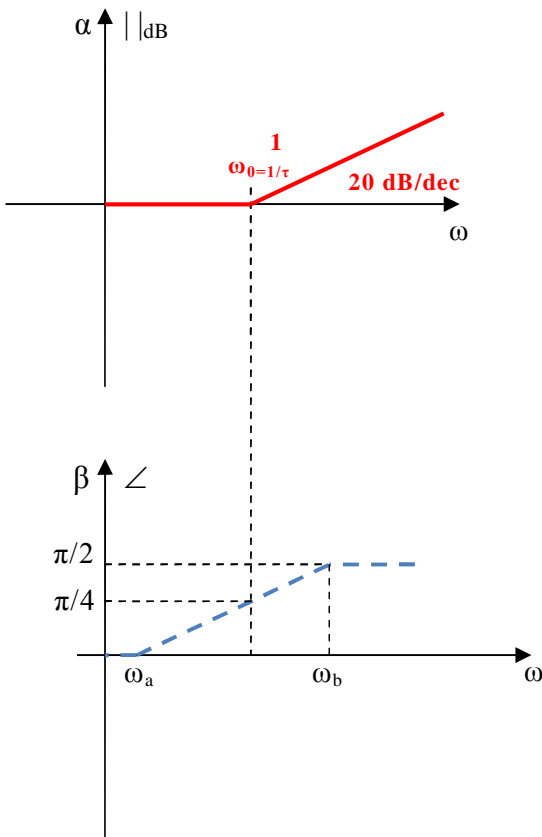
(2)  $G(j\omega) = (j\omega)^{-h}$

$$= \frac{1}{(j\omega)^h}$$

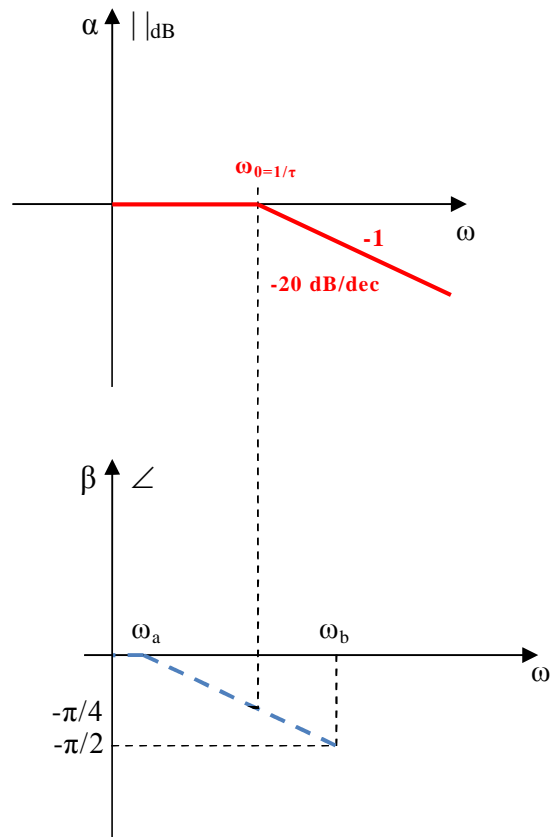
$$= \frac{1}{s^h}$$



3)  $G(j\omega) = (1+j\omega\tau)^{+1} \quad \tau > 0$



$G(j\omega) = (1+j\omega\tau)^{-1} \quad \tau > 0$



NOTA BENE

$$\begin{cases} \omega_a = \frac{\omega_0}{e^{\frac{\pi}{2}}} \cong \frac{\omega_0}{4,81} \\ \omega_b = \omega_0 \cdot e^{\frac{\pi}{2}} \cong \omega_0 \cdot 4,81 \end{cases}$$

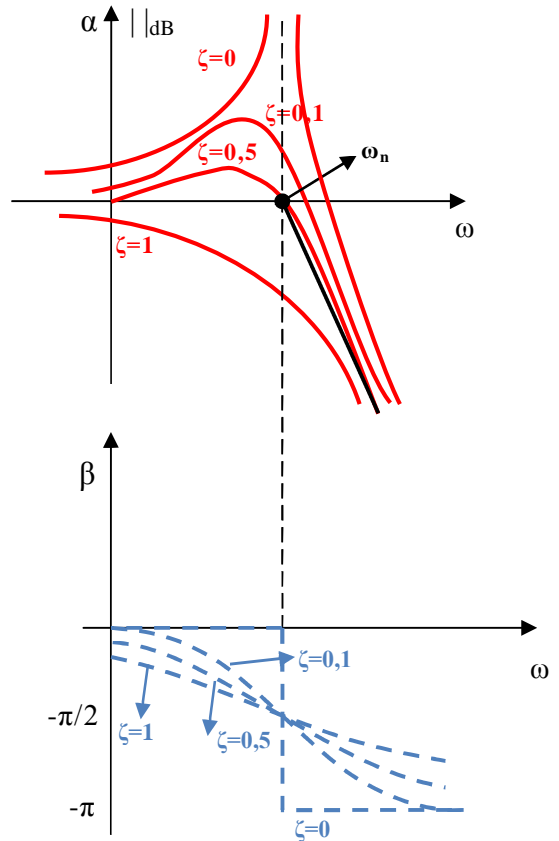
N.B.

Se  $\tau < 0$  allora: il diagramma  $\alpha$  rimane lo stesso con  $\omega_0 = 1/|\tau|$   
 il diagramma  $\beta$  viene ribaltato rispetto all'asse  $\omega$

$$(4) \quad G(j\omega) = \left( 1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^{-1} \quad 0 \leq \zeta < 1$$

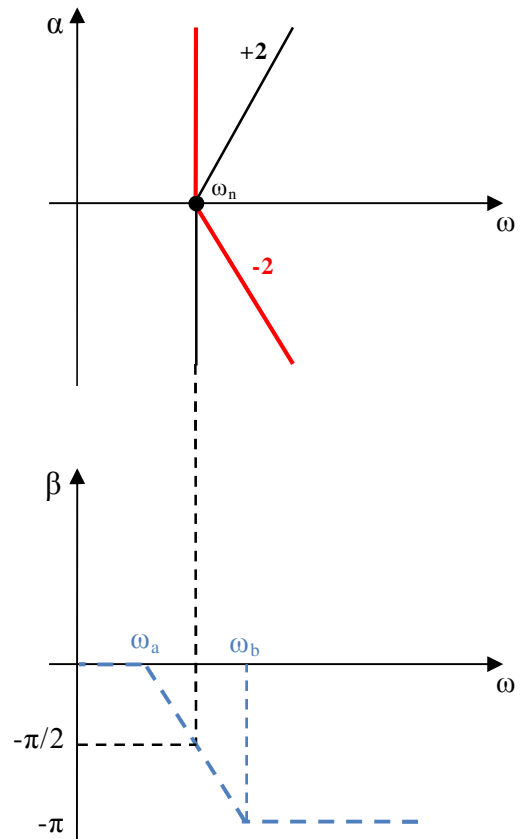
Gli stessi ribaltati rispetto all'asse  $\omega$

$$G(j\omega) = \left( 1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^{-1} \quad 0 \leq \zeta < 1$$



I diagrammi approssimati sono i seguenti:

Gli stessi ribaltati rispetto all'asse  $\omega$





**NOTA BENE**

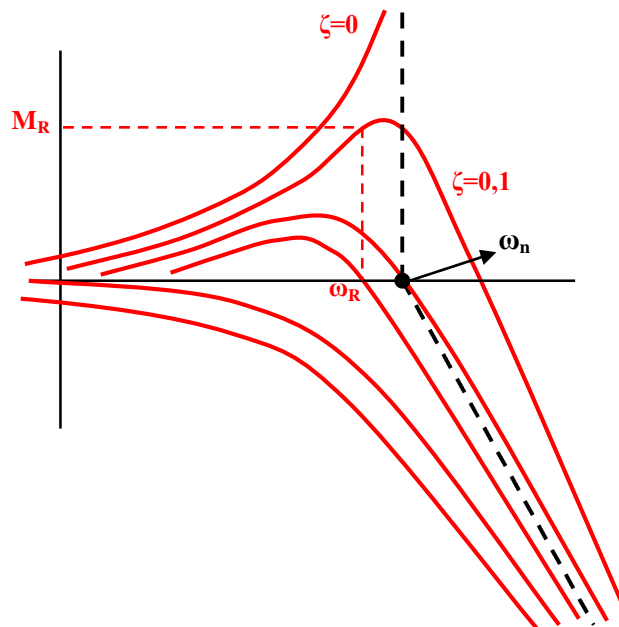
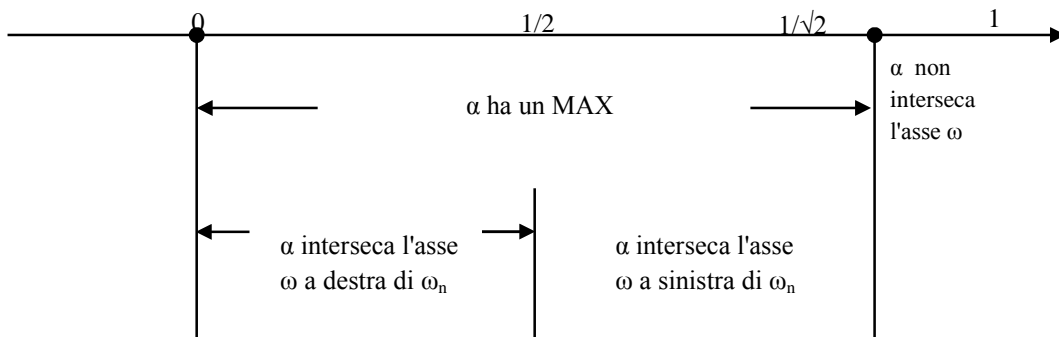
$$\omega_a = \frac{\omega_n}{e^{\frac{\pi}{2}\zeta}}$$

$$\omega_b = \omega_n \cdot e^{\frac{\pi}{2}\zeta}$$

Se  $\zeta < 0$  il diagramma  $\alpha$  è lo stesso considerando  $|\zeta|$   
 il diagramma  $\beta$  viene ribaltato rispetto all'asse  $\omega$

**OSSERVAZIONE**

Osservando i diagrammi  $\alpha$  per termini del (4) tipo ci accorgiamo che variano al variare di  $\zeta$ .  
 Si hanno le seguenti proprietà:



La Max sovralongazione in % nei sistemi del 2 ordine si ricava mediante la seguente formula:

$$S_{MAX} \% = 100 \cdot e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

# Analisi di un sistema

APPUNTI MODULO 4

Ing. Enrico Cinalli

4-5 T.I.E.

## 1 - INTRODUZIONE

Lo schema a blocchi tipico di un sistema di controllo è rappresentato nella Fig. 4.1.

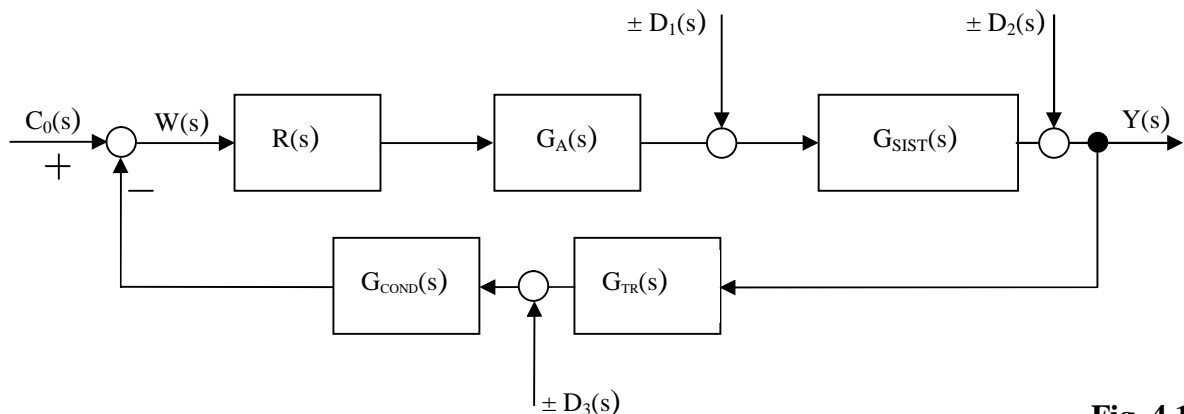


Fig. 4.1

Analizzando lo schema a blocchi si evidenzia che ciascun blocco rappresenta una parte del sistema:

$G_{SIST}(s)$  rappresenta il **sistema da controllare** (es. *forno elettrico*): la sua funzione di trasferimento contiene i parametri fisici del sistema (es. *dimensioni, caratteristiche dell'isolamento termico delle pareti del forno, ecc.*);

$G_A(s)$  rappresenta la funzione di trasferimento dell'**attuatore** (es. *resistenza elettrica*); la sua funzione è quella di trasferire al sistema da controllare le "decisioni" espresse dal controllore  $C(s)$  trasferendo al sistema l'energia necessaria affinché il sistema raggiunga lo stato desiderato;

$G_{TR}(s)$  rappresenta la funzione di trasferimento del **trasduttore** (es. *termocoppia*); la sua funzione è quella di convertire la grandezza fisica da controllare (es. *temperatura*) in una grandezza elettrica (es. *tensione*);

$G_{COND}(s)$  rappresenta la funzione di trasferimento del **condizionatore** (es. *circuito elettronico di amplificazione*); la sua funzione è quella di "uniformare" il segnale in uscita dal trasduttore con il segnale di riferimento  $C_0(s)$  affinché sia possibile il confronto (*differenza di segnali*);

$R(s)$  rappresenta la funzione di trasferimento del **regolatore o controllore** (es. *circuito elettronico – regolatore P.I.D.*); la sua funzione è quella di inviare un opportuno segnale all'attuatore in funzione della differenza tra il valore desiderato  $C_0(s)$  ed il valore assunto dal sistema proveniente dal trasduttore ed opportunamente condizionato;

$D_i(s)$  rappresentano i **disturbi** che presenti nel sistema di controllo;

$Y(s)$  rappresenta la **variabile controllata** (es. *temperatura*);

$C_0(s)$  rappresenta l'**andamento desiderato** della variabile controllata;

$W(s)$  rappresenta la **differenza tra l'andamento desiderato** della variabile controllata e **l'andamento della grandezza sotto controllo del sistema** opportunamente trasdotto e condizionato.

L'obiettivo di ogni sistema di controllo è che la variabile controllata si discosti il meno possibile dall'andamento desiderato; la situazione ideale è che il sistema realizzi una perfetta coincidenza tra  $c_0(t)$  e  $y(t)$ .

Nei sistemi reali tuttavia la presenza di disturbi e le incertezze ed approssimazioni introdotte dal modello non consentono il raggiungimento del risultato ideale.

Occorre quindi accettare l'errore  $[e_r(t)=c_0(t)-y(t)]$ , cioè che lo scostamento tra l'andamento desiderato e quello realizzato dal sistema risulti "piccolo" in tutte le condizioni di funzionamento prevedibili.

Più precisamente, i requisiti fondamentali che un sistema di controllo deve possedere sono i seguenti:

- A. REQUISITI DINAMICI
- B. REQUISITI STATICI

### A. REQUISITI DINAMICI

I requisiti dinamici, riferiti al comportamento del sistema nel "periodo iniziale" detto **periodo transitorio**, sono:

- A.1 adeguata stabilità
- A.2 adeguata velocità di risposta
- A.3 contenimento della massima sovraelongazione

È chiaro che la velocità di risposta e la massima sovraelongazione verranno valutate e/o determinate solo dopo aver accertato che il sistema di controllo assicuri una stabilità.

### B. REQUISITI STATICI

Il requisito statico, riferiti al comportamento del sistema in condizioni di regime cioè a transitorio esaurito è:

- B.1 errore a regime  $[e_r(t)$  per  $t$  "molto molto grande" cioè  $t \rightarrow \infty$ ]

Vedremo in seguito alcuni metodi per determinare la stabilità del sistema e per valutare e/o determinare la velocità di risposta, la massima sovraelongazione e l'errore a regime. Lo studio di queste caratteristiche del sistema viene detto: **ANALISI DEL SISTEMA**.

Successivamente (cap. 5) vedremo alcune procedure per determinare un regolatore in grado di migliorare i requisiti statici e dinamici del sistema di controllo. Tale procedura viene detta: **SINTESI DEL REGOLATORE**.

La Fig. 4.2 evidenzia i requisiti statici e dinamici di un sistema di controllo.

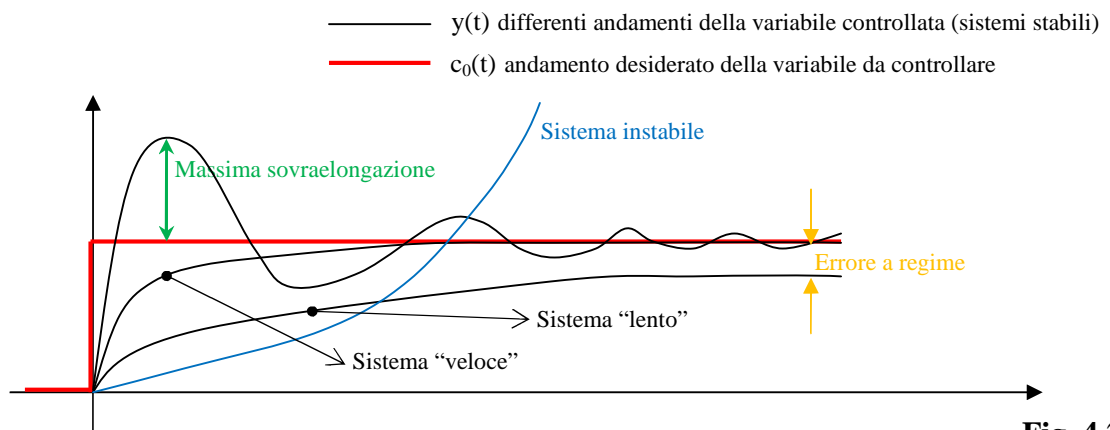


Fig. 4.2

## 2 – LA STABILITÀ

La stabilità di un sistema lineare non dipende dagli ingressi pertanto la determinazione della stabilità si può determinare unicamente conoscendo le funzioni di trasferimento dei singoli blocchi che costituiscono il modello.

Dato un sistema lineare con funzione di trasferimento totale  $F_T(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$  si ha:

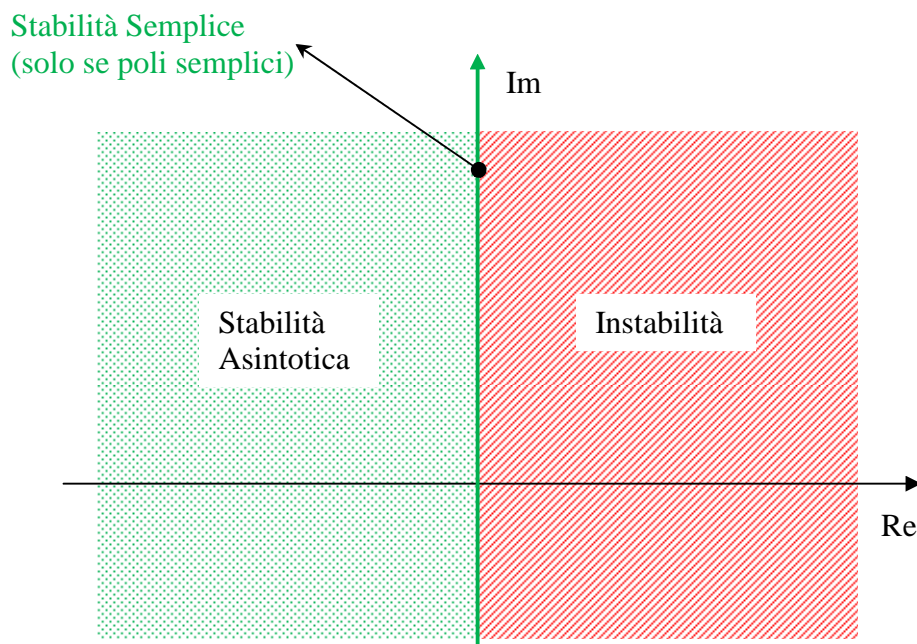
**C.N.E.S. per la stabilità:** non vi siano poli di  $F_T(s)$  con parte reale maggiore di zero ed eventuali poli con parte reale uguale a zero siano semplici.

**C.N.E.S. per la stabilità asintotica:** tutti poli di  $F_T(s)$  con parte reale minore di zero.

È interessante osservare che in un sistema retroazionato negativamente con funzione di trasferimento del guadagno ad anello aperto  $G_L(s) = \frac{N_L(s)}{D_L(s)}$  si ha che il denominatore  $D(s)$  della funzione di trasferimento totale è uguale alla somma tra  $N_L(s)$  e  $D_L(s)$  cioè:

$$D(s) = N_L(s) + D_L(s)$$

Le C.N.E.S. sopra indicate si possono rappresentare graficamente in **Fig. 4.3** che illustra nel piano complesso dove possono giacere le radici di  $D(s)$ .



**Fig. 4.3**

Per l'analisi della stabilità prenderemo in considerazione i seguenti criteri:

**A. CRITERIO DI ROUTH**

**C. CRITERIO DI BODE**

Il Criterio di Bode a differenza del criterio di Routh è utile in fase di sintesi mentre il Criterio di Routh benché molto semplice e veloce da applicare non consente di determinare soluzioni per migliorare i requisiti del sistema.

**A. CRITERIO DI ROUTH**

Il Criterio di Routh permette di sapere quante sono le radici di una equazione polinomiale con parte reale minore di zero e quante quelle con parte reale maggiore di zero.

Dato un generico polinomio:

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

**C.N.E.S.** perché le radici di D(s) abbiano parte reale minore di zero è che:

- 1) Tutti i coefficienti del polinomio siano diversi da zero ( $a_i \neq 0 \quad \forall i$ )
- 2) Tutti i coefficienti del polinomio siano dello stesso segno;
- 3) Tutti i coefficienti della prima colonna della Tabella di Routh siano  $\neq 0$  e dello stesso segno.

Tabella di Routh

$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$\dots$
$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$\dots$
$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\dots$
$c_1$	$c_2$	$\dots$	
$\dots$			

con:

$$b_1 = \frac{(a_{n-1} \cdot a_{n-2}) - (a_{n-3} \cdot a_n)}{a_{n-1}} \qquad b_2 = \frac{(a_{n-1} \cdot a_{n-4}) - (a_{n-5} \cdot a_n)}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{(b_1 \cdot a_{n-3}) - (b_2 \cdot a_{n-1})}{b_1} \qquad c_2 = \frac{(b_1 \cdot a_{n-5}) - (b_3 \cdot a_{n-1})}{b_1}$$

Osservazioni:

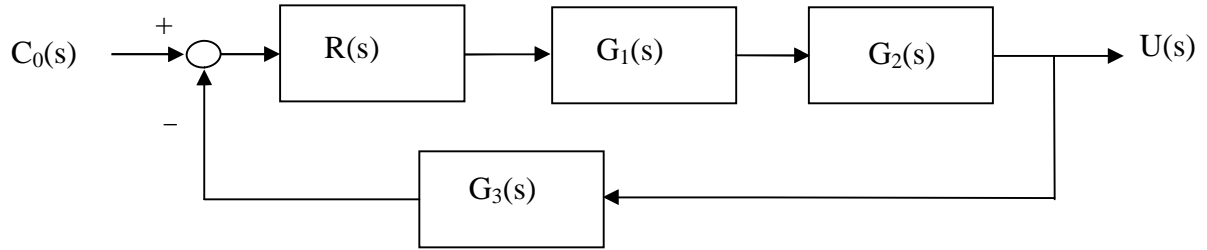
- Ad ogni permanenza di segno dei coefficienti della prima colonna corrisponde una radice di D(s) con parte reale minore di zero;
- Ad ogni variazione di segno dei coefficienti della prima colonna corrisponde una radice di D(s) con parte reale maggiore di zero.

\*\*\*\*\*

**C.N. per la asintotica stabilità è che**  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_{n-1}}{a_n} > 0 \\ \frac{a_0}{a_n} > 0 \end{array} \right.$

**se ciò non è verificato il sistema non può essere asintoticamente stabile.**

Esempio: Determinare la stabilità del seguente sistema con il Criterio di Routh.



dove:

$$R(s) = 1 \quad G_1(s) = \frac{1}{1 + 0,01s} \quad G_2(s) = \frac{5}{1 + 0,001s} \quad G_3(s) = 20$$

Soluzione:

$$G_L(s) = \frac{1}{1 + 0,01s} \cdot \frac{5}{1 + 0,001s} \cdot 20 = \frac{100}{(1 + 0,01s)(1 + 0,001s)}$$

Il denominatore  $D(s)$  della Funzione di Trasferimento totale si può ricavare dalla somma tra numeratore e denominatore di  $G_L(s)$ :

$$\begin{aligned} D(s) &= 100 + (1 + 0,01s)(1 + 0,001s) \\ D(s) &= 100 + 1 + 0,001s + 0,01s + 0,00001s^2 \\ D(s) &= 0,00001s^2 + 0,011s + 101 \end{aligned}$$

Tutti i coefficienti di  $D(s)$  sono diversi da zero e dello stesso segno.

La Tabella di Routh è la seguente:

0,00001	101
0,011	0
101	0

Tutti i coefficienti della prima colonna sono diversi da zero e dello stesso segno quindi il sistema è ASINTOTICAMENTE STABILE.

Evidenziamo che nel caso di polinomi fino al 2° grado non è necessario, per determinare le radici, trovare la Tabella di Routh poiché le equazioni di primo e secondo grado sono facilmente risolvibili.

**B. CRITERIO DI BODE**

Prima di enunciare il Criterio di Bode è necessario dare le **definizioni** di pulsazione critica, fase critica e margine di fase.

Dato un sistema reazionato negativamente con funzione di trasferimento ad anello aperto  $G_L(s)$  il cui diagramma di Bode del modulo attraversa una ed una sola volta l'asse a 0 dB allora si definisce:

- **Pulsazione critica**  $\omega_c$  del sistema: la pulsazione corrispondente al punto di intersezione del diagramma del modulo con l'asse a 0dB;
- **Fase critica**  $\phi_c$  del sistema: lo sfasamento di  $G_L(s)$  alla pulsazione critica cioè  $\phi_c = \angle G_L(j\omega_c)$ ;
- **Margine di fase**  $\phi_m$  del sistema: l'angolo  $\phi_m = 180^\circ - |\phi_c|$

**Criterio di Bode**

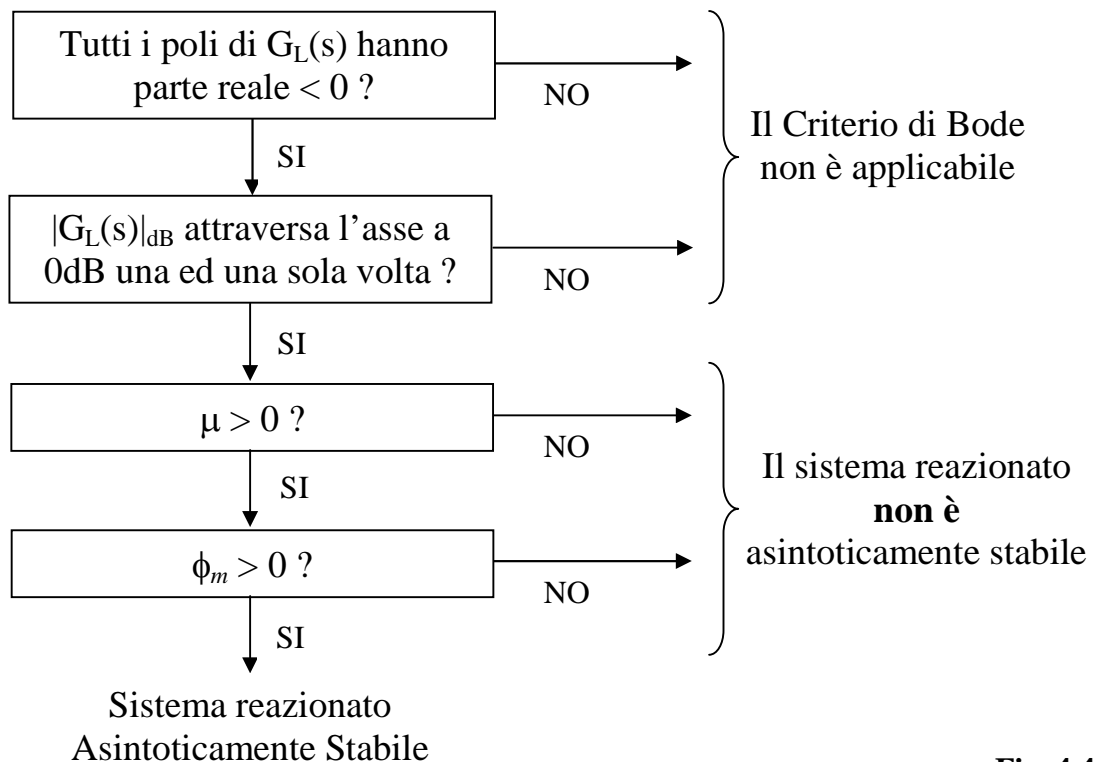
Dato un sistema reazionato negativamente con funzione di trasferimento ad anello aperto  $G_L(s)$ , siano soddisfatte le seguenti ipotesi.

- 1)  $G_L(s)$  non ha poli con parte reale maggiore di zero;
- 2) il diagramma di Bode del modulo di  $G_L(s)$  attraversa una ed una sola volta l'asse a 0 dB

allora:

indicato con  $\mu$  il guadagno d'anello, C.N.E.S. per l'asintotica stabilità del sistema reazionato è che  $\mu > 0$  e  $\phi_m > 0$ .

Il criterio di Bode si può illustrare anche con lo schema in **Fig. 4.4**.



**Fig. 4.4**

**OSS.** Se  $\phi_m > 40^\circ$  allora il sistema è detto avere un “**buon grado di stabilità**”.



Prima di procedere alla valutazione della velocità di risposta e della massima sovraelongazione dei sistemi del 1° e 2° ordine<sup>1</sup> analizziamo i rispettivi parametri fondamentali.

**PARAMETRI FONDAMENTALI DEI SISTEMI DEL 1° E 2° ORDINE**

**Sistema elementare del 1 ordine (con polo nel semipiano sinistro)**

Un sistema del primo ordine può essere posto nella forma:

$$F_t(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$$

L'unico parametro che caratterizza il sistema è la **costante di tempo  $\tau$** .

Il polo del sistema è

$$p = -\frac{1}{\tau}$$

Il tempo di assestamento  $T_a$  del sistema è:  $T_a = 3\tau = \frac{3}{|p|}$

tempo di salita (tempo per passare dal 10% al 90%):  $T_r = 2.2\tau$

tempo di ritardo (tempo per raggiungere il 50% del valore finale):  $T_d = 0.7\tau$

\*\*\*\*\*

**Sistemi elementari del 2 ordine (con poli complessi coniugati nel semipiano sinistro)**

$$F_t(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

I parametri più importanti che descrivono il transitorio sono i seguenti:

1. *Massima sovraelongazione  $S_{max}$* : differenza fra il valore massimo dell'uscita e il valore finale. È espresso in % del valore finale.
2. *Istante di massima sovraelongazione  $T_{max}$* : istante al quale si presenta la massima sovraelongazione.
3. *Tempo di ritardo  $T_r$* : tempo per raggiungere il 50 % del valore finale.
4. *Tempo di salita  $T_s$* : tempo occorrente perché l'uscita passi dal 10 al 90% del valore finale.
5. *Tempo di assestamento  $T_a$* : tempo occorrente perché l'uscita rimanga entro il  $\pm 5\%$  del valore finale.

1. *La massima sovraelongazione percentuale è:*  $S_{max} = 100 \cdot e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

2. *Istante di tempo in cui si ha la massima sovraelongazione:*  $T_{max} = \frac{\pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2}}$

3. *Tempo di ritardo (tempo per raggiungere il 50% del valore finale):*  $T_r = \frac{1 + 0.7\zeta}{\omega_n}$

4. *Tempo di salita (tempo per passare dal 10% al 90%):*  $T_s = \frac{0.8 + 2.5\zeta}{\omega_n}$

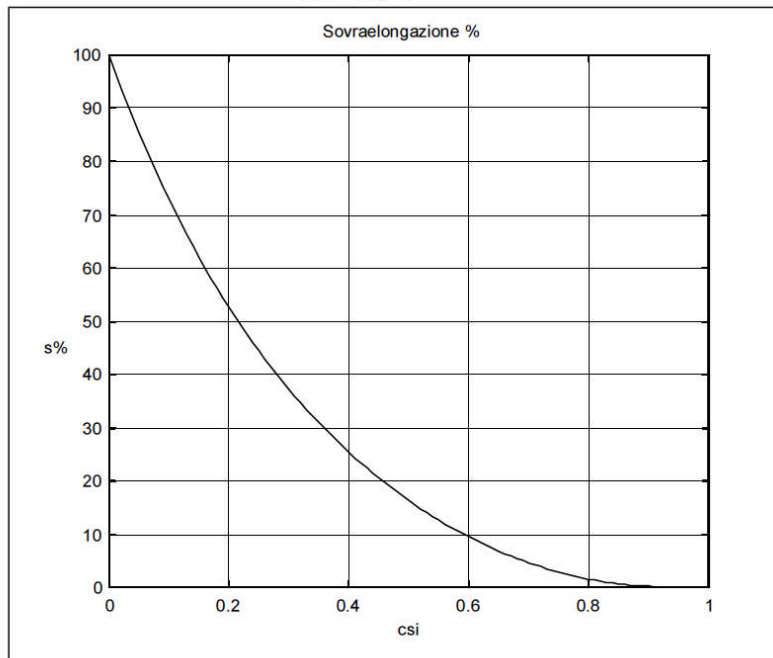
5. *Tempo di assestamento al 5%:*  $T_{a5\%} \cong \frac{3}{\zeta \cdot \omega_n}$

6. *Tempo di assestamento al 2%:*  $T_{a2\%} \cong \frac{4}{\zeta \cdot \omega_n}$

<sup>1</sup> Si definisce **ordine** di un sistema il numero di poli della sua funzione di trasferimento mentre si definisce **grado** il numero di poli nell'origine.

SOVRAELONGAZIONE

$$\hat{s}\% = 100 e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$



MARGINE DI FASE

$$M_\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\sqrt{-2\xi^2 + \sqrt{4\xi^4 + 1}}}{2\xi}\right)$$



### 3 – LA VELOCITÀ DI RISPOSTA

Analiticamente la velocità di risposta nei sistemi del 1° e secondo ordine può essere definita rispettivamente:

**Velocità di risposta nei sistemi del 1° ordine:** la pendenza della risposta nell'origine che si può ricavare con la seguente formula:

$$V = \frac{1}{\tau}$$

**Velocità di risposta nei sistemi del 2° ordine:** la pendenza nell' primo punto di flesso della risposta che si può ricavare, con discreta approssimazione, con la seguente formula:

$$V = \frac{1}{T_s}$$

Una valutazione della velocità di risposta dei sistemi del 1° e 2° ordine può essere effettuata anche valutando la pulsazione critica  $\omega_c$ : **maggiore è  $\omega_c$  più elevata è la velocità di risposta del sistema.**

### 4 – LA SOVRAELONGAZIONE MASSIMA

Come visto si possono avere sovraelongazioni solo nei sistemi di grado superiore al primo ed in particolare nei sistemi di 2° grado la sovraelongazione massima si ricava con la seguente formula:

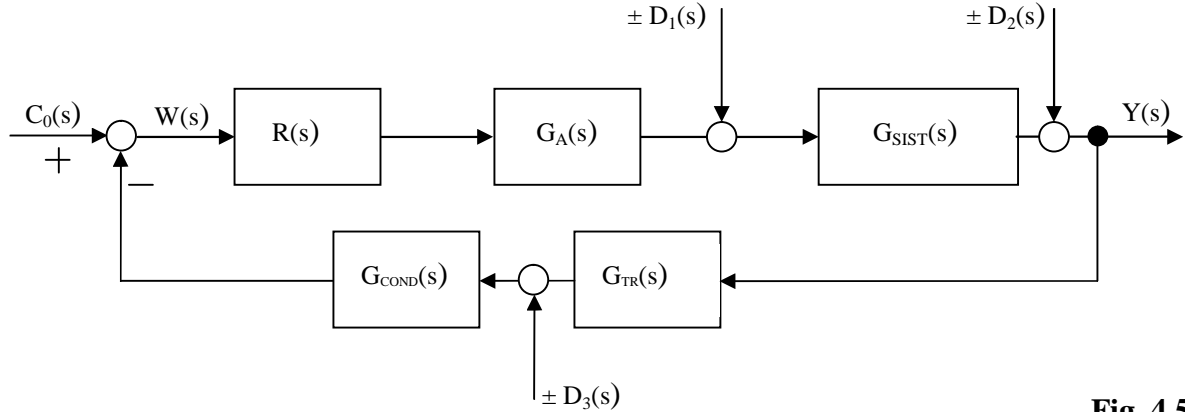
$$S_{\max} = 100 \cdot e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

Una valutazione della sovraelongazione dei sistemi del 2° ordine può essere effettuata anche valutando il margine di fase  $\phi_m$ : **maggiore è  $\phi_m$  più contenute saranno le sovraelongazioni.**

## 5 – L'ERRORE A REGIME

Nello studio dei sistemi di controllo è importante valutare l'entità dello scostamento tra il comportamento desiderato e quello effettivo detto **errore a transitorio esaurito o a regime**.

Consideriamo lo schema in Fig. 4.5.



**Fig. 4.5**

L'errore a regime può essere prodotto sia dal segnale di riferimento  $C_0(s)$  sia dai disturbi additivi  $D_1(s)$ ,  $D_2(s)$  e  $D_3(s)$ .

L'errore totale a regime indicato con  $e_{Tot}(\infty)$ , nel caso dei sistemi lineari oggetto del nostro studio, è dato dalla somma dei valori assoluti degli errori generati di singoli ingressi cioè:

$$e_{Tot}(\infty) = |e_{C_0}(\infty)| + |e_{D_1}(\infty)| + |e_{D_2}(\infty)| + |e_{D_3}(\infty)|$$

Ricordando il teorema del valore finale:

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$$

occorre quindi determinare tutti i seguenti addendi  $E_{C_0}(s)$ ,  $E_{D_1}(s)$ ,  $E_{D_2}(s)$  e  $E_{D_3}(s)$  per poi applicare il suddetto teorema del valore finale ed effettuare la somma dei rispettivi valori assoluti.

Ricordiamo che l'errore è dato dalla differenza tra il valore desiderato e il valore in uscita:

$$E_{Tot}(s) = C_0^*(s) - \sum Y_i(s)$$

Evidenziamo che il valore desiderato  $C_0^*(s)$  coincide con  $C_0(s)$  se la reazione è unitaria ma nel caso di reazione non unitaria è dato da:

$$C_0^*(s) = \frac{C_0(s)}{G_{COND}(s) \cdot G_{TR}(s)}$$

Iniziamo con la determinazione di  $Y_{C_0}(s)$ : cioè l'uscita dovuta all'ingresso  $C_0(s)$ :

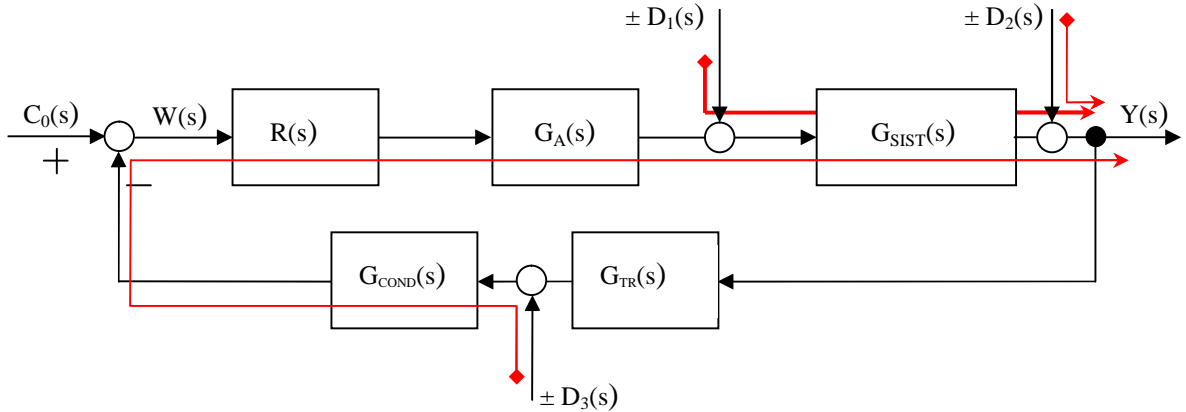
$$Y_{C_0}(s) = C_0(s) \cdot \frac{R(s) \cdot G_A(s) \cdot G_{SIST}(s)}{1 + R(s) \cdot G_A(s) \cdot G_{SIST}(s) \cdot G_{TR}(s) \cdot G_{COND}(s)}$$

Determiniamo ora le uscite dovute ai disturbi additivi:  $E_{D_1}(s)$ ,  $E_{D_2}(s)$  e  $E_{D_3}(s)$ :

Ricordiamo la funzione del guadagno ad anello aperto  $G_L(s)$ :

$$G_L(s) = R(s) \cdot G_A(s) \cdot G_{SIST}(s) \cdot G_{TR}(s) \cdot G_{COND}(s)$$

L'uscita del generico disturbo è data dal prodotto del disturbo per il rapporto tra il **prodotto dei blocchi che tale disturbo incontra fino all'uscita** e  $[1 + G_L(s)]$



Pertanto:

$$Y_{D_1}(s) = D_1(s) \cdot \frac{G_{SIST}(s)}{1 + G_L(s)}$$

$$Y_{D_2}(s) = D_2(s) \cdot \frac{1}{1 + G_L(s)}$$

$$Y_{D_3}(s) = D_3(s) \cdot \frac{(-1) \cdot G_{COND}(s) \cdot R(s) \cdot G_A(s) \cdot G_{SIST}(s)}{1 + G_L(s)}$$

**Il termine (-1) in  $Y_{D_3}(s)$  è dovuto al passaggio attraverso un nodo "invertente".**

Quindi:

$$E_{Tot}(s) = C_0^*(s) - \sum Y_i(s)$$

$$E_{Tot}(s) = C_0^*(s) - \left[ C_0(s) \cdot \frac{R(s) \cdot G_A(s) \cdot G_{SIST}(s)}{1 + R(s) \cdot G_A(s) \cdot G_{SIST}(s) \cdot G_{TR}(s) \cdot G_{COND}(s)} + D_1(s) \cdot \frac{G_{SIST}(s)}{1 + G_L(s)} + D_2(s) \cdot \frac{1}{1 + G_L(s)} + D_3(s) \cdot \frac{(-1) \cdot G_{COND}(s) \cdot R(s) \cdot G_A(s) \cdot G_{SIST}(s)}{1 + G_L(s)} \right]$$

I singoli addendi all'interno della parentesi quadra sono i contributi, dei vari ingressi, all'errore che possiamo anche definire nel modo seguente:

$$E_{C_0}(s) = C_0(s) \cdot \left[ \frac{1}{G_{COND}(s) \cdot G_{TR}(s)} - \frac{R(s) \cdot G_A(s) \cdot G_{SIST}(s)}{1 + G_L(s)} \right] \quad e_{C_0}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E_{C_0}(s)$$

$$E_{D_1}(s) = D_1(s) \cdot \frac{G_{SIST}(s)}{1 + G_L(s)} \quad e_{D_1}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E_{D_1}(s)$$

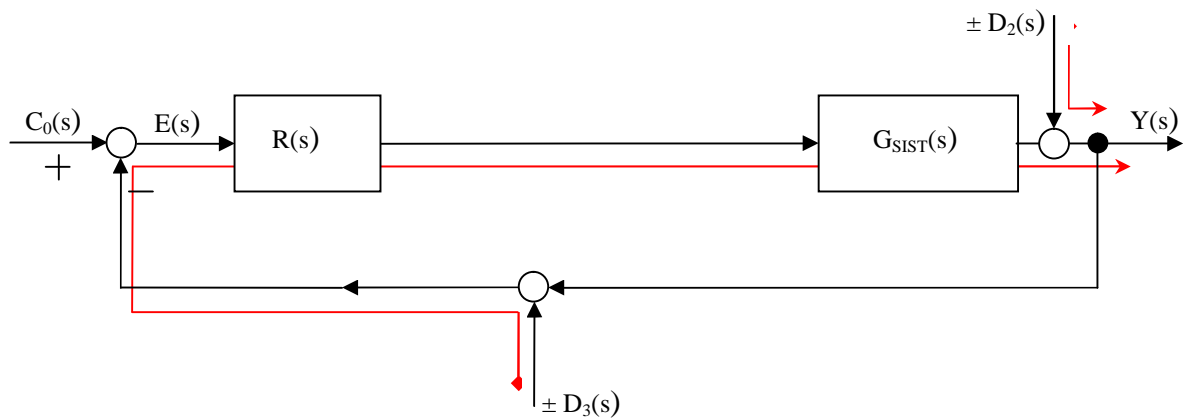
$$E_{D_2}(s) = D_2(s) \cdot \frac{1}{1 + G_L(s)} \quad e_{D_2}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E_{D_2}(s)$$

$$E_{D_3}(s) = D_3(s) \cdot \frac{-1 \cdot G_{COND}(s) \cdot R(s) \cdot G_A(s) \cdot G_{SIST}(s)}{1 + G_L(s)} \quad e_{D_3}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E_{D_3}(s)$$

da cui:

$$e_{Tot}(\infty) = |e_{C_0}(\infty)| + |e_{D_1}(\infty)| + |e_{D_2}(\infty)| + |e_{D_3}(\infty)|$$

Consideriamo il caso con **retroazione unitaria** e con lo schema a blocchi seguente:



Osserviamo ora che il segnale dopo il nodo che effettua la differenza è stato indicato con  $E(s)$  poiché coincide con la differenza tra  $C_0(s)$  e  $Y(s)$ .

Ora si ha:  $G_L(s) = R(s) \cdot G_A(s) \cdot G_{SIST}(s)$

e quindi:

$$E_{C_0}(s) = C_0(s) \cdot \frac{1}{1 + G_L(s)} \quad e_{C_0}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E_{C_0}(s)$$

$$E_{D_2}(s) = D_2(s) \cdot \frac{-1}{1 + G_L(s)} \quad e_{D_2}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E_{D_2}(s)$$

$$E_{D_3}(s) = D_3(s) \cdot \frac{-1 \cdot R(s) \cdot G_A(s) \cdot G_{SIST}(s)}{1 + G_L(s)} = D_3(s) \cdot \frac{-1 \cdot G_L(s)}{1 + G_L(s)} \quad e_{D_3}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E_{D_3}(s)$$

da cui:

$$e_{Tot}(\infty) = |e_{C_0}(\infty)| + |e_{D_2}(\infty)| + |e_{D_3}(\infty)|$$

Se ora consideriamo i segnali di ingresso  $e_{C_0}(t)$ ,  $d_2(t)$  e  $d_3(t)$  dei seguenti tipi:

$$K \text{ sca}(t) \quad K \text{ ram}(t) \quad K \text{ par}(t)$$

si ricava la seguente tabella che è utile per determinare immediatamente il relativo errore a regime in funzione del grado  $g$  della funzione  $G_L(s)$  e del suo guadagno statico  $\mu$ :

g	$ e_{C_0}(\infty)  =  e_{D_2}(\infty) $			$ e_{D_3}(\infty) $		
	K sca(t)	K ram(t)	K par(t)	K sca(t)	K ram(t)	K par(t)
0	$\frac{K}{1 + \mu}$	$\infty$	$\infty$	$\frac{K \cdot \mu}{1 + \mu}$	$\infty$	$\infty$
1	0	$\frac{K}{\mu}$	$\infty$	K	$\infty$	$\infty$
2	0	0	$\frac{K}{\mu}$	K	$\infty$	$\infty$

**OSS.**

La tabella sopra riportata è valida **solo se**:

- 1) il sistema ha retroazione unitaria;
- 2) il disturbo  $D_2(s)$  è posto a valle dell'ultimo blocco d'andata.

SISTEMI, AUTOMAZIONE E ORGANIZZAZIONE DELLA  
PRODUZIONE

# Sintesi del Regolatore

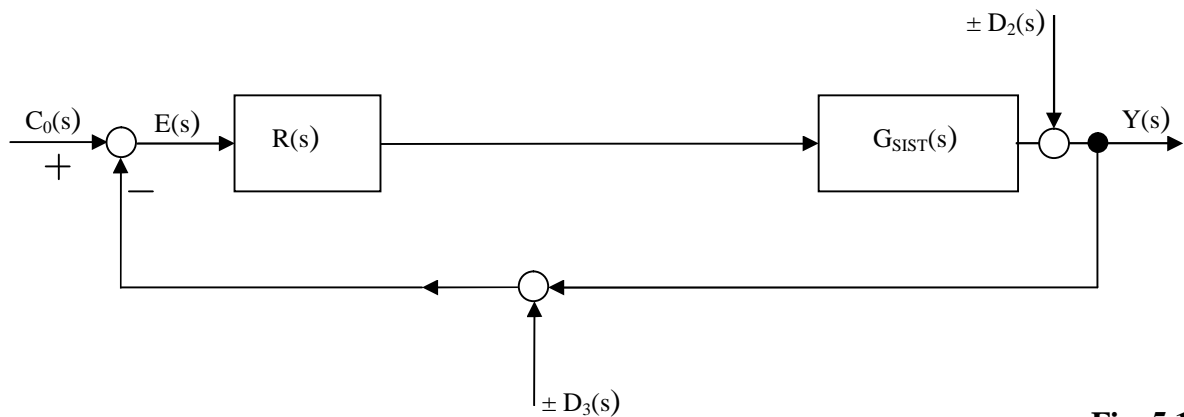
APPUNTI MODULO 5

Ing. Enrico Cinalli

4-5 T.I.E.

## 1 - INTRODUZIONE

Consideriamo lo schema a blocchi tipico di un sistema di controllo rappresentato in Fig. 5.1.



**Fig. 5.1**

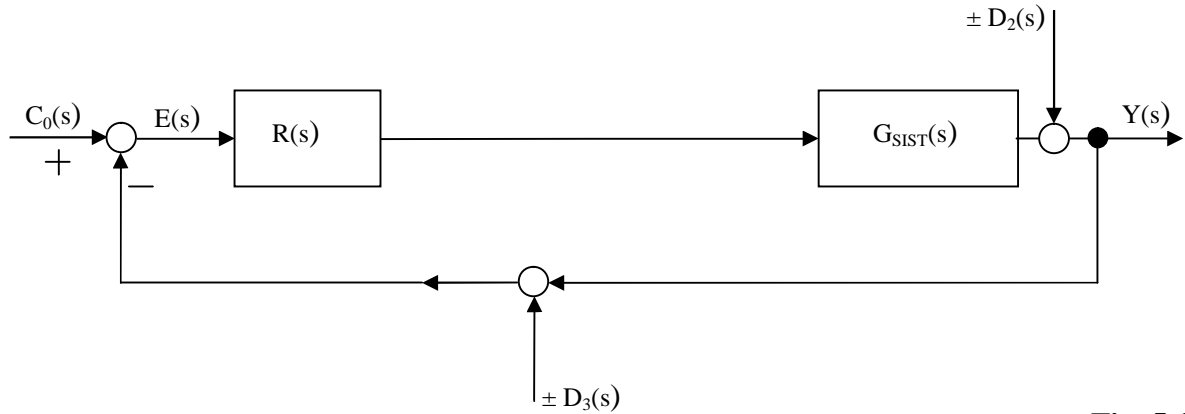
Assumiamo che siano note tutte le funzioni di trasferimento dei singoli blocchi ad eccezione di quella del regolatore cioè  $R(s)$  che occorre invece determinare in modo che il sistema soddisfi specifici obiettivi del problema di controllo. Gli obiettivi sono i requisiti statici e/o dinamici precedentemente esaminati. Tali obiettivi si traducono, per lo più, nella forma concreta delle seguenti **tre specifiche**:

1. L'errore a transitorio esaurito dovrà essere sufficientemente piccolo e quindi verrà richiesto che  $|e(\infty)| < e^*$
2. Il sistema ....  $\phi > \phi^*$  (*minori sovralongazioni*)
3. È necessario che il sistema  $\omega_c > \omega^*$  (*maggiore velocità di risposta*)

**Affronteremo lo studio della sintesi del regolatore attraverso l'esame passo-passo di un esempio (Esempio 5.1).**



**Esempio 5.1** Si consideri il sistema rappresentato in Fig. 5.1



**Fig. 5.1**

con:

$$c_0(t) = ram(t) \quad d_2(t) = \pm sca(t) \quad d_3(t) = 0 \quad G_{SIST}(s) = \frac{10}{(1+s)(1+10s)}$$

Si vuole determinare un regolatore  $R(s)$  necessario affinché siano soddisfatte le seguenti 3 condizioni:

1.  $|e(\infty)| \leq 0,1$
2.  $\phi_m \geq 55^\circ$
3.  $\omega_c \geq 0,1$

\*\*\*\*\*

**SOLUZIONE**

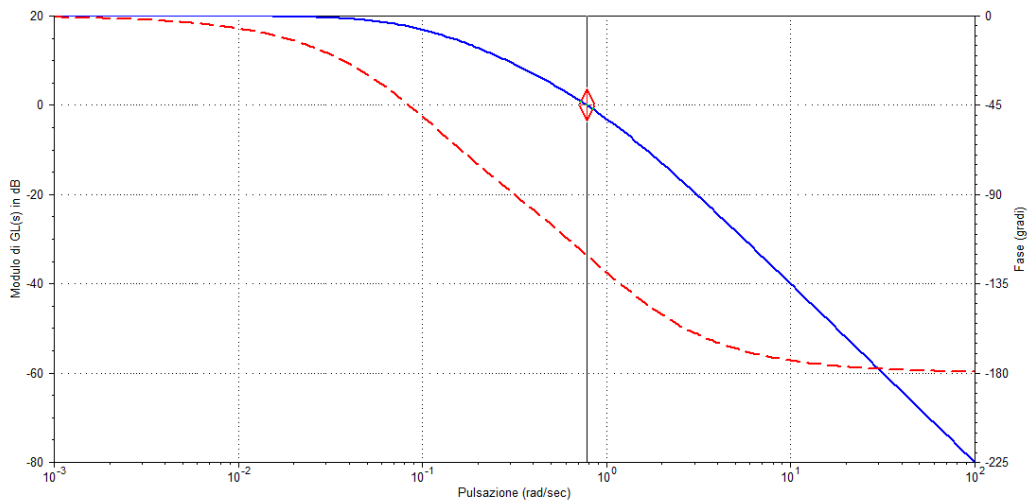
Possiamo verificare che il sistema in esame, in assenza di regolatore  $R(s)$ , è stabile.

Infatti essendo  $G_L(s) = G_{SIST}(s)$  si ha:

$$\begin{array}{ll} \mu = 10 & \mu_{dB} = 20dB \\ \text{Zeri:} & \text{nessuno} \quad \text{Poli:} \quad s = -1, s = -0,1 \end{array}$$

dal diagramma di Bode del modulo di  $G_L(s) = G_{SIST}(s)$  rappresentato in figura si ricava:

$$\phi_c \cong 120^\circ \quad \phi_m = 180 - |\phi_c| = 60^\circ \quad \text{e quindi il sistema è asintoticamente stabile.}$$



Freq = 0,7791 r/s, \*Mag = 1,004 (0,03775 dB), Phase = -120,6 deg

Simulazione effettuata con software Programcc

Per soddisfare le condizioni richieste si dovrà determinare un regolatore del tipo:

$$R(s) = R_1(s) \cdot R_2(s) = \frac{\mu_R}{s^r} \cdot R_2(s)$$

**Al fine di soddisfare la prima condizione** cioè:  $|e(\infty)| \leq 0,1$  **è necessario determinare la prima parte del regolatore cioè  $R_1(s)$ :**

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s^r}$$

e quindi la nuova funzione ad anello aperto sarà:  $G_{1L}(s) = \frac{\mu_R}{s^r} \cdot \frac{10}{(1+s)(1+10s)}$

il cui guadagno statico è:  $\mu' = 10 \cdot \mu_R$

ed il grado di  $G_{1L}(s)$  è:  $r$

L'errore a regime totale è pari a:  $e_{Tot}(\infty) = |e_{Co}(\infty)| + |e_{D2}(\infty)| + |e_{D3}(\infty)|$

ed essendo  $d_3(t) = 0$   $e_{Tot}(\infty) = |e_{Co}(\infty)| + |e_{D2}(\infty)|$

Utilizzando la tabella ricavata nel capitolo 4 e di seguito riportata

g	$ e_{Co}(\infty)  =  e_{D2}(\infty) $			$ e_{D3}(\infty) $		
	K sca(t)	K ram(t)	K par(t)	K sca(t)	K ram(t)	K par(t)
0	$\frac{K}{1+\mu}$	$\infty$	$\infty$	$\frac{K \cdot \mu}{1+\mu}$	$\infty$	$\infty$
1	0	$\frac{K}{\mu}$	$\infty$	K	$\infty$	$\infty$
2	0	0	$\frac{K}{\mu}$	K	$\infty$	$\infty$

si ricava:

essendo  $e_{Co}(t) = ram(t)$  allora  $|e_{Co}(\infty)| = \begin{cases} \infty & \begin{cases} \infty \\ \frac{K}{\mu} \\ 0 \end{cases} \\ \frac{K}{\mu} & \begin{cases} \infty \\ 10 \cdot \mu_R \\ 0 \end{cases} \\ 0 & \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases} \end{cases}$  se  $g = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ \geq 2 \end{cases}$

essendo  $d_2(t) = sca(t)$  allora  $|d_2(\infty)| = \begin{cases} \frac{k}{1+\mu} & \begin{cases} 1 \\ 1+10 \cdot \mu_R \\ 0 \end{cases} \\ 0 & \begin{cases} 0 \\ \geq 1 \end{cases} \end{cases}$  se  $g = \begin{cases} 0 \\ \geq 1 \end{cases}$

affinché l'errore a regime risulti finito ( $\leq 0,1$  come richiesto) occorre che il grado  $g$  di  $G_{1L}(s)$  sia  $r \geq 1$ . Tra tutti i possibili valori di  $r$  si sceglie il più piccolo e quindi  $r=1$ .

Affinché l'errore sia inferiore a 0,1 occorre dunque che sia rispettata la seguente disequazione:

$$\frac{1}{10 \cdot \mu_R} \leq 0,1 \quad \text{cioè} \quad \mu_R \geq 1$$

Non essendo in genere opportuno scegliere il valore minimo, **scegliamo:**

$$\mu_R = 2$$

Con  $\mu_R = 2$  l'errore totale a regime è pari a  $\frac{1}{20} = 0,05$ .

Il regolatore  $R_I(s)$  necessario a soddisfare la prima condizione è pertanto:

$$R_I(s) = \frac{2}{s}$$

La nuova funzione di trasferimento ad anello aperto è ora la seguente:

$$G_{1L}(s) = \frac{2}{s} \cdot \frac{10}{(1+s)(1+10s)}$$

cioè

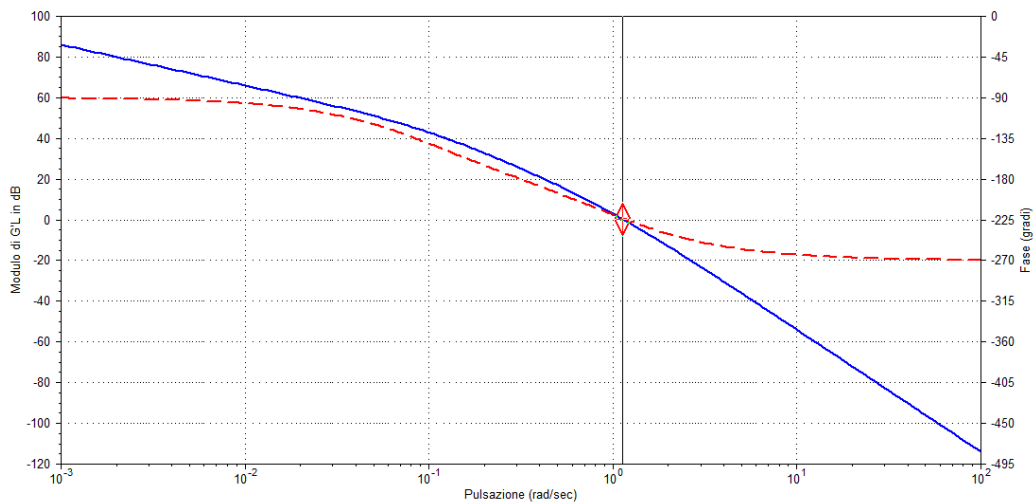
$$G_{1L}(s) = \frac{20}{s(1+s)(1+10s)}$$

Da cui si ricava che:

$$\begin{array}{ll} \mu = 20 & \mu_{dB} \cong 26dB \\ \text{Zeri: } \textit{nessuno} & \text{Poli: } s = 0 \quad s = -1, \quad s = -0,1 \end{array}$$

dal diagramma di Bode del modulo di  $G_{1L}(s)$  rappresentato in figura si ricava:

$\phi_c \cong 224^\circ$      $\phi_m = 180 - |\phi_c| = -44^\circ$  e quindi il sistema NON è più asintoticamente stabile.



Freq = 1,128 r/s, \*Mag = 1,039 (0,3345 dB), Phase = -223,4 deg

Simulazione effettuata con software Programcc

Per soddisfare la seconda e terza condizione cioè:

2.  $\phi_m > 55^\circ$
3.  $\omega_c > 0,1 \text{ rad/sec}$

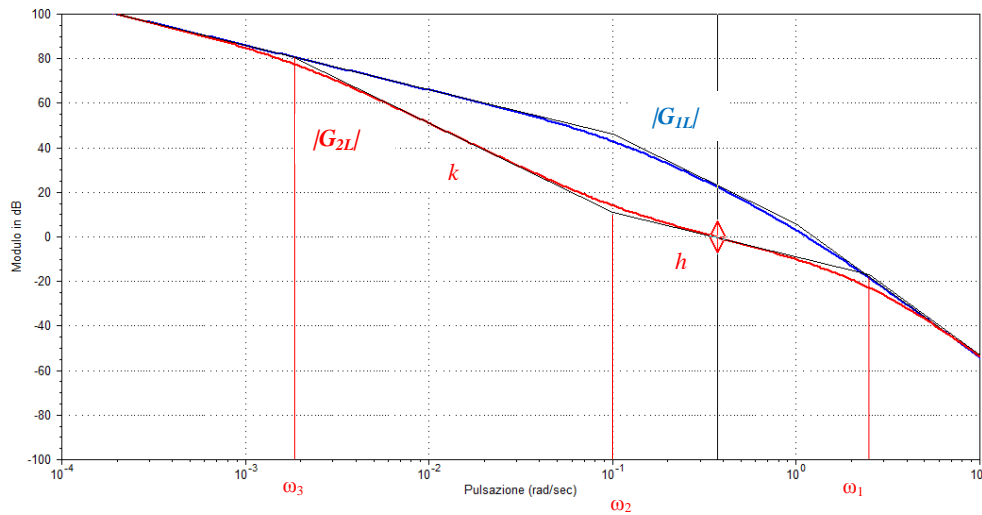
Occorre determinare una funzione  $R_2(s)$ , che dovrà essere a sfasamento minimo. Ciò è alquanto complesso e piuttosto lungo da spiegare a parole ma è invece molto semplice se si affronta il problema graficamente (si veda Fig 5.2).

Scopo dell'approccio grafico alla risoluzione del problema della determinazione di  $R_2(s)$  è quello di modificare il grafico del modulo di  $G_{1L}(s)$  in modo da:

- Attraversare l'asse a 0 dB ad una pulsazione maggiore di 0,1 rad/sec con pendenza pari a -20 dB/dec per un intorno sufficientemente ampio di  $\omega_c$ ;
- Raccordare quindi la nuova retta con il precedente diagramma del modulo di  $G_{1L}(s)$ .

Il grafico sotto riportato illustra il procedimento che conduce ad ottenere una funzione di trasferimento d'anello finale  $G_{2L}(s)$  tale che:

$$|G_{2L}(s)|_{dB} = \begin{cases} |G_{1L}(s)|_{dB} \\ \text{retta}_k \\ \text{retta}_h \\ |G_{1L}(s)|_{dB} \end{cases} \quad \text{rispettivamente per} \quad \begin{cases} \omega \leq \omega_3 \\ \omega_3 < \omega \leq \omega_2 \\ \omega_2 < \omega \leq \omega_1 \\ \omega > \omega_1 \end{cases}$$



Line 2: Freq = 0,3731 r/s, Mag = 0,9781 (-0,1922 dB)

Simulazione effettuata con software Programcc

Fig. 5.2

con:

$$\begin{aligned} \omega_3 &= 0,0018 & \omega_2 &= 0,1 & \omega_1 &= 2,5 \\ & & \text{cui corrispondono} & & & \\ \tau_3 &= \frac{1}{\omega_3} \cong 555 & \tau_2 &= \frac{1}{\omega_2} = 10 & \tau_1 &= \frac{1}{\omega_1} = 0,4 \end{aligned}$$

Dal grafico complessivo  $G_{2L}(s)$  possiamo ricavare  $R_2(s)$ :

$$R_2(s) = \frac{(1+10s)^2 \cdot (1+s)}{(1+555s) \cdot (1+0,4s)^2}$$

Il regolatore ha quindi funzione di trasferimento totale  $R(s)$ :

$$R(s) = R_1(s) \cdot R_2(s) = \frac{2 \cdot (1+10s)^2 \cdot (1+s)}{s \cdot (1+555s) \cdot (1+0,4s)^2}$$

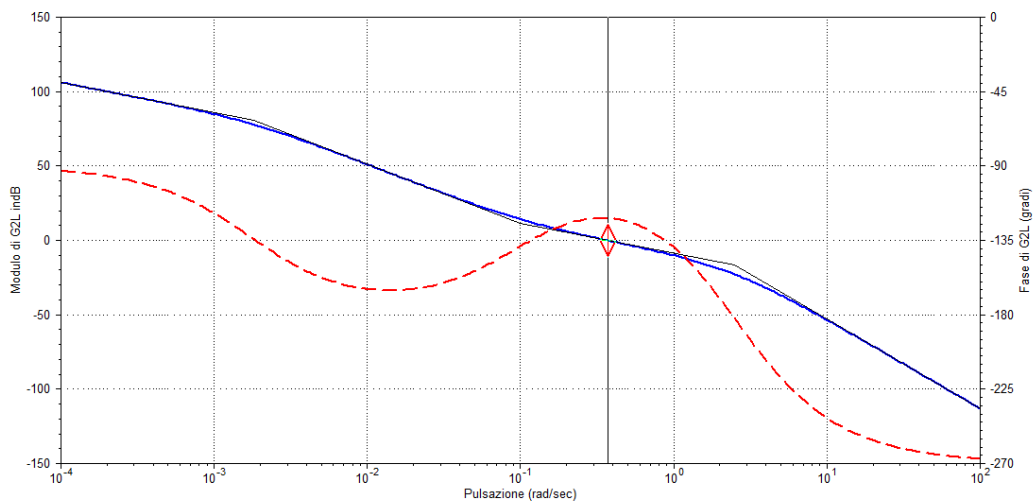
La funzione di trasferimento totale ad anello aperto è quindi  $G_{2L}(s)$  pari a:

$$G_{2L}(s) = G_{SIST}(s) \cdot R_1(s) \cdot R_2(s) = \frac{10}{(1+s)(1+10s)} \cdot \frac{2 \cdot (1+10s)^2 \cdot (1+s)}{s \cdot (1+555s) \cdot (1+0,4s)^2}$$

$$G_{2L}(s) = \frac{20 \cdot (1+10s)}{s \cdot (1+555s) \cdot (1+0,4s)^2}$$

Dal diagramma di Bode del modulo e della fase di  $G_{2L}(s)$  di seguito nuovamente riportato si ricava:

$\phi_c \cong 122^\circ$        $\phi_m = 180 - |\phi_c| = 58^\circ$  e quindi il sistema è asintoticamente stabile.



Freq = 0,3732 r/s, \*Mag = 0,9779 (-0,1937 dB), Phase = -121,7 deg

Simulazione effettuata con software Programcc

Il sistema rispetta così tutte le condizioni richieste:

- |                           |         |                                   |
|---------------------------|---------|-----------------------------------|
| 1. $ e(\infty)  \leq 0,1$ | infatti | $ e(\infty)  = 0,05$              |
| 2. $\phi_m \geq 55^\circ$ | infatti | $\phi_m = 58^\circ$               |
| 3. $\omega_c \geq 0,1$    | infatti | $\omega_c = 0,37 \text{ rad/sec}$ |

La funzione complessiva del **REGOLATORE** è quindi costituita da due parti:  $R_1(s)$  e  $R_2(s)$ .

La determinazione della parte  **$R_1(s)$**  è detta “**PROGETTO STATICO**” conduce alla determinazione della **funzione di trasferimento del CONTROLLORE**.

La determinazione della parte  **$R_2(s)$**  è detta “**PROGETTO DINAMICO**” conduce alla determinazione della **funzione di trasferimento della RETE STABILIZZATRICE**.

## “VIZI E VIRTÙ” DEI REGOLATORI P.I.D

$$R_{PID}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot s$$

<u>Regolatore Proporzionale</u>	<u>Regolatore Integrale</u>	<u>Regolatore Derivativo</u>
$R_P(s) = K_P$	$R_I(s) = \frac{K_I}{s}$	$R_D(s) = K_D \cdot s$
<p>Un regolatore Proporzionale è in grado di diminuire l'errore a regime, ma non può eliminarlo completamente.</p> <p>Un aumento troppo grande della costante <math>K_P</math> necessaria per avere un errore a regime di modesta entità determina una diminuzione del fattore di smorzamento <math>\xi</math> e un aumento della pulsazione naturale <math>\omega_N</math>: il sistema quindi è meno stabile perché aumenta l'ampiezza delle oscillazioni. In definitiva un regolatore Proporzionale, all'aumentare di <math>K_P</math>, diminuisce l'errore, aumenta la velocità di risposta, ma diminuisce il margine di fase.</p>	<p>Un regolatore Integrale nei sistemi sollecitati da un segnale a gradino, permette di annullare l'errore indipendentemente dal valore della costante <math>K_I</math>.</p> <p>Un regolatore ad azione Integrale, aumenta di 1 il tipo e l'ordine del sistema, perché introduce un polo nell'origine, peggiorando così la stabilità.</p> <p>Determina inoltre una diminuzione della velocità di risposta.</p> <p>Non può essere usato nei sistemi di tipo 1 e 2, perché induce un'instabilità marginale. Viene utilizzato quindi, quando è richiesta un'elevata precisione a regime, ma non sono richieste elevate prestazioni in termini di velocità di risposta e di stabilità.</p>	<p>Un regolatore ad azione Derivativa permette interventi più rapidi del regolatore proporzionale perché “anticipa” le variazioni del segnale d'errore, producendo una correzione significativa prima che la grandezza controllata si discosti molto dal valore prefissato.</p> <p>Il regolatore Derivativo aumenta il margine di fase, e quindi la stabilità del sistema, e consente un aumento della velocità di risposta, ma deve essere associato a un regolatore Proporzionale perché “da solo” non è in grado di ridurre l'errore se il segnale di riferimento è del tipo a gradino.</p>

Regolatore PI: 
$$R_{PI}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_I + K_P s}{s} = K_I \cdot \frac{(1 + \frac{K_P}{K_I} s)}{s}$$

Regolatore PD: 
$$R_{PD}(s) = K_P + K_D \cdot s = K_P \cdot (1 + \frac{K_D}{K_P} s)$$

Regolatore PID: 
$$R_{PID}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot s = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}$$

# Sistemi termici

APPUNTI MODULO 6

Ing. Enrico Cinalli

4-5 T.I.E.

# **I SISTEMI TERMICI**

**Trasmissione del calore**

**Sistema a tempo continuo  
per il controllo della temperatura**

**rev. Gennaio 2012**

**Prof. Ing. Enrico CINALLI**



## CAPITOLO 1 - LA PROPAGAZIONE DEL CALORE

Prima di studiare i sistemi termici analizziamo come avviene la propagazione del calore.

Il calore si propaga in modo diverso in relazione allo stato della materia:

1. **nei solidi**: la propagazione avviene per conduzione (senza trasporto di materia);
2. **nei fluidi** (liquidi o gas): la propagazione avviene per convezione (con trasporto di materia);
3. **nel vuoto**: propagazione avviene per irraggiamento (onde elettromagnetiche).

## La propagazione nei solidi

Consideriamo una lastra di materiale omogeneo a facce piane e parallele (Fig.a)

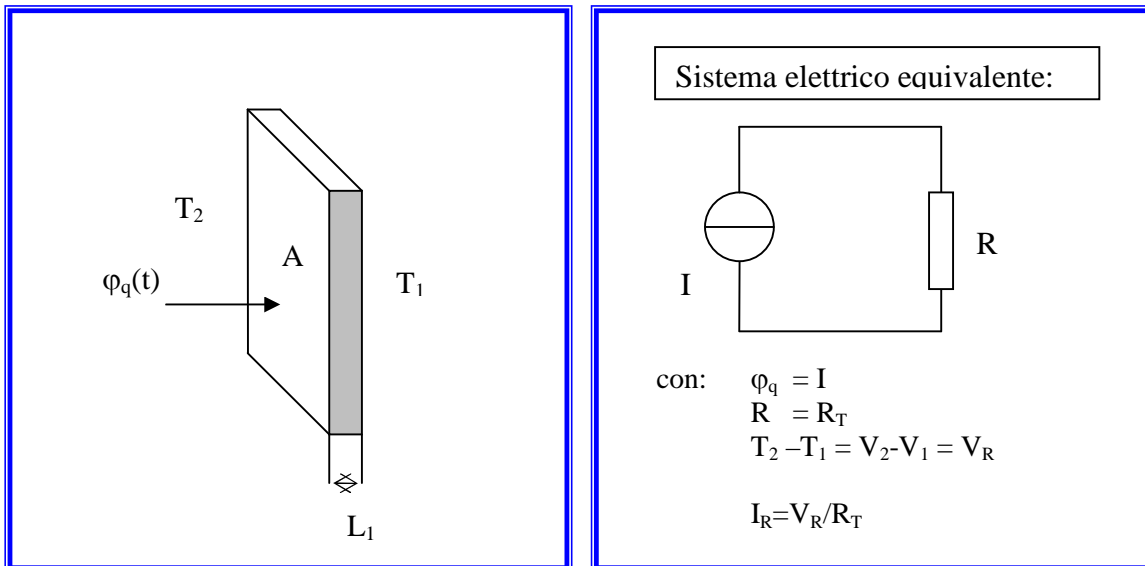


Fig.a

Con

$\phi_q(t)$  flusso termico trasmesso [W]

$T_2 > T_1$  temperature in gradi Kelvin [K]  $0^\circ\text{C} = 273\text{ K}$

$L_1$  spessore lastra [m]

$A$  superficie lastra [ $\text{m}^2$ ]

Si può dimostrare che :

$$\phi_q(t) = \frac{T_2(t) - T_1(t)}{R_T}$$

con

$$R_T = \frac{L_1}{h_1 A} \quad \text{detta resistenza termica del conduttore (lastra)} \quad \left[ \frac{\text{sK}}{\text{J}} \right] = \left[ \frac{\text{K}}{\text{W}} \right]$$

$h_1$  è il coeff. di conducibilità del materiale 1, spesso indicata con  $\lambda$   $\left[ \frac{\text{W}}{\text{m K}} \right]$

Consideriamo ora una lastra di materiale multistrato a facce piane e parallele (Fig.b)

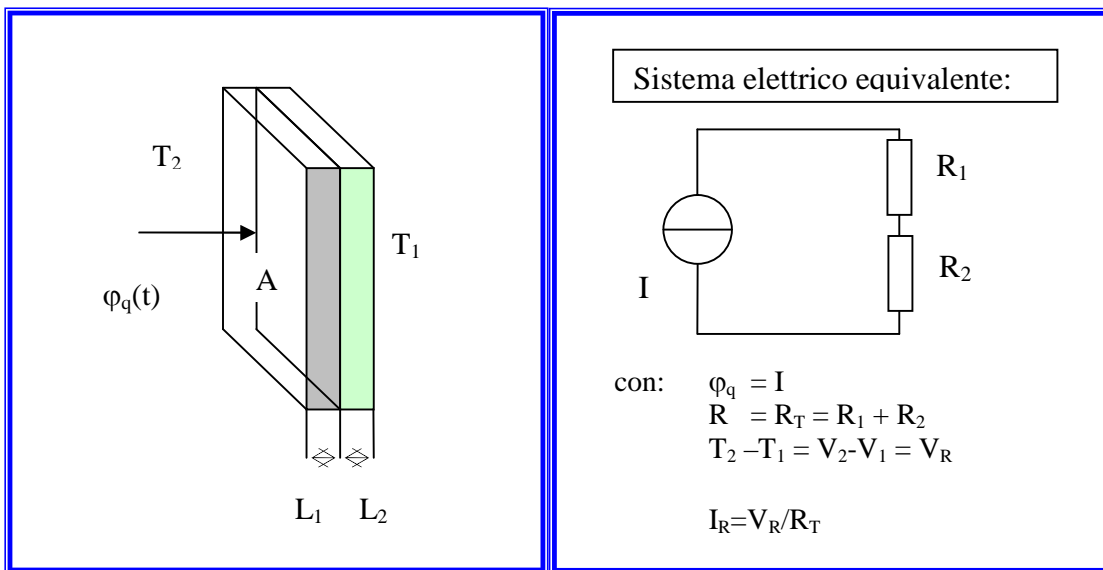


Fig.b

Con

$\varphi_q(t)$  flusso termico trasmesso [W]

$T_2 > T_1$  temperature in gradi Kelvin [K]

$0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$

$L_1$  spessore lastra 1 [m]

$L_2$  spessore lastra 2 [m]

$A$  superficie lastra [ $\text{m}^2$ ]

Si può dimostrare che :

$$\varphi_q(t) = \frac{T_2(t) - T_1(t)}{R_T}$$

con

$$R_T = \frac{L_1}{h_1 A} + \frac{L_2}{h_2 A} \quad \text{detta resistenza termica del conduttore}$$

dove

$h_1$  è il coeff. di conducibilità del materiale 1  $\left[ \frac{\text{W}}{\text{m K}} \right]$

$h_2$  è il coeff. di conducibilità del materiale 2  $\left[ \frac{\text{W}}{\text{m K}} \right]$

## La propagazione nei fluidi

Consideriamo ora un corpo di massa  $M$  isolato dall'ambiente esterno (Fig.c)

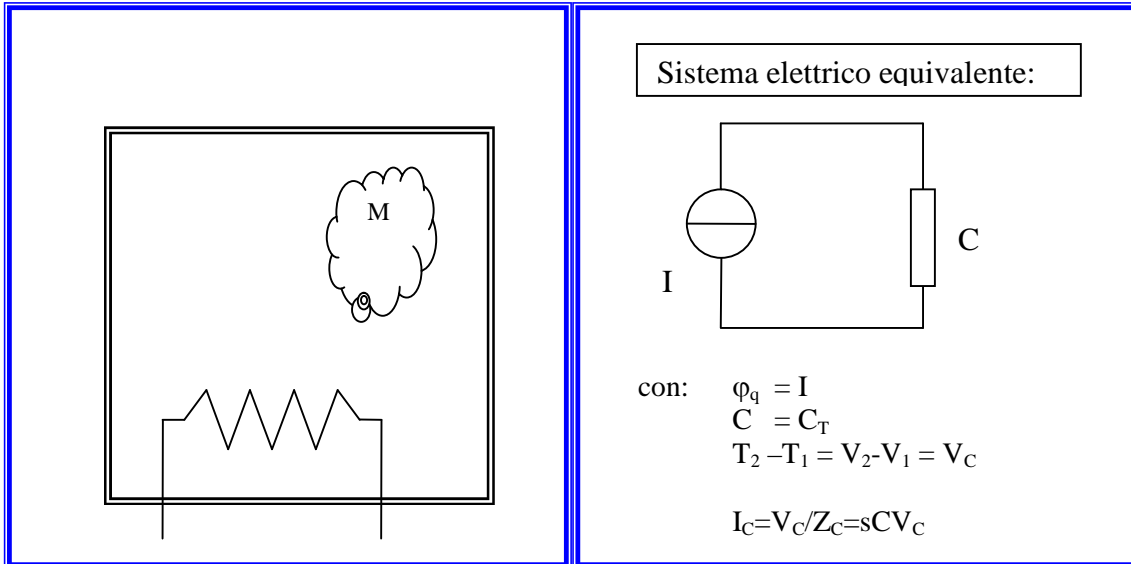


Fig.c

Indicando con  $\phi_q(t)$  la quantità di calore assorbita dal corpo si ha :

$$\phi_q(t) = M \cdot c \cdot \frac{dT(t)}{dt}$$

$M$  è la massa del corpo [kg] pari al prodotto tra la densità  $\delta$  ed il volume  $V$  della massa  $M$

$c$  è il calore specifico della sostanza del corpo  $\left[ \frac{\text{J}}{\text{Kg K}} \right]$

Il prodotto di  $c$  per  $M$  è indicato con  $C_T$

$$C_T = M \cdot c = \delta \cdot V \cdot c \quad \left[ \frac{\text{J}}{\text{K}} \right]$$

N.B. Se  $M$  è l'aria contenuta nel locale allora

$$\delta = 1,25 \text{ Kg} / \text{m}^3$$

$V$  = volume del locale

quindi :

$$\phi_q(t) = C_T \cdot \frac{dT(t)}{dt} \quad \left[ \frac{\text{J}}{\text{K}} \right] \left[ \frac{\text{K}}{\text{sec}} \right] = \left[ \frac{\text{J}}{\text{sec}} \right] = [\text{W}]$$

	densità $\delta$ [kg / m <sup>3</sup> ]	calore specifico $c$ [J / kg K]	conducibilità termica $h$ [W / m K]
Acqua	1000	4180	0,54
Aria	1,25	1030	0,25 [25W / m <sup>2</sup> K]
Olio	920	1650	0,12
	Acciaio		45
	Lana di vetro e polistirolo espanso		0,04
	Mattoni forati		0,36
	Cemento armato		2,30
	Cartongesso		0,21
	Pannelli in sughero		0,05
	Intonaco in calce e cemento		1,00
	Legno di conifera		0,15
	Pietra		2,30
	Vetro		0,8

### La propagazione in un ambiente non isolato termicamente:

Consideriamo ora un locale non isolato termicamente:

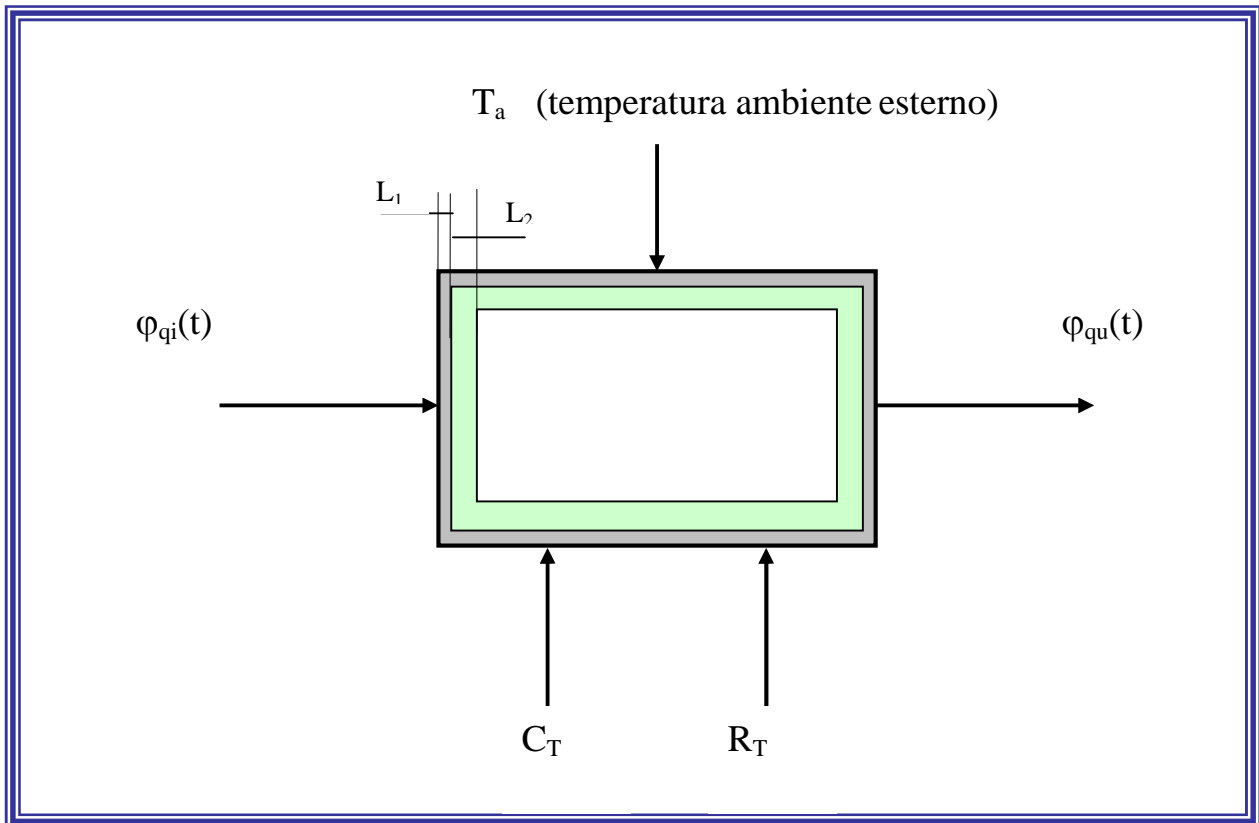
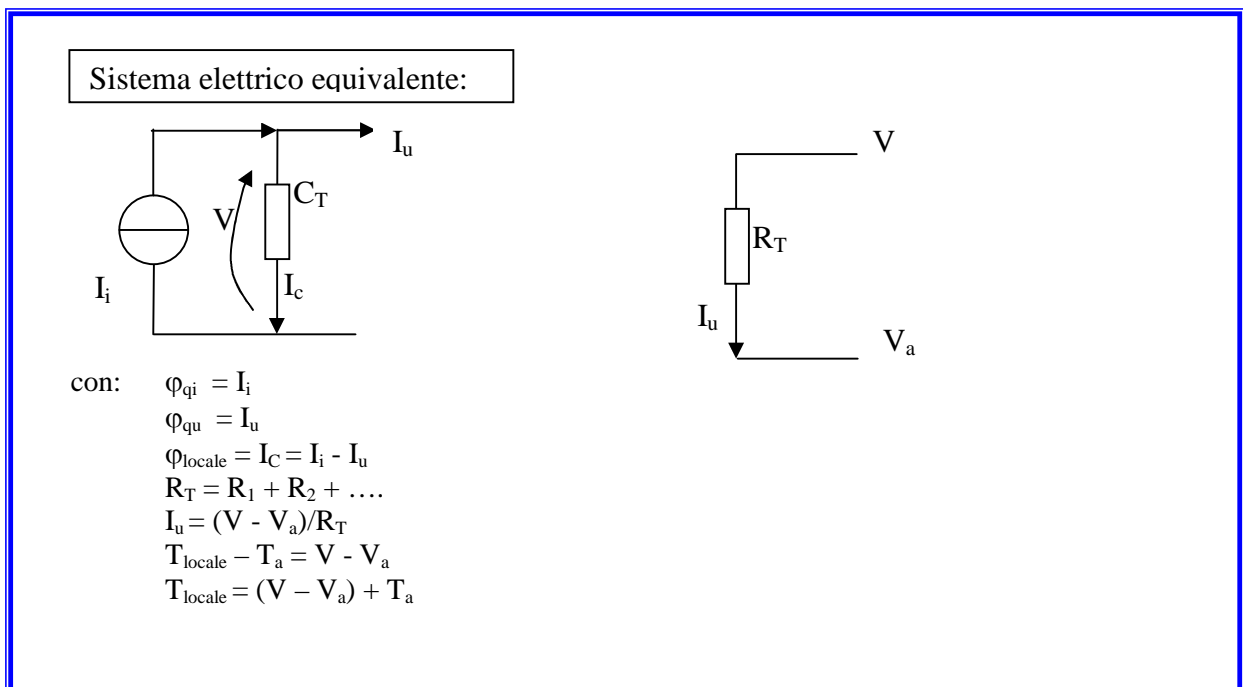


Fig. d



dove:

$\varphi_{qi}(t)$  è flusso termico (calore) trasmesso in ingresso cioè la sollecitazione del sistema;  
supponiamo che sia a "gradino" cioè:

$$\varphi_{qi}(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ \phi_{qi} & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

$\varphi_{qu}(t)$  è il flusso termico (calore) trasmesso all'esterno.

Poiché il calore viene trasmesso all'esterno per convezione si ha:

$$\varphi_{qu} = \frac{T(t) - T_a}{R_T} \quad [1]$$

$$\text{con } R_T = \left( \frac{1}{h_{aria}} + \frac{L_1}{h_1} + \frac{L_2}{h_2} + \frac{1}{h_{aria}} \right) \cdot \frac{1}{A}$$

La differenza tra il calore immesso ed il calore uscente è il calore che rimane all'interno del locale cioè il calore assorbito dalla massa d'aria in esso contenuta.

Possiamo quindi scrivere:

$$\varphi_{qi}(t) - \varphi_{qu}(t) = C_T \frac{dT(t)}{dt} \quad [2]$$

$C_T$  è la capacità termica della massa d'aria contenuta nel locale

$$C_T = c \cdot M$$

essendo la massa d'aria  $M = \delta \cdot V$  (con  $\delta$  densità dell'aria e  $V$  volume d'aria) si ha:

$$C_T = c \cdot \delta \cdot V$$

Sostituendo la **[1]** nella **[2]** si ha:

$$\varphi_{qi}(t) - \frac{T(t) - T_a}{R_T} = C_T \frac{dT(t)}{dt}$$

moltiplicando ambo i membri per  $R_T$  si ha:

$$R_T \varphi_{qi}(t) - T(t) + T_a = R_T C_T \frac{dT(t)}{dt}$$

portando a destra  $T(t)$  otteniamo:

$$R_T \varphi_{qi}(t) + T_a = R_T C_T \frac{dT(t)}{dt} + T(t) \quad [3]$$

Applicando la trasformata di Laplace alla [3] si ricava la seguente equazione nella variabile “s” al posto della variabile “t”:

$$R_T \Phi_{qi}(s) + \frac{T_a}{s} = R_T C_T \cdot sT(s) + T(s) \quad \text{ricordando che: } L\left(\frac{df}{dt}\right) = sF(s)$$

e mettendo in evidenza  $T(s)$ :

$$R_T \Phi_{qi}(s) + \frac{T_a}{s} = T(s) \cdot (1 + R_T C_T s)$$

dividendo ambo i membri per  $(1 + R_T C_T s)$  si ottiene:

$$T(s) = \frac{R_T}{(1 + R_T C_T s)} \Phi_{qi}(s) + \frac{T_a}{s(1 + R_T C_T s)} \quad [4]$$

La [4] si può rappresentare graficamente con il seguente schema a blocchi (Fig. e):

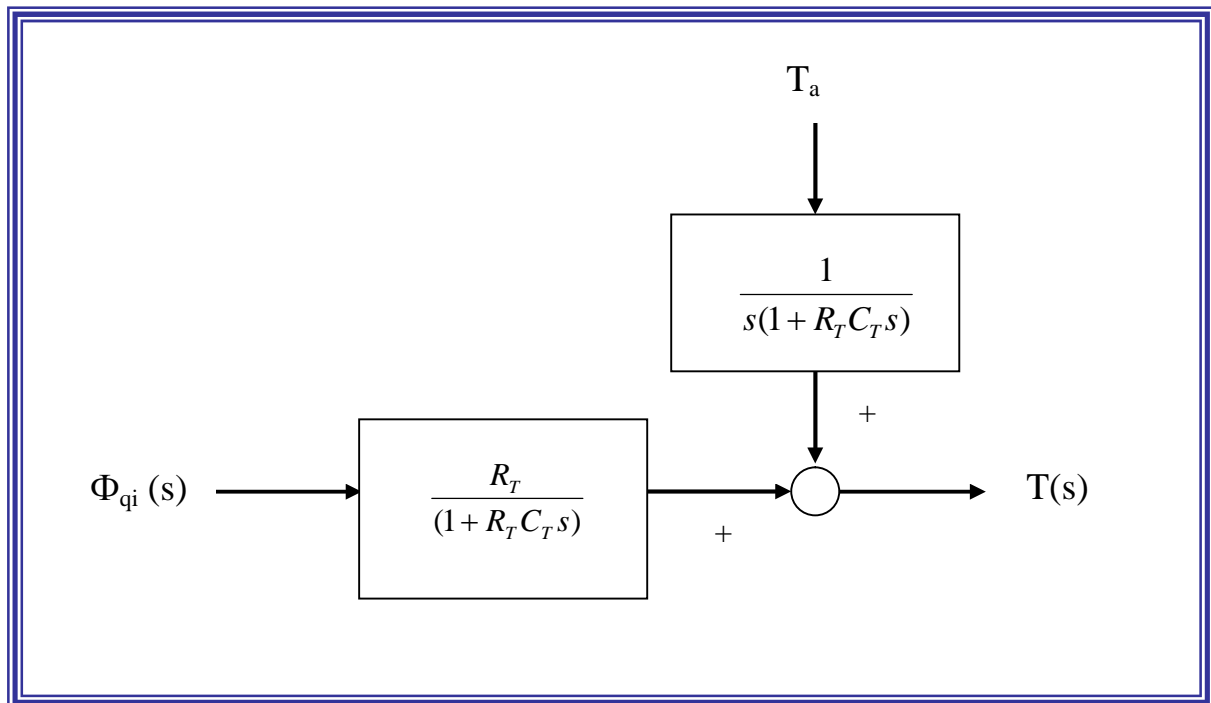


Fig. e



### Esempio - Controllo di temperatura di un forno

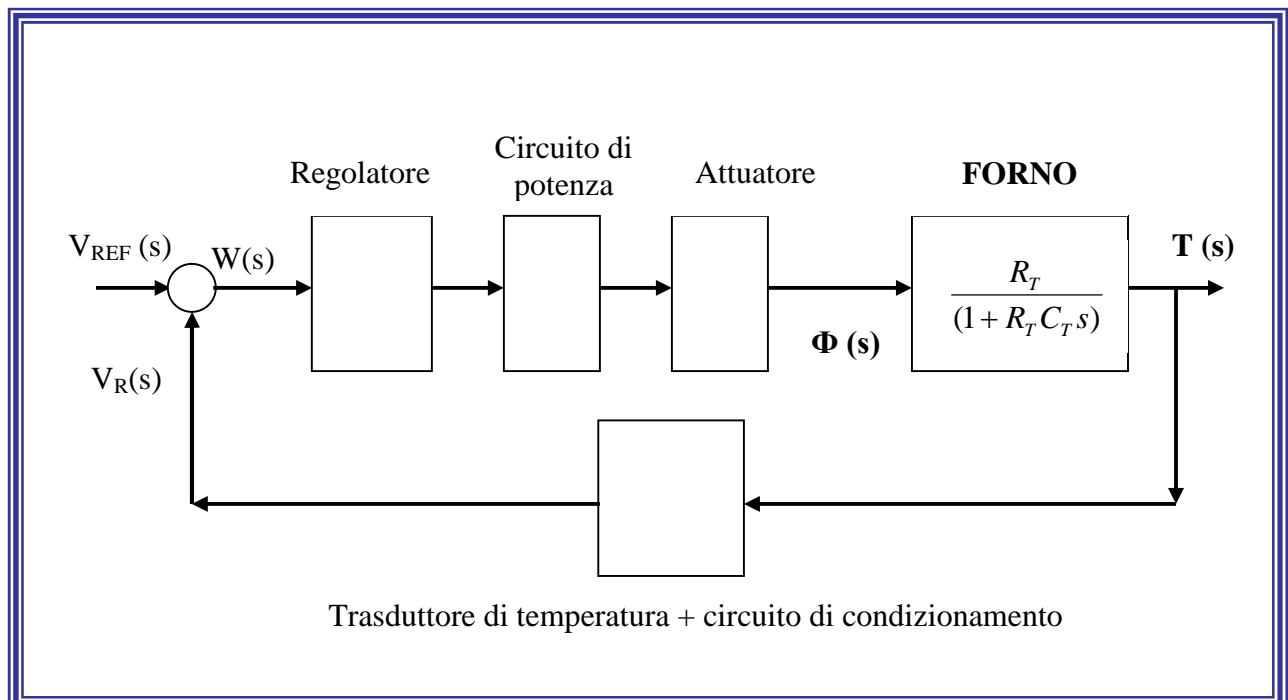
Consideriamo un forno di forma cubica con spigolo uguale a 1 m.

Si vuole, a regime una temperatura di 200 °C ed un errore percentuale massimo  $\varepsilon\% = 2\%$ .

Le caratteristiche del forno sono:

- le pareti interne ed esterne sono in acciaio con internamente uno strato di isolante (lana di vetro in fibra);
- $h_{aria} = 25$  [W / m<sup>2</sup>K] conducibilità termica dell'aria;
- $h_1 = 45$  [W / m K] conducibilità termica dell'acciaio;
- $h_2 = 0,023$  [W / m K] conducibilità termica dell'isolante;
- $\delta = 1,25$  [Kg / m<sup>3</sup>] densità dell'aria;
- $M = \delta \cdot V$  [Kg] massa d'aria contenuta nel forno;
- $c = 1030$  [J / Kg K] calore specifico dell'aria;
- $L_1 = L_3 = 2$  mm spessore lastre d'acciaio;
- $L_2 = 10$  cm spessore strato di lana di vetro in fibra.

Il sistema termico controllato, se si trascura il secondo ingresso dovuto a  $T_a$ , (si faccia riferimento alla Fig.e) può essere rappresentato con il seguente schema a blocchi :



Procediamo quindi alla determinazione di  $R_T$  e  $C_T$  il cui prodotto rappresenta la costante di tempo del sistema "forno".

Ricordando le definizioni di  $R_T$  e  $C_T$  si ha :

$$R_T = \left( \frac{1}{h_{aria}} + \frac{L_1}{h_1} + \frac{L_2}{h_2} + \frac{L_1}{h_1} + \frac{1}{h_{aria}} \right) \cdot \frac{1}{A} \quad \text{con } A = 6 \cdot l^2 = 6 \cdot (1)^2 = 6 \cdot 1 \text{ m}^2 = 6 \text{ m}^2$$

$$R_T = \left( \frac{1}{25} + \frac{0,002}{45} + \frac{0,1}{0,023} + \frac{0,002}{45} + \frac{1}{25} \right) \cdot \frac{1}{6} \cong 0,737 \frac{\text{sK}}{\text{J}}$$

$$C_T = c \cdot M = c \cdot \delta \cdot V \quad \text{con } V = l^3 = (1)^3 = 1 \text{ m}^3$$

$$C_T = 1030 \cdot 1,25 \cdot 1 = 1287,5 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$$R_T \cong 0,737 \frac{\text{sK}}{\text{J}} = \frac{\text{K}}{\text{W}}$$

$$C_T \cong 1287,5 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

il prodotto  $R_T \cdot C_T \cong 949 \text{ sec}$

Per riscaldare il forno usiamo un riscaldatore di potenza  $P_0$  che verrà attivato ( $T_{ON}$ ) o disattivato ( $T_{OFF}$ ) a seconda della temperatura raggiunta all'interno del forno  $T(t)$  rispetto alla temperatura desiderata  $T_{REF}$  cui corrisponde una tensione di riferimento  $V_{REF}$ . Quindi la potenza  $P$  erogata sarà proporzionale al segnale  $W(s) = V_{REF}(s) - V_R(s)$ .

Si avrà pertanto:

$$P = K \cdot W$$

Per far ciò potremmo utilizzare un circuito di potenza comandato da un segnale ad onda quadra con duty cycle variabile da  $D\%=0$  a  $D\%=100\%$  in modo che la potenza erogata sia proporzionale al  $D\%$  cioè:

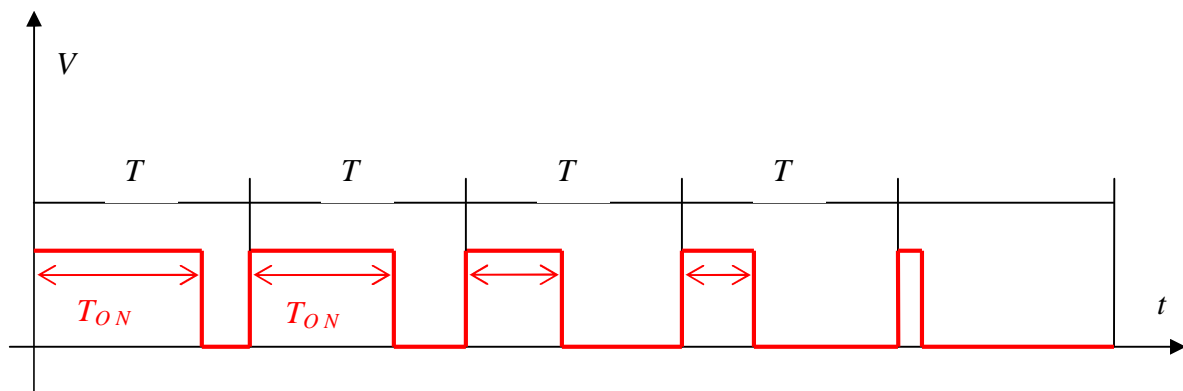
$$P = \frac{T_{ON}}{T} \cdot P_0$$

essendo  $P_0$  e  $T$  costanti allora indicando:

$$\frac{P_0}{T} = R_h$$

possiamo scrivere:

$$P = R_h \cdot T_{ON} \quad (1)$$



Per generare questo segnale ad onda quadra avente periodo  $T$  costante e duty cycle variabile occorre utilizzare un convertitore *tensione-tempo* ( $V/t$ ) cioè un circuito che a seconda del segnale  $W$  generi un  $T_{ON}$  proporzionale ad  $W$ , cioè:

$$T_{ON} = K_p \cdot W \quad (2)$$

con

$$K_p = \frac{T}{V_M}$$

dove :

$T$  = periodo dell'onda quadra generata dal convertitore  $V/t$

$V_M$  = ampiezza dell'onda quadra generata dal convertitore  $V/t$

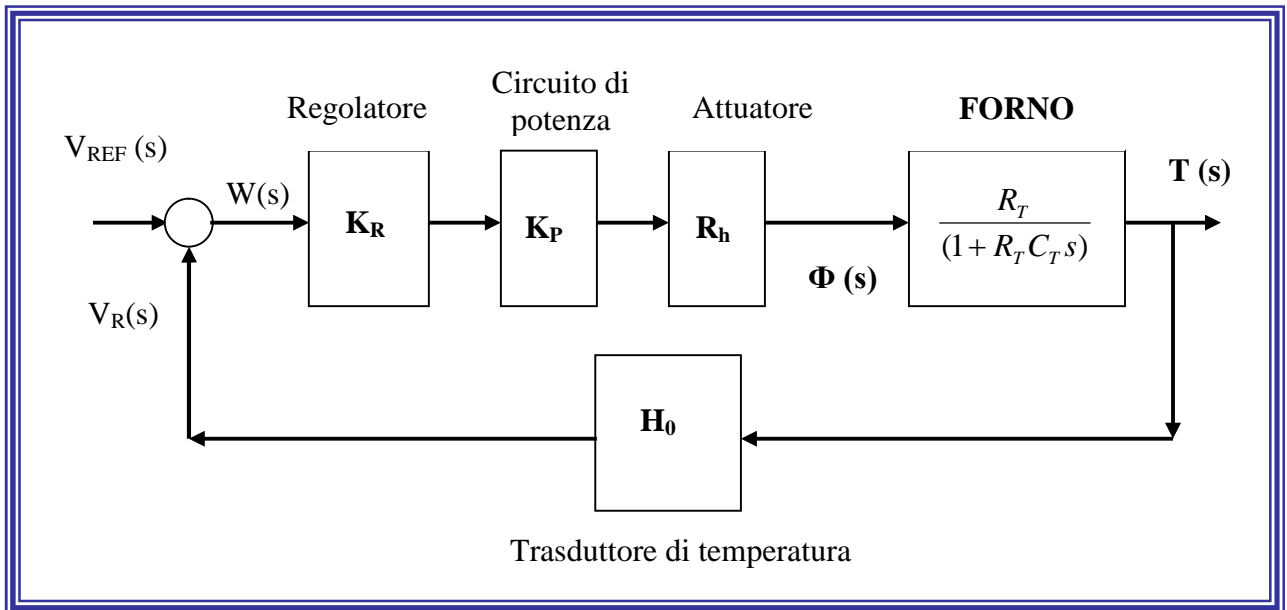
In questo modo, sostituendo la (2) nella (1) si ottiene:

$$P = R_h \cdot K_p \cdot W$$

La potenza erogata  $P$  (e quindi il calore  $\Phi_{qi}$  fornito al forno) sarà proporzionale a  $W(s)$ :

$$W(s) = V_{REF}(s) - V_R(s).$$

Lo schema a blocchi del sistema controllato (retroazionato) è il seguente:



Occorre pertanto determinare i valori delle costanti:

$$H_0 \quad R_h \quad K_R \quad K_P$$

Fissiamo il valore di riferimento  $V_{REF}$ , imponendo per esempio:

$$V_{REF} = 12 \text{ V}$$

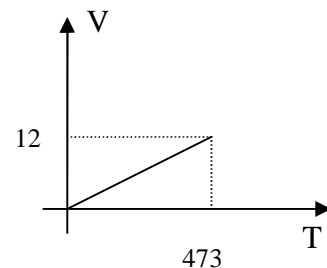
che corrispondono alla temperatura desiderata cioè alla temperatura di 200 °C che equivalgono in gradi Kelvin a:

$$T_{REF} = 200 + 273 = 473 \text{ K}$$

Considerando in prima approssimazione un blocco di retroazione (trasduttore + amplificatore) di tipo lineare si ricava:

$$H_0 = \frac{V_{REF}}{T_{REF}} = \frac{12}{473} = 0,025 \frac{\text{V}}{\text{K}}$$

$$H_0 = 0,025 \text{ V/K}$$



Scegliamo a piacere

- un convertitore con periodo
- e un riscaldatore con

$$T_{ON} = 5 \text{ sec.}$$

$$P_0 = 500 \text{ W}$$

e ricaviamo:

$$R_h = \frac{500}{5} = 100 \frac{\text{W}}{\text{sec}}$$

$$R_h = 100 \text{ W/sec}$$

Osservando che l'errore  $e(\infty)$  è pari a:

$$e(\infty) = \frac{V_{REF}}{H_0 \cdot (1 + H_0 \cdot \mu)}$$

Ricordando che per un sistema retroazionato con funzione d'andata  $G(s)$  e con retroazione  $H(s)=H_0$  (costante) si ha  $e(\infty)$  dovuto al segnale di ingresso:

Tipo	K sca(t)	K rampa(t)	K par(t)
0	$\frac{K}{H_0 \cdot (1 + H_0 \cdot \mu)}$	$\infty$	$\infty$
1	0	$\frac{K}{H_0^2 \cdot \mu}$	$\infty$
2	0	0	$\frac{K}{H_0^2 \cdot \mu}$

con  $H_0$  costante del blocco di retroazione  
 $\mu$  guadagno statico della  $G(s)$

deve essere del 2% cioè pari a  $e(\infty) = \pm 473 \cdot \frac{2}{100} = \pm 9,46$  K

$$\mu = K_R \cdot K_P \cdot R_h \cdot R_T$$

si ricava: 
$$\mu = \frac{V_{REF} - e(\infty) \cdot H_0}{e(\infty) \cdot H_0^2} = \frac{12 - 9,46 \cdot 0,025}{9,46 \cdot (0,025)^2} \cong 1990$$

quindi

$$\mu = K_R \cdot K_P \cdot R_h \cdot R_T = 1990$$

da cui

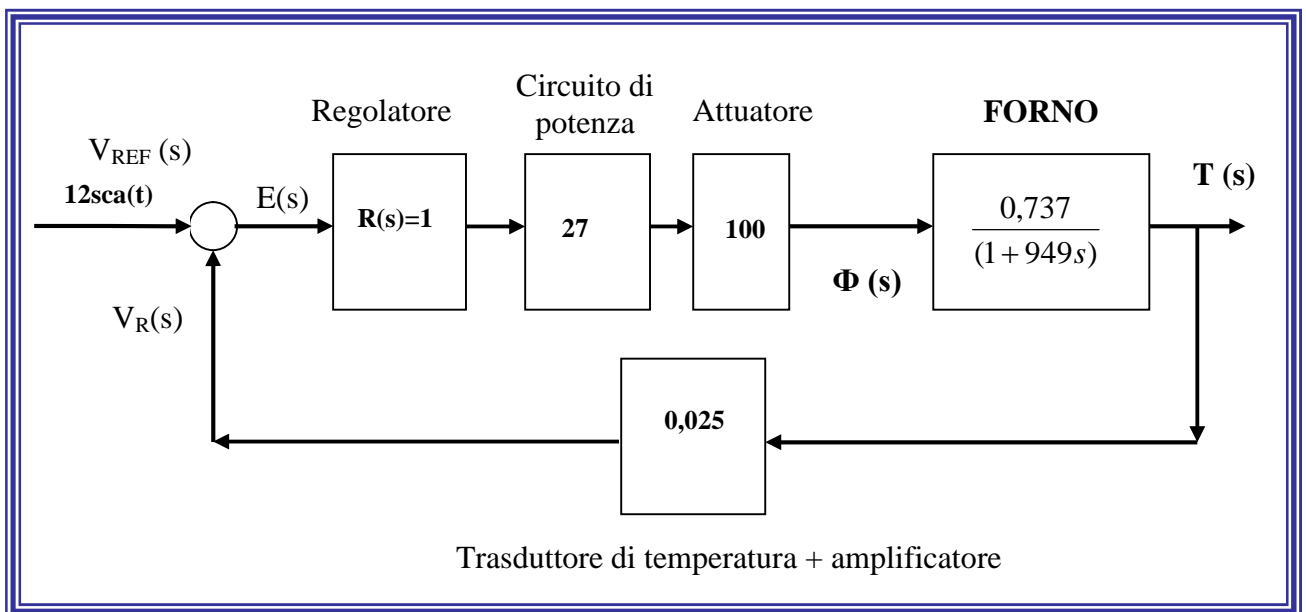
$$K_R \cdot K_P = \frac{1990}{R_h \cdot R_T}$$

Scegliendo inizialmente  $K_R = 1$  e sostituendo i valori di  $R_h$  e  $R_T$  si ottiene:

$$K_P = \frac{1990}{100 \cdot 0,737} \cong 27$$

$$\mathbf{K_P = 27}$$

Il sistema retroazionato risulta quindi essere il seguente:



Studiamo ora il suddetto sistema.

Calcoliamo la stabilità del sistema utilizzando il criterio di Bode; troviamo quindi il guadagno ad anello:

$$G_L(s) = 27 \cdot 100 \cdot \frac{0,737}{1+949s} \cdot 0,025 = \frac{49,8}{1+949s}$$

Da cui possiamo ricavare il guadagno  $\mu$

$$\mu = 49,8$$

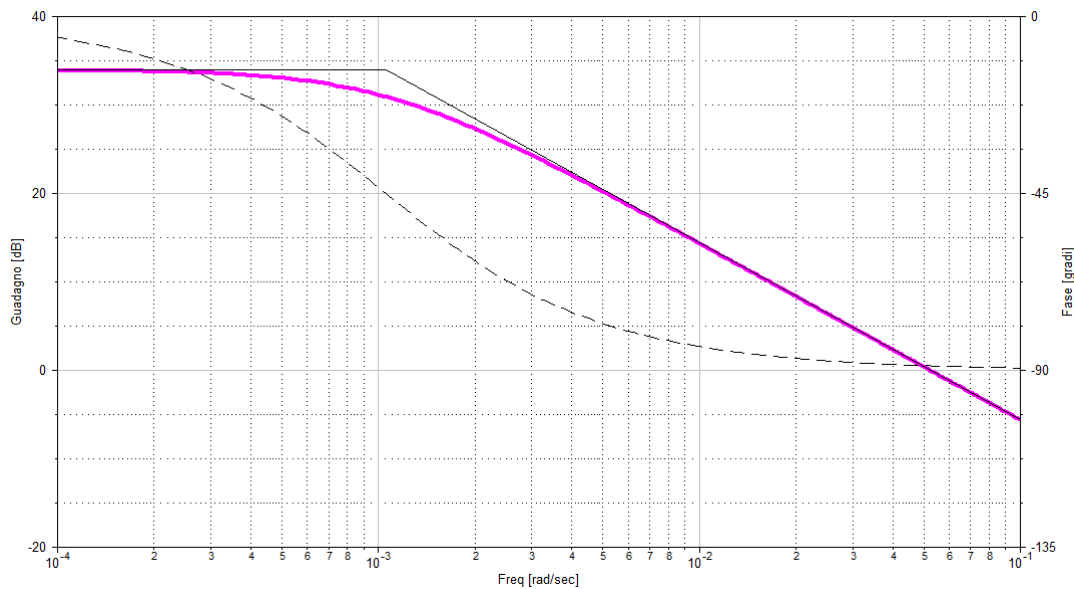
quindi

$$\mu_{dB} = 20 \cdot \log 49,8 \cong 34dB$$

Determiniamo ora i poli, in quanto non sono presenti zeri:

$$\text{POLI: } 1 + 949s = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{949}{949} s = \frac{-1}{949} \\ s_1 = 0,0011 \end{array} \right.$$

Tracciamo ora il diagramma di Bode mediante l'ausilio di ProgramCC



$$\varphi_C \cong -89^\circ$$

da cui ricaviamo

$$\varphi_M = 180^\circ - |-89^\circ| \cong 91^\circ$$

Visto che il margine di fase è  $> 0$ , il sistema è asintoticamente stabile.

Calcoliamo ora la funzione di trasferimento totale:

$$F_T(s) = \frac{G(s)}{1+G_L(s)} = \frac{\frac{1989,9}{1+949s}}{1+\frac{49,8}{1+949s}} = \frac{\frac{1989,9}{1+949s}}{\frac{1+949s+49,8}{1+949s}} = \frac{1989,9}{50,8+949s}$$

Possiamo ora calcolare l'uscita  $U(s)$ , moltiplicando  $F_T(s)$  per l'ingresso:

$$U(s) = \frac{12}{s} \cdot \frac{1989,9}{50,8 + 949s} = \frac{23880}{s(50,8 + 949s)}$$

Possiamo ora ricavare il valore dell'uscita a regime, e all'istante iniziale, tramite il teorema del valore finale e il teorema del valore iniziale.

$$u(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{23880}{s(50,8 + 949s)} = \frac{23880}{\infty} = 0$$

$$u(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{23880}{s(50,8 + 949s)} = \frac{23880}{50,8} = 470,08 \text{ K} \quad (\text{pari a } 197,08 \text{ } ^\circ\text{C})$$

Modifichiamo ora la "forma" dell'uscita, per poterla antitrasformare mediante la formula n°9 presente nella tabella:

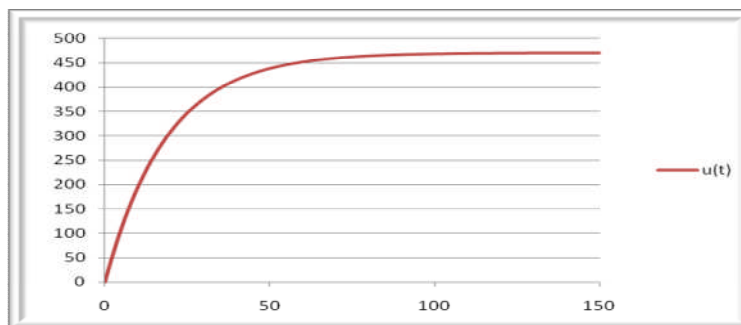
$$U(s) = \frac{23880}{50,8} \cdot \frac{1}{s \left( \frac{50,8}{50,8} + \frac{949}{50,8} s \right)} = 470,08 \cdot \frac{1}{s(1 + 18,68s)}$$

$$K \cdot \frac{1}{(1 + as)} \xrightarrow{L^{-1}} 1 - e^{-\frac{t}{a}}$$

Sostituendo i valori:

$$u(t) = 470,08 \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{18,68}} \right)$$

Tracciamo mediante l'ausilio di Office Excel, il grafico dell'andamento dell'uscita nel tempo:



Il sistema è del 1° ordine; ricaviamo ora i parametri fondamentali:  $T_a$ ,  $T_r$  e  $T_d$  ( $\tau = 18,68 \text{ sec}$ )

$T_a$  (tempo di assestamento – tempo impiegato dalla risposta ad entrare definitivamente in una fascia compresa tra  $\pm 5\%$  del valore di regime):

$$T_a = 3 \cdot \tau = \mathbf{56,04 \text{ sec.}}$$

$T_r$  (tempo di salita - tempo impiegato dalla risposta a passare dal 10% al 90% del valore di regime):

$$T_r = 2,2 \cdot \tau = \mathbf{41,096 \text{ sec.}}$$

$T_d$  (tempo di ritardo - tempo impiegato dalla risposta per raggiungere il 50% del valore di regime):

$$T_d = 0,7 \cdot \tau = \mathbf{13,076 \text{ sec.}}$$

# Sistemi idraulici

APPUNTI MODULO 7

Ing. Enrico Cinalli

4-5 T.I.E.



# **I SISTEMI IDRAULICI**

**Sistema a tempo continuo  
per il controllo del livello di riempimento di un serbatoio**

**rev. Marzo 2011**

**Prof. Ing. Enrico CINALLI**

**Le principali grandezze in gioco nello studio dei sistemi idraulici sono:**

Q	portata	[m <sup>3</sup> /sec]
V	volume	[m <sup>3</sup> ]
P	pressione ( <i>caduta di pressione</i> )	[Pa]

**LA RESISTENZA IDRAULICA:  $R_L$  [ Pa·sec./m<sup>3</sup> ]**

La resistenza idraulica di un componente rappresenta la sua proprietà di ostacolare il passaggio di un fluido dissipando energia.

La resistenza idraulica può essere:

- a) **costante**
- b) **variabile** (al variare per esempio della portata)

Esiste un indicatore detto Numero di Reynolds (NR) che, in funzione di alcuni parametri ci permette di conoscere se un sistema idraulico presenta una resistenza di tipo a) oppure di tipo b):

$$N_R = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\mu}$$

dove:

$\rho$ : densità del fluido [kg/m<sup>3</sup>] (Es:  $\rho_{H_2O} = 1000 \text{ kg/m}^3$        $\rho_{OLIO} = 880 \text{ kg/m}^3$ )

$v$ : velocità media del fluido [m/sec.]

$d$ : diametro della condotta [m]

$\mu$ : viscosità assoluta del fluido [Pa·sec.] (Es:  $\mu_{H_2O} = 0,001 \text{ Pa}\cdot\text{sec.}$        $\mu_{OLIO} = 0,16 \text{ Pa}\cdot\text{sec.}$ )

Se  $N_R < 2000$       =>       **$R_L$  costante**      **il moto è detto laminare**

Se  $2000 < N_R < 4000$       =>       $R_L$  di transizione tra i due tipi di regimi

Se  $N_R > 4000$       =>       **$R_L$  variabile**      **il moto è detto turbolento**

\*\*\*\*\*

**N.B.**  $v = \frac{Q}{A}$       con  $Q$  (portata in m<sup>3</sup>/sec) e  $A$  (sezione della condotta in m<sup>2</sup>)

Se la condotta è circolare di diametro  $d$  allora  $v = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d^2}$

**Moto laminare**

$$R_L = \frac{P}{Q} \quad [Pa \cdot sec./m^3]$$

Se la condotta è circolare:  $R_L = 128 \cdot \frac{\mu \cdot l}{\pi \cdot d^4}$

con:

*l* : lunghezza della tubazione [m]

*d* : diametro della tubazione [m]

$\mu$  : viscosità assoluta del fluido [Pa·sec.]

**Moto turbolento**

$$R_L = 2 \cdot k_T \cdot Q \quad [Pa \cdot sec./m^3]$$

$K_T$  : coefficiente del moto turbolento

$$K_T = \frac{8 \cdot \rho \cdot f \cdot l}{\pi^2 \cdot d^5} \quad [Pa \cdot sec^2 / m^6]$$

con:

*l* : lunghezza della tubazione [m]

*d* : diametro della tubazione [m]

$\rho$  : densità del fluido [kg/m<sup>3</sup>]

*f* : fattore d'attrito [kg/m<sup>3</sup>]

Il fattore d'attrito dipende da tre parametri:

- 1) numero di Reynolds
- 2) diametro della tubazione
- 3) finitura interna del tubo

e viene solitamente ricavato da apposite tabelle (si veda esempio seguente)

e la caduta di pressione:

$$P = R_L \cdot Q$$

e la caduta di pressione:

$$P = K_T \cdot Q^2$$

\*\*\*\*\*

**Tabella:** Valori del fattore di attrito in funzione del diametro, di  $N_R$  e della finitura interna del tubo

Tipo	Diametro <i>d</i> [cm]	Numero di Reynolds $N_R$					
		4.000	10.000	100.000	1.000.000	10.000.000	100.000.000
Tubo liscio	1-2	0,039	0,030	0,018	0,014	0,012	0,012
	2-4	0,039	0,030	0,018	0,013	0,011	0,010
	4-8	0,039	0,030	0,018	0,012	0,010	0,009
	8-16	0,039	0,030	0,018	0,012	0,009	0,008
Tubo commerciale	1-2	0,041	0,035	0,028	0,026	0,026	0,026
	2-4	0,040	0,033	0,024	0,023	0,023	0,023
	4-8	0,039	0,030	0,022	0,020	0,019	0,019
	8-16	0,039	0,030	0,020	0,018	0,017	0,017

**Esercizio.** Determinare il coeff. d'attrito *f* di un tubo commerciale di diametro *d*=1 cm dove fluisce acqua alla velocità *v*=6,4 m/sec.

**Soluzione:** Applicando la formula:  $N_R = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\mu}$  si ricava  $N_R = \frac{1000 \cdot 6,4 \cdot 0,01}{0,001} = 64.000$  (**moto turbolento**)

Poiché nella tabella non esiste una colonna con  $N_R = 64.000$  occorre effettuare una interpolazione lineare: tra 10.000 e 100.000 e quindi:

$$(0,035 - 0,028) : (100.000 - 10.000) = X : (NR - 10.000) \quad \text{da cui essendo } N_R = 64.000 \quad \text{si ricava: } X = 0,0042$$

e quindi:  $f = 0,028 + 0,0042 = 0,0322$

**LA CAPACITÀ IDRAULICA:  $C_L$  [  $m^3 / Pa$  ]**

La capacità idraulica di un componente rappresenta la sua proprietà di immagazzinare un fluido; i componenti che presentano tale proprietà sono detti serbatoi.

$$C_L = \frac{dV}{dp} \quad \text{ed essendo:} \quad dV = A \cdot dh \quad \text{e} \quad dp = \rho \cdot g \cdot dh \quad \text{si ha:} \quad C_L = \frac{A \cdot dh}{\rho \cdot g \cdot dh} = \frac{A}{\rho \cdot g}$$

quindi:

$$C_L = \frac{A}{\rho \cdot g}$$

dove:

$$\rho: \quad \text{densità del fluido [kg/m}^3\text{]} \quad (\text{Es: } \rho_{H_2O} = 1000 \text{ kg/m}^3 \quad \rho_{OLIO} = 880 \text{ kg/m}^3)$$

$$g: \quad \text{accelerazione di gravità [m/sec}^2\text{.]} \quad (g = 9,8 \text{ m/sec}^2)$$

$$A: \quad \text{Superficie della base del serbatoio [m}^2\text{]} \quad (\text{Se cilindrico di diametro } D \text{ allora: } A = \frac{\pi \cdot D^2}{4})$$

\*\*\*\*\*

**INDUTTANZA IDRAULICA (per condotte a sezione circolare):  $L_L$  [  $Pa \text{ sec}^2 / m^3$  ]**

La induttanza o inerzia idraulica di un componente rappresenta la sua proprietà di ostacolare la

variazione della portata volumetrica nel tempo:  $L_L = \frac{P}{dQ/dt}$

e anche:  $L_L = \frac{\rho \cdot l}{A}$

dove:

$$\rho: \quad \text{densità del fluido [kg/m}^3\text{]} \quad (\text{Es: } \rho_{H_2O} = 1000 \text{ kg/m}^3 \quad \rho_{OLIO} = 880 \text{ kg/m}^3)$$

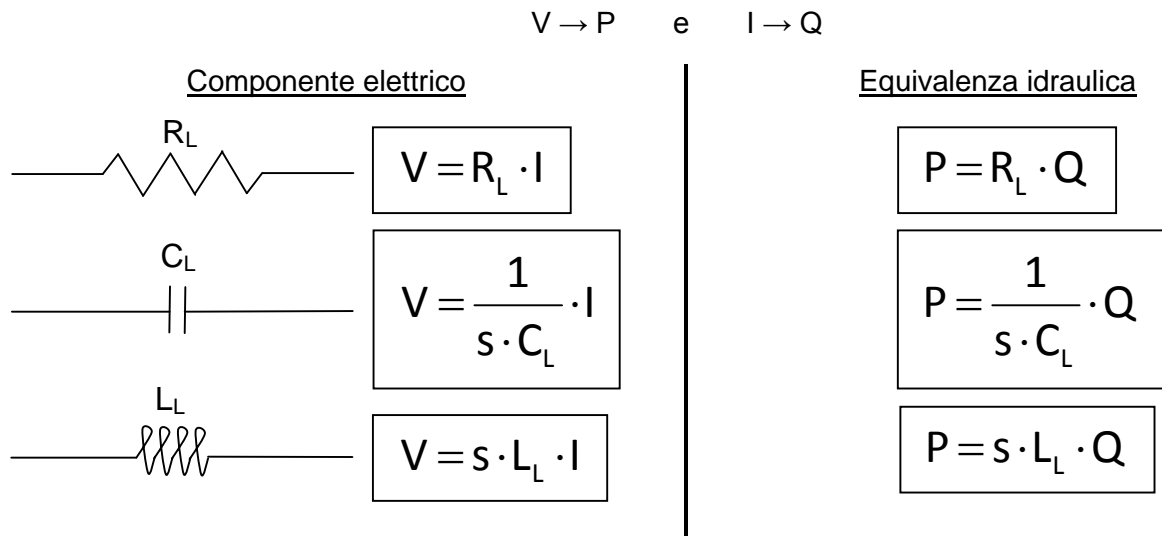
$$l: \quad \text{lunghezza della tubazione [m]}$$

$$A: \quad \text{Superficie della base del serbatoio [m}^2\text{]} \quad (\text{Se cilindrico di diametro } D \text{ allora: } A = \frac{\pi \cdot D^2}{4})$$

**TEMPO MORTO (per condotte a sezione circolare):  $t_m$  [ sec ]**

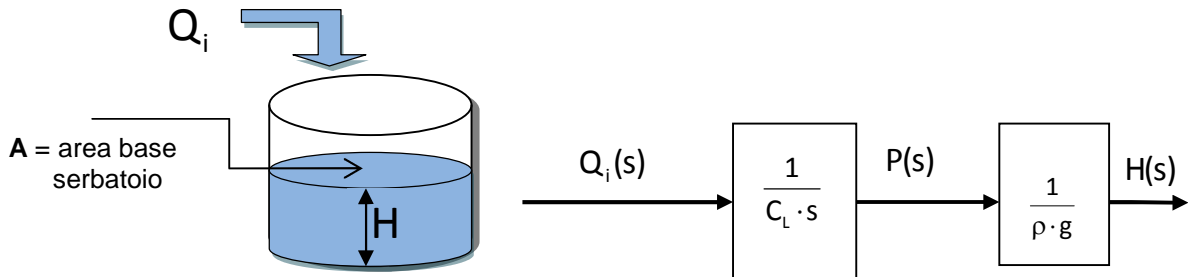
$$t_m = \frac{l}{v} = \frac{l}{\frac{Q}{A}} = \frac{l}{\frac{Q}{\frac{D^2 \cdot \pi}{4}}} \quad \text{quindi} \quad t_m = \frac{l \cdot D^2 \cdot \pi}{4 \cdot Q}$$

Anche i sistemi idraulici possono essere ricondotti ad equivalenti schemi elettrici con le seguenti trasformazioni:



## RELAZIONE INGRESSO-USCITA PER I SISTEMI IDRAULICI

### 1° CASO: SERBATOIO SENZA SCARICO



Quanto sopra si può dimostrare ricordando che:

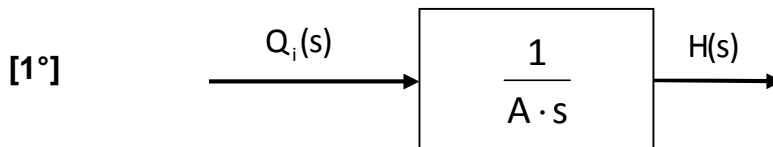
$$q_i(t) = \frac{A}{\rho \cdot g} \cdot \frac{dp(t)}{dt} \quad \text{ed essendo} \quad p = \rho \cdot g \cdot h \quad \text{e quindi} \quad \frac{dp}{dt} = \rho \cdot g \cdot \frac{dh(t)}{dt}$$

$$\text{allora} \quad Q(s) = \frac{A}{\rho \cdot g} \cdot s \cdot P(s) \quad \text{e anche} \quad q_i(t) = \frac{A}{\rho \cdot g} \cdot \rho \cdot g \cdot \frac{dh(t)}{dt} = A \frac{dh(t)}{dt}$$

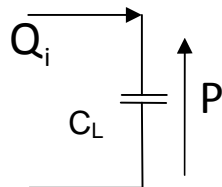
facendo ora la trasformata di Laplace si ottiene:  $Q(s) = A \cdot s \cdot H(s)$

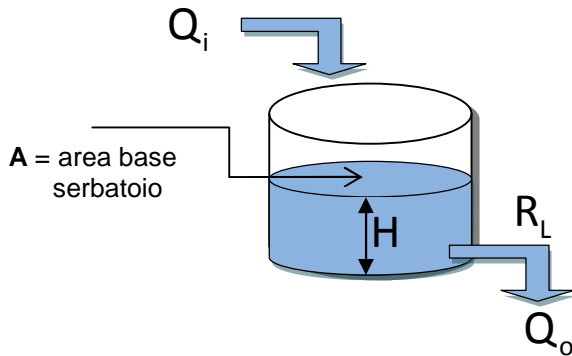
$$\text{e quindi:} \quad H(s) = \frac{1}{A \cdot s} \cdot Q(s)$$

Pertanto lo schema equivalente del sistema idraulico è il seguente:

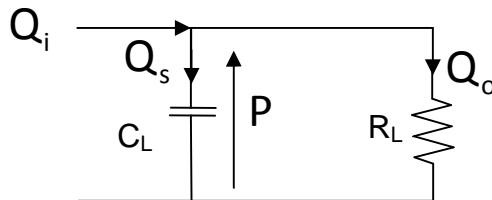


che corrisponde al seguente schema elettrico:



**2° CASO: SERBATOIO CON SCARICO**

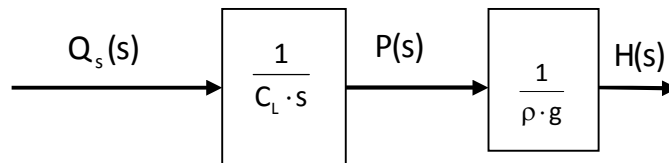
che corrisponde al seguente schema elettrico:



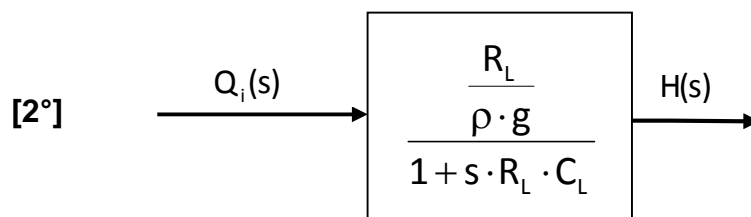
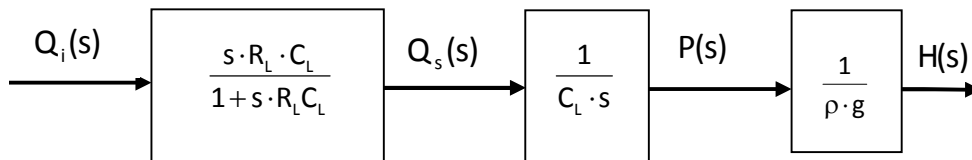
Risolvendo lo schema elettrico si ricava:

$$Q_s(s) = Q_i(s) \cdot \frac{R_L}{R_L + \frac{1}{s \cdot C_L}} \quad \text{e quindi:} \quad Q_s(s) = Q_i(s) \cdot \frac{s \cdot R_L \cdot C_L}{1 + s \cdot R_L \cdot C_L}$$

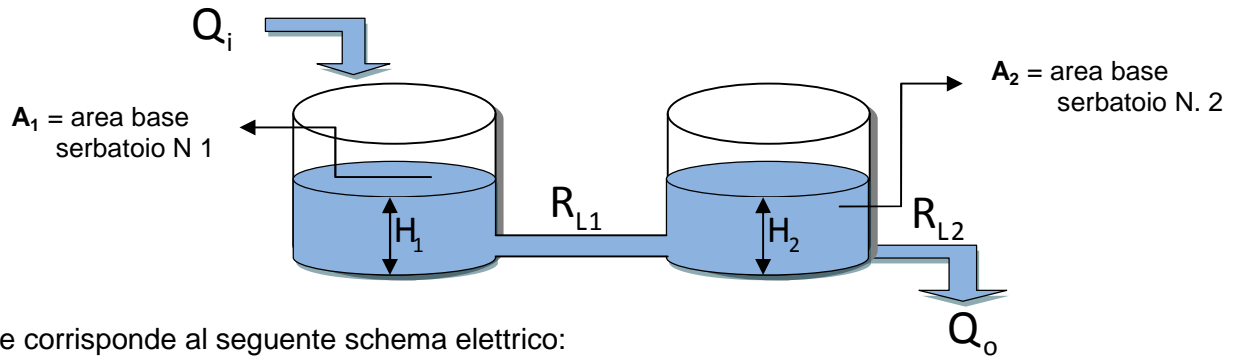
Sostituendo ora  $Q_s(s)$  con  $Q_i(s)$  nello schema visto nel caso 1 si ottiene:



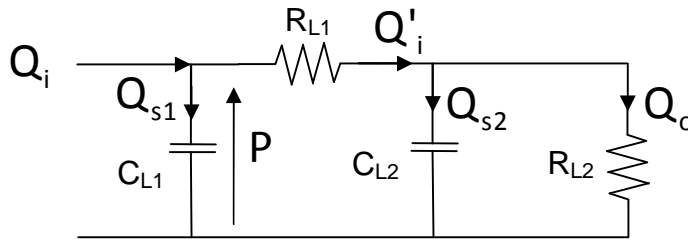
e quindi sostituendo  $Q_i(s)$  si ha:



**3° CASO: SERBATOI IN CASCATA CON SCARICO**



che corrisponde al seguente schema elettrico:



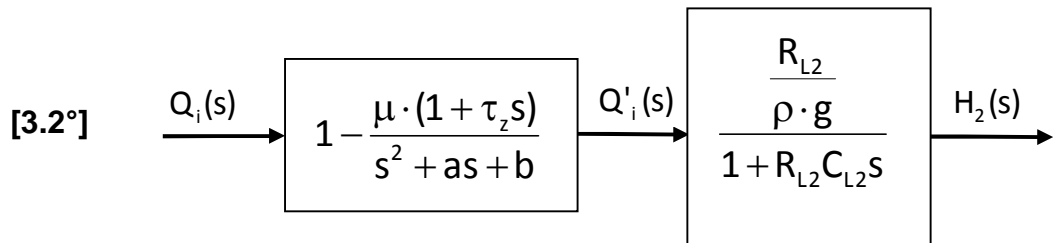
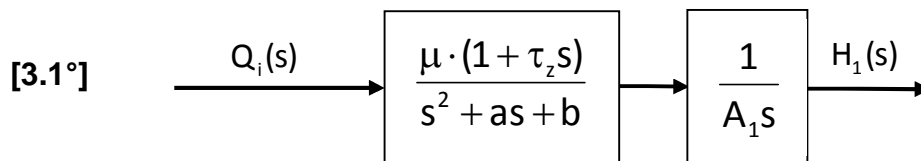
Risolvendo lo schema elettrico si ricava:

$$Q_{s1}(s) = \frac{\mu \cdot (1 + \tau_z s)}{s^2 + as + b} \cdot Q_i(s)$$

con:

$$\mu = \frac{R_{L1} + R_{L2}}{R_{L1} R_{L2} C_{L1} C_{L2}} \quad \tau_z = \frac{R_{L1} R_{L2} C_{L2}}{R_{L1} + R_{L2}} \quad a = \frac{R_{L2} C_{L1} + R_{L1} C_{L1} + R_{L2} C_{L2}}{R_{L1} R_{L2} C_{L1} C_{L2}} \quad b = \frac{1}{R_{L1} R_{L2} C_{L1} C_{L2}}$$

e quindi



S.E.&O.



# Sistemi meccanici

APPUNTI MODULO 8

Ing. Enrico Cinalli

4-5 T.I.E.

# **I MOTORI IN C.C.**

**Sistema a tempo continuo  
per il controllo della velocità di rotazione**

**rev. Marzo 2011**

**Prof. Ing. Enrico CINALLI**

Le equazioni che descrivono il funzionamento del motore in corrente continua sono:

$$v_a(t) = R_a \cdot i_a(t) + L_a \cdot \frac{di_a(t)}{dt} + K_E \cdot \omega(t) \quad [1]$$

$$c(t) = K_T \cdot i_a(t) \quad [2]$$

$$c(t) = J_T \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} + K_{av} \cdot \omega(t) + c_r(t) \quad [3]$$

dove:

$v_a(t)$ :	tensione di armatura	[V]
$R_a$ :	resistenza di armatura	[ $\Omega$ ]
$i_a(t)$ :	corrente di armatura	[A]
$L_a$ :	induttanza di armatura	[H]
$K_E$ :	costante di tensione	[V·s/rad]
$\omega(t)$ :	velocità angolare	[rad/s]
$c(t)$ :	coppia motrice	[N·m]
$K_T$ :	costante di coppia	[N·m/A]
$J_T = J_m + J_c$	momento totale	[N·sec <sup>2</sup> ]=[Kg·m <sup>2</sup> ]
con $J_m$ :	momento del motore	[Kg·m <sup>2</sup> ]
$J_c$ :	momento del carico	[Kg·m <sup>2</sup> ]
$K_{av}$ :	coppia resistente (attrito viscoso)	[Kg·m <sup>2</sup> /sec·rad]
$c_r(t)$ :	coppia resistente complessiva	[N·m]

### **FUNZIONAMENTO A REGIME**

A regime  $\omega(t)$  è costante (pari a  $\omega_\infty$ ) ed anche  $i_a(t)$  quindi la sua derivata è nulla:

$$i_a(t) = \frac{di_a(t)}{dt} = 0$$

Pertanto:

$$v_a(t) = R_a \cdot I_a + K_E \cdot \omega_\infty$$

da cui

$$\omega_\infty = \frac{v_a(t) - R_a I_a}{K_E}$$

### **ALLO SPUNTO**

Allo spunto.  $\omega = 0$  e  $L_a = 0$ , quindi:

da cui:

$$i_{a\_spunto} = \frac{v_a(0)}{R_a}$$

**FUNZIONAMENTO DINAMICO**

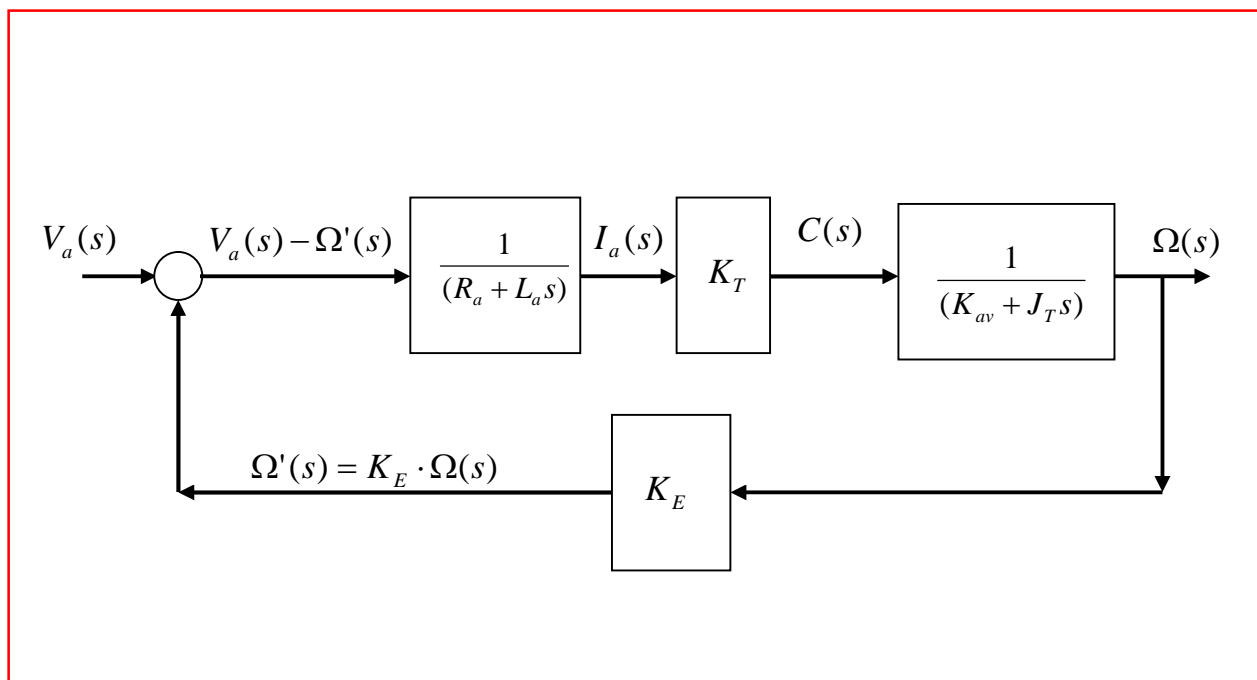
Facendo la trasformata di Laplace delle equazioni [1], [2] e [3] si ha:

$$V_a(s) = R_a \cdot I_a(s) + L_a \cdot s \cdot I(s) + K_E \cdot \Omega(s) \quad [1']$$

$$C(s) = K_T \cdot I_a(s) \quad [2']$$

$$C(s) = J_T \cdot s \cdot \Omega(s) + K_{av} \cdot \Omega(s) + C_r(s) \quad [3']$$

Supposta nulla la coppia resistente  $c_r(t)$  e quindi  $C_r(s) = 0$ , si ottiene il seguente schema a blocchi:



da cui:

$$\Omega(s) = V_a(s) \cdot \frac{K_T}{(R_a + L_a \cdot s) \cdot (K_{av} + J_T \cdot s)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K_T \cdot K_E}{(R_a + L_a \cdot s) \cdot (K_{av} + J_T \cdot s)}}$$

e quindi:

$$\Omega(s) = V_a(s) \cdot \frac{K_T}{(R_a + L_a \cdot s) \cdot (K_{av} + J_T \cdot s) + K_T \cdot K_E} \quad [A]$$

**N.B.** Spesso la costante d'attrito viscoso  $K_{av}$  viene indicata con la lettera  $B_m$ .

Posto, generalmente,  $K_{av} = 0$  si ha :

$$\Omega(s) = V_a(s) \cdot \frac{K_T}{L_a \cdot J_T \cdot s^2 + R_a \cdot J_T \cdot s + K_T \cdot K_E} = V_a(s) \cdot \frac{\frac{K_T}{L_a \cdot J_T}}{s^2 + \frac{R_a \cdot J_T}{L_a \cdot J_T} \cdot s + \frac{K_T \cdot K_E}{L_a \cdot J_T}}$$

I due poli sono:

$$p_{1,2} = \frac{-\frac{R_a}{L_a} \pm \sqrt{\frac{R_a^2}{L_a^2} - \frac{4 \cdot K_T \cdot K_E}{L_a \cdot J_T}}}{2}$$

Questi due poli, si può dimostrare, che si possono approssimare a :

$$p_1 \cong -\frac{R_a}{L_a}$$

$$p_2 \cong -\frac{K_T \cdot K_E}{R_a \cdot J_T}$$

quindi:

$$\Omega(s) = V_a(s) \cdot \frac{\frac{K_T}{L_a \cdot J_T}}{\left(s + \frac{R_a}{L_a}\right) \cdot \left(s + \frac{K_T \cdot K_E}{R_a \cdot J_T}\right)}$$

che riscritta in modo diverso, ponendo:

$$\frac{R_a}{L_a} = \frac{1}{\tau_e}$$

$$\frac{K_T \cdot K_E}{R_a \cdot J_T} = \frac{1}{\tau_m}$$

si ottiene:

$$\Omega(s) = V_a(s) \cdot \frac{\frac{K_T}{L_a \cdot J_T}}{\left(s + \frac{1}{\tau_e}\right) \cdot \left(s + \frac{1}{\tau_m}\right)}$$

oppure:

$$\Omega(s) = \frac{\frac{K_T}{L_a \cdot J_T}}{\frac{1}{\tau_e \cdot \tau_m} \cdot (1 + \tau_e \cdot s) \cdot (1 + \tau_m \cdot s)} \cdot V_a(s)$$

e quindi:

$$\Omega(s) = \frac{K_T \cdot \tau_e \cdot \tau_m}{L_a \cdot J_T} \cdot \frac{1}{(1 + \tau_e \cdot s) \cdot (1 + \tau_m \cdot s)} \cdot V_a(s) \quad \text{[B]}$$

$\tau_e$  è detta costante di tempo elettrica

$\tau_m$  è detta costante di tempo meccanica

Sono di seguito riportati i dati di targa di un motore tipo M9234 (Deltaomega).

Tensione di alimentazione	$V_a$	[V]	12
Giri al minuto ( a vuoto )	$rpm$	[rpm]	6200
Corrente ( a vuoto )		[A]	0,33
Corrente di stallo		[A]	14,5
Resistenza di armatura	$R_a$	[ $\Omega$ ]	0,8
Induttanza di armatura	$L_a$	[mH]	0,6
Momento d'inerzia rotore	$J_m$	[ $10^{-7} \cdot \text{Kg} \cdot \text{m}^2$ ]	41,7
Coppia nominale	$C_n$	[ $10^{-3} \cdot \text{N} \cdot \text{m}$ ]	43
Coppia di stallo		[ $10^{-3} \cdot \text{N} \cdot \text{m}$ ]	300
Costante di smorzamento		[ $10^{-6} \cdot \text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{N}$ ]	2,61
Costante di coppia	$K_T$	[ $10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} / \text{A}$ ]	18,3
Costante di tensione	$K_E$	[ $10^{-3} \text{ V} \cdot \text{s} / \text{rad}$ ]	18,1
Costante di tempo elettrica	$\tau_e$	[ms]	0,75
Costante di tempo meccanica	$\tau_m$	[ms]	9

Poiché  $K_T$  e  $K_E$  sono generalmente uguali; allora ponendo  $K_T = K_E = K_M$  (detta costante caratteristica del motore), l'equazione **[A]** si può anche scrivere nella forma:

$$\Omega(s) = \frac{K_M}{(R_a + L_a \cdot s) \cdot (K_{av} + J_T \cdot s) + K_M^2} \cdot V_a(s) \quad \mathbf{[A']}$$

e quindi la **[B]** si può riscrivere nella forma:

$$\Omega(s) = \frac{1}{(1 + \tau_e \cdot s) \cdot (1 + \tau_m \cdot s)} \cdot V_a(s) \quad \mathbf{[B']}$$

\*\*\*\*\*

Infatti:

$$\begin{aligned} \frac{R_a}{L_a} &= \frac{1}{\tau_e} \\ \frac{K_M^2}{R_a \cdot J_T} &= \frac{1}{\tau_m} \\ \Rightarrow \frac{R_a}{L_a} \cdot \frac{K_M^2}{R_a \cdot J_T} &= \frac{1}{\tau_e \cdot \tau_m} \end{aligned}$$

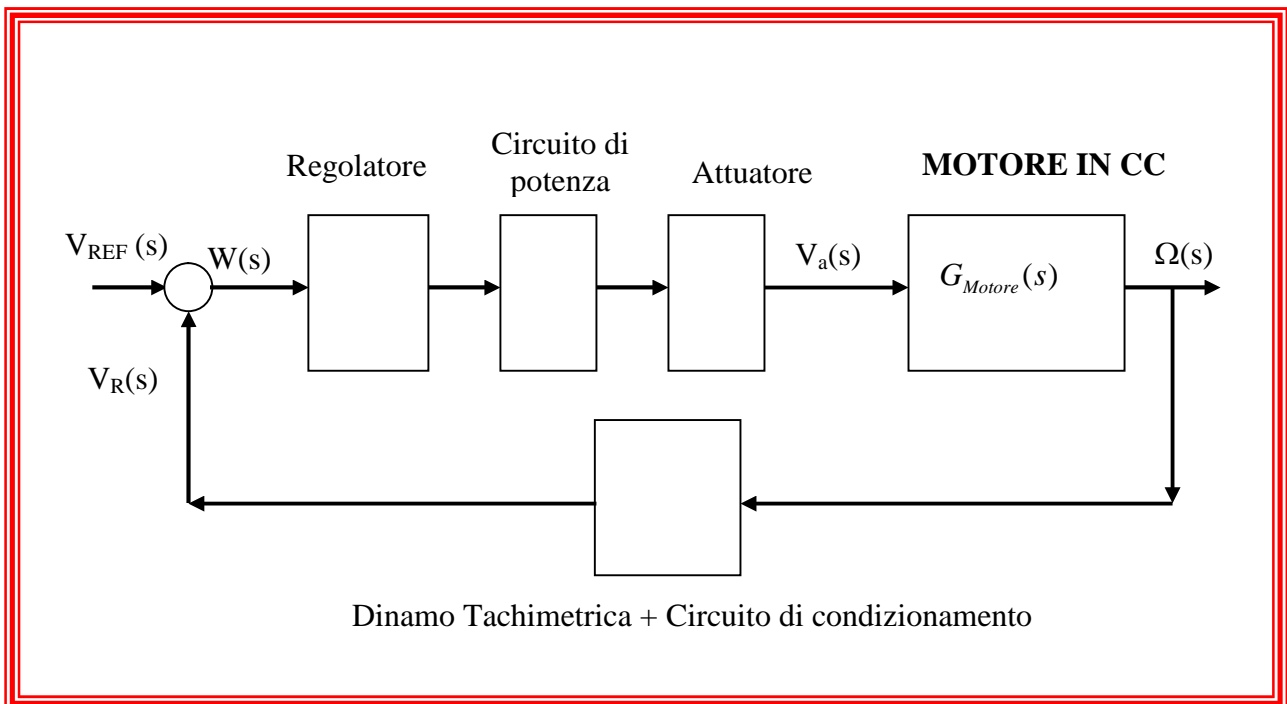
da cui:

$$\frac{1}{L_a \cdot J_T} = \frac{1}{K_M^2 \cdot \tau_e \cdot \tau_m} \Rightarrow \frac{\tau_e \cdot \tau_m}{L_a \cdot J_T} = \frac{1}{K_M^2}$$

che sostituendola nella **[B]** fornisce la **[A']**.

\*\*\*\*\*

Da quanto visto lo schema a blocchi del motore in corrente continua è il seguente:



con  $G_{Motore}(s)$  una delle equazioni [A], [B], [A'] e [B'] di seguito riportate:

$$\Omega(s) = V_a(s) \cdot \frac{K_T}{(R_a + L_a \cdot s) \cdot (K_{av} + J_T \cdot s) + K_T \cdot K_E} \quad \text{[A]}$$

$$\Omega(s) = \frac{K_T \cdot \tau_e \cdot \tau_m}{L_a \cdot J_T} \cdot \frac{1}{(1 + \tau_e \cdot s) \cdot (1 + \tau_m \cdot s)} \cdot V_a(s) \quad \text{[B]}$$

$$\Omega(s) = \frac{K_M}{(R_a + L_a \cdot s) \cdot (K_{av} + J_T \cdot s) + K_M^2} \cdot V_a(s) \quad \text{[A']}$$

$$\Omega(s) = \frac{1}{K_M} \cdot \frac{1}{(1 + \tau_e \cdot s) \cdot (1 + \tau_m \cdot s)} \cdot V_a(s) \quad \text{[B']}$$



**APPROFONDIMENTO:**

Se non si trascura la coppia resistente  $c_r(t)$  allora si può dimostrare che il sistema si trasforma nel seguente:

