

Appunti per il corso di Sistemi Dinamici
(annuale)

Riccardo Ricci

Università di Firenze, Facoltà di S.M.F.N.
Corso di Laurea in Matematica

Anno Accademico 2009-2010

7 gennaio 2011

Indice

1	Equazioni differenziali	3
1.1	Introduzione	3
1.2	Considerazioni generali	4
1.3	Il problema di Cauchy	5
1.3.1	Equazioni autonome	6
1.3.2	Equazioni reversibili	7
1.4	Equazioni integrabili	7
1.4.1	Il caso “conservativo”	9
1.4.2	Analisi qualitativa nel caso conservativo	10
1.5	Il piano delle fasi	14
1.6	Punti di equilibrio, stabilità	14
1.6.1	Il criterio di Lyapunov	15
1.6.2	Asintotica stabilità	17
1.6.3	I sistemi conservativi	18
1.7	Esempi	19
1.8	I potenziali isocroni	20
1.8.1	Limite del periodo per $E \rightarrow 0$	23
1.9	Sistemi lineari bidimensionali	24
1.9.1	Moto armonico smorzato e forzato	28
2	Cinematica dei sistemi rigidi	32
2.1	Introduzione	32
2.2	Moti rigidi	32
2.3	Asse istantaneo di moto, rigate del moto	38
2.4	Cinematica relativa: composizione delle velocità	39
2.5	Composizione di moti rigidi	41
2.6	Angoli di Eulero	41
2.7	Cinematica relativa: l’accelerazione	43
2.8	Appendice	44
3	Equazioni di Lagrange	46
3.1	Equazioni di Lagrange per un punto materiale	46
3.2	Il moto centrale	49
3.2.1	L’equazione per r	51
3.2.2	Il problema di Keplero	52
3.2.3	L’orbita del problema di Keplero	54
3.2.4	La terza legge	56

4	I sistemi vincolati e coordinate lagrangiane	57
4.1	Sistemi olonomi	57
4.1.1	Atti di moto virtuali	59
4.1.2	Spostamenti virtuali in funzione delle coordinate lagrangiane	60
4.1.3	Punto vincolato a una superficie quasiasi	61
5	Le equazioni di moto	63
5.1	Il punto vincolato	63
5.2	L'equazione simbolica	65
5.3	Le equazioni di Lagrange	67
5.3.1	Risolubilità delle equazioni di Lagrange	69
5.3.2	Invarianza delle equazioni di Lagrange	70
5.3.3	Coordinate cicliche	71
5.3.4	La conservazione dell'energia	71
5.3.5	<i>Il teorema di Noether</i>	72

Capitolo 1

Equazioni differenziali

1.1 Introduzione

Il problema del moto, della sua descrizione e delle sue “cause”, è il punto chiave per la compensione di gran parte delle applicazioni della matematica al mondo fisico.

La storia è lunga e va molto indietro nel tempo. In effetti questo problema aveva angustiato i pensatori greci classici (si pensi al famoso paradosso del Achille e la tartaruga, “risolto” da Zenone con la *negazione* della possibilità stessa del moto). Già allora era venuta apparsa la stretta connessione del moto con la *continuità*, intesa questa come infinita (almeno potenzialmente) divisibilità dello spazio e del tempo.

La questione era destinata a trascinarsi per lungo tempo. Una chiara definizione di continuità (con la definizione dei numeri reali) dovette attendere fino al diciannovesimo secolo.

Ciò nonostante gli strumenti concettuali per la descrizione del moto si fecero strada molto prima, anche se in modo vago (come tutti i concetti degni di questo nome!). Nell’opera di Galileo la velocità appare come un concetto “primitivo”, una proprietà dei corpi in movimento, che non viene definita in funzione di altro (si indica però dei modi per calcolarla, per esempio facendo urtare un corpo contro un altro corpo fermo).

La chiave della “risoluzione” si trova nel lavoro di Newton che dà origine al calcolo differenziale. La velocità (istantanea) viene identificata con la *derivata* del moto, inteso come la funzione che associa la posizione nello spazio al tempo in cui il “mobile” la occupa¹.

¹Per quanto questo modo di pensare possa apparire molto plausibile, in effetti maschera un bel po’ di problemi concettuali. Per parlare di velocità devo identificare ad ogni istante il corpo in moto con un punto geometrico; e come faccio a sapere veramente *quando* il corpo sta transitando da una data posizione nello spazio; e come posso allora determinarne la velocità assieme alla sua posizione. La fisica moderna, attraverso la teoria della relatività e la meccanica quantistica, ci ha fatto capire che tutto questo armamentario concettuale fa cilecca quando si ha a che fare con corpi “realmente” piccoli e veloci.

Inoltre, anche restando nell’ambito puramente classico, la definizione di velocità come derivata della posizione assume che si abbia chiaro cosa si intende per “spazio” e soprattutto per “tempo”: nell’ambito della Meccanica Classica lo spazio è rappresentato matematicamente da uno spazio euclideo tridimensionale, il tempo da un continuo unidimensionale che, come afferma Newton, “scorre uniformemente”: “Tempus absolutum, verum et mathematicum in se et

L'accelerazione, che è la variazione della velocità rispetto al tempo, appare allora come la derivata della funzione che ad ogni istante associa la velocità istantanea.

Conoscendo ad ogni istante l'accelerazione è possibile ricostruire la velocità e quindi la posizione con l'operazione inversa della derivazione, l'integrazione. Ma questo sembra generare un regresso all'infinito: per conoscere l'accelerazione forse dovrei conoscere la sua variazione (la "derivata terza" del moto) e così via.

Il "miracolo" è che con l'accelerazione si può chiudere il regresso. Una lettura "puramente matematica" della seconda legge² della dinamica newtoniana è che è sempre possibile trovare una funzione della posizione del corpo, della sua velocità e del tempo, che determina la sua accelerazione.

Questo, insieme con le leggi che regolano la struttura delle forze (il principio di azione-reazione, le specifiche leggi per le varie forze, come la legge del quadrato inverso per la gravitazione), trasforma il problema del moto in un problema matematico ben definito: la soluzione di un'equazione differenziale (o meglio, di un sistema di equazioni differenziali).

1.2 Considerazioni generali

Cominciamo con un caso ben noto: il modello più comune per descrivere una *molla* è quello in cui il corpo subisce una forza di richiamo proporzionale a quanto si è allontanato da un punto fissato, il centro di attrazione. Questo si traduce nel modello matematico

$$m\ddot{x} = -Kx \quad (1.1) \quad \boxed{\text{edo1}}$$

dove m denota la *massa* del corpo, K è una costante positiva detta costante elastica, la funzione del tempo $x(t)$ indica la posizione del corpo e \ddot{x} la sua derivata seconda³.

La (1.1) è un esempio di equazione differenziale del secondo ordine, cioè che contiene la funzione incognita e le sue derivate fino al secondo ordine.

Il problema fondamentale della Meccanica si può enunciare in questi termini: *date le forze, determinare il moto*, ovvero espresso la forza in funzione della posizione del corpo, della sua velocità e del tempo, determinare la posizione in funzione del tempo in modo che sia soddisfatta l'equazione

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t). \quad (1.2)$$

natura sua sine relatione ad externum quodvis, aequabiliter fluit". Questo è il "modello" di spazio-tempo che fa da "sfondo" alla meccanica newtoniana.

Oggi le nostre idee sono forse un po' più confuse. Per esempio, secondo Roger Penrose: *The temporal ordering that we 'appear' to perceive is, I am claiming, something that we impose upon our perceptions in order to make sense of them in relation to the uniform forward time-progression of an external physical reality*. Si vedano gli articoli su tempo nel sito web di storia della matematica della St. Andrews University

http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Time_1.html

http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Time_2.html

²*mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur* ovvero "la variazione del moto (accelerazione) è proporzionale alla forza applicata ed è nella direzione di tale forza". Qui la forza è pensata come una quantità (vettoriale) nota in funzione dello stato cinematico del corpo (posizione e velocità)

³In omaggio alla trazione newtoniana indichiamo la derivata con il punto sopra il nome della funzione, quindi $\frac{d}{dt}x(t) = \dot{x}(t)$ e $\frac{d^2}{dt^2}x(t) = \ddot{x}(t)$

Definiamo ora cosa si intende per equazione differenziale in generale.

Sia data una funzione $f : \mathbf{R}^{n+2} \rightarrow \mathbf{R}$. Un'equazione differenziale (ordinaria) di ordine n è una relazione, che coinvolge una funzione incognita $x : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, assieme con le sue derivate fino all'ordine n ,

$$f(x^{(n)}(t), x^{(n-1)}(t), \dots, x'(t), x(t), t) = 0 \quad (1.3)$$

dove $x^{(k)}$ indica la derivata k -esima di x , che deve essere soddisfatta per ogni⁴ valore della variabile indipendente t .

L'equazione è detta in *forma normale* se ha la forma

$$x^{(n)} = f(x^{(n-1)}, \dots, x', x, t) \quad (1.4)$$

L'equazione si dice *autonoma* se la funzione f non dipende da t .

Accanto alle equazioni scalari possiamo anche considerare le equazioni differenziali vettoriali (dette anche "sistemi di equazioni differenziali"),

$$X^{(n)} = F(X^{(n-1)}, \dots, X', X, t) \quad (1.5) \quad \boxed{\text{normavett}}$$

dove l'incognita $X(t)$ è ora una funzione a valori in \mathbf{R}^d e la funzione $F : \mathbf{R}^{d \times n+1} \rightarrow \mathbf{R}^d$

In effetti basta limitarsi a equazioni differenziali vettoriali del primo ordine. Infatti qualsiasi equazione di ordine superiore può essere ridotta a un sistema del primo ordine introducendo un numero opportuno di variabili ausiliarie (cioè nuove funzioni incognite). Per fissare le idee vediamo come si passa da un'equazione scalare del secondo ordine a un sistema di due equazioni del primo ordine.

Sia quindi data l'equazione

$$\ddot{x} = f(\dot{x}, x, t). \quad (1.6) \quad \boxed{2in1.1}$$

Poniamo

$$y = \dot{x} \quad (1.7) \quad \boxed{2in1.2}$$

avremo di conseguenza che $\ddot{x} = \dot{y}$ e possiamo scrivere la [\(1.6\)](#) e la [\(1.7\)](#) come

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(y, x, t) \end{cases} \quad (1.8)$$

La generalizzazione di questa riduzione al primo ordine per sistemi di equazioni differenziali di ordine superiore è ovvia.

1.3 Il problema di Cauchy

È quasi immediato rendersi conto che un'equazione differenziale non ha soluzione unica. Basta prendere la più semplice possibile

$$x' = 0 \quad (1.9) \quad \boxed{\text{nulla}}$$

⁴A voler essere precisi, la definizione che abbiamo dato dovrebbe essere "localizzata": la funzione f può essere definita solo in un sottoinsieme aperto di \mathbf{R}^{n+2} , così come la eventuale soluzione $x(t)$ può essere definita solo in un certo intervallo (t_1, t_2) . Questa ultima limitazione è molto importante in quanto, anche per funzioni f "semplici", p.e. $f(x', x) = x' - x^2$, le soluzioni, che pure esistono, *non* sono definite per tutti i valori della variabile indipendente t ma solo in intervalli limitati.

e verificare che ⁱⁿtutte le funzioni *costanti* sono soluzioni di (I.9).

L'equazione (I.9) ha però una sola soluzione che soddisfa *anche* la condizione

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.10} \quad \boxed{\text{iniziale}}$$

dove t_0 è un tempo fissato e x_0 un valore fissato (la soluzione è, ovviamente, $x(t) = x_0$ per ogni t).

La condizione (I.10) si dice *condizione iniziale*, o di Cauchy, e determina, sotto opportune condizioni, in modo univoco la soluzione di un'equazione differenziale (del primo ordine). Il problema di determinare la soluzione di un'equazione differenziale che soddisfi a una data condizione iniziale è detto *Problema a dati iniziali* o *Problema di Cauchy*.

Enunciamo il teorema fondamentale sull'esistenza e unicità delle soluzioni del problema di Cauchy. Esso richiede che l'equazione sia in forma normale ^{normale} (I.5).

Teorema 1.3.1 *Sia data una funzione $F : (X, t) \in \mathbf{R}^{d+1} \rightarrow F(X, t) \in \mathbf{R}^d$, continua rispetto alle variabili X e t e lipschitziana⁵ rispetto alla variabile X in un intorno di $(X_0, t_0) \in \mathbf{R}^{d+1}$.*

Esistenza: *Esiste un $\delta > 0$ e una funzione $X : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbf{R}^d$, di classe C^1 in $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ che soddisfa il problema di Cauchy*

$$X' = F(X, t), \tag{1.11} \quad \boxed{\text{Cauchy 1}}$$

$$X(t_0) = X_0. \tag{1.12} \quad \boxed{\text{Cauchy 2}}$$

Unicità: *Se $\bar{\delta} > 0$ e $\bar{X} : (t_0 - \bar{\delta}, t_0 + \bar{\delta}) \rightarrow \mathbf{R}^d$ soddisfano anch'esse (I.11) e (I.12), allora $X \equiv \bar{X}$ in $(t_0 - \delta_m, t_0 + \delta_m)$, con $\delta_m = \min\{\delta, \bar{\delta}\}$.*

Nota Una prima osservazione è che il teorema ha carattere “locale” ovvero non garantisce l'esistenza della soluzione per tutti i tempi $t \in \mathbf{R}$. Questo perché per una funzione F generica, anche molto regolare, la soluzione può “esporre” in tempo finito. Come esempio si prenda l'equazione

$$x' = x^2$$

che, se imponiamo la condizione iniziale $x(0) = 1$, ha per soluzione $x(t) = 1/(1-t)$. Questa soluzione è definita solo nell'intervallo $x < 1$.

Visto che la soluzione che ci si aspetta è comunque “locale”, è facile immaginare che anche le ipotesi sui dati del problema possano essere “localizzate”, cioè basti chiedere che la funzione F sia continua e lipschitziana non per tutti i possibili (X, t) ma solo in un intorno del punto (X_0, t_0) , si veda l'appendice per un enunciato più generale e per la dimostrazione del teorema.

1.3.1 Equazioni autonome

Come abbiamo detto un'equazione differenziale, o un sistema di equazioni differenziali, in cui il tempo non compaia esplicitamente si dice *autonoma*. Queste

⁵Una funzione $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ si dice *lipschitziana* (o Lipschitz continua) se esiste una costante L tale che, per ogni coppia di punti x e $y \in \mathbf{R}^n$, f soddisfa la disuguaglianza $\|f(x) - f(y)\|_m \leq L\|x - y\|_n$, dove $\|\cdot\|_m$ e $\|\cdot\|_n$ indicano le norme in \mathbf{R}^m e \mathbf{R}^n .

equazioni hanno una fondamentale proprietà detta di *invarianza temporale*: data una soluzione $x(t)$ e un valore del tempo T qualsiasi, allora la funzione $x_T(t)$ definita da $x_T(t) = x(t - T)$ è ancora soluzione dell'equazione.

La verifica di questa asserzione è immediata (verificarlo!), ma ancora più importante è capire come si interpreta questa proprietà. Supponiamo, a partire da questo preciso istante, di effettuare un qualche esperimento su una quantità la cui evoluzione nel tempo sia descritta da un'equazione differenziale. Sia $x(t)$ la funzione che descrive il comportamento nel tempo della quantità in questione (quindi, se la nostra descrizione tramite l'equazione differenziale è "corretta" $x(t)$ sarà soluzione dell'equazione differenziale). Supponiamo di aver già effettuato questo stesso esperimento un mese fa, e sia $y(t)$ la funzione che descriveva l'evoluzione della quantità sotto esperimento.

Se ora stiamo replicando lo stesso esperimento di un mese fa, avremo quindi⁶ $x(t_0) = y(t_0 - T)$ dove t_0 è il tempo di inizio dell'esperimento e T il tempo trascorso tra l'esperimento precedente e quello attuale.

Se immaginiamo che il tempo trascorso non abbia modificato l'ambiente in cui si svolge l'esperimento (p.e. i risultati non sono influenzati da mutazioni climatiche, condizioni astronomiche variate, vedi le maree, o altri fattori dipendenti dal tempo di inizio dell'esperimento) ci aspettiamo che anche $x(t) = y(t - T)$ per $t > t_0$, e questo per ogni T . Ciò implica che il legame tra x e le sue derivate *non* deve dipendere dal valore della variabile indipendente (il tempo) e di conseguenza l'equazione differenziale deve essere autonoma.

1.3.2 Equazioni reversibili

Un'altra classe di equazioni differenziali rilevanti nella Meccanica è quella delle equazioni dette *reversibili* ovvero quelle per cui se $x(t)$ è una soluzione allora lo è anche la funzione $y(t) = x(-t)$. Questo accade in Meccanica tutte le volte che si abbiamo sistemi isolati o anche in sistemi non isolati ma dove le forze esterne non dipendano dal tempo e si trascurino gli effetti degli "attriti" e, più in generale delle forze *dissipative*. In questi casi le equazioni avranno la forma $\ddot{x} = f(x)$ di cui si verifica immediatamente la reversibilità (in effetti: cambiando il segno del tempo la derivata prima cambia di segno, ma la derivata seconda ritorna del segno di partenza!).

1.4 Equazioni integrabili

Nonostante il teorema di esistenza e unicità ci garantisca che il problema di Cauchy è (univocamente) risolubile, tuttavia non è, in generale, possibile dare un'espressione analitica della soluzione tramite una combinazione finita di funzioni "elementari"⁷ e neppure trovare un algoritmo che permetta di esprimere la soluzione tramite un numero finito di operazioni di integrazione e di inversione di funzioni. Qualora questo sia possibile diremo che l'equazione differenziale è "integrabile".

⁶Qui supponiamo di poter trascurare gli "errori sperimentali"!

⁷Per "funzione elementare" si intende generalmente una funzione che appartenga al seguente "catalogo": polinomi, funzioni razionali, funzioni trigonometriche ed esponenziali, loro inverse e tutte funzioni ottenute combinando un numero finito di queste funzioni.

Per esemplificare cosa intendiamo per “equazione integrabile” consideriamo il caso di un’equazione del primo ordine autonoma⁸ in forma normale,

$$\dot{y} = g(y). \quad (1.13) \quad \boxed{\text{primo}}$$

In questo caso l’equazione è integrabile per “separazione delle variabili”. Riscriviamo (1.13) ^{primo} come

$$\frac{\dot{y}}{g(y)} = 1 \quad (1.14) \quad \boxed{\text{primo2}}$$

e introduciamo la funzione

$$G(y) = \int_{y_0}^y \frac{d\eta}{g(\eta)}. \quad (1.15) \quad \boxed{G}$$

Basta osservare ora che il primo membro della (1.14) ^{primo2} è la derivata rispetto al tempo della funzione $G(y(t))$, ⁹ mentre possiamo interpretare il numero 1 a secondo membro come la derivata della funzione t rispetto al tempo (ovvero a t medesimo). La (1.14) ^{primo2} è dunque un’uguaglianza tra le derivate di due funzioni e di conseguenza le due funzioni devono differire per una costante

$$G(y(t)) = t + \text{costante}. \quad (1.16) \quad \boxed{1}$$

La comparsa di una costante di integrazione non deve meravigliare: sappiamo che la (1.13) ^{primo} ammette un’unica soluzione qualora si specifichi il dato iniziale $y(t_0) = y_0$, cosa che non abbiamo fatto quando abbiamo ricavato la (2.7). Possiamo ricavare la soluzione corrispondente al dato iniziale ponendo la costante uguale a $G(y_0) - t_0$ (in questo caso quando $t = t_0$ la (2.7) si riduce all’uguaglianza $G(y(t_0)) = G(y_0)$). Infine, introducendo la funzione inversa di $G(y)$ che indicheremo con $F(s)$, possiamo scrivere la soluzione come

$$y(t) = F(t + G(y_0) - t_0). \quad (1.17) \quad \boxed{2}$$

Abbiamo quindi espresso la soluzione dell’equazione differenziale tramite il calcolo di un integrale e l’inversione di una funzione: questo è ciò che si intende per “integrazione” di un’equazione differenziale.

Il calcolo che ha portato all’integrazione della (1.13) ^{primo} si generalizza al caso in cui l’equazione sia riconducibile, tramite qualche manipolazione algebrica, alla forma

$$\dot{y} = g(y)h(t). \quad (1.18) \quad \boxed{\text{primo3}}$$

In questo caso invece della funzione costantemente uguale a 1, abbiamo una funzione $h(t)$ e quindi avremo la soluzione della (1.18) ^{primo3} nella forma

$$G(y(t)) = H(t) + \text{costante}, \quad (1.19) \quad \boxed{1.1}$$

⁸“autonoma” significa che si può esprimere la derivata in funzione della funzione incognita senza che il tempo entri esplicitamente in questa relazione

⁹Infatti si ha

$$\frac{d \int_{y_0}^{y(t)} \frac{d\eta}{g(\eta)}}{dt} = \frac{dy(t)}{dt} \left. \frac{d \int_{y_0}^y \frac{d\eta}{g(\eta)}}{dy} \right|_{y=y(t)} = \frac{dy(t)}{dt} \frac{1}{g(y(t))}$$

dove $H(t)$ indica una qualsiasi primitiva della funzione $h(t)$.

Una generica equazione del second'ordine, anche autonoma, non può in generale essere “integrata”. Tuttavia ci sono due importanti eccezioni.

La prima è quella delle equazioni della forma

$$\ddot{q} = f(\dot{q}), \quad (1.20) \quad \boxed{\text{finta}}$$

che chiaramente sono equazioni del primo ordine (autonome) nella variabile \dot{q} . Possiamo quindi esprimere la \dot{q} come abbiamo fatto per la funzione $y(t)$ soluzione di (I.13)^{primo}, e quindi integrare ancora rispetto al tempo.

Un esempio significativo di equazione di questo tipo è l'equazione che descrive il moto di un grave in presenza di una resistenza del mezzo esprimibile in funzione della velocità del grave stesso (p.e. la resistenza viscosa, che è proporzionale alla velocità, oppure la resistenza idraulica, proporzionale al quadrato della velocità)

$$\ddot{q} = -h(\dot{q}) - g, \quad (1.21) \quad \boxed{\text{grave}}$$

dove q rappresenta la quota del grave e g , costante, è l'accelerazione di gravità.

1.4.1 Il caso “conservativo”

Il secondo caso è quello delle equazioni della forma

$$\ddot{q} = f(q), \quad (1.22) \quad \boxed{\text{uni}}$$

caso fondamentale per la Meccanica poiché di questa forma sono le equazioni di moto di un sistema conservativo con un solo grado di libertà. La (I.22)^{uni} è riconducibile a un'equazione del primo ordine tramite la seguente osservazione: moltiplichiamo ambo i membri della (I.22)^{uni} per la funzione \dot{q}

$$\ddot{q}\dot{q} = f(q)\dot{q}, \quad (1.23) \quad \boxed{\text{uni2}}$$

e poniamo

$$-V(q) = U(q) = \int_{q_0}^q f(\eta) d\eta. \quad (1.24) \quad \boxed{\text{F}}$$

Ora possiamo riconoscere nel primo membro della (I.23)^{uni2} la derivata rispetto al tempo della funzione $1/2 \dot{q}^2$ mentre il secondo membro è anch'esso una derivata rispetto al tempo, ovvero la derivata di $U(q(t))$. Possiamo quindi integrare rispetto al tempo la (I.23)^{uni2} e ottenere

$$\frac{\dot{q}^2}{2} = E - V(q), \quad (1.25) \quad \boxed{\text{energia}}$$

dove abbiamo indicato con E il valore, arbitrario, della costante di integrazione¹⁰.

L'equazione (I.25)^{energia} può essere risolta rispetto a \dot{q} purché non ci si trovi nel punto in cui $V(q) = E$. Supponiamo quindi di avere assegnato, per l'equazione

¹⁰Il fatto che si siano usate le lettere V ed E dovrebbe richiamare alla mente che quello che abbiamo fatto non è altro che scrivere l'integrare primo dell'energia totale del sistema $E = \frac{\dot{q}^2}{2} + V(q)$. Chiameremo in seguito “energia cinetica” il termine $\frac{\dot{q}^2}{2}$, “energia potenziale” il termine $V(q)$ e “potenziale” la funzione $U(q)$.

differenziale originaria ^{uni}(I.22), condizioni iniziali con $q(t_0) = q_0$ e $\dot{q}(t_0) = v_0 > 0$ (aver fissato positivo il segno di v_0 non pregiudica la generalità di quanto segue). Possiamo quindi risolvere algebricamente la ^{energia}(I.25) ottenendo

$$\dot{q} = \sqrt{2(E - V(q))}, \quad (1.26) \quad \text{separata}$$

(avendo assunto la velocità iniziale positiva) che è un'equazione del tipo ^{primo}(I.13) e quindi può essere risolta per separazione delle variabili

$$t - t_0 = \int_{q_0}^{q(t)} \frac{d\eta}{\sqrt{2(E - V(\eta))}}. \quad (1.27) \quad \text{soluzione}$$

(nota che nella ^{soluzione}(I.27) E non indica più una costante arbitraria, ma il valore dell'“energia” fissato dalle condizioni iniziali, i.e. $E = \frac{1}{2}\dot{q}(t_0)^2 + V(q(t_0))$). Resta da risolvere l'integrale in ^{soluzione}(I.27) e invertire la funzione di $q(t)$ ottenuta dall'integrazione.

Questo procedimento può scontrarsi con l'impossibilità di esprimere l'integrale a secondo membro della ^{soluzione}(I.27) in termini di funzioni elementari. Questo accade, p.e., nel caso del moto del pendolo semplice. Infatti in questo caso abbiamo l'equazione di moto

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (1.28)$$

che ci dà una soluzione nella forma ^{soluzione}(I.27)

$$t - t_0 = \int_{\theta_0}^{\theta(t)} \frac{d\eta}{\sqrt{2(E + \frac{g}{l} \cos \eta)}}. \quad (1.29) \quad \text{soluzione_pendolo}$$

Questo integrale non può essere espresso tramite una combinazione finita di funzioni elementari.¹¹

Anche nel caso che il processo di integrazione e inversione possa essere portato a termine, resta il fatto che non sempre un'espressione esplicita della soluzione è particolarmente facile da “decifrare”, ovvero resta il problema di capire come effettivamente si comporti la soluzione descritta da tale espressione analitica.

1.4.2 Analisi qualitativa nel caso conservativo

Molte informazioni sulla soluzione possono tuttavia essere ottenute tramite una “analisi qualitativa”, che prescinde dal calcolo esplicito della soluzione stessa.

Cominciamo dal caso “conservativo”, ovvero da un'equazione nella forma ^{uni}(I.22). In questo caso abbiamo detto che le soluzioni dell'equazione sono tali che, al variare di t la quantità

$$\frac{\dot{q}^2}{2} + V(q), \quad (1.30) \quad \text{ene1}$$

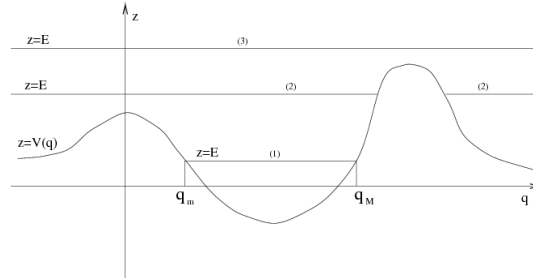
resta costante, ovvero è un “integrale primo” dell'equazione differenziale¹². Abbiamo quindi

$$\dot{q}^2 = 2[E - V(q)], \quad (1.31) \quad \text{ene2}$$

¹¹Le funzioni che provengono da integrali del tipo di quello che compare nella ^{soluzione_pendolo}(I.29) sono dette funzioni ellittiche.

¹²Data un'equazione differenziale $\ddot{q} = f(\dot{q}, q, t)$, una funzione $g(\dot{q}, q, t)$ delle variabili \dot{q} , q e t tale che $\frac{dg(\dot{q}(t), q(t), t)}{dt} = 0$ per ogni funzione $q(t)$ soluzione dell'equazione differenziale, si dice un *integrale primo*.

Figura 1.1: Grafico della funzione energia potenziale e livelli dell'energia.



potenziale1

dove E è un numero che viene fissato dalle condizioni iniziali. Poiché il primo membro della (I.31) è non negativo, il moto si dovrà svolgere in un intervallo dell'asse delle q dove è soddisfatta la disuguaglianza

$$E \geq V(q). \quad (1.32) \quad \text{ene3}$$

In effetti l'insieme delle soluzioni di (I.32) può essere formato da più intervalli disgiunti¹³: per continuità il moto potrà svolgersi solo su una componente connessa di questo insieme.

Possiamo quindi avere tre casi "generici":¹⁴

1. un intervallo limitato $[q_m, q_M]$;
2. un intervallo illimitato della forma $[q_m, +\infty)$ (oppure del tipo $(-\infty, q_M]$);
3. tutta la retta reale.

Il caso periodico

Nel primo caso abbiamo un moto limitato tra due valori, uno minimo q_m e uno massimo q_M , della coordinata del punto. Vogliamo mostrare che in questo caso il moto è periodico e il periodo è determinato da

$$T = 2 \int_{q_m}^{q_M} \frac{d\eta}{\sqrt{2(E - V(\eta))}}. \quad (1.33) \quad \text{Periodo}$$

Supponiamo che a un certo istante (che possiamo prendere senza perdere in generalità come l'origine della scala dei tempi $t = 0$) il sistema si trovi nel punto $q_0 \in (q_m, q_M)$. Essendo fissato il valore dell'energia E , il modulo della velocità $|v_0|$ è determinato dalla (I.26). Ancora senza perdere di generalità possiamo assumere che $v_0 > 0$. Il sistema si muoverà quindi verso il punto $q = q_M$; quando sarà sufficientemente vicino a q_M la sua velocità comincerà a decrescere verso zero (infatti nel punto q_M , e al valore fissato dell'energia, corrisponde una

¹³per essere precisi gli intervalli disgiunti sono gli intervalli aperti delle soluzioni della disuguaglianza stretta.

¹⁴Per "generico" intendiamo che nei punti \bar{q} in cui è soddisfatta l'uguaglianza nella (I.32) si possa sviluppare la differenza $E - V(q) = V'(\bar{q})(q - \bar{q})$, con $V'(\bar{q}) \neq 0$, ovvero che la retta $y = E$ non è tangente al grafico $y = V(q)$.

velocità nulla). Mostriamo che il sistema raggiunge il punto q_M in un tempo finito. Il tempo necessario per “raggiungere” q_M si ricava dalla ^{soluzione} (1.27)

$$t_M = \int_{q_0}^{q_M} \frac{d\eta}{\sqrt{2(E - V(\eta))}} \quad (1.34) \quad \boxed{\text{arrivo}}$$

ci dà il tempo di arrivo in q_M a patto che l’integrale sia convergente (la funzione integranda diverge in q_M). Ma la convergenza dell’integrale¹⁵ è garantita dalla condizione $V'(q_M) > 0$, che implica che la funzione integranda diverge come $(q_M - q)^{1/2}$.

Ripetendo il calcolo a partire da q_M (si noti che $V'(q_M) > 0$ garantisce anche che $\ddot{q}(t_M) < 0$ e che quindi il sistema “riparte” dalla posizione $q = q_M$, muovendosi questa volta verso q_m) otteniamo la formula per il tempo T impiegato dalla soluzione per ritornare al punto di partenza. Poiché l’equazione è autonoma, le soluzioni sono invarianti per “traslazioni temporali”¹⁶ ovvero la soluzione che parte da q_0 con velocità v_0 al tempo $t = T$ è ottenuta da quella che partiva al tempo $t = 0$ per traslazione, $q(t + T) = q(t)$. Ne segue che il moto è periodico.

Il caso aperiodico

Nei casi 2) e 3) il moto invece è illimitato. Nel caso 2), ovvero nel caso che la condizione iniziale q_0 appartenga a un intervallo limitato a sinistra (a destra) da un valore minimo q_m (massimo q_M), la soluzione $q(t)$ divergerà a $+\infty$ ($-\infty$) sia per $t \rightarrow -\infty$ che per $t \rightarrow +\infty$. La soluzione assume un valore minimo (massimo) che raggiunge ancora in tempo finito se la sua velocità iniziale è negativa (positiva); questo punto è detto punto di inversione del moto. Ci si riferisce a questa situazione, in contrapposizione alla precedente, parlando di moto aperiodico.

Nel caso l’insieme delle soluzioni della ^{ene3} (1.32) sia tutta la retta reale, allora il moto è una funzione monotona del tempo, che può essere sia crescente che decrescente, a seconda del segno della velocità iniziale.

I punti di equilibrio

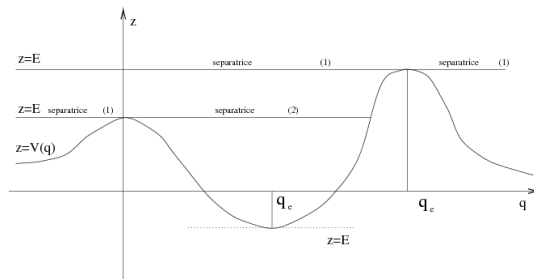
I valori estremi di E che corrispondono ai valori di minimo relativo della funzione $V(q)$ generano delle *soluzioni di equilibrio* ovvero delle soluzioni che sono funzioni costanti del tempo: infatti in questo caso al sistema competono velocità e accelerazione nulle, e quindi il sistema resta fermo nel punto di minimo \bar{q} .

Se poi il punto di minimo \bar{q} è un minimo isolato (ovvero esiste un intorno $q_1 < \bar{q} < q_2$ in cui $V(q) > V(\bar{q})$ per $q \neq \bar{q}$) allora la posizione di equilibrio è *stabile*, ogni moto che parta “sufficientemente vicino” a \bar{q} e con velocità “sufficientemente piccola” resta “vicino” a \bar{q} per ogni tempo t (nel seguito daremo un senso matematicamente preciso a queste “vicinanze”). Questo fatto è di immediata verifica osservando che, se il moto si trova a un certo istante in un punto q_0 vicino a \bar{q} e ha velocità v_0 piccola in modulo, al valore di energia

¹⁵Vedi in appendice le condizioni per la convergenza degli integrali *indefiniti*.

¹⁶Sia $q(t)$ una soluzione di $\ddot{q} = f(q)$ e poniamo $\tilde{q}(t) = q(t - t_0)$; verifichiamo che \tilde{q} è ancora una soluzione. Infatti abbiamo $\frac{d^2}{dt^2} \tilde{q}(t) = \ddot{q}(t - t_0)$ (ovvero la derivata seconda di q calcolata in $t - t_0$) e quindi $\ddot{\tilde{q}}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \tilde{q}(t) = \ddot{q}(t - t_0) = f(q(t - t_0)) = f(\tilde{q}(t))$.

Figura 1.2: Grafico dell'energia potenziale, punti di equilibrio.



f2

$E_1 = \frac{1}{2}v_0^2 + V(q_0)$ corrisponde un intervallo $E_1 \geq V(q)$ che è un intorno “piccolo” di \bar{q} .

I massimi relativi della funzione $V(q)$ corrispondono ancora a posizioni di equilibrio: infatti anche in questo caso, prendendo $E = V(\hat{q})$ dove \hat{q} è la coordinata del massimo, si ha una velocità nulla e quindi $q(t) \equiv \hat{q}$ è una soluzione dell'equazione di moto.

In questo caso però a stati di moto “vicini” a $(\hat{q}, 0)$, corrispondono soluzioni che non restano “vicine”; in questo caso parleremo di equilibrio instabile.

Il caso delle separatrici

Quando scegliamo un valore di energia $E = V(\hat{q})$ corrispondente a un massimo relativo isolato \hat{q} , oltre alla soluzione di equilibrio, abbiamo anche almeno due intervalli (limitati o illimitati) di valori di q che soddisfano alla disuguaglianza $E > V(q)$. Vediamo qual'è il comportamento delle corrispondenti soluzioni quando la q si avvicina al valore \hat{q} . Per fissare le idee supponiamo di aver scelto come condizioni iniziali, al tempo $t = 0$, $q_0 < \hat{q}$ e $0 < v_0 = \sqrt{2V(\hat{q})}$.

Possiamo scrivere quindi la soluzione corrispondente usando la formula implicita (I.27), e tramite questa formula calcolare il tempo che questa soluzione impiega per “raggiungere” \hat{q} :

$$\hat{t} = \int_{q_0}^{\hat{q}} \frac{d\eta}{\sqrt{2(E - V(\eta))}}. \quad (1.35)$$

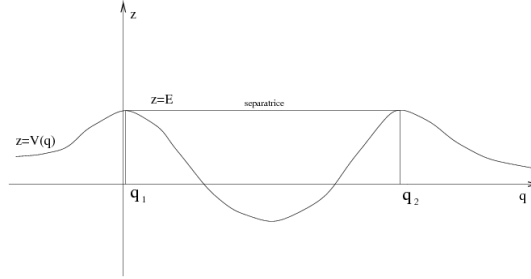
infinito

Supponiamo che la funzione V abbia un andamento “generico” nel punto \hat{q} , ovvero che sia $V''(\hat{q}) < 0$. In questo caso la differenza $E - V(q) = \frac{1}{2}V''(\hat{q})(q - \hat{q})^2 + O(3)$ è un infinitesimo del second'ordine e quindi la funzione integranda è un infinito del primo ordine. Ne segue che l'integrale (1.35) diverge, $\hat{t} = +\infty$, ovvero che la soluzione non raggiunge mai la posizione \hat{q} .

Anche per questi valori di energia possiamo catalogare le soluzioni in tre possibili comportamenti:

1. soluzioni illimitate monotone con $q(t) \in (-\infty, \hat{q})$ oppure $q(t) \in (\hat{q}, +\infty)$, caso (1) della figura (I.2);
2. soluzioni limitate con $q(t) \in (q_m, \hat{q})$ oppure $q(t) \in (\hat{q}, q_M)$, dove q_m o q_M sono punti di inversione del moto, raggiungibili in tempo finito: per queste soluzioni si ha $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} q(t) = \hat{q}$, caso (2) della figura (I.2);

Figura 1.3: Punti di equilibrio con lo stesso valore dell'energia.



f3

3. soluzioni limitate monotone con $\lim_{t \rightarrow -\infty} q(t) = \hat{q}_1$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = \hat{q}_2$, dove \hat{q}_1 e \hat{q}_2 sono due punti di massimo relativo con $V(\hat{q}_1) = V(\hat{q}_2)$ (ma si può avere anche $\lim_{t \rightarrow -\infty} q(t) = \hat{q}_2$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = \hat{q}_1$), vedi figura (1.3).

1.5 Il piano delle fasi

Ogni equazione differenziale scalare del secondo ordine, $\ddot{q} = f(\dot{q}, q, t)$ può essere sempre trasformata in un sistema di due equazioni in due incognite, semplicemente definendo $v = \dot{q}$ e quindi ponendo

$$\begin{cases} \dot{q} = v \\ \dot{v} = f(v, q, t) \end{cases} \quad (1.36) \quad \text{ sistema}$$

La soluzione di (1.36) è ora una coppia di funzioni $(q(t), v(t))$. Possiamo rappresentare la soluzione tramite un punto che si muove in un piano cartesiano di ascissa q e ordinata v . Questa rappresentazione è particolarmente utile nel caso dei sistemi autonomi, il piano (q, v) così definito è detto *piano delle fasi*.

$$\begin{cases} \dot{q} = v \\ \dot{v} = f(v, q) \end{cases} \quad (1.37) \quad \text{ sistema_autonomo}$$

Definiamo *orbita* del sistema il luogo dei punti del piano $\{(q, v) \mid q = q(t), v = v(t), -\infty < t < +\infty\}$, dove $(q(t), v(t))$ è una soluzione di (1.37). Poiché, in virtù del teorema di esistenza e unicità, nel caso di un sistema autonomo due soluzioni $(q_1(t), v_1(t))$ e $(q_2(t), v_2(t))$ che corrispondono alle stesse condizioni iniziali assunte a due istanti diversi, t_1 e t_2 (cioè $(q_1(t_1) = q_0, v_1(t_1) = v_0)$ e $(q_2(t_2) = q_0, v_2(t_2) = v_0)$) sono l'una la traslata temporale dell'altra, i.e. $q_1(t) = q_2(t - (t_2 - t_1)), v_1(t) = v_2(t - (t_2 - t_1))$, ne risulta che le orbite di queste due soluzioni coincidono, ovvero un punto (q, v) appartiene all'orbita della prima soluzione se e solo se appartiene all'orbita della seconda. Di conseguenza per ogni punto del piano delle fasi passa una e una sola orbita.

1.6 Punti di equilibrio, stabilità

Un punto di equilibrio del piano delle fasi è un punto (q_e, v_e) tale che la coppia di funzioni data da $\{(q(t) = q_e, v(t) = v_e)$ per ogni $t\}$ è una soluzione del sistema

sistema autonomo (1.37). In virtù della forma della seconda equazione di sistema autonomo (1.37), si ha immediatamente $v_e = 0$, mentre q_e deve essere una soluzione dell'equazione (non più differenziale) $f(q_e, 0) = 0$. Chiameremo q_e una “configurazione di equilibrio”.

Come abbiamo visto nelle precedenti sezioni, nel caso dell'equazione $\ddot{q} = f(q)$ una configurazione di equilibrio q_e è un punto critico della funzione $V(q)$. Abbiamo anche osservato che i minimi (isolati) della V sono punti di equilibrio “stabile”. Vogliamo ora precisare questo concetto introducendo la definizione di *stabilità secondo Lyapunov*.¹⁷

La definizione si applica in generale ai punti di equilibrio di un sistema di n equazioni differenziali in n incognite, o equazione differenziale in \mathbf{R}^n , e quindi la daremo direttamente in questo caso.

Prendiamo quindi un'equazione differenziale “vettoriale”, limitandoci al caso autonomo:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}), \quad (1.38) \quad \boxed{\mathbf{X}}$$

dove $\mathbf{X} : \mathbf{R} \ni t \rightarrow \mathbf{X}(t) \in \mathbf{R}^n$ è la funzione vettoriale incognita e $\mathbf{F} : \mathbf{R}^n \ni \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^n$ è una funzione da \mathbf{R}^n in \mathbf{R}^n . In seguito indicheremo con $\mathbf{X}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ la posizione al tempo t della soluzione che al tempo t_0 occupava la posizione \mathbf{x}_0 (in altri termini la soluzione di (1.38) corrispondente ai dati iniziali $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{x}_0$).

Ancora una volta un punto di equilibrio, è un vettore di $\mathbf{x}_e \in \mathbf{R}^n$ tale che la funzione $\{\mathbf{X}(t) = \mathbf{x}_e$ per ogni $t\}$ è soluzione di (1.38). E' immediato constatare che i punti di equilibrio sono tutti e soli quei vettori che soddisfano il sistema di equazioni

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_e) = \mathbf{0}. \quad (1.39) \quad \boxed{\mathbf{x}_e}$$

Definizione:¹⁸ *Un punto di equilibrio \mathbf{x}_e si dice stabile se : per ogni t_0 e per ogni $r > 0$, esiste un $r_0 > 0$ tale che sia verificata la disuguaglianza*

$$\|\mathbf{X}(t; \mathbf{x}_0, t_0) - \mathbf{x}_e\| < r, \quad (1.40)$$

per ogni $t > t_0$ e per tutti i dati iniziali \mathbf{x}_0 che soddisfano

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| < r_0. \quad (1.41)$$

1.6.1 Il criterio di Lyapunov

Una condizione sufficiente per stabilire se una posizione di equilibrio è stabile è data dal seguente teorema, sempre dovuto a Lyapunov.

Teorema: *Se una posizione di equilibrio \mathbf{x}_e ammette una funzione di Lyapunov, allora è stabile*

Ovviamente per dar senso al teorema bisogna definire cosa sia una *funzione di Lyapunov*.

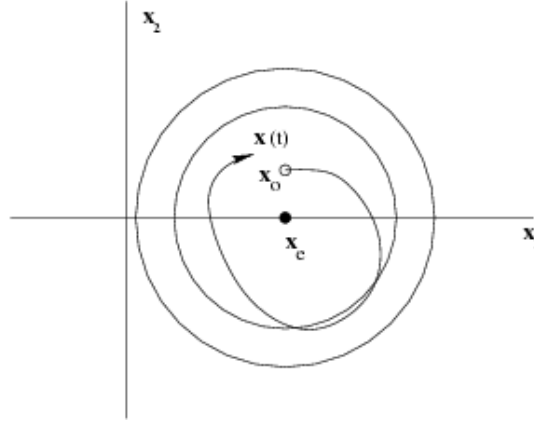
Definizione: *Una funzione Λ definita in un intorno $U_{\mathbf{x}_e}$ del punto \mathbf{x}_e , si dice una funzione di Lyapunov per il punto di equilibrio \mathbf{x}_e se :*

1. $\Lambda : U_{\mathbf{x}_e} \rightarrow \mathbf{R}$ è una funzione di classe C^1 ;

¹⁷Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, matematico russo, 1857-1918

¹⁸Si noti la somiglianza tra questa definizione e la definizione “ ϵ - δ ” di limite.

Figura 1.4: Stabilità alla Lyapunov



Lyap

2. $\Lambda(\mathbf{x}_e) = 0$ e $\Lambda(\mathbf{x}) > 0$ per ogni $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_e$;
3. $\nabla\Lambda(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) \leq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in U_{\mathbf{x}_e}$.

Questa definizione¹⁹ necessita di qualche commento. A parte la richiesta “tecnica” di regolarità, la condizione 2) ci dice che la funzione Λ ha un minimo isolato²⁰ nel punto di equilibrio, mentre la terza condizione implica che la funzione $\Lambda(\mathbf{x}(t))$, ottenuta componendo $\Lambda(\mathbf{x})$ con una soluzione $\mathbf{x}(t)$, è una soluzione di (1.36), è una funzione decrescente di t : infatti si ha

$$\frac{d}{dt}\Lambda(\mathbf{x}(t)) = \nabla\Lambda(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \leq 0. \quad (1.42) \quad \text{dilambda}$$

Dimostrazione: Scegliamo²¹ un numero $R > 0$ e sia $B(R)$ la sfera, aperta, di centro \mathbf{x}_e e di raggio R . Sia inoltre $\lambda = \min_{\partial B(R)} \Lambda(\mathbf{x})$ il valore minimo assunto dalla funzione Λ sul bordo questa sfera; per le nostre ipotesi si ha $\lambda > 0$.

Sia $A(\lambda/2)$ l’intorno del punto di equilibrio \mathbf{x}_e in cui vale la disuguaglianza $\Lambda(\mathbf{x}) < \lambda/2$. Questo insieme non è vuoto poiché $\Lambda(\mathbf{x}_e) = 0$ e la sua chiusura è contenuta nell’insieme aperto $B(R)$ (in particolare è separato dal bordo di $B(R)$).

Prendiamo ora un $r > 0$ tale che la sfera $B(r)$ di centro \mathbf{x}_e e di raggio r sia contenuta in $A(\lambda/2)$: la coppia di valori R e r soddisfa le condizioni della definizione di equilibrio stabile secondo Lyapunov. Infatti se prendiamo una condizione iniziale \mathbf{x}_0 contenuta in $B(r)$, abbiamo che $\Lambda(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)) \leq \Lambda(\mathbf{x}_0)$, e quindi il punto $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ deve appartenere a $A(\lambda/2)$, e di conseguenza a $B(R)$, per ogni $t > t_0$, che prova il teorema.

¹⁹Con il simbolo ∇ si indica l’operatore gradiente, quindi $\nabla\Lambda(\mathbf{x}) = (\frac{\partial\Lambda}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\Lambda}{\partial x_n})$

²⁰Un punto \mathbf{x} è un minimo isolato per una funzione f se esiste un intorno di U di \mathbf{x} tale che $f(\mathbf{y}) > f(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{y} \in U$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$.

²¹ R andrà scelto in modo che $B(R) \subset U_{\mathbf{x}_e}$

1.6.2 Asintotica stabilità

Se \mathbf{x}_e , oltre a essere un punto di equilibrio stabile, soddisfa la seguente condizione:

- esiste un intorno U di \mathbf{x}_e tale che per ogni t_0 e per ogni $\mathbf{x}_0 \in U$ si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{x}_e$$

la posizione si dice di equilibrio *asintoticamente stabile*.

Anche in questo caso abbiamo un criterio sufficiente per la asintotica stabilità; se nella terza condizione per la funzione di Lyapunov sostituiamo il segno \leq con la disuguaglianza stretta $<$, che deve valere per tutti gli \mathbf{x} con l'eccezione di \mathbf{x}_e (dove ovviamente abbiamo il segno $=$ poiché sia F che $\nabla\Lambda$ si annullano), allora la posizione di equilibrio è asintoticamente stabile.

Vediamo la dimostrazione di questo criterio.

Per prima cosa osserviamo che \mathbf{x}_e è una posizione di equilibrio stabile: dalla stabilità segue che possiamo scegliere due costanti positive R e r_0 in modo che tutte le soluzioni con dato iniziale in $B_{\mathbf{x}_e}(r_0)$ siano contenute in $B_{\mathbf{x}_e}(R)$ per tutti i tempi successivi al tempo iniziale. Sia $\mathbf{x}(t)$ una tale soluzione. Ne segue che esiste una successione t_n divergente per cui la successione $\mathbf{x}(t_n)$ converge a un punto $\bar{\mathbf{x}} \in \overline{B_{\mathbf{x}_e}(R)}$ per $n \rightarrow \infty$. Sia $\lambda = \Lambda(\bar{\mathbf{x}})$. Ma la funzione $\Lambda(\mathbf{x}(t))$ è una funzione strettamente decrescente quindi abbiamo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Lambda(\mathbf{x}(t)) = \lambda.$$

Se $\lambda = 0$, allora deve essere necessariamente valere $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e$ poiché questo è l'unico punto in cui Λ si annulla.

Se supponiamo che $\lambda > 0$ allora esiste t_λ per cui $\Lambda(\mathbf{x}(t)) > \lambda/2$ per ogni $t > t_\lambda$. Questo implica che esiste $\delta > 0$ tale che $\mathbf{x}(t) \notin B_{\mathbf{x}_e}(\delta)$ per $t > t_\lambda$. Sia $\lambda' = \max \nabla\Lambda(\mathbf{x}) \cdot F(\mathbf{x})$ per $\mathbf{x} \in B_{\mathbf{x}_e}(R) \setminus B_{\mathbf{x}_e}(\delta)$; dalla nostra ipotesi abbiamo che $\lambda' < 0$ e quindi $\frac{dt}{dt} \Lambda(\mathbf{x}(t)) \leq \lambda' < 0$ per tutti i $t > t_\lambda$, contro il fatto che $\Lambda(\mathbf{x}(t)) \rightarrow \lambda$, che conclude la dimostrazione.

Un criterio sufficiente per l'asintotica stabilità è dato dal “teorema di Lyapunov” sulla *stabilità linearizzata*:

Teorema 1.6.1 *Sia \mathbf{x}_e un punto di equilibrio per il sistema*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

e sia $A = (a_j^i)$ la matrice delle derivate parziali delle componenti di \mathbf{F} calcolate in \mathbf{x}_e , ovvero $a_j^i = \frac{\partial F^i}{\partial x^j}(\mathbf{x}_e)$. Se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa, la posizione di equilibrio è asintoticamente stabile. Più precisamente esiste un numero positivo δ tale che per ogni $\mathbf{x}_0 \in B_{\mathbf{x}_e}(\delta)$ sia ha

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_e\| < a \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| e^{-\alpha t}$$

con a e α costanti indipendenti da x_0 .

La dimostrazione di questo teorema è piuttosto complessa (ma non specialmente “difficile”) e viene omessa: si può trovare in molti testi sulle equazioni differenziali ordinarie²².

²²Si veda p.e. L.S. Pontrjagin “Ordinary differential equations”, Reading (Mass.), Addison-Wesley, 1962.

1.6.3 I sistemi conservativi

Il criterio di Dirichlet

Torniamo alla nostra equazione $\ddot{q} = f(q)$, o meglio al sistema equivalente

$$\begin{cases} \dot{q} = v \\ \dot{v} = f(q) \end{cases} \quad (1.43) \quad \boxed{\text{sistema2}}$$

In accordo con quanto detto nel paragrafo precedente, un punto di equilibrio è caratterizzato da $v = 0$ e da un valore q_e tale che $f(q_e) = 0$. Ricordiamo anche la definizione di “energia potenziale”

$$V(q) = -U(q) = - \int_{q_0}^q f(\eta) d\eta, \quad (1.44) \quad \boxed{\text{enepot}}$$

e la legge di “conservazione dell’energia” che scriviamo nella forma

$$e(q, v) = \frac{1}{2}v^2 + V(q) - E = 0. \quad (1.45) \quad \boxed{\text{cosene}}$$

A questo punto possiamo enunciare il seguente

Criterio di Dirichlet: *Una configurazione di equilibrio q_e in cui si realizza un minimo isolato dell’energia potenziale è stabile secondo Lyapunov.*

La dimostrazione è elementare, basta far vedere che la funzione $e(q, v)$ è una funzione di Lyapunov per il punto di equilibrio $(q_e, 0)$ se q_e è tale che $V(q) > V(q_e)$ per ogni $q \neq q_e$ in un intorno di q_e (i dettagli della verifica sono lasciati per esercizio).

Sistemi multidimensionali

Quello che abbiamo visto per un’equazione scalare può essere generalizzato al caso vettoriale. Supponiamo di avere un’equazione

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \quad (1.46) \quad \boxed{\text{cons.1}}$$

dove $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ e la funzione incognita $\mathbf{q} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$. Diremo che il sistema è *conservativo* se la funzione \mathbf{f} è il gradiente di una funzione scalare $-V(\mathbf{q})$, ovvero

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = -\nabla V(\mathbf{q}). \quad (1.47) \quad \boxed{\text{cons.2}}$$

Anche in questo caso è facile dimostrare che la quantità (scalare)

$$h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^2 + V(\mathbf{q}) \quad (1.48)$$

è un integrale primo, ovvero che la sua derivata lungo la soluzioni è nulla (basta moltiplicare scalarmente ^(1.46) per $\dot{\mathbf{q}}$ e integrare).

Come conseguenza possiamo enunciare il principio di Dirichlet anche per i sistemi conservativi multidimensionali: *se il punto \mathbf{q}_e è un minimo isolato per la funzione $V(\mathbf{q})$ allora $(\mathbf{q}_e, \mathbf{0})$ è un punto di equilibrio stabile (con $\mathbf{0}$ si indica il vettore nullo di \mathbf{R}^n).*

1.7 Esempi

L'oscillatore armonico

E' l'esempio più importante, per due motivi. Prima di tutto a questa equazione differenziale si riconducono diversi modelli fisici, sia meccanici che elettromagnetici. La sua più semplice derivazione è l'equazione di moto di un punto materiale attirato da una forza elastica ideale verso un punto fisso.

Questa equazione poi ricompare dall'equazione di moto anche nel caso che la forza non dipenda linearmente dallo spostamento, quando si effettua la procedura di linearizzazione attorno ai punti di equilibrio stabile.

Nel caso dal modello *punto materiale - molla ideale*, abbiamo l'equazione di moto

$$m\ddot{x} = -Kx \quad (1.49)$$

dove m è la massa del punto, e K la costante elastica. Riscriveremo questa equazione come

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0, \quad (1.50) \quad \text{armonico}$$

dove $\omega^2 = K/m$.

L'equazione (1.50) ammette come soluzione generale la famiglia di funzioni

$$q(t) = A \cos(\omega t + \beta). \quad (1.51) \quad \text{generale armonico}$$

Le due costanti arbitrarie A e β sono dette rispettivamente l'*ampiezza* e la *fase* della soluzione, mentre la costante $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ è detta *frequenza*.

Indipendentemente dal fatto che si sappia risolvere questa equazione e anche "leggere" le sue soluzioni, vediamo quali sono le informazioni che in questo caso possiamo ricavare dall'analisi qualitativa.

L'integrale primo dell'energia prende la forma

$$\frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{\omega^2}{2}q^2 = E, \quad (1.52) \quad \text{armonicoE}$$

quindi il moto si svolge negli intervalli caratterizzati dalla disuguaglianza

$$E \geq \frac{\omega^2}{2}q^2. \quad (1.53) \quad \text{armonico3}$$

Di conseguenza i moti, di qualunque ampiezza essi siano, sono sempre periodici.

Un'altra osservazione: dalla formula (1.53) ^{Periodo}abbiamo

$$T = 2 \int_{\frac{\sqrt{2E}}{\omega}}^{-\frac{\sqrt{2E}}{\omega}} \frac{dq}{\sqrt{2E - \omega^2 q^2}}. \quad (1.54) \quad \text{periodo armonico}$$

da cui, con il cambiamento di variabili $\eta = \frac{\omega q}{\sqrt{2E}}$, si ottiene

$$T = 2 \int_1^{-1} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}}. \quad (1.55) \quad \text{periodo uguale}$$

che ci dice che *tutti i moti hanno lo stesso periodo*, indipendentemente dal valore dell'energia (ovvero delle condizioni iniziali).²³

Infine osserviamo che la configurazione di equilibrio è un minimo assoluto, isolato, per l'energia potenziale, e quindi è un equilibrio stabile.

²³Questo fatto è ovvio se si guarda la forma della soluzione generale (1.51); è importante notare però che il risultato è stato ottenuto senza tirare in ballo le funzioni trigonometriche. generale armonico

Il pendolo semplice

Per pendolo semplice si intende il modello matematico di un pendolo reale ottenuto con le seguenti assunzioni: il pendolo ruota senza attrito attorno a un asse orizzontale; tutto il peso del sistema si può ritenere concentrato in un punto materiale di massa m posto a distanza l dall'asse. Lo stesso modello può anche rappresentare un punto che si muove senza attrito su una guida circolare posta su un piano verticale.

Prendendo un sistema di riferimento centrato nel punto di sospensione e con l'asse delle z diretto come la verticale discendente e l'asse delle x sul piano del pendolo, la posizione del pendolo è univocamente determinata dalla conoscenza dell'angolo (orientato) ϑ che il pendolo forma con l'asse delle z .

L'equazione di moto può quindi scriversi in termini di questo angolo:

$$ml\ddot{\vartheta} + mg \sin \vartheta = 0, \quad (1.56)$$

ovvero

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{l} \sin \vartheta = 0, \quad (1.57)$$

pendolo

(nota: [\(1.57\)](#) ci dice immediatamente che il moto del pendolo non dipende dalla sua massa ma solo dalla sua lunghezza)

L'equazione [\(1.57\)](#) può essere integrata usando l'integrale dell' "energia"

$$\frac{1}{2} \dot{\vartheta}^2 - \frac{g}{l} \cos \vartheta = E, \quad (1.58)$$

enependolo

che ci conduce alla soluzione nella forma di integrali ellittici [\(1.29\)](#).

L'analisi qualitativa tramite la disuguaglianza

$$E \geq -\frac{g}{l} \cos \vartheta, \quad (1.59)$$

permette comunque di ottenere molte informazioni sulla soluzione.

Si osserva subito che in questo caso esistono sia moti periodici che moti monotoni (ciò con $\dot{\vartheta}$ sempre dello stesso segno). Bisogna tuttavia notare che per la struttura del problema anche un moto con la ϑ monotona genera tuttavia un moto periodico del pendolo a causa della periodicità della rappresentazione della posizione del punto in funzione della variabile angolare.

Quanto alla stabilità delle configurazioni di equilibrio, si ha che $\vartheta = 0$ è una posizione di equilibrio stabile, mentre $\vartheta = \pi$ è una posizione di equilibrio instabile.

Nel caso del pendolo, due consecutive posizioni di equilibrio instabile (che differiscano tra loro per 2π e quindi sono "fisicamente" la stessa posizione) si trovano allo stesso livello di energia. Esiste quindi una soluzione "separatrice" che le congiunge.

1.8 I potenziali isocroni

Abbiamo visto che le oscillazioni di un sistema soggetto a un potenziale attrattivo quadratico

$$U_2(q) = -\frac{K}{2} q^2 \quad (1.60)$$

quadro

(oscillatore armonico) sono isocrone.

Vogliamo ora dimostrare che (I.60) è, sostanzialmente, l'unico potenziale che possiede questa proprietà. In altri termini dimostriamo il seguente

Teorema 1.8.1 *Se tutti i moti che si svolgono sotto l'azione di un potenziale $U(q)$, simmetrico rispetto al suo massimo, sono periodici e isocroni, allora esistono $k > 0$, q_0 e U_0 tali che il potenziale ha la forma*

$$U(q) = -\frac{k}{2}(q - q_0)^2 + U_0 \quad (1.61) \quad \boxed{\text{quadro2}}$$

La costante U_0 è introdotta solo per ragioni di completezza e possiamo sopprimerla senza perdere di generalità. Analogamente, con un'ovvia traslazione delle coordinate, possiamo anche assumere che $q_0 = 0$.

Possiamo quindi limitarci a energie potenziali $V(q) = -U(q)$ che soddisfino

$$V(0) = 0. \quad (1.62) \quad \boxed{\text{a1}}$$

L'ipotesi di simmetria del potenziale significa che l'energia potenziale è una funzione pari, ovvero

$$V(q) = V(-q). \quad (1.63) \quad \boxed{\text{a4}}$$

(vedremo, alla fine della dimostrazione, cosa cambia quando togliamo questa limitazione).

Possiamo inoltre assumere che

$$q \frac{dV}{dq}(q) > 0, \quad (1.64) \quad \boxed{\text{a2}}$$

che implica che l'origine $q = 0$ è un punto di minimo isolato per l'energia potenziale, e inoltre che valga

$$\lim_{|q| \rightarrow \infty} V(q) = +\infty \quad (1.65) \quad \boxed{\text{a3}}$$

Infatti, se così non fosse, il sistema ammetterebbe o orbite illimitate, o orbite limitate non periodiche (dimostrarlo).

*Dimostrazione*²⁴: Fissiamo un livello di energia $E > 0$ e denotiamo con $q(E)$ la soluzione positiva di $V(q) = E$. Ne segue che, in virtù dell'ipotesi fatte, e in particolare della (I.63), il periodo del moto è dato da

$$T(E) = 4 \int_0^{q(E)} \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(q))}}. \quad (1.66) \quad \boxed{\text{peri}}$$

La funzione V è una funzione crescente di q per $q > 0$, e quindi possiamo invertirla. Sia $v \rightarrow Q(v)$ la funzione inversa di $q \rightarrow V(q)$. Possiamo cambiare coordinate in (I.66) ponendo $q = Q(v)$, ottenendo

$$T(E) = 4 \int_0^E \frac{Q'(v) dv}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - v)}}, \quad (1.67) \quad \boxed{\text{peri2}}$$

²⁴La dimostrazione è ripresa, nelle sue linee generali, da G. Gallavotti, *Meccanica elementare*, Boringheri, Torino 1980

dove Q' indica la derivata di Q rispetto a v . Notiamo che la funzione $T(E)$ in (I.67) è ora definita come una “trasformata” della funzione Q tramite la trasformazione integrale che manda la funzione $g(v)$ nella funzione $f(E) = \mathcal{T}g(E)$ definita da

$$f(E) = \mathcal{T}g(E) = 4 \int_0^E \frac{g'(v) dv}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-v)}}, \quad (1.68) \quad \boxed{\text{trasf}}$$

(attenzione, nella formula g' indica la derivata di g rispetto a v). La trasformazione \mathcal{T} definita da (I.68) è invertibile, cioè possiamo ricavare la funzione g dalla f tramite la seguente formula di inversione

$$g(v) = \mathcal{T}^{-1}f(v) = \frac{1}{4\pi} \int_0^v \frac{f(E) dE}{\sqrt{\frac{m}{2}(v-E)}}, \quad (1.69) \quad \boxed{\text{inver}}$$

La dimostrazione della formula di inversione (I.69) è piuttosto semplice e si basa sul seguente “trucco”: moltiplichiamo la (I.68) per $1/\sqrt{b-E}$, dove $b > 0$ è un numero qualsiasi, e integriamo tra 0 e b rispetto a E . Si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{f(E) dE}{\sqrt{b-E}} &= 4\sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^b dE \int_0^E \frac{g'(v) dv}{\sqrt{(E-v)(b-E)}} \\ &= 4\sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^b g'(v) dv \left(\int_v^b \frac{dE}{\sqrt{(E-v)(b-E)}} \right), \end{aligned} \quad (1.70) \quad \boxed{\text{trucco}}$$

(attenzione allo scambio nell'ordine di integrazione). Basta ora osservare che l'integrale tra parentesi nella (I.70) si può calcolare esplicitamente (fare il calcolo!) e vale π qualunque siano i valori di b e v . La (I.69) segue immediatamente. Abbiamo quindi²⁵

$$Q(v) = \frac{1}{4\pi} \int_0^v \frac{T(E) dE}{\sqrt{\frac{m}{2}(v-E)}}, \quad (1.73) \quad \boxed{\text{peri4}}$$

Se $T(E) = T$ è una costante indipendente dal livello dell'energia, dalla (I.73) otteniamo immediatamente

$$Q(v) = \frac{T}{4\pi} \sqrt{\frac{2}{m}} 2\sqrt{v}, \quad (1.74) \quad \boxed{\text{peri5}}$$

ovvero

$$V(q) = \frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 q^2, \quad (1.75) \quad \boxed{\text{peri6}}$$

²⁵La (I.73) è un caso particolare dell'equazione di Abel

$$\phi(t) = \int_0^t \frac{\psi(\tau) d\tau}{\sqrt{(t-\tau)}} \quad (1.71) \quad \boxed{\text{abel1}}$$

la cui soluzione è data da

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\phi(0)}{t^{1/2}} + \int_0^t \frac{\phi'(\tau) d\tau}{\sqrt{(t-\tau)}} \right) \quad (1.72) \quad \boxed{\text{abel2}}$$

si veda J.R. Cannon, *The one-dimensional heat equation*, Addison-Wesley, Menlo Park, CA, 1984.

Notiamo che nel vostro calcolo si è fatto il cammino al contrario, passando dalla (I.72) alla (I.71).

Possiamo ora vedere cosa succede se eliminiamo l'ipotesi ^{la4}(1.63). In questo caso il periodo è dato da

$$T(E) = 2 \int_{q_-(E)}^{q_+(E)} \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(q))}}, \quad (1.76) \quad \text{periskew}$$

dove $q_-(E)$, $q_+(E)$ sono le due radici dei $E = V(q)$. Si può effettuare come prima il calcolo dopo aver spezzato ^{periskew}(1.76) nei due integrali tra $q_-(E)$ e 0 e tra 0 e $q_+(E)$, ottenendo

$$Q_+(v) - Q_-(v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^v \frac{T(E) dE}{\sqrt{\frac{m}{2}(v - E)}}, \quad (1.77) \quad \text{peri7}$$

Quindi abbiamo infinite energie potenziali non simmetriche isocrone, ma ciascuna di esse è ottenuta “deformando” un'energia della forma ^{perio6}(1.75) in modo da mantenere inalterata la lunghezza dell'intervallo tra le radici di $V(q) = E$.

1.8.1 Limite del periodo per $E \rightarrow 0$

Supponiamo ora di avere un potenziale $U(q)$ con un massimo isolato in $q_0 = 0$ (scegliamo ancora le coordinate in modo da avere l'origine nella posizione di equilibrio q_0 e assumiamo anche $U(0) = 0$).

Il periodo di oscillazione delle soluzioni attorno a $q = 0$ dipenderà dal livello di energia E .

Un'importante conseguenza della formula ^{perio4}(1.73) è la possibilità di legare il limite del periodo quando $E \rightarrow 0$ (il livello di energia della posizione di equilibrio) con il periodo dell'equazione delle piccole oscillazioni.

Teorema 1.8.2 *Sia $U(q)$ un potenziale con un massimo $U(0) = 0$ nell'origine. Sia inoltre $U''(0) = -K > 0$. Sia $T(E)$ la funzione che esprime il periodo delle soluzioni dell'equazione di moto in funzione del livello di energia. Allora per $E \rightarrow 0$ si ha*

$$T(E) \rightarrow 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} \quad (1.78) \quad \text{peripo}$$

Dimostrazione: Faremo la dimostrazione assumendo che il limite esista.²⁶

Con le nostre ipotesi si ha $V(q) = \frac{K}{2}q^2 + o(q^2)$, ovvero $V(q)/q^2 = \frac{K}{2} + o(1)$. Ne segue che

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{Q(v)}{\sqrt{v}} = \sqrt{\frac{2}{K}}. \quad (1.79)$$

Dividiamo ora la ^{perio4}(1.73) per \sqrt{v} e passiamo al limite $v \rightarrow 0$. Poiché abbiamo supposto che il limite di $T(E)$ esista, il secondo membro tenderà a $\frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2}{m}} 2T(0^+)$ dove con $T(0^+)$ abbiamo indicato il limite (dimostrarlo), mentre il primo membro ha limite $\sqrt{\frac{2}{K}}$. Abbiamo quindi $T(0^+) = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$.

²⁶E' possibile, nelle ipotesi fatte su U , dimostrare che il periodo $T(E)$ è limitato superiormente per $E \rightarrow 0$ (p.e. maggiorando $T(E)$ con il periodo di un moto di potenziale $\frac{K}{4}(q^2 - q_+^2(E)) + E$, per E “piccole”. A questo punto basta far vedere che tutti i punti di accumulazione di $T(E)$ coincidono con il limite in ^{peripo}(1.78).

1.9 Sistemi lineari bidimensionali

Per lo studio dei sistemi di equazioni differenziali autonomi

$$\dot{\mathbf{X}} = F(\mathbf{X}) \quad (1.80)$$

è fondamentale la comprensione del caso lineare, cioè del caso in cui la funzione $F(\mathbf{X})$ è una funzione lineare.

Ci limiteremo al caso di sistemi bidimensionali, in quanto per essi è possibile scrivere delle formule generali per la soluzione ed è possibile visualizzare bene le soluzioni nel piano delle fasi.

Tuttavia il caso bidimensionale non è del tutto rappresentativo di cosa avviene per dimensioni superiori (già da $d = 3$). La principale ragione è di ordine topologico. Ricordiamo che per un sistema autonomo da ogni punto dello spazio delle fasi passa una e una sola orbita (in virtù del teorema di unicità e dell'invarianza temporale delle soluzioni). Questo implica che ogni orbita nel piano delle fasi ($d = 2$) divide il piano stesso in due regioni ("dentro" e "fuori" per un'orbita chiusa, "riva destra" e "riva sinistra" per una soluzione con orbita illimitata) che non possono essere connesse da una soluzione del sistema. Questo non è più vero già per $d = 3$.

Vediamo ora come si trova la soluzione di un sistema di equazioni differenziali della forma

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \quad (1.81) \quad \boxed{\text{sisbid_eq:1}}$$

che scriveremo in forma vettoriale

$$\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X} \quad (1.82) \quad \boxed{\text{sisbid_eq:2}}$$

dove A è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (1.83) \quad \boxed{\text{sisbid_eq:3}}$$

e \mathbf{X} il vettore

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.84) \quad \boxed{\text{sisbid_eq:4}}$$

Cerchiamo delle soluzioni nella forma

$$\mathbf{X}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{X}_\lambda \quad (1.85) \quad \boxed{\text{sisbid_eq:4.1}}$$

dove λ è un numero e \mathbf{X}_λ un vettore costante. E' immediato verificare che (1.85) fornisce una soluzione di (1.82) se e solo se λ e \mathbf{X}_λ sono rispettivamente un autovalore e un autovettore corrispondente a λ della matrice A . Infatti, sostituendo la (1.85) in (1.82), si ha

$$\lambda e^{\lambda t} \mathbf{X}_\lambda = e^{\lambda t} A \mathbf{X}_\lambda,$$

che è verificata per ogni t se e solo se

$$\lambda \mathbf{X}_\lambda = A \mathbf{X}_\lambda.$$

Supponiamo, per il momento, che $\det A \neq 0$. Dobbiamo distinguere quattro casi

1. la matrice A ha due autovalori reali distinti λ_1 e λ_2
2. la matrice A ha due autovalori reali coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2$ con molteplicità geometrica due²⁷
3. la matrice A ha due autovalori reali coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2$ con molteplicità geometrica uno
4. la matrice A ha due autovalori complessi coniugati $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$

I primi due casi sono simili: in entrambi la matrice ammette una base di autovettori \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 e la soluzione di (I.82) si scrive

$$\mathbf{X}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{X}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{X}_2 \quad (1.86) \quad \text{sisbid_eq:5}$$

dove C_1 e C_2 sono due costanti arbitrarie.

E' facile verificare che (I.86) fornisce, al variare delle costanti C_1 e C_2 , tutte le soluzioni dell'equazione (I.82). Per dimostrare ciò bisogna infatti far vedere che, per ogni condizione iniziale \mathbf{X}_0 , è possibile determinare le costanti C_1 e C_2 in modo che

$$\mathbf{X}(0) = C_1 \mathbf{X}_1 + C_2 \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_0 \quad (1.87) \quad \text{sisbid_eq:5.1}$$

Ma l'equazione (I.87) (per le incognite C_1 e C_2) ha sempre una e una sola soluzione poiché i vettori \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 sono una base.

Nel caso 3, sia \mathbf{X}_λ l'unico (a meno di multipli reali) autovettore corrispondente all'autovalore $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$. Indichiamo con \mathbf{Y} un vettore tale che $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = 0$. Avremo quindi

$$A\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X} \quad \text{e} \quad A\mathbf{Y} = a_1\mathbf{X} + \lambda\mathbf{Y} \quad (1.88) \quad \text{sisbid_eq:6}$$

Nota che a_1 è non nullo: infatti se fosse $a_1 = 0$, allora \mathbf{Y} sarebbe anch'esso un autovettore, linearmente indipendente con \mathbf{X} , contro l'ipotesi di molteplicità geometrica uno. Per capire perché la componente lungo \mathbf{Y} di $A\mathbf{Y}$ è proprio $\lambda\mathbf{Y}$ mettiamoci nel sistema di coordinate (ξ, η) della base $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$, (dove $\xi = 1$ e $\eta = 0$ sono le coordinate del vettore \mathbf{X} e $\xi = 0$ e $\eta = 1$ sono le coordinate del vettore \mathbf{Y} .) In questo sistema di coordinate la matrice A avrà come rappresentazione la matrice triangolare²⁸

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & a_1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (1.89) \quad \text{sisbid_eq:7}$$

Infatti la prima riga tiene conto del fatto che il vettore $(1, 0)$ in questo sistema di coordinate è l'autovettore corrispondente a λ ; il secondo λ sulla diagonale proviene dal fatto che $\det A = \lambda^2$.

In questo sistema di riferimento il sistema di equazioni differenziali (I.81) assume la forma

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \lambda\xi + a_1\eta \\ \dot{\eta} = \lambda\eta \end{cases} \quad (1.90) \quad \text{sisbid_eq:8}$$

Ora possiamo risolvere la seconda equazione e ottenere

$$\eta(t) = \eta_0 e^{\lambda t} \quad (1.91) \quad \text{sisbid_eq:9}$$

²⁷In questo caso la matrice è un multiplo della matrice identica.

²⁸Questa forma prende il nome di *forma canonica di Jordan* della matrice

e quindi sostituire $\eta(t)$ nella seconda equazione, che diventa

$$\dot{\xi} = \lambda\xi + a_1\eta_0 e^{\lambda t} \quad (1.92) \quad \text{sisbid_eq:10}$$

Questa è un'equazione lineare non omogenea in cui il termine noto è soluzione dell'equazione lineare omogenea associata. E' immediato verificare che la soluzione di (1.92) è data da

$$\xi(t) = \xi_0 e^{\lambda t} + a_1 \eta_0 t e^{\lambda t} \quad (1.93) \quad \text{sisbid_eq:11}$$

dove $\xi_0 = \xi(0)$ e $\eta_0 = \eta(0)$.

Prima di considerare il caso degli autovalori complessi coniugati, vediamo cosa succede nel caso che la matrice A abbia determinante nullo. Il fatto di avere determinante nullo implica che almeno un autovalore della matrice, diciamo λ_1 è nullo. Questo può essere il solo autovalore nullo, nel qual caso possiamo pensare al kernel di A come al sottospazio associato all'autovettore nullo e ricadiamo nel caso 1 degli autovalori reali distinti. Altrimenti, se $\lambda = 0$ è un autovettore doppio, abbiamo ancora due possibilità. La prima, banale, è che A sia la matrice nulla. Ovviamente la soluzione del sistema in questo caso è $x(t) \equiv x_0$ e $y(t) \equiv y_0$ (questo è un particolarissimo sottocaso del caso 2.) L'altra possibilità è che la molteplicità geometrica di $\lambda = 0$ sia uno. Questo è ancora una forma particolare del caso 3 che abbiamo già visto. Come esempio abbiamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Veniamo ora al caso degli autovalori complessi coniugati. Siano quindi $\alpha + i\beta$ e $\alpha - i\beta$ i due autovalori di A . Poiché sono due autovalori distinti ($\beta \neq 0$ ovviamente), ad essi corrispondano due autovettori linearmente indipendenti *una volta che si consideri la matrice A come matrice complessa 2×2* . Indichiamo con \mathbf{Z} l'autovettore associato a $\alpha + i\beta$: è immediato verificare se $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$, con \mathbf{X} e \mathbf{Y} vettori reali, allora il vettore $\bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{X} - i\mathbf{Y}$ è un autovettore associato all'autovettore $\alpha - i\beta$. Inoltre, analogamente a quanto succede nel caso reale, i due vettori \mathbf{Z} e $\bar{\mathbf{Z}}$ sono linearmente indipendenti (sul campo complesso). Questo implica che i vettori reali \mathbf{X} e \mathbf{Y} sono, al loro volta, linearmente indipendenti sul campo reale. Infatti, se così non fosse avremmo $\mathbf{Y} = \gamma\mathbf{X}$ (si può ovviamente assumere che $\mathbf{X} \neq 0$) da cui si ricava $\mathbf{X} + i\mathbf{Y} = (1 + i\gamma)\mathbf{X}$ e $\mathbf{X} - i\mathbf{Y} = (1 - i\gamma)\mathbf{X}$ e quindi $\mathbf{X} + i\mathbf{Y} = (1 - i\gamma)/(1 + i\gamma)(\mathbf{X} - i\mathbf{Y})$, in contrasto con l'indipendenza lineare (sui complessi) dei due autovettori di A .

Calcolando $A\mathbf{Z}$ si ottiene

$$A\mathbf{Z} = A(\mathbf{X} + i\mathbf{Y}) = (\alpha + i\beta)(\mathbf{X} + i\mathbf{Y}) = (\alpha\mathbf{X} - \beta\mathbf{Y}) + i(\alpha\mathbf{Y} + \beta\mathbf{X}) \quad (1.94)$$

da cui otteniamo

$$\begin{cases} A\mathbf{X} = \alpha\mathbf{X} - \beta\mathbf{Y} \\ A\mathbf{Y} = \beta\mathbf{X} + \alpha\mathbf{Y} \end{cases} \quad (1.95)$$

Riscriviamo ora la matrice A nel sistema di riferimento associato alla base $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$, ovvero nel sistema di coordinate (ξ, η) in cui \mathbf{X} sia il vettore (colonna) $(1, 0)$ e \mathbf{Y} il vettore (colonna) $(0, 1)$. In questo sistema la matrice A è rappresentata da

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}. \quad (1.96)$$

Di conseguenza, in questo sistema di coordinate, il sistema di equazioni differenziali (1.82) diventa (1.97)

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \alpha\xi + \beta\eta \\ \dot{\eta} = -\beta\xi + \alpha\eta \end{cases}$$

La soluzione di questo sistema diventa agevole passando alle coordinate polari adattate al sistema di riferimento (ξ, η) , ovvero al sistema di coordinate (ρ, θ) tale che $\xi = \rho \cos \theta$, $\eta = \rho \sin \theta$. Infatti, moltiplicando la prima equazione per ξ , la seconda per η e sommando otteniamo

$$\frac{d}{dt}(\xi^2 + \eta^2) = 2\alpha(\xi^2 + \eta^2) \quad \text{sisbid_eq:12}$$

ovvero

$$\frac{d\rho^2}{dt} = 2\alpha\rho^2 \quad \text{sisbid_eq:13}$$

che si integra immediatamente, ottenendo

$$\rho(t) = \rho_0 e^{\alpha t} \quad \text{sisbid_eq:14}$$

L'equazione per l'angolo θ si ottiene invece moltiplicando la prima equazione per η , la seconda per ξ e sottraendo. Si ottiene in questo modo

$$\dot{\xi}\eta - \dot{\eta}\xi = \beta(\xi^2 + \eta^2) \quad \text{sisbid_eq:15}$$

che possiamo riscrivere

$$\frac{\dot{\xi}\eta - \dot{\eta}\xi}{\xi^2 + \eta^2} = \beta \quad \text{sisbid_eq:16}$$

E' facile verificare che il primo membro della (1.102) è la derivata, cambiata di segno, della funzione $\theta(t) = \arctg(\eta/\xi)$. Quindi possiamo riscrivere questa equazione come

$$\frac{d\theta}{dt} = -\beta \quad \text{sisbid_eq:17}$$

e quindi ottenere

$$\theta(t) = -\beta t + \theta_0 \quad \text{sisbid_eq:18}$$

Possiamo ora tornare alle variabili originarie e scrivere la soluzione come

$$\begin{cases} \xi(t) = \rho_0 e^{\alpha t} \cos(-\beta t + \theta_0) \\ \eta(t) = \rho_0 e^{\alpha t} \sin(-\beta t + \theta_0) \end{cases} \quad \text{sisbid_eq:19}$$

dove i coefficienti ρ_0 e θ_0 sono legati alle condizioni iniziali da

$$\rho_0 = \sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}, \quad \theta_0 = \arctg \frac{\eta_0}{\xi_0}. \quad \text{sisbid_eq:20}$$

Esercizio Trovare le soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali corrispondenti alle seguenti scelte della matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.9.1 Moto armonico smorzato e forzato

Consideriamo ora un'equazione scalare del second'ordine lineare, non omogenea

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2x = f(t). \quad (1.107) \quad \boxed{\text{II ord.1}}$$

Analogamente a quanto avevamo visto per le equazione alle differenze, la soluzione generale di (I.107) si ottiene sommando una qualsiasi soluzione di (I.107) alla soluzione generale dell'equazione lineare omogenea

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2x = 0. \quad (1.108) \quad \boxed{\text{II ord.2}}$$

A sua volta la soluzione generale della (II ord.2) è la combinazione lineare di due soluzioni “fondamentali”, ovvero di due qualsiasi soluzioni *linearmente indipendenti*²⁹ tra loro.

La soluzione di (II ord.2) si può ricondurre alla tecnica di risoluzione per i sistemi introducendo la variabile

$$y = \dot{x}, \quad (1.109)$$

che trasforma l'equazione nel sistema del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -a_2x - a_1y \end{cases} \quad (1.110) \quad \boxed{\text{II ord.3}}$$

Si può anche procedere direttamente cercando soluzioni del tipo

$$x(t) = \exp(\lambda t). \quad (1.111) \quad \boxed{\text{II ord.4}}$$

E' immediato verificare che una funzione del tipo (II ord.4) è soluzione (reale o complessa) della (I.107) se e solo se λ è una radice del polinomio caratteristico

$$\rho^2 + a_1\rho + a_2 = 0, \quad (1.112) \quad \boxed{\text{II ord.5}}$$

ottenuto sostituendo le potenze dell'incognita ρ alle derivate della funzione. E' anche immediato verificare che il polinomio in (I.112) coincide con il polinomio caratteristico della matrice dei coefficienti del sistema (II ord.3).

Rinviando quindi per la teoria generale al caso dei sistemi, vediamo il caso particolare della soluzione della (II ord.1) nel caso in cui essa rappresenti l'equazione di un circuito LRC (o di un oscillatore armonico smorzato). Questo impone ai coefficienti a_1 e a_2 di essere entrambi positivi. Riscriviamo l'equazione nella forma

$$\ddot{x} + \nu\dot{x} + \omega^2x = a \cos(\omega_f t), \quad (1.113) \quad \boxed{\text{II ord.6}}$$

dove abbiamo scelto il termine forzante di tipo sinusoidale (non occorre introdurre una fase specifica per il termine forzante, basta “azzerare l'orologio” quando la forza raggiunge il suo massimo). Il coefficiente ν , proporzionale alla resistenza (o smorzamento viscoso) è una costante *non negativa*: il caso speciale $\nu = 0$ corrisponde a un circuito ideale senza resistenza.

Iniziamo quindi determinando la forma della soluzione generale dell'equazione omogenea associata ($a = 0$ in (I.113)).

²⁹Due, o più, funzioni si dicono linearmente indipendenti quando l'unica loro combinazione lineare a coefficienti costanti *identicamente nulla* è quella con tutti i coefficienti nulli.

Il polinomio caratteristico dell'equazione è

$$\rho^2 + \nu\rho + \omega^2 = 0, \quad (1.114) \quad \boxed{\text{II ord.7}}$$

da cui ricaviamo i valori delle radici

$$\rho = \frac{1}{2} \left(-\nu \pm \sqrt{\nu^2 - 4\omega^2} \right). \quad (1.115) \quad \boxed{\text{II ord.8}}$$

Se $\nu > 2\omega$, ovvero in caso di “forte” smorzamento, ^(II ord.8)(1.115) ha due radici reali, la soluzione generale dell'equazione omogenea è data da

$$x_G(t) = \exp\left(-\frac{\nu}{2}t\right) \left[C_1 \exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\nu^2 - 4\omega^2}t\right) + C_2 \exp\left(\sqrt{\nu^2 - 4\omega^2}t\right) \right]. \quad (1.116) \quad \boxed{\text{II ord.8.1}}$$

Nel caso $\nu = 2\omega$, il polinomio ha una radice doppia uguale a $\frac{\nu}{2}$. Si può verificare che questa radice ha, per il sistema equivalente, molteplicità geometrica uguale a uno (questo avviene sempre per le radici doppie di sistemi della forma ^(II ord.3)(1.110)).

La soluzione generale dell'equazione omogenea è data da

$$x_G(t) = \exp\left(-\frac{\nu}{2}t\right) [C_1 + C_2 t]. \quad (1.117) \quad \boxed{\text{II ord.9}}$$

Infine nel caso $\nu < 2\omega$, ovvero di “piccolo” smorzamento, le due radici sono complesse coniugate. La soluzione, in forma reale, è quindi data da

$$x_G(t) = \exp\left(-\frac{\nu}{2}t\right) \left[C_1 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\omega^2 - \nu^2}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{4\omega^2 - \nu^2}t\right) \right]. \quad (1.118) \quad \boxed{\text{II ord.10}}$$

Ci riferisce correntemente a quest'ultimo caso come al caso *periodico* in quanto la soluzione ha un comportamento periodico, ma di ampiezza smorzata dal fattore esponenziale.

Per contrapposizione, ci si riferisce al primo come al caso *aperiodico*.

Determiniamo ora la soluzione particolare di ^(II ord.6)(1.113). Cerchiamo la soluzione nella forma

$$x_P(t) = c_1 \sin(\omega_f t) + c_2 \cos(\omega_f t). \quad (1.119)$$

Sostituendo $x_P(t)$ nella ^(II ord.6)(1.113) otteniamo

$$\begin{aligned} \omega_f^2 [-c_1 \sin(\omega_f t) - c_2 \cos(\omega_f t)] + \nu\omega_f [c_1 \cos(\omega_f t) - c_2 \sin(\omega_f t)] \\ + \omega^2 [c_1 \sin(\omega_f t) + c_2 \cos(\omega_f t)] = a \cos(\omega_f t), \end{aligned} \quad (1.120)$$

che è soddisfatta se e solo se i coefficienti di $\cos(\omega_f t)$ e $\sin(\omega_f t)$ sono nulli, ovvero se i coefficienti c_1 e c_2 soddisfano il sistema

$$\begin{cases} (\omega^2 - \omega_f^2)c_1 - \nu\omega_f c_2 = 0 \\ \nu\omega_f c_1 + (\omega^2 - \omega_f^2)c_2 = a \end{cases} \quad (1.121) \quad \boxed{\text{II ord.11}}$$

Il sistema ^(II ord.11)(1.121) ha sempre soluzione eccettuato il caso in cui $\omega_f = \omega$ e $\nu = 0$, ovvero nel caso di un oscillatore non smorzato (circuito LC) a cui sia applicata una forzante della stessa frequenza delle oscillazioni liberi del sistema³⁰.

³⁰Questo fenomeno è detto battimento. La soluzione particolare è ora data da una costante che moltiplica la funzione $t \cos(\omega t)$, ovvero una oscillazione con ampiezza che cresce linearmente nel tempo.

Figura 1.5: Curve di risonanza, per diversi valori di ν , con $\omega = 2$

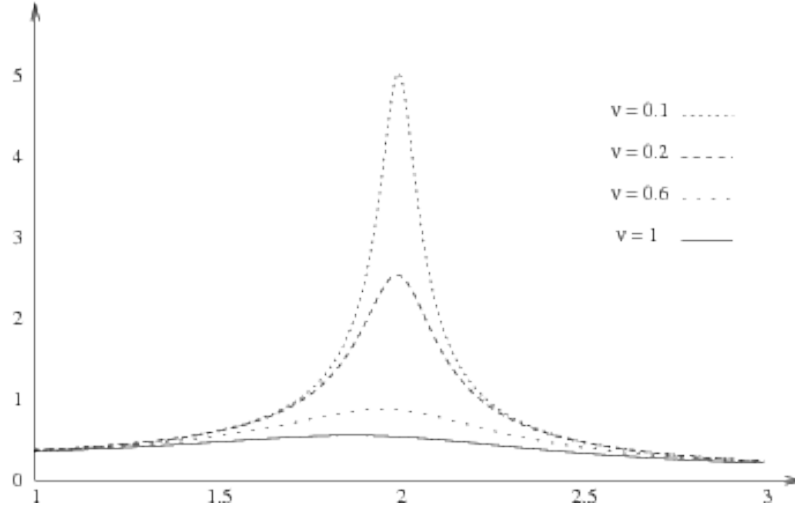


fig:risonanza

La soluzione di (I.121) è data da

$$c_1 = \frac{a\nu\omega_f}{\nu^2\omega_f^2 + (\omega^2 - \omega_f^2)^2} \quad (1.122)$$

$$c_2 = \frac{a(\omega^2 - \omega_f^2)}{\nu^2\omega_f^2 + (\omega^2 - \omega_f^2)^2} \quad (1.123)$$

da cui possiamo ricostruire la la soluzione particolare.

E' tuttavia più interessante riscrivere la soluzione particolare nella forma $A \cos(\omega_f t + \beta)$ mettendo in evidenza l'ampiezza e il ritardo di fase di questa soluzione. Abbiamo quindi

$$x_P(t) = \frac{a}{\sqrt{\nu^2\omega_f^2 + (\omega^2 - \omega_f^2)^2}} \cos\left(\omega_f t - \arctan\left(\frac{\nu\omega_f}{\omega^2 - \omega_f^2}\right)\right) \quad (1.124) \quad \text{II ord.12}$$

E' importante notare che la soluzione generale dell'equazione omogenea, che sommata a (I.124) ci fornisce la soluzione generale della (I.113), decade esponenzialmente a zero. Questo significa che dopo un tempo sufficientemente "lungo" (ma in realtà "breve" nella scala dei tempi in gioco³¹, e tempo più breve quanto ν è grande) la soluzione "osservabile" è data dalla soluzione particolare, indipendentemente dalla condizioni iniziali del moto.

Le figure (I.5) e (I.6) mostrano rispettivamente i grafici del rapporto tra l'ampiezza della soluzione e l'ampiezza del termine forzante e del ritardo di fase al variare della frequenza forzante ω_f per un valore fissato di ω e per diversi valori del coefficiente di smorzamento ν .

³¹Il tempo *caratteristico* del fenomeno è dato dal periodo dell'oscillazione forzante, ovvero $T = 2\pi/\omega_f$.

Figura 1.6: Ritardo di fase, per diversi valori di ν , con $\omega = 2$

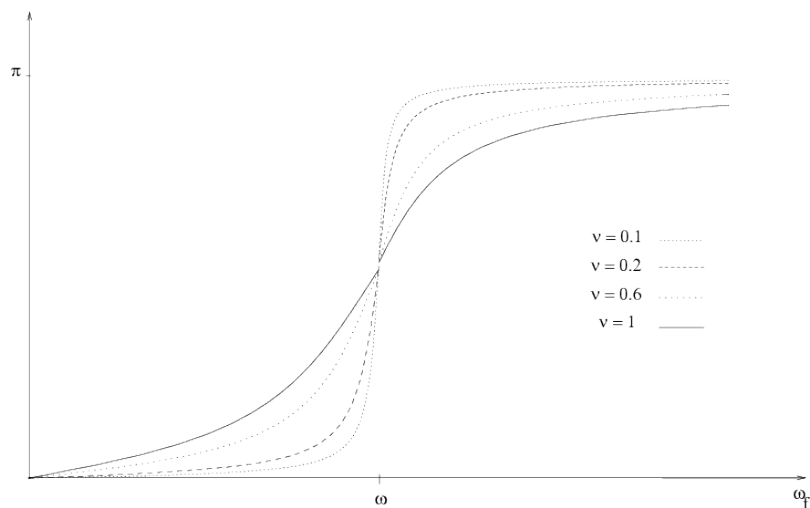


fig:ritardo

E' importante notare che il valore massimo di

$$\frac{1}{\sqrt{\nu^2 \omega_f^2 + (\omega^2 - \omega_f^2)^2}},$$

che viene assunto per $\omega_f = \sqrt{\omega^2 - \nu^2/2}$ (che è un numero reale se ν è sufficientemente piccolo), può superare 1 se è soddisfatta da disuguaglianza

$$1 > \nu^2 \omega_f^2 + (\omega^2 - \omega_f^2)^2,$$

che può essere soddisfatta se $\nu^2 \omega^2 < 1$. In questo caso l'ampiezza della "risposta" è maggiore di quella del termine forzante. In altre parole, il circuito funziona da *amplificatore* del "segnale" in ingresso dato dal termine forzante.

Capitolo 2

Cinematica dei sistemi rigidi

2.1 Introduzione

In questo capitolo descriveremo come si muove un corpo rigido nello spazio.

Lo scopo è duplice: da un lato vogliamo determinare la relazione fondamentale che lega le velocità di punti differenti che “partecipano di uno stesso moto rigido” (ovvero si muovono mantenendo inalterate le mutue distanze) rispetto a un *osservatore* fisso; dall’altro vogliamo trovare le relazioni che legano le osservazioni che *due* osservatori, in moto tra loro, fanno dei moti di altri “corpi” (punti o corpi rigidi). Quest’ultimo problema prende il nome di *cinematica relativa*.

Con l’espressione *osservatore* ci riferiamo a un sistema cartesiano ortogonale, con orientamento fissato, cioè nel quale sono determinati: un’origine, un’unità di misura per le lunghezze, tre assi ortogonali orientati (ovvero tra i quali si sia fissato un *ordine*, p.e. gli assi x , y e z disposti come i diti pollice, indice e medio della mano destra¹) e un *orologio* per misurare il tempo.

2.2 Moti rigidi

Sia quindi fissato un osservatore, che indicheremo con $\Sigma = (\Omega, (\xi, \eta, \zeta))$ e che chiameremo osservatore *fisso*² e studiamo il moto di un *sistema rigido* rispetto a questo osservatore.

Per prima cosa eliminiamo dalla nostra analisi il caso degenerare in cui tutti i punti del sistema siano allineati (o ci siano solo due punti): in questo caso i moti possibili sono tutti e soli quelli che può effettuare un sistema formato da due punti vincolati a mantenere invariata la loro distanza (vedremo questo caso quando tratteremo dei sistemi olonomi).

¹In questo caso diremo che il sistema di riferimento è *destrorso*; se scegliamo invece la disposizione delle prime tre dita della mano sinistra otterremo un riferimento *sinistrorso*. È importante notare che un riferimento destrorso e uno sinistrorso non possono essere sovrapposti mantenendo l’ordine degli assi.

²Non indichiamo mai esplicitamente la scelta dell’orologio per un osservatore. In questo paragrafo la scelta dell’orologio non è molto importante in quanto l’osservatore fisso è il solo che vede i punti in movimento. Dovremo tornare su questo problema nel caso della cinematica relativa.

Consideriamo quindi un sistema di punti collegati tra loro in modo da mantenere invariate le loro mutue distanze e che contenga almeno tre punti non allineati $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$.

A un tale sistema è possibile associare una terna cartesiana $S = (\mathbf{O}, (x, y, z))$ di versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, in modo tale che ogni punto del sistema abbia coordinate $(x, y, z)^T$ costanti nel riferimento S .

Un modo per costruire questo riferimento può essere il seguente: Poniamo $\mathbf{O} = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{i} = \text{vers}(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)$, $\mathbf{j} = \text{vers}(\mathbf{i} \wedge (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1))$ e infine $\mathbf{k} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$.

Nota che una volta associata una terna, che diremo solidale, il numero di punti di cui è composto il sistema non ha più importanza: ogni punto viene ora collocato nello spazio una volta che siano note le sue coordinate nella terna solidale, che sono costanti, e la posizione nello spazio della terna stessa.³

In altre parole il moto di un sistema rigido nello spazio è equivalente al moto di una terna di riferimento.

Ovviamente possiamo parlare di moto solo in presenza di un osservatore, ovvero di un sistema di riferimento che consideriamo convenzionalmente come fisso e che abbiamo indicato $\Sigma = (\Omega, (\xi, \eta, \zeta))$. Indicheremo con $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ i versori degli assi del sistema di riferimento Σ .

Ricapitolando: poiché i punti che partecipano al moto rigido hanno coordinate $(x, y, z)^T$ costanti nel sistema di riferimento solidale, ci basta conoscere la posizione del sistema S rispetto al sistema Σ per localizzare ogni punto del sistema rigido in moto. Abbiamo quindi ridotto il problema del moto rigido al moto relativo di due sistemi di riferimento nello spazio euclideo tridimensionale, ovvero a situare ad ogni istante la terna mobile S rispetto alla terna fissa Σ .

A sua volta questo problema si scompone naturalmente nella localizzazione dell'origine della terna mobile rispetto alla terna fissa, e all'orientazione dei versori della terna mobile rispetto ai versori della terna fissa.

Dovremo quindi conoscere le tre coordinate in Σ , $(\xi_O, \eta_O, \zeta_O)^T$ (funzioni del tempo), dell'origine \mathbf{O} della terna S e le nove componenti dei versori $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ rispetto ai versori $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Le nove componenti dei versori sono però "vincolate" dalla condizione di ortonormalità del sistema di riferimento, ovvero dalle equazioni

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1, \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1, \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0, \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0, \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0. \quad (2.1)$$

rigidi:1

Com'è noto dal corso di geometria le mutue orientazioni dei versori di due riferimenti ortonormali sono parametrizzate dalle matrici ortogonali, ovvero da quelle matrici 3×3 che soddisfano alla condizione:

$$AA^T = I, \quad (2.2)$$

orto

che è un modo compatto per riscrivere le ^{rigidi:1}(2.1)⁴.

Poiché stiamo studiando moti continui dello spazio, possiamo escludere le matrici a determinante negativo (che rappresentano un moto rigido *più un ribaltamento speculare*: quest'ultimo infatti non è riconducibile con continuità, at-

³Questa semplice osservazione ha una conseguenza importante: la cinematica dei sistemi rigidi discreti e dei sistemi rigidi continui può essere descritta allo stesso modo.

⁴Si ricordi che se la matrice A , come assumeremo in seguito, è la matrice di cambiamento di coordinate dal sistema S al sistema Σ , le ^{rigidi:1}colonne di A sono le componenti in Σ dei vettori della base di S , da cui l'equivalenza delle ^{rigidi:1}(2.1) con ^{orto}(2.2).

traverso moti rigidi, all'identità, che, a sua volta, indica lo "stato di partenza"⁵ e limitarci alle matrici a determinante uguale a uno. Abbiamo quindi una parametrizzazione delle posizione di un sistema rigido S , relativamente a un altro sistema rigido Σ , tramite una coppia formata dal vettore $\mathbf{O} - \Omega = (\xi_O, \eta_O, \zeta_O)^T$ e dalla matrice A

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

dove con $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)^T$ si sono indicate le componenti di \mathbf{i} nel sistema di riferimento Σ (e similmente per \mathbf{j} e \mathbf{k}).

Le tre coordinate dell'origine del sistema mobile e le nove componenti della matrice di trasformazione individuano un "punto" in $\mathbf{R}^3 \times M^{3 \times 3} \equiv \mathbf{R}^9$. Tuttavia le nove componenti della matrice A sono vincolato a "muoversi" sulla sottovarietà determinata dalle equazioni (2.2) (o meglio nella componente connessa che soddisfa anche alla disequazione $\det A > 0$). Questo insieme, che ha la struttura di gruppo rispetto al prodotto tra matrici, si indica con la sigla $SO(3)$ dove 3 sta a indicare la dimensione della matrice (e quindi dello spazio su cui agisce come matrice di trasformazione), O sta per "ortogonale" e significa che le matrici devono soddisfare la (2.2) e infine S sta per "speciale" indicando che si prendono solo le matrici con determinante positivo.

Le equazioni (2.2), o equivalentemente le (2.1), formano un sistema di sei equazioni, algebriche di secondo grado, indipendenti tra loro⁶. Ne segue che l'insieme delle possibili "configurazioni" che un sistema di riferimento "mobile" può assumere rispetto a un sistema di riferimento "fisso" è parametrizzato dai punti dell'insieme $\mathbf{R}^3 \times SO(3)$, che risulta essere una varietà differenziabile di dimensione 6; per esprimere ciò si usa dire che un sistema rigido che si muove nello spazio ha *6 gradi di libertà*.

Nota: E' noto che il prodotto tra matrici **non** è commutativo, in generale date due matrici A e B si ha $AB \neq BA$: questo è vero anche per due matrici generiche di $SO(3)$. Come si interpreta ciò in termini di moti rigidi?

Siano ora $(x, y, z)^T$ le coordinate di un punto \mathbf{P} qualsiasi, solidale con il sistema di riferimento S , e $(\xi, \eta, \zeta)^T$ le corrispondenti coordinate nel riferimento Σ . Queste coordinate sono legate tra loro dalle trasformazioni

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_O \\ \eta_O \\ \zeta_O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (2.4) \quad \boxed{\text{trasforma}}$$

La (2.4) può ora essere derivata rispetto al tempo per ottenere la velocità di un punto solidale \mathbf{P} . Questa relazione, detta *formula fondamentale del moto*

⁵In altre parole, e in modo più formale: prendiamo la posizione a un certo istante come "configurazione di riferimento". Possiamo sempre orientare gli assi del sistema fisso in modo che questi coincidano con gli assi solidali. Avremo quindi $A(0) = \text{Id}$. La (2.2) ci dice che, al variare del tempo $A(t)$ può assumere solo i valori 1 e -1 . Ma il determinante è una funzione continua delle componenti della matrice, pensata come un elemento di $\mathbf{R}^{3 \times 3}$, quindi non può passare con continuità dal valore iniziale 1 al valore -1 .

⁶Le (2.2) sono in verità nove equazioni, ma tre sono necessariamente dipendenti dalle altre poiché il prodotto di una matrice per la sua trasposta è sempre una matrice simmetrica. La verifica che la (2.2) fornisce effettivamente sei equazioni indipendenti va fatta calcolando la matrice jacobiana delle nove (sei in realtà) equazioni scalari in funzione delle componenti a_{ij} della matrice e verificando che la matrice così ottenuta ha rango sei.

rigido, è la relazione che lega tra loro le velocità (rispetto a un osservatore “fisso” dato) dei differenti punti di un sistema rigido e permette di esprimere la velocità di ogni singolo punto solidale in funzione delle variazioni dei *sei parametri fondamentali del moto rigido*.

Nella ^{trasforma}(2.4) ci sono tre termini che dipendono dal tempo: le coordinate dei punti \mathbf{P} e \mathbf{O} nel sistema di riferimento fisso e le componenti della matrice A .

Deriviamo ora la ^{trasforma}(2.4).

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi_O \\ \eta_O \\ \zeta_O \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (2.5) \quad \boxed{\text{fonda1}}$$

La derivata a primo membro è la velocità del punto \mathbf{P} , così come la giudica Σ , e ugualmente la derivata di $(\xi_O, \eta_O, \zeta_O)^T$ è la velocità in Σ del punto \mathbf{O} .

Possiamo ora riscrivere la relazione ^{fonda1}(2.5) inserendo tra la derivata della matrice A e il vettore $(x, y, z)^T$ la matrice identità scritta nella forma $A^T A$ e abbiamo

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi_O \\ \eta_O \\ \zeta_O \end{pmatrix} + \left(\frac{dA}{dt} A^T \right) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (2.6) \quad \boxed{\text{fonda2}}$$

Il termine $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$ è il vettore di \mathbf{R}^3 delle componenti del vettore

geometrico $\mathbf{P} - \mathbf{O}$ espresse nel sistema di riferimento Σ (ovvero le differenze tra le coordinate di \mathbf{P} e quelle di \mathbf{O} calcolate da Σ). Osserviamo inoltre che se si sceglie un punto diverso da \mathbf{O} come origine del riferimento solidale (mantenendo però gli stessi versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) la matrice $(\frac{dA}{dt} A^T)$ che compare nella formula non cambia. Possiamo quindi dire che la distribuzione di velocità di tutti i punti di un sistema rigido si ottiene dalla formula ^{fonda2}(2.6) quando si conosca la velocità di un punto solidale e la matrice $(\frac{dA}{dt} A^T)$. Se avessimo fatto una diversa scelta del sistema di versori per il sistema fisso, la matrice $(\frac{dA}{dt} A^T)$ si sarebbe modificata con le consuete formule di cambiamento di coordinate tra *sistemi di riferimento ortonormali*.

Osserviamo infine una caratteristica fondamentale della matrice $\frac{dA}{dt}$. Derivando la relazione ^{orto}(2.2) si ha

$$\frac{dA}{dt} A^T + A \frac{dA^T}{dt} = \frac{dA}{dt} A^T + A \left(\frac{dA}{dt} \right)^T = 0. \quad (2.7) \quad \boxed{1}$$

Ricordando che $AB^T = (BA^T)^T$, possiamo riscrivere la ¹(2.7) come

$$\frac{dA}{dt} A^T = - \left(\frac{dA}{dt} A \right)^T, \quad (2.8) \quad \boxed{2}$$

ovvero la matrice $\frac{dA}{dt} A^T$ è una matrice antisimmetrica. Indichiamola con

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.9) \quad \square$$

e riscriviamo la ^{fonda2}(2.6) come

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\xi}_O \\ \dot{\eta}_O \\ \dot{\zeta}_O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_P \\ \eta_P \\ \zeta_P \end{pmatrix}, \quad (2.10) \quad \text{fonda3}$$

dove abbiamo indicato con $(\xi_P, \eta_P, \zeta_P)^T$ le componenti in Σ del vettore $\mathbf{P} - \mathbf{O}$.

Se introduciamo un vettore $\underline{\omega}$ di componenti $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$, è immediato verificare che il risultato del prodotto tra la matrice antisimmetrica e il vettore $(\xi_P, \eta_P, \zeta_P)^T$ nella ^{fonda3}(2.10) ha le stesse componenti del prodotto vettoriale $\underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})$. Possiamo quindi riscrivere la ^{fonda3}(2.10) nella notazione “vettoriale”

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{\mathbf{O}} + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \quad (2.11) \quad \text{fonda}$$

detta *formula fondamentale del moto rigido*. Il vettore $\underline{\omega}$ è detto *velocità angolare*.

Nota: La ^{fonda}(2.11) non è una relazione vettoriale nel senso che essa mantiene la sua forma solo per cambiamenti di coordinate ortogonali (cioè se solo se si passa da un sistema ortonormale a un altro sempre ortonormale); questo perché sia la definizione di $\underline{\omega}$ sia quella di prodotto vettoriale fanno intervenire la struttura metrica dello spazio euclideo, ovvero la definizione di ortogonalità, e l’orientazione, cioè l’ordine in cui si considerano i versori della terna. Spesso si usa l’espressione “pseudovettoriale” per riferirsi a relazioni che si conservano solo per trasformazioni ortogonali con determinante positivo.

La comparsa del vettore (o “pseudovettore”) $\underline{\omega}$ ha un che di artificioso. Tuttavia il suo significato cinematico può essere reso più chiaro.

Per semplificare la trattazione limitiamoci a moti in cui un punto del rigido (che faremo coincidere con \mathbf{O}) resti fisso: questi moti sono detti *precessioni*, e il punto che resta fisso durante il moto prende il nome di *polo* della precessione.

Se, come abbiamo fatto sopra, fissiamo due sistemi di riferimento S e Σ , avremo ancora una matrice ortogonale $A(t)$ dipendente dal tempo, che ci fornisce le coordinate in Σ in funzioni delle coordinate (costanti) dei punti del rigido nel sistema solidale S .

Consideriamo per iniziare il caso in cui il moto rigido sia una “rotazione uniforme” attorno a un asse fisso (per fissare le idee facciamolo coincidere con l’asse delle ζ nel sistema fisso e con l’asse delle z nel sistema solidale). In questo moto tutti i punti che giacciono sull’asse delle z sono fermi mentre gli altri punti descrivono delle circonferenze con centro sull’asse delle z e su piani a esso perpendicolari. Questa rotazione è uniforme se si descrivono angoli uguali in tempi uguali (nota che tutti i punti descrivono lo stesso angolo!): il rapporto tra l’angolo percorso (con segno) e il tempo impiegato è ciò che si dice “velocità angolare”: la matrice $A(t)$ associata a questo moto rigido ha la forma

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove ω è ora il rapporto (costante) che abbiamo chiamato velocità angolare. Se fissiamo un valore qualsiasi del tempo la trasformazione che porta il sistema dalla sua configurazione iniziale a quella occupata al tempo fissato si dice una “rotazione finita”.

È immediato verificare che il vettore velocità angolare associato al nostro moto dalla costruzione che ci ha portato alla (2.11) è dato da $(0, 0, \omega)$, ovvero ha per direzione l'asse di rotazione per modulo il rapporto tra angolo percorso e tempo di percorrenza e per verso quello delle z crescenti o decrescenti a seconda che la rotazione avvenga concordemente o non con l'orientazione degli assi (ovvero "portando l'asse positivo delle x su quello delle y o viceversa").

La generalizzazione al caso di una rotazione non uniforme è immediata.

Le rotazioni però non esauriscono tutti i possibili moti rigidi. Tuttavia se fissiamo un intervallo tempo e andiamo a vedere in quale configurazione si trova al tempo t un sistema rigido S che all'istante 0 coincideva con il sistema fisso Σ abbiamo il seguente risultato, noto come teorema di Eulero:

Teorema: *Ogni trasformazione rigida dello spazio euclideo tridimensionale che lascia un punto fisso è una rotazione finita attorno a un opportuno asse.*

Questo significa che, qualunque sia stato il moto rigido effettivamente svolto per assumere la configurazione finale, una intera retta di punti solidali è tornata ad occupare la posizione che occupava inizialmente. La differenza con una rotazione è che, mentre nella rotazione i punti dell'asse di rotazione stanno fermi durante tutto il moto, nel caso generale tutti i punti (escuso il polo della precessione) si muovono.

Tuttavia, poiché il teorema vale per un tempo qualsiasi, ad ogni istante del moto c'è una retta del sistema solidale i cui punti occupano la loro posizione iniziale. La differenza con la rotazione sta nel fatto che questa retta non è sempre la stessa al variare di T , e di conseguenza varia sia nel sistema fisso che in quello mobile. In altre parole: i punti (solidali) che sono tornati nella loro posizione iniziale al tempo t_1 non sono gli stessi che tornano al tempo t_2 , il che implica che la direzione di questa retta è cambiata nel sistema solidale. Inoltre è anche differente la posizione di questa retta nel sistema fisso.

Se prendiamo il limite a un dato istante di queste rette otteniamo la direzione definita dal vettore velocità angolare che compare nella (2.11).

La dimostrazione del teorema di Eulero si può fare per via puramente geometrica ma risulta particolarmente facile se torniamo alla nostra descrizione "algebrica" in termini della matrice di trasformazione $A(t)$.

Poiché lavoriamo a un tempo t fissato indichiamo la matrice di trasformazione $A(t)$ semplicemente con A . Da un punto di vista algebrico il fatto che ci siano dei punti lasciati fermi dalla trasformazione associata alla matrice A significa che la matrice A ha un autovettore associato all'autovalore 1 (dobbiamo infatti poter risolvere l'equazione $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$).

Ci basta quindi dimostrare che A ha il numero reale 1 per autovalore. A è una matrice 3×3 , quindi ha sicuramente un autovalore reale. Inoltre, poiché la matrice è ortogonale, la lunghezza di un qualsiasi autovettore associato all'autovalore reale deve essere preservata. Quindi l'autovalore reale deve essere uguale a 1 oppure a -1 . Infine ricordiamo che la matrice A ha determinante positivo. Abbiamo quindi tre possibilità:

- tutti e tre gli autovalori sono uguali a 1;
- due autovalori sono uguali a -1 e il terzo è 1;

- o infine (è il caso generico) due autovalori sono complessi coniugati e hanno quindi prodotto positivo; di conseguenza l'autovalore reale è positivo (= 1).

Questo conclude la dimostrazione del teorema di Eulero.

2.3 Asse istantaneo di moto, rigate del moto

Vogliamo ora determinare come è fatto il campo di velocità determinato dalla formula (2.11).

Fissiamo un istante t e indichiamo con $\mathbf{v}(\mathbf{P})$ la velocità di un punto solidale \mathbf{P} a questo istante.

Moltiplicando scalarmente la (2.11) per il vettore $\underline{\omega}$ otteniamo

$$\mathbf{v}(\mathbf{P}) \cdot \underline{\omega} = \mathbf{v}(\mathbf{O}) \cdot \underline{\omega} \quad (2.12) \quad \text{inv. scalare}$$

che ci dice che la componente della velocità nella direzione di $\underline{\omega}$ è la stessa per tutti i punti solidali. Quindi al variare di \mathbf{P} , solo la componente di $\mathbf{v}(\mathbf{P})$ ortogonale alla direzione di $\underline{\omega}$ può variare. Mostriamo che esiste una intera retta di punti solidali \mathbf{Q} tali che per la componente di $\mathbf{v}(\mathbf{Q})$ ortogonale a $\underline{\omega}$ è nulla e quindi $\mathbf{v}(\mathbf{Q})$ si riduce a

$$\mathbf{v}(\mathbf{Q}) = \frac{\mathbf{v}(\mathbf{O}) \cdot \underline{\omega}}{\underline{\omega}^2} \underline{\omega} \equiv \mathbf{v}^{\parallel} \quad (2.13) \quad \text{inv. vettore}$$

Per tali punti deve valere

$$\underline{\omega} \wedge (\mathbf{Q} - \mathbf{O}) + \mathbf{v}^{\perp}(\mathbf{O}) = 0 \quad (2.14) \quad \text{equa. asse. 1}$$

dove $\mathbf{v}^{\perp}(\mathbf{O}) = \mathbf{v}(\mathbf{O}) - \mathbf{v}^{\parallel}$ è la componente della velocità di \mathbf{O} perpendicolare a $\underline{\omega}$. Possiamo ricavare l'equazione (2.14) tornando alla rappresentazione matriciale della velocità angolare

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_Q \\ \eta_Q \\ \zeta_Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1^{\perp} \\ v_2^{\perp} \\ v_3^{\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.15) \quad \text{equa. asse. 2}$$

dove $(v_1^{\perp}, v_2^{\perp}, v_3^{\perp})^T = \mathbf{v}^{\perp}(\mathbf{O})$ e ξ_Q, η_Q, ζ_Q sono le componenti di $(\mathbf{Q} - \mathbf{O})$. Il sistema di equazioni (2.15) è un sistema lineare non omogeneo la cui matrice ha rango 2 (salvo quando $\underline{\omega} = 0$, verificarlo!) e la condizione $\underline{\omega} \cdot \mathbf{v}^{\perp} = 0$ garantisce che la matrice completa ha ancora rango 2 (verificarlo!). Ne segue che (2.15) ammette soluzione e che le soluzioni sono le coordinate dei punti di una retta nello spazio, avente direzione parallela a $\underline{\omega}$. Questa retta è detta *asse istantaneo del moto*.

In questi punti la velocità assume il minimo modulo e coincide con \mathbf{v}^{\parallel} , ovvero lungo la direzione dell'asse di moto stesso. Quindi l'asse del moto "scivola" lungo la sua giacitura. Bisogna però ricordare che i vettori $\underline{\omega}$ e $\mathbf{v}(\mathbf{O})$ sono variabili nel tempo, e quindi anche la posizione dell'asse di moto varia nel tempo e i punti (solidali) che si sull'asse a un istante t_2 sono diversi da quelli che ci si trovavano all'istante t_1 , che giustifica l'articolo "istantaneo" nel nome di questa retta.

Al variare del tempo le posizioni assunte dall'asse istantaneo di moto genera due superfici rigate, una nel sistema fisso e una nel sistema solidale, dette rispettivamente rigata fissa e mobile del moto rigido.

Di particolare interesse il caso in cui l'invariante \mathbf{v}^{\parallel} è nullo. In questo caso i punti dell'asse di moto sono "istantaneamente fermi", cioè hanno velocità nulla. Ne segue che la rigata mobile *rotola senza strisciare* sulla rigata fissa e possiamo pensare quindi al moto rigido come "generato" dal rotolamento di queste due superfici, una sull'altra. Questa osservazione è alla base della teoria su cui si basa la costruzione degli *ingranaggi*. In questo caso l'asse viene detto *asse di istantanea rotazione*, in quanto la distribuzione (istantanea) delle velocità è la stessa di quella che ci sarebbe in un moto di rotazione (in cui l'asse del moto resta fisso).

Nel caso generale si "sommano" i moti di rotazione, dato dalla $\mathbf{v}^{\perp}(\mathbf{P})$ al variare di \mathbf{P} , con il moto di "traslazione" dato da \mathbf{v}^{\parallel} . Se le caratteristiche del moto, $\underline{\omega}$ e $\mathbf{v}(\mathbf{O})$, restano costanti allora le velocità hanno sempre questa distribuzione e, in particolare, l'asse di moto è sempre lo stesso. Il moto che ne risulta è quindi quello in cui i punti dell'asse si muovono lungo l'asse, mentre gli altri punti li "seguono girando attorno all'asse". Questo moto è detto "elicodale", ed è il moto che ha un bullone mentre viene avvitato, o un cavatappi mentre entra nel tappo. Nel caso generale questa è la forma della distribuzione di velocità ad ogni istante, ma da un istante all'altro la posizione dell'asse muta. Per questa si parla, per un moto rigido generico, di *atto di moto elicodale o roto-traslatorio*.

Terminiamo con la verifica che il vettore $\underline{\omega}$ è indipendente dal punto solidale \mathbf{O} . Sia \mathbf{O}' un altro punto solidale e indichiamo con $\underline{\omega}'$ la velocità angolare "relativa" alla scelta di \mathbf{O}' nella formula fondamentale. Avremo quindi

$$\mathbf{v}(\mathbf{P}) = \mathbf{v}(\mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) = \mathbf{v}(\mathbf{O}') + \underline{\omega}' \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') \quad (2.16)$$

e sottraendo membro a membro

$$0 = \mathbf{v}(\mathbf{O}) - \mathbf{v}(\mathbf{O}') + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{O}' - \mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') - \underline{\omega}' \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}'), \quad (2.17)$$

ma $\mathbf{v}(\mathbf{O}) = \mathbf{v}(\mathbf{O}') + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{O} - \mathbf{O}')$, e quindi

$$(\underline{\omega} - \underline{\omega}') \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') = 0 \quad (2.18)$$

che, dovendo valere per ogni punto \mathbf{P} , implica $\underline{\omega} - \underline{\omega}' = 0$.

2.4 Cinematica relativa: composizione delle velocità

Per procedere abbiamo bisogno di determinare come due sistemi Σ e S in moto tra loro giudichino la velocità di un punto \mathbf{P} , che ora supporremo in moto rispetto ad entrambi gli osservatori.

Anche se i termini "fisso" e "mobile" sono arbitrari continueremo a riferirci a Σ come al sistema fisso e a S come al sistema mobile.

Supporremo inoltre di conoscere le caratteristiche del moto di S rispetto a Σ , ovvero i vettori $\mathbf{v}(O)$ e $\underline{\omega}$ (funzioni del tempo) e chiameremo *velocità*

assoluta, \mathbf{v}_A , e velocità relativa, \mathbf{v}_R , la velocità del punto \mathbf{P} come giudicata rispettivamente da Σ e S .

Per ricavare il ^{trasforma}legame tra \mathbf{v}_A e \mathbf{v}_R torniamo alla formula di ^{trasforma}cambiamento delle coordinate (2.4) di \mathbf{P} nei due sistemi. Deriviamo ancora la (2.4) rispetto al tempo, questa volta tenendo conto che *anche le coordinate di \mathbf{P} in S variano nel tempo*

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi_O \\ \eta_O \\ \zeta_O \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + A(t) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (2.19) \quad \boxed{\text{rela.1}}$$

Il termine a primo membro nella ^{rela.1}(2.19) sono le componenti della velocità assoluta del punto \mathbf{P} nel sistema Σ . Il terzo addendo a secondo membro rappresenta le componenti, in S , della velocità relativa moltiplicate per la matrice di cambiamento di riferimento: queste sono quindi le componenti in Σ del vettore \mathbf{v}_R . I primi due addendi del secondo membro sono gli stessi che comparivano nella formula fondamentale del moto rigido, quindi possiamo riscrivere la ^{rela.1}(2.19) nella forma “vettoriale”

$$\mathbf{v}_A(\mathbf{P}) = \mathbf{v}_R(\mathbf{P}) + \mathbf{v}_A(\mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}). \quad (2.20) \quad \boxed{\text{rela.2}}$$

La somma $\mathbf{v}_A(\mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})$ rappresenta la velocità che il punto \mathbf{P} avrebbe *se fosse solidale*, ovvero se fosse fermo (anche solo “istantaneamente”) rispetto all’osservatore S . Per questa ragione si dà a questo termine il nome di *velocità di trascinamento*, \mathbf{v}_T , e si riscrive la ^{rela.2}(2.20) nella forma

$$\mathbf{v}_A(\mathbf{P}) = \mathbf{v}_R(\mathbf{P}) + \mathbf{v}_T(\mathbf{P}), \quad (2.21) \quad \boxed{\text{rela.3}}$$

che si legge dicendo che la velocità assoluta è uguale alla velocità relativa più la velocità di trascinamento.

Notiamo ora che le considerazioni fatte per la velocità valgono per *qualsiasi quantità vettoriale*, in quanto il termine di differenza tra $\mathbf{v}_A(\mathbf{P})$ e $\mathbf{v}_R(\mathbf{P})$ dipende dalla *variazione dell’orientazione degli assi S al variare del tempo*. Useremo i simboli $\frac{d}{dt}|_A$ e $\frac{d}{dt}|_R$ per indicare la derivata rispetto al tempo di una qualsiasi quantità vettoriale come giudicata rispettivamente da Σ e S , e le chiameremo ancora *derivata assoluta* e *derivata relativa*.

In accordo con le notazioni introdotte, avremo quindi per un *qualsiasi vettore libero* \mathbf{X}

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}|_A = \frac{d\mathbf{X}}{dt}|_R + \underline{\omega} \wedge \mathbf{X} \quad (2.22) \quad \boxed{\text{poisson}}$$

che è nota con il nome di *formula di Poisson*.

Esercizio: dimostrare la ^{poisson}(2.22).

Nota: con il “senno di poi” ci possiamo rendere conto che nella derivazione della formula di Poisson si utilizza un’ipotesi non esplicitata: ad ogni istante i due sistemi di riferimento devono essere in grado di confrontare le variazioni rispetto al tempo di una quantità scalare (le componenti del vettore che si sta derivando) nei due sistemi. Questo è possibile solo se i due sistemi possono “sincronizzare” in ogni momento e *istantaneamente* i loro orologi. Ma ciò è *fisicamente impossibile*, come messo in luce da Einstein nel suo lavoro (del 1905) sulla Relatività Ristretta.

Il fatto che questa ipotesi sia rimasta nascosta per secoli dipende dal fatto che la velocità con cui due osservatori possono scambiarsi delle informazioni è la velocità

della luce, che è molto maggiore di qualsiasi velocità in gioco nei fenomeni meccanici macroscopici. L'errore che quindi si compie tenendo per buona l'ipotesi di sincronizzazione istantanea degli orologi non è quindi rilevabile nell'ambito delle applicazioni meccaniche ordinarie.

2.5 Composizione di moti rigidi

La relazione tra velocità assoluta e relativa permette di risolvere il seguente problema: siano dati tre osservatori Σ , S e S' , con S' in moto sia rispetto a Σ che a S , e siano note le caratteristiche del moto di S rispetto a Σ , $\mathbf{v}(O)$ e $\underline{\omega}$, e di S' rispetto a S , $\mathbf{v}_R(\mathbf{O}')$ e $\underline{\omega}'$; determinare le caratteristiche del moto di S rispetto a Σ .

(con \mathbf{O}' si è ovviamente indicato l'origine di S' , e si è usata la notazione $\mathbf{v}_R(\mathbf{O}')$ per evidenziare che questa è la velocità di \mathbf{O}' nel sistema S).

Se \mathbf{P} è ora un punto solidale con S' , avremo

$$\mathbf{v}_R(\mathbf{P}) = \mathbf{v}_R(\mathbf{O}') + \underline{\omega}' \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') \quad (2.23)$$

e, indicando con $\mathbf{v}_A(\mathbf{P})$ la velocità di \mathbf{P} in Σ , otteniamo dalla [rela.2 \(2.20\)](#)

$$\mathbf{v}_A(\mathbf{P}) = \mathbf{v}_R(\mathbf{O}') + \underline{\omega}' \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') + \mathbf{v}_A(\mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}). \quad (2.24)$$

che riscriviamo

$$\mathbf{v}_A(\mathbf{P}) = \mathbf{v}_R(\mathbf{O}') + \underline{\omega}' \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') + \mathbf{v}_A(\mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{O}' - \mathbf{O}). \quad (2.25) \quad \boxed{\text{rela.4}}$$

Ma la somma

$$\mathbf{v}_R(\mathbf{O}') + \mathbf{v}_A(\mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{O}' - \mathbf{O})$$

è, a sua volta, la velocità assoluta del punto \mathbf{O}' , e quindi possiamo riscrivere la [rela.4 \(2.25\)](#)

$$\mathbf{v}_A(\mathbf{P}) = \mathbf{v}_A(\mathbf{O}') + (\underline{\omega}' + \underline{\omega}) \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}'), \quad (2.26) \quad \boxed{\text{rela.5}}$$

che ci dice che il sistema S' compie rispetto a Σ un moto rigido *di velocità angolare* $\underline{\omega}' + \underline{\omega}$.

La [rela.4 \(2.25\)](#) ci dice quindi che, nella composizione di due moti rigidi, le velocità angolari si sommano. Lo stesso vale se si compongono tre o più moti rigidi.

2.6 Angoli di Eulero

Abbiamo visto che il moto rigido è parametrizzato dai “punti” dello spazio $\mathbf{R}^3 \times SO(3)$. Vogliamo trovare un insieme di sei parametri atti a determinare univocamente la posizione di sistema di riferimento mobile rispetto al riferimento fisso. I primi tre parametri, in \mathbf{R}^3 , sono, ovviamente, le coordinate dell'origine del sistema solidale. Gli altri tre parametri dovranno determinare l'orientamento degli assi di S rispetto agli assi del sistema Σ , o, equivalentemente, la posizione dei tre versori di S in un sistema Σ' ottenuto trasladando Σ in modo da portarne l'origine a coincidere con O . Il moto di S rispetto a Σ' è quindi equivalente a quello di un moto rigido con un punto che resta fisso. Un tale moto prende il nome di *precessione*.

Senza perdere di generalità possiamo fissare le origini dei due riferimenti Σ e S coincidenti con il punto fisso. Avremo quindi $O \equiv \Omega$ e $\dot{O} \equiv 0$.

Vogliamo quindi descrivere la posizione del sistema S rispetto a Σ tramite tre parametri opportuni. Fissiamo quindi una posizione mutua di S e Σ e supponiamo che, in questa configurazione, gli assi dei due sistemi non siano sovrapposti e, in particolare, non coincidano i due assi ζ e z (vedi figura). Vogliamo far vedere che possiamo riportare il sistema “mobile” a coincidere con quello “fisso” mediante tre opportune rotazioni: gli angoli di queste rotazioni forniranno i parametri cercati.

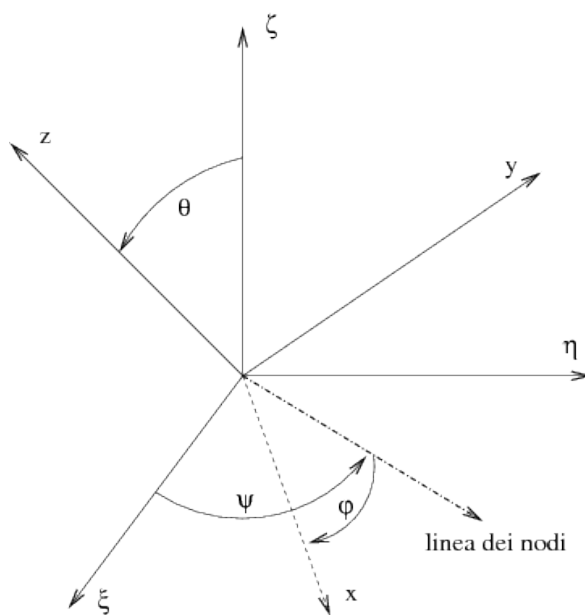


Figura 2.1: Angoli di Eulero

fig:angoli eulero

Poiché gli assi ζ e z non coincidono, i piano $\zeta = 0$ e $z = 0$ si intersecano in una retta detta *linea dei nodi*. Sia \mathbf{n} il versore di questa retta, orientato in modo che la terna \mathbf{k} , \mathbf{n} e \mathbf{e}_3 (cioè i versori dell’asse z , della linea dei nodi, e dell’asse delle ζ) sia positivamente orientata.

Indichiamo ora con θ , ϕ e ψ i tre angoli formati rispettivamente dalle coppie di versori $(\mathbf{k}, \mathbf{e}_3)$, (\mathbf{n}, \mathbf{i}) e $(\mathbf{e}_1, \mathbf{n})$ (in quest’ordine). Questi angoli prendono il nome collettivo di *angoli di Eulero* e i nomi ripetitivi: angolo di *nutazione* θ , angolo di *rotazione propria* ϕ e angolo di *precessione* ψ .

Le rotazioni sono così definite:

1. una rotazione di un angolo $-\phi$ attorno all’asse delle z , che porta l’asse delle x a coincidere con la linea dei nodi;
2. una rotazione di un angolo $-\psi$ attorno all’asse delle ζ , che porta la linea dei nodi a coincidere con l’asse delle ξ , e quindi con l’asse delle x ;
3. una rotazione di un angolo $-\theta$ attorno alla linea dei nodi, che porta l’asse delle z a coincidere con l’asse delle ζ (e di conseguenza l’asse delle y con l’asse delle η).

Si noti che gli angoli di Eulero risultano indefiniti per tutte quelle posizioni di S in cui gli assi z e ζ risultano sovrapposti. Questo “difetto” è inevitabile, qualsiasi sia il sistema di parametri si scelga per determinare la posizione di S , in quanto l’insieme $SO(3)$, i cui punti sono in corrispondenza 1-1 con le posizioni di S , non ammette sistemi coordinate globali (come accade p.e. per la superficie di una sfera).

In base alla definizione degli angoli di Eulero è possibile costruire la matrice A di passaggio dal sistema S al sistema Σ in funzione dei tre angoli di Eulero, componendo le tre rotazioni. Da essa è poi si ricava l’espressione di $\underline{\omega}$ tramite gli angoli di Eulero.

E’ possibile comunque trovare direttamente quest’espressione di $\underline{\omega}$ ricorrendo alla formula di addizione delle velocità angolari per la composizione di moti rigidi. Da come abbiamo definito gli angoli di Eulero risulta chiaro che la generica trasformazione che porta da Σ a S è ottenuta tramite le tre rotazioni che abbiamo descritte, effettuate ruotando di θ attorno alla linea dei nodi, di ψ attorno all’asse ζ e di ϕ attorno all’asse z . Ricordando la forma della velocità angolare in una rotazione si ha la semplice espressione

$$\underline{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{n} + \dot{\psi} \mathbf{e}_3 - \dot{\phi} \mathbf{k}, \quad (2.27)$$

omega_eulero

dove il “punto” indica le derivate rispetto al tempo degli angoli. La ^{omega_eulero}(2.27) è però un’espressione “ibrida” perché non ci dà le componenti di $\underline{\omega}$ né nel sistema Σ , né nel sistema S (ha un altro difetto: mentre \mathbf{n} è perpendicolare sia a \mathbf{e}_3 che a \mathbf{k} , questi ultimi due versori non sono in genere perpendicolari tra loro, quindi il modulo di $\underline{\omega}$ non può essere ottenuto da ^{omega_eulero}(2.27) semplicemente sommando i quadrati delle tre derivate degli angoli)

E’ tuttavia facile ottenere l’espressione di $\underline{\omega}$ in entrambi i riferimenti Σ e S , osservando che

$$\mathbf{n} = \cos \psi \mathbf{e}_1 + \sin \psi \mathbf{e}_2 \quad (2.28)$$

$$\mathbf{n} = \cos \phi \mathbf{i} - \sin \phi \mathbf{j} \quad (2.29)$$

$$\mathbf{k} = \sin \theta (\sin \psi \mathbf{e}_1 - \cos \psi \mathbf{e}_2) + \cos \theta \mathbf{e}_3 \quad (2.30)$$

$$\mathbf{e}_3 = \sin \theta (\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}) + \cos \theta \mathbf{k} \quad (2.31)$$

(attenzione ai segni).

Esercizio: Calcolare il modulo di $\underline{\omega}$.

2.7 Cinematica relativa: l’accelerazione

Vediamo infine come viene giudicata da due osservatori diversi l’accelerazione di un punto in movimento rispetto a entrambi.

Per trovare la relazione che lega le due accelerazioni, basta derivare la formula ^{rela.2}(2.20) che lega la velocità relativa alla velocità assoluta tenendo presente che l’accelerazione giudicata da Σ (che chiameremo assoluta) è la derivata in Σ della velocità giudicata da Σ , mentre l’accelerazione giudicata da S (che chiameremo relativa) è la derivata in S della velocità giudicata da S

Avremo quindi

$$\mathbf{a}_A(\mathbf{P}) = \frac{d}{dt} \Big|_A \mathbf{v}_A(\mathbf{P}) = \frac{d}{dt} \Big|_A (\mathbf{v}_R(\mathbf{P}) + \mathbf{v}_A(\mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})) . \quad (2.32)$$

cori.1

Calcoliamo la derivata a secondo membro utilizzando la formula di Poisson:

$$\mathbf{a}_A(\mathbf{P}) = \mathbf{a}_R(\mathbf{P}) + \underline{\omega} \wedge \mathbf{v}_R(\mathbf{P}) + \left. \frac{d}{dt} \right|_A \mathbf{v}_A(\mathbf{O}) + \left. \frac{d}{dt} \right|_A (\underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})), \quad (2.33) \quad \boxed{\text{cori.2}}$$

dove è comparsa l'accelerazione relativa $\mathbf{a}_R(\mathbf{P}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_R \mathbf{v}_R(\mathbf{P})$ di \mathbf{P} e l'accelerazione assoluta dell'origine di S . Deriviamo infine l'ultimo addendo, sempre usando la formula di Poisson:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_A (\underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})) = \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_A \underline{\omega} \right) \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_A (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \right) \quad (2.34) \quad \boxed{\text{cori.3}}$$

$$= \dot{\underline{\omega}} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\mathbf{v}_R(\mathbf{P})) + \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})), \quad (2.35)$$

dove abbiamo indicato semplicemente con $\dot{\underline{\omega}}$ la derivata della velocità angolare poiché è *la stessa nei due sistemi di riferimento*, cosa che segue immediatamente dalla formula di Poisson, e abbiamo sostituito il simbolo della velocità relativa al posto di $\left. \frac{d}{dt} \right|_R (\mathbf{P} - \mathbf{O})$. Possiamo riunire questi pezzi, e otteniamo il legame cercato tra le due accelerazioni:

$$\mathbf{a}_A(\mathbf{P}) = \mathbf{a}_R(\mathbf{P}) + \mathbf{a}_A(\mathbf{O}) + \dot{\underline{\omega}} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) + \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})) + 2\underline{\omega} \wedge \mathbf{v}_R(\mathbf{P}) \quad (2.36) \quad \boxed{\text{cori.4}}$$

La ^(cori.4)(2.36) va letta osservando che il secondo, terzo e quarto termine della somma sono presenti *anche quando il punto \mathbf{P} è solidale con S* ; per questa ragione la loro somma prende il nome di accelerazione di trascinamento, $\mathbf{a}_T(\mathbf{P})$. Infine il termine $2\underline{\omega} \wedge \mathbf{v}_R(\mathbf{P})$, indicato generalmente con il simbolo $\mathbf{a}_C(\mathbf{P})$, è dovuto alla correzione necessaria per il diverso modo che hanno i due sistemi di giudicare sia la variazione della velocità relativa sia la variazione della velocità di trascinamento. Questo termine prende il nome di *accelerazione complementare* o di Coriolis e la ^(cori.4)(2.36) si scrive nella forma compatta

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_R + \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_C. \quad (2.37) \quad \boxed{\text{coriolis}}$$

L'importanza di questa relazione è dovuta al fatto che molto spesso i fenomeni meccanici sono osservati da sistemi di riferimento non inerziali.

Esempi noti sono la deviazione dalla verticale nella caduta di un grave⁷, la deviazione dalla direzione dei meridiani degli alisei, e il moto del pendolo di Foucault.

2.8 Appendice

Mostriamo che una trasformazione rigida dello spazio euclideo deve essere affine, ovvero deve avere la forma

$$F(X) = X_0 + A(X - X_0) \quad (2.38) \quad \boxed{\text{affi}}$$

⁷Nota che nella direzione della verticale, che è quella del filo a piombo, è compresa oltre alla forza di gravità, un termine centrifugo dovuto all'accelerazione di trascinamento della terra. Quando un grave cade, il termine di accelerazione complementare fa deviare la sua traiettoria dalla verticale. Se si guarda al fenomeno dal punto di vista di un osservatore posto al di fuori della terra, questa deviazione è l'ovvia conseguenza del fatto che nel tempo impiegato nella caduta, l'osservatore (la terra) ha ruotato spostando il piede della verticale del punto di partenza verso oriente. L'osservatore solidale con la terra vedrà quindi deviare il grave verso occidente. Tuttavia questo effetto è molto piccolo, e praticamente inosservabile, nella caduta di un grave da altezza ordinarie.

dove A è una trasformazione lineare ortogonale e X_0 un punto fissato dello spazio.

Ricordiamo che per trasformazione rigida si intende una qualsiasi applicazione F dello spazio euclideo in sé tale che

$$d(F(X), F(Y)) = d(X, Y) \quad \forall X, Y \quad (2.39) \quad \boxed{\text{iso}}$$

dove $d(X, Y) = \sqrt{(X - Y) \cdot (X - Y)}$ indica la distanza tra i punti X e Y . Osserviammo per prima cosa che (2.39) è vera se e solo se si ha

$$(F(X) - F(Y)) \cdot (F(X) - F(Y)) = (X - Y) \cdot (X - Y) \quad \forall X, Y \quad (2.40) \quad \boxed{\text{iso2}}$$

Dalla relazione (2.40) è abbastanza semplice far vedere che se F ha la forma (2.38), ovvero se è affine, allora $A \in SO(n)$.

Resta da verificare che la F è affine. Scegliamo un punto O dello spazio, poniamo $X_0 = F(O)$ e indichiamo con lettere minuscole i vettori $x = X - O$.

Dalla (2.40) abbiamo che

$$(F(x) - X_0) \cdot (F(x) - X_0) = x \cdot x \quad \forall x \quad (2.41) \quad \boxed{\text{iso3}}$$

quindi l'applicazione $g(x) = F(x) - X_0$ soddisfa la condizione

$$g(x) \cdot g(x) = x \cdot x \quad \forall x \quad (2.42) \quad \boxed{\text{iso4}}$$

e

$$g(x) - g(y) = F(x) - F(y) \quad \forall x, y \quad (2.43) \quad \boxed{\text{iso5}}$$

e quindi

$$(g(x) - g(y))^2 = (x - y)^2 \quad \forall x, y \quad (2.44) \quad \boxed{\text{iso6}}$$

Dalle (2.42) e (2.44) segue che

$$g(x) \cdot g(y) = x \cdot y \quad \forall x, y \quad (2.45) \quad \boxed{\text{iso7}}$$

Fissiamo ora tre vettori ortonormali u, v, w ; dalla (2.45) segue che il vettore $g(\alpha u)$ è ortogonale sia a $g(v)$ che a $g(w)$ e quindi deve essere $g(\alpha u) = \beta g(u)$, e inoltre $|\beta| = 1$.

Prendiamo ora un qualsiasi vettore x e siano α, β e γ le componenti di $g(x)$ nella base $(g(u), g(v), g(w))$, i.e. sia $g(x) = \alpha g(u) + \beta g(v) + \gamma g(w)$. Resta da far vedere che α, β e γ sono le componenti di x nella base (u, v, w) .

Ma questo segue immediatamente dal fatto che $x \cdot u = g(x) \cdot g(u) = \alpha$, e analogamente per v e w .

Capitolo 3

Le Equazioni di Lagrange

3.1 Equazioni di Lagrange per un punto materiale

Consideriamo il moto di un punto materiale che si muove nello spazio soggetto a un campo di forza conservativo $\mathbf{F} = \nabla U$. Il moto, in accordo con la seconda legge di Newton, è descritto dall'equazione

$$m \mathbf{a} = \mathbf{F}. \quad (3.1) \quad \boxed{\text{moto}}$$

L'equazione vettoriale (3.1) si può scrivere in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali e da essa si ottiene il sistema

$$m \ddot{x}_\alpha = F_\alpha(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial U}{\partial x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (3.2) \quad \boxed{\text{carte}}$$

dove $U(x_1, x_2, x_3)$ è la funzione potenziale.

In molti casi è preferibile usare un diverso sistema di coordinate, per esempio le coordinate sferiche se il campo di forza ha una simmetria centrale rispetto a un punto fisso dello spazio.

La riscrittura di (3.1) in un diverso sistema di coordinate richiede un procedimento di scomposizione dell'equazione vettoriale in un sistema di riferimento adattato al sistema di coordinate e può essere assai laboriosa. Infatti si tratta di trasformare non solo le coordinate e le velocità, ma anche le componenti dell'accelerazione, che è un problema assai complicato nei sistemi di coordinate i cui versori coordinati variano da punto a punto.

Vediamo come sia possibile costruire una “ricetta” per la scrittura “automatica” di un sistema di equazioni scalari di moto equivalente alla (3.2) in un qualsiasi sistema di coordinate.

Questa procedura¹ inoltre si generalizza a sistemi meccanici composti da un numero qualsiasi di punti materiali interagenti tra loro e con l'esterno ed eventualmente soggetti a limitazioni al loro moto “naturale” espresse da “vincoli olonomi lisci” (il senso esatto di queste espressioni verrà chiarito nel seguito).

¹Essa fu introdotta da J.L. Lagrange nel suo trattato *Mécanique analytique*, nella cui introduzione scrive: *Je me suis proposé de réduire la théorie de cette Science, et l'art de résoudre les problèmes qui s'y rapportent, à des formules générales, dont le simple développement donne toute les équations nécessaires pour la solution de chaque problème.*

Molte delle difficoltà nel capire le argomentazioni che seguono sono dovute alla confusione nelle notazioni. Procediamo per il momento in modo molto prolioso distinguendo tutti gli enti matematici che entrano nel calcolo. In seguito, quando sarà chiaro (si spera!) il ruolo dei vari simboli e di ciò che di volta in volta rappresentano, potremo usare una notazione molto più “disinvolta”.

Distinguiamo quindi tra lo spazio (affine) euclideo a tre dimensioni \mathbf{E} in cui si muove il punto materiale P ; lo spazio \mathbf{R}^3 dominio delle coordinate cartesiane (x_1, x_2, x_3) ; e infine l'insieme $\mathcal{Q} \in \mathbf{R}^3$, dominio di un altro sistema di coordinate (q_1, q_2, q_3) .

Lo stato cinematico del punto materiale, oltre che la sua posizione P in \mathbf{E} , comprende anche la sua velocità, \mathbf{v} , che è un elemento dello spazio vettoriale \mathbf{V} di \mathbf{E} .

Ogni sistema di coordinate associa a ogni punto dello spazio delle velocità \mathbf{V} un vettore di \mathbf{R}^3 .

Indicheremo con $\dot{\mathbf{x}}$ e $\dot{\mathbf{q}}$ il vettore delle componenti di \mathbf{v} rispettivamente nel sistema di coordinate cartesiane e nel sistema delle q . Quindi con le notazioni $\dot{\mathbf{x}}$ e $\dot{\mathbf{q}}$ non indichiamo qui le derivate di funzioni $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{q}(t)$ rispetto al tempo, ma solo il vettore (di \mathbf{R}^3) delle componenti di una possibile velocità. Quando vorremo indicare le derivate useremo, in questa sezione, la notazione $\frac{d}{dt}$.

Quindi lo stato cinematico del punto sarà indicato dalle coppie (P, \mathbf{v}) nello spazio “fisico” $\mathbf{E} \times \mathbf{V}$, da $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ nella rappresentazione cartesiana e infine da $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ nelle “coordinate q ”.

Poiché (q_1, q_2, q_3) è un sistema di coordinate, le coordinate cartesiane (x_1, x_2, x_3) del punto P possono essere espresse come funzioni delle q_i , definite da

$$x_\alpha = x_\alpha(q_1, q_2, q_3) = x_\alpha(\mathbf{q}), \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad \boxed{\text{tras}}$$

Le leggi di trasformazione di coordinate ^{tras}(3.3) si estendono alle velocità tramite le seguenti leggi²

$$\dot{x}_\alpha = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i}(\mathbf{q}) \dot{q}_i, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad \boxed{\text{trasvel}}$$

Infine introduciamo i vettori (di \mathbf{V}) tangenti alle *linee coordinate* (in \mathbf{E}): nel sistema delle coordinate cartesiane essi sono i versori degli assi coordinati $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, uguali in ogni punto \mathbf{x} , mentre in un sistema di coordinate generico otterremo i vettori (non necessariamente dei versori, e in genere variabili da punto a punto) $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$

$$\mathbf{u}_i = \frac{\partial P}{\partial q_i}, \quad q_j = \text{costante} \quad \text{per } j \neq i \quad (3.5)$$

Osserviamo ora che le equazioni cartesiane del moto ^{carte}(3.2) sono ottenute prendendo i prodotti scalari dell'equazione vettoriale ^{moto}(3.1) con i versori $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ (ed esprimendo tutte le quantità presenti in funzione delle coordinate (x_1, x_2, x_3)).

²Le trasformazioni dei vettori che rappresentano la velocità sono definite in modo che se $\dot{\mathbf{q}}(t) = \frac{d\mathbf{q}}{dt}(t)$ allora la funzione $\dot{\mathbf{x}}(t)$, definita a partire da $\dot{\mathbf{q}}(t)$ tramite le ^{trasvel}(3.4), soddisfa $\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t)$. In altri termini la trasformazione introdotta è quella che trasforma “velocità in velocità” nei due sistemi di coordinate.

Facciamo la stessa cosa utilizzando il sistema di coordinate q . Otterremo

$$m \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_i = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial q_i}(q_1, q_2, q_3), \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.6) \quad \boxed{\text{qeq}}$$

dove \tilde{U} indica la funzione potenziale espressa nelle coordinate q , cioè

$$\tilde{U}(q_1, q_2, q_3) = U(x_1(q_1, q_2, q_3), x_2(q_1, q_2, q_3), x_3(q_1, q_2, q_3)).$$

Queste sono le equazione cercate, ma ancora devono essere “scritte” nelle variabili q , ovvero si deve trasformare il primo membro in una espressione differenziale nelle funzioni incognite $q_i(t)$ e nelle loro derivate prime e seconde.

Il “trucco” consiste ora nel mostrare che il termine $m \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_i$ può essere espresso *in ogni sistema di coordinate* tramite il *binomio di Lagrange*

$$m \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad (3.7) \quad \boxed{\text{bino1}}$$

dove T è l’energia cinetica del punto.

Rimandiamo al caso generale la dimostrazione di questa identità, ma notiamo subito che questa espressione del termine $m \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_i$ ci consente di trasformare le equazioni da un sistema di coordinate a un altro senza dover trasformare le componenti dell’accelerazione, ma solo tramite le trasformazioni per le coordinate cinematiche (posizione e velocità).

E’ quindi essenziale essere in grado di esprimere l’energia cinetica $T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2$ rispetto a un qualsiasi sistema di coordinate lagrangiane q_i (e \dot{q}_i).

Partiamo dall’espressione di T nelle coordinate cartesiane e sostituiamo le componenti \dot{x}_α tramite le ^{trasvel}(3.4):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 m \dot{x}_\alpha^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 m \left(\sum_{h=1}^3 \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_h} \dot{q}_h \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^3 a_{h,k} \dot{q}_h \dot{q}_k \quad (3.8) \quad \boxed{\text{Tdiq}}$$

dove abbiamo posto

$$a_{h,k} = \sum_{\alpha} m \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_h} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_k} \quad (3.9)$$

Osserviamo che le $a_{h,k}$ sono *funzioni delle variabili q* , $a_{h,k} = a_{h,k}(q_1, q_2, q_3)$, e formano gli elementi di una matrice (o meglio le componenti di una forma quadratica) *simmetrica* in quanto $a_{h,k} = a_{k,h}$, e *definita positiva* in quanto $T \geq 0$ e $T = 0$ se e solo se la velocità è nulla (e quindi lo sono tutte le componenti di $\dot{\mathbf{q}}$).

Possiamo quindi scrivere le equazioni di moto del punto nel sistema di coordinate (q_1, q_2, q_3) (per semplicità abbiamo indicato con U il potenziale)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.10) \quad \boxed{\text{lagrange0}}$$

che prendono il nome di *equazioni di Lagrange*. Infine, osservando che il potenziale non dipende dalle variabili $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$, possiamo riscrivere le equazioni di Lagrange introducendo la funzione, detta *lagrangiana*, $\mathcal{L}(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) = T + U$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.11) \quad \boxed{\text{lagrange}}$$

A questo punto dovrebbe essere chiara la ricetta “automatica”: si scelgono le variabili (q_1, q_2, q_3) , dette *coordinate lagrangiane*, si esprime la velocità \mathbf{v} , e quindi la T , e il potenziale U rispetto a queste variabili, si sommano T e U e si inserisce la funzione lagrangiana così ottenuta nella (3.11). Il risultato sono le equazioni di moto nel sistema di coordinate scelto.

3.2 Il moto centrale

Vediamo ora come si descrive in termini di equazioni di Lagrange il moto sotto l'azione di una forza centrale del tipo

$$\mathbf{F}(P) = f(|P - O|) \mathbf{vers}(P - O) \quad (3.12) \quad \boxed{\text{campocentr}}$$

dove O è un punto fisso dello spazio.

Introduciamo un sistema di coordinate sferiche (r, θ, φ) (ovviamente centrate in O).

Sappiamo che una forza della forma (3.12) è conservativa e che il suo potenziale è dato da

$$U(r) = \int_{r_0}^r f(s) ds \quad (3.13) \quad \boxed{\text{pcentr}}$$

Per scrivere la funzione lagrangiana basta quindi esprimere la velocità rispetto alle coordinate sferiche e alle loro “velocità” $(\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$.

Questo si fa agevolmente scomponendo la velocità lungo i versori $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\varphi$ tangenti alle linee coordinate della r , della θ e della φ rispettivamente. Si ha $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_r = \dot{r}$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_\theta = r \dot{\theta}$ e $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_\varphi = r \sin \theta \dot{\varphi}$ e quindi $\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \mathbf{u}_\varphi$. Poiché i tre versori formano, in ogni punto, un triedro ortonormale si ha $\mathbf{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2$, da cui

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right), \quad (3.14)$$

e quindi

$$\mathcal{L} = T + U = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) + U(r). \quad (3.15)$$

Si noti che la φ è una coordinata ciclica³; questo implica che la quantità

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}, \quad (3.16)$$

si *conserva* durante il moto, ovvero che essa è costante lungo la traiettoria di ogni moto⁴.

Per integrare le equazioni è bene scegliere in modo opportuno il sistema di riferimento (si noti che le equazioni che abbiamo scritto valgono per qualsiasi riferimento purché abbia origine in O ; ci resta quindi la libertà di ruotare gli assi come più ci fa comodo)

³Cioè che non compare “esplicitamente” nella funzione lagrangiana; ne compare tutta via la “derivata”, cioè la corrispondente variabile con il punto. Si veda il paragrafo *Considerazioni generali* più avanti.

⁴Infatti si ha $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$.

Posizioniamo quindi l'asse delle x in modo che P si trovi, all'istante iniziale, su questo asse. Ciò significa che al tempo iniziale (che possiamo prendere come $t = 0$) si ha $\varphi(0) = 0$ e $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ (la prima condizione iniziale è ovvia, per la seconda si osservi che l'asse delle x appartiene al piano $z = 0$ comunque siano posizionati gli assi)

Ora ruotiamo il sistema di riferimento attorno all'asse x finché la velocità iniziale \mathbf{v}_0 si trovi nel piano $z = 0$. Questa scelta è univoca se la velocità iniziale non è parallela al vettore $P_0 - O$ che individua la posizione iniziale, ovvero se $\mathbf{v}_0 \wedge (P_0 - O) \neq 0$. Questa è detta condizione di *non degenerazione* del problema del moto in un campo centrale. È facile vedere che se questa condizione è violata, il moto si riduce a un moto unidimensionale sulla retta individuata dai punti P_0 e O (se $P_0 = O$ allora abbiamo $\mathbf{v}_0 \wedge (P_0 - O) \neq 0$ qualunque sia \mathbf{v}_0 ; la condizione $P_0 = O$ va però esclusa in molti casi interessanti perché il potenziale degenera quando il punto passa dal centro della forza, inoltre quando $P = O$ il nostro sistema di coordinate lagrangiane non è definito e quindi non ha senso descrivere il moto, sotto queste condizioni iniziali, in questo sistema di coordinate).

Con questa scelta degli assi si ha che, nel punto P_0 , $\mathbf{u}_r = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{u}_\theta = -\mathbf{e}_3$, $\mathbf{u}_\varphi = \mathbf{e}_2$, dove $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, sono i versori degli assi x, y e z rispettivamente. Di conseguenza abbiamo $\dot{\theta}(0) = 0$.

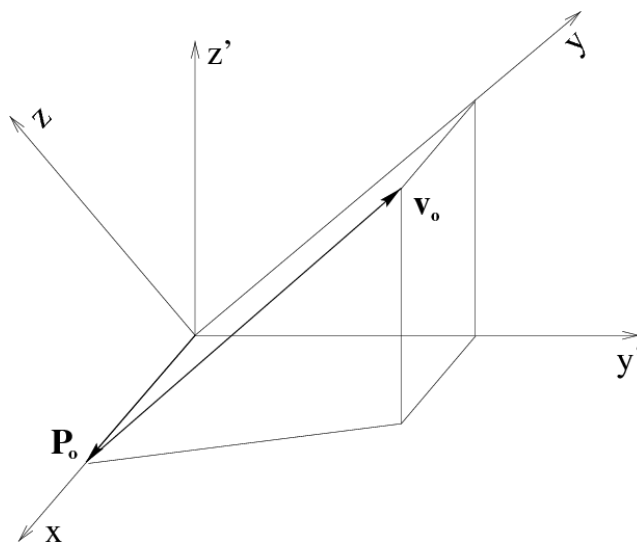


Figura 3.1: Posizionamento del piano coordinato

fig:vzero

Vogliamo ora far vedere che la funzione $\theta(t) \equiv \frac{\pi}{2}$ è soluzione delle equazioni di moto.

Scriviamo infatti l'equazione di Lagrange "per la θ "

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = m\ddot{\theta} + 2mrr\dot{\theta}^2 - mr^2\dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta = 0 \quad (3.17)$$

e osserviamo che è sempre soddisfatta prendendo $\theta(t)$ costantemente uguale⁵ a $\frac{\pi}{2}$, qualunque siano le funzioni (incognite) $r(t)$ e $\varphi(t)$.

Inoltre, posto $\theta = \frac{\pi}{2}$ nelle altre due equazioni, otteniamo un sistema di due equazioni differenziali per le sole r e φ , che possiamo risolvere con le opportune condizioni iniziali, ottenendo la soluzione del sistema nella forma $r = r(t)$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\varphi = \varphi(t)$.

Ne segue che il moto avviene nel piano $\theta = \frac{\pi}{2}$, ovvero dal piano determinato dal centro del moto O , dalla posizione iniziale P_0 e dalla direzione della velocità iniziale \mathbf{v}_0 .

Riscriviamo quindi la lagrangiana del problema tenendo conto del fatto che $\theta \equiv \frac{\pi}{2}$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r), \quad (3.18)$$

e l'integrale primo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi}. \quad (3.19)$$

In seguito indicheremo con \dot{A} la quantità

$$\dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}. \quad (3.20)$$

areolare

Si può interpretare la conservazione della quantità \dot{A} osservando che $\frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}$ rappresenta la variazione rispetto al tempo dell'*area spazzata dal raggio vettore* $P - O$, ovvero dell'area del settore di piano compreso tra i vettori $P(t_1) - O$ e $P(t_0) - O$ e la traiettoria sul piano del punto $P(t)$ per $t \in [t_0, t_1]$. \dot{A} prende il nome di *velocità areolare*.

Abbiamo così dimostrato la *seconda legge di Keplero* (che vale qualsiasi sia il potenziale $U(r)$)

II legge di Keplero: *Il raggio vettore spazza aree uguali in tempi uguali.*

3.2.1 L'equazione per r

Scriviamo ora "l'equazione per r ",

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m\ddot{r} - m r \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} = 0. \quad (3.21)$$

rorig

Possiamo ora riscrivere la (3.21) ^{rorig}eliminando la dipendenza da $\dot{\varphi}$ tramite la (3.20).^{areolare}
Si ha quindi

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m\ddot{r} - m \frac{(2\dot{A})^2}{r^3} - \frac{\partial U}{\partial r} = 0. \quad (3.22)$$

r

che ci dice che, in un moto centrale, il raggio evolve come la posizione di un punto materiale che si muove su una retta sotto l'azione di un potenziale (detto

⁵Il fatto che l'angolo $\theta(t)$ sia sempre uguale a $\frac{\pi}{2}$ implica che il moto avviene nel piano $z = 0$, con la nostra scelta degli assi. La cosa fisicamente significativa è che il moto avviene su un piano, non che questo sia il piano $z = 0$! Ma questo potevamo dedurlo a priori senza far intervenire alcun sistema di coordinate: infatti poiché il moto è centrale, abbiamo sempre $\mathbf{a} \wedge (P - O) = 0$ (la forza, e quindi l'accelerazione, è diretta come la congiungente di P con O) da cui si deduce che $\mathbf{v} \wedge (P - O) = \mathbf{L}$ è un vettore costante. Di conseguenza il moto avviene nel piano (fisso) passante per O e perpendicolare a \mathbf{L} .

potenziale efficace) dato da

$$\tilde{U} = -m \frac{(2\dot{A})^2}{2r^2} + U(r), \quad (3.23) \quad \boxed{\text{efficace}}$$

ovvero che l'equazione per r ha la forma di un'equazione di Lagrange con lagrangiana *ridotta*⁶

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - m \frac{(2\dot{A})^2}{2r^2} + U(r), \quad (3.24) \quad \boxed{\text{ridotta}}$$

Possiamo quindi studiare l'evoluzione di $r(t)$ usando le tecniche messe a punto per i moti unidimensionali.

3.2.2 Il problema di Keplero

Il problema di Keplero è il moto in campo centrale sotto l'azione di un potenziale di tipo newtoniano

$$U = \frac{mK}{r}, \quad K > 0. \quad (3.25)$$

L'energia potenziale efficace per r è quindi data da

$$\tilde{V} = m \frac{(2\dot{A})^2}{2r^2} - \frac{mK}{r}, \quad (3.26) \quad \boxed{\text{eneeff}}$$

che ha grafico con un asintoto verticale in $r = 0$ ($\lim_{r \rightarrow 0} \tilde{V} = +\infty$), ha limite 0^- per $r \rightarrow +\infty$ e un minimo negativo per $r = \frac{(2\dot{A})^2}{K}$, con valore dell'energia $E = -\frac{mK^2}{2(2\dot{A})^2} = E_0$ (nota che il valore E_0 dipende da \dot{A}).

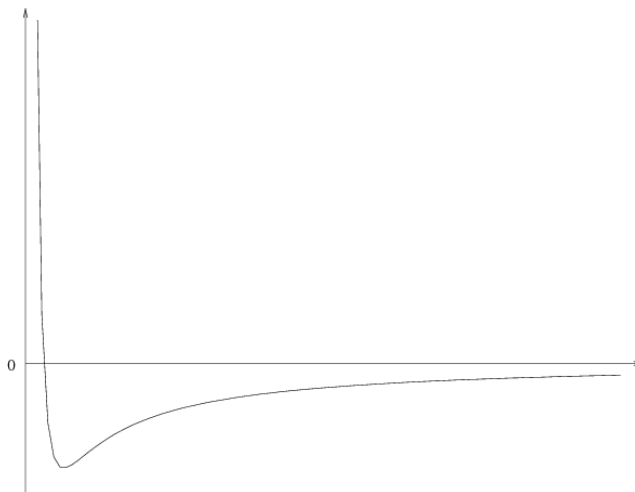


Figura 3.2: Grafico della funzione energia potenziale per il problema di Keplero

fig:keplero

⁶Attenzione: la lagrangiana ridotta **non** è la lagrangiana che si ottiene sostituendo $\dot{\varphi}$ nella lagrangiana originaria \mathcal{L} . Infatti il termine $\frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2(r)$ compare in $\tilde{\mathcal{L}}$ con il segno opposto a quello che aveva in \mathcal{L} .

Al livello di energia minimo corrisponde un'orbita circolare, in quanto r resta costante durante il moto. La risultante soluzione $(r(t), \varphi(t))$ del problema di Keplero è dunque periodica rispetto al tempo (perché?).

Ai livelli di energia E compresi tra E_0 e 0 corrispondono intervalli (r_m, r_M) limitati di soluzioni della diseuguaglianza $\dot{V} < E$, quindi soluzioni $r(t)$ periodiche rispetto a t . Questo non è sufficiente per dire che la soluzione $(r(t), \varphi(t))$ dell'intero problema è periodica. Infatti durante il periodo di "oscillazione" della distanza dal centro del moto, che è dato da

$$T = 2 \int_{r_m}^{r_M} \frac{dr}{\sqrt{2E/m - \frac{(2\dot{A})^2}{r^2} + \frac{2K}{r}}}, \quad (3.27)$$

l'angolo subisce una variazione $\Delta\varphi$ che può essere calcolata a partire dalla conservazione della velocità angolare:

$$\Delta\varphi = \int_0^T \frac{(2\dot{A})}{r^2(t)} dt. \quad (3.28)$$

Il moto risulterà periodico solo se, e solo se, l'incremento subito dall'angolo in un periodo T di oscillazione della distanza r dal centro è un multiplo razionale di 2π . Infatti se $\Delta\varphi = \frac{2k}{N}\pi$, allora dopo un tempo NT abbiamo $r(NT) = r(0)$ e $\varphi(NT) = \varphi(0) + 2k\pi$, e quindi il punto si trova nella stessa posizione (e con la stessa velocità) che al tempo $t = 0$.

La variazione angolare può anche essere espressa in termini della sola r come

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_m}^{r_M} \frac{(2\dot{A})}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2E/m - \frac{(2\dot{A})^2}{r^2} + \frac{2K}{r}}}. \quad (3.29) \quad \boxed{\text{deltaphi}}$$

L'integrale $\boxed{\text{deltaphi}}$ si calcola facilmente cambiando variabile $z = \frac{(2\dot{A})}{r}$ da cui si ottiene

$$\Delta\varphi = 2 \int_{z_M}^{z_m} \frac{dz}{\sqrt{2E/m - z^2 + \frac{K}{A}z}}, \quad (3.30) \quad \boxed{\text{deltaphi2}}$$

con $z_m = \frac{1}{r_m}$ e $z_M = \frac{1}{r_M}$. Osserviamo che i limiti di integrazioni sono le due radici del trinomio che compare a denominatore (nota che $E < 0$ e quindi le due radici sono positive). Posto $s = z - \frac{K}{2A}$ l'integrale diventa

$$\Delta\varphi = 2 \int_{-\bar{s}}^{\bar{s}} \frac{ds}{\sqrt{\bar{s}^2 - s^2}}, \quad (3.31)$$

e, infine, posto $x = \frac{s}{\bar{s}}$

$$\Delta\varphi = 2 \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\pi, \quad (3.32) \quad \boxed{\text{deltaphi3}}$$

Possiamo quindi affermare che il moto, per valori negativi di E , è un moto periodico, e che la traiettoria è una curva semplice (senza auto-intersezioni) che contiene il centro del moto al suo interno⁷.

Esercizio Ripetere i conti fatti per il caso kepleriano nel caso del potenziale elastico $U(r) = -\frac{K}{2} r^2$ e mostrare che anche in questo caso il moto è periodico.

3.2.3 L'orbita del problema di Keplero

La conservazione della velocità areolare ci permette di eliminare il tempo dalle due equazioni del moto (la (3.22) e la legge di conservazione stessa). Infatti abbiamo che la $\dot{\varphi}$ è sempre diversa da zero e quindi la φ è una funzione monotona del tempo. Possiamo quindi invertire $\varphi = \varphi(t)$ ed esprimere il tempo, e tutte le funzioni del tempo, come funzioni di φ . In particolare abbiamo

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\dot{A}}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -2\dot{A} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (3.33)$$

e

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -2\dot{A} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right) = -\frac{(2\dot{A})^2}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (3.34)$$

Sostituendo nella (3.22) otteniamo, dopo ovvie semplificazioni,

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} - \frac{K}{(2\dot{A})^2} = 0, \quad (3.35) \quad \boxed{\text{orbi}}$$

che è un'equazione di moto armonico per la funzione $\frac{1}{r(\varphi)}$ e ha quindi soluzione

$$\frac{1}{r} = \frac{K}{(2\dot{A})^2} [1 + e \cos(\varphi + \beta)], \quad (3.36) \quad \boxed{\text{orbita}}$$

dove $e > 0$ e $\beta \in [0, 2\pi)$ sono determinate dalle condizioni iniziali r_0 e $(\dot{r}_0, \dot{\varphi}_0)$ (ricordiamo che abbiamo già scelto $\varphi(0) = 0$).

È abbastanza semplice verificare che la (3.36) è l'equazione di una conica (basta esprimere r e $\cos \varphi$, $\sin \varphi$ in coordinate cartesiane e razionalizzare). Inoltre si osserva immediatamente che se $0 < e < 1$ il secondo membro della (3.36) è una funzione periodica (di periodo 2π) definita per ogni φ e quindi la curva che definisce è una curva chiusa e quindi un'ellisse. Se invece $e > 1$ ci sono

⁷Nel dimostrare questo risultato abbiamo usato lo stesso argomento che ci aveva permesso di dimostrare l'isocronia del moto armonico. In quel caso avevamo anche mostrato un risultato di "unicità" dei potenziali isocroni: il solo potenziale (simmetrico) isocrono è quello elastico.

Anche per i moti centrali vale un teorema analogo, noto come **Teorema di Bertrand** che afferma che i soli potenziali centrali che ammettano moti periodici per ogni condizione iniziale sono quello **elastico** e quello **kepleriano** (in questo caso soltanto per $E < 0$). Per la dimostrazione, se ci limitiamo a potenziali della forma $U(r) = k r^\alpha$, $\alpha \neq 0$ e $k\alpha < 0$ (per avere una forza attrattiva) oppure $U(r) = k \ln r$, $k > 0$, basta osservare che il caso $\alpha = -1$ e $\alpha = 2$ sono i soli in cui si possa riportare l'integrale

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_m}^{r_M} \frac{(2\dot{A})}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2E/m - \frac{(2\dot{A})^2}{r^2} - \frac{2}{m} V(r)}}$$

alla forma (3.32) tramite un opportuno cambiamento di variabile.

angoli “proibiti” in quanto $\frac{1}{r} > 0$. La nostra curva è quindi un ramo di iperbole. Infine, se $e = 1$ abbiamo una sola direzione “asintoticamente proibita”, quando $\varphi + \beta = \pi$. In questo caso quindi la conica è una parabola⁸.

Per ottenere la prima legge di Keplero manca solo da provare che il centro del moto occupa uno dei fuochi dell’ellisse (questo è vero anche nel caso dell’iperbole, ma le soluzioni limitate sono le sole che interessino per il problema di Keplero). Questa verifica può essere fatta usando le formule per i fuochi nell’espressione cartesiana dell’ellisse, o meglio ancora riscrivendo direttamente l’equazione dell’ellisse in un sistema di coordinate polari in cui il centro delle coordinate occupi un fuoco, vedi figura (3.3). Con le notazioni della figura, basta esprimere r' in funzione di δ , r e φ e risolvere rispetto a $\frac{1}{r}$ l’equazione $d = r + r'$.⁹

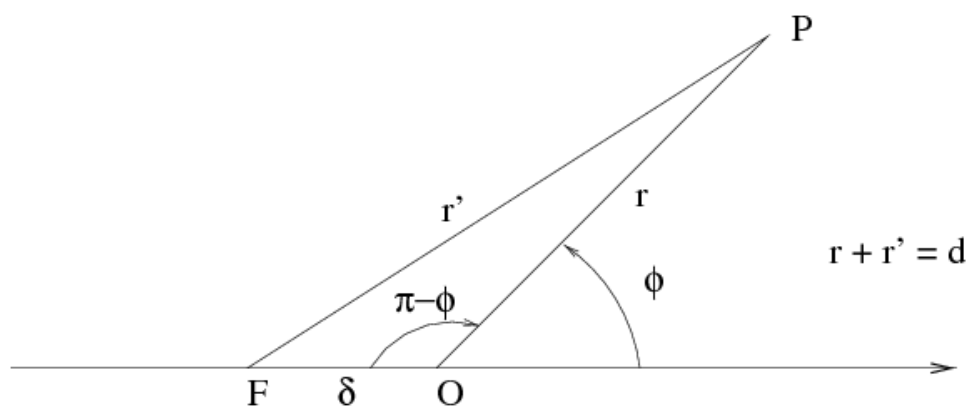


Figura 3.3: Ellisse in coordinate polari

fig:ellisse_polari

Possiamo enunciare la prima legge di Keplero:

I legge di Keplero: *Il pianeta percorre un'orbita ellittica di cui il Sole occupa uno dei fuochi.*

Infine, come esercizio, possiamo calcolare le costanti e e β della (3.36) in funzione delle condizioni iniziali. Per far questo ricordiamo che dobbiamo integrare la (3.35) con le condizioni iniziali per $1/r$ e $\frac{d}{d\varphi}(1/r)$. $1/r_0$ è uno dei dati del nostro problema, per quanto riguarda $\frac{d}{d\varphi}(1/r)$ ricordiamo che $\frac{d}{d\varphi}(1/r) = -\dot{r}/(2\dot{A})$. Inserendo quindi le condizioni iniziali $\varphi_0 = 0$, r_0 , \dot{r}_0 e $2\dot{A} = r_0^2\dot{\varphi}_0$ e la definizione di E , otteniamo

$$\tan \beta = \frac{\dot{r}_0}{2\dot{A}} \frac{1}{\frac{1}{r_0} - \frac{K}{(2\dot{A})^2}} \quad (3.37)$$

⁸Confrontando questo risultato con lo studio qualitativo dell’equazione per r in funzione del tempo, ne risulta che $e < 1$ sse $E < 0$, $e > 0$ sse $E > 0$ e $e = 0$ sse $E = 0$, vedi anche (3.38).

⁹Ovviamente con questo calcolo otteniamo un’ellisse il cui asse maggiore coincide con l’asse polare. Quindi l’afelio, ovvero il punto più distante dall’origine, corrisponde all’angolo $\varphi = \pi$, come nella figura, oppure $\varphi = 0$ se invertiamo i fuochi. In altre parole questa rappresentazione corrisponde a un angolo $\beta = \pi$ ($\beta = 0$) nella (3.36). Questo in generale non sarà vero per il moto in quanto, avendo scelto $\varphi(0) = 0$, non possiamo anche assumere che $\dot{r}(0) = 0$ come si ha nei punti di massima distanza dal centro del moto

$$e = \sqrt{1 + 2 \frac{(2\dot{A})^2}{K^2 m} E}. \quad (3.38) \quad \boxed{\text{e di E}}$$

3.2.4 La terza legge

A partire dall'equazione per l'orbita possiamo calcolare le lunghezze dei semiassi maggiore a e minore b dell'ellisse. Abbiamo infatti, posto r_m e r_M il minimo e il massimo raggio,

$$a = \frac{1}{2}(r_m + r_M) = \frac{(2\dot{A})^2}{K(1 - e^2)} = -\frac{Km}{2E}, \quad b = a\sqrt{1 - e^2} = \frac{2\dot{A}}{\sqrt{-\frac{2E}{m}}} \quad (3.39)$$

Possiamo ora calcolare in termini dei parametri fisici l'area spazzata dal raggio vettore in una rivoluzione, ovvero l'area dell'ellisse

$$\pi ab = \dot{A} T \quad (3.40) \quad \boxed{\text{area_ellisse}}$$

Nella [\(3.40\)](#) possiamo eliminare b

$$\pi a \frac{2\dot{A}}{\sqrt{-\frac{2E}{m}}} = \dot{A} T \quad (3.41)$$

e, infine, eliminare E tramite la a ottenendo

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{K} \quad (3.42)$$

che è la **terza legge di Keplero**: *i quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti stanno tra loro nel rapporto dei cubi dei semiassi maggiori delle orbite.* Nota che ciò che la terza legge dice è che il rapporto $\frac{T^2}{Ka^3}$ è *indipendente dal pianeta considerato.*

Capitolo 4

I sistemi vincolati e coordinate lagrangiane

Molti esempi di sistemi meccanici quali il moto di un punto su una traiettoria assegnata, il moto di un pendolo semplice, etc prevedono una descrizione in questi termini: il “corpo” è rappresentato tramite un punto materiale; a esso sono applicate delle forze specificate in funzione della sua posizione e velocità; si richiede infine che il moto soddisfi a delle limitazioni a priori sulle sue possibili posizioni e velocità. Per esempio, nel caso del pendolo semplice, il moto deve avvenire in modo che il punto mantenga invariata la sua distanza da un punto fisso rispetto alla Terra.

Nel caso dei sistemi rigidi (formati da un numero finito di punti) abbiamo visto che le limitazioni al moto consistono nell’assumere che le mutue distanze dei punti tra loro restino costanti durante il moto del sistema.

Vogliamo qui dare uno schema matematico per il trattamento di un sistema (finito) di punti materiali soggetti a tali limitazioni, che chiameremo *vincoli*. Per questo è necessario iniziare dalla cinematica studio della cinematica.

4.1 Sistemi olonomi

Sia $\{P_i\}$ un sistema di punti (per il momento trascuriamo il fatto che questi siano punti materiali, che non ha influenza sulla descrizione dello stato cinematico del sistema) con $i = 1, \dots, N$. Indichiamo con $\mathbf{v}_i = \frac{dP_i}{dt}$ il vettore velocità del punto P_i .

Un vincolo cinematico per il sistema sarà una qualsiasi relazione tra le posizioni e le velocità del tipo

$$F(P_1, \dots, P_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t) = 0, \quad (4.1) \quad \boxed{\text{vincolati.1}}$$

che chiameremo *equazione vincolare*.

Un sistema di punti lo diremo *vincolato* se le sue posizioni e velocità sono soggette a uno o più vincoli della forma (4.1), ovvero siano assegnate M equazioni vincolari

$$g_k(P_1, \dots, P_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t) = 0, \quad k = 1, \dots, M. \quad (4.2) \quad \boxed{\text{vincolati.2}}$$

Nella quasi totalità dei sistemi di interesse fisico, le equazioni in [\(4.2\)](#) hanno una forma semplificata in quanto le velocità compaiono linearmente nelle funzioni g_k , ovvero

$$g_k(P_1, \dots, P_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t) = \sum_{\substack{i=1, \dots, N \\ j=1, 2, 3}} a_{kj}^i(P_1, \dots, P_N, t) v_i^j, \quad (4.3) \quad \text{vincolati.3}$$

dove v_i^j è la componente j -esima, $j = 1, 2, 3$, della velocità \mathbf{v}_i del punto P_i .

Inoltre, in molti casi è possibile *integrare* queste equazioni vincolari, determinando un insieme di funzioni f_k , $k = 1, \dots, m$ per cui sia abbia

$$f_k(P_1, \dots, P_N, t) = 0, \quad k = 1, \dots, m \quad (4.4) \quad \text{vincolati.4}$$

e le equazioni [\(4.3\)](#) siano conseguenza delle [\(4.4\)](#) (vedremo poi quando ciò sia possibile.)

Quando i vincoli sono espressi nella forma [\(4.4\)](#) diremo che il sistema è *olonomo*. Quando invece i vincoli sono nella forma generale [\(4.2\)](#) e non possono essere ricondotti alla forma [\(4.4\)](#), parleremo di vincoli *anonomi*.

Infine diremo che un vincolo è *fisso* se la funzione vincolare non dipende esplicitamente dal tempo¹.

Da ora in poi ci limitiamo a trattare di sistemi di vincoli olonomi, ovvero del tipo [\(4.4\)](#).

Iniziamo con il formulare alcune richieste sulle funzioni f_k : la prima è che [\(4.4\)](#), inteso come sistema di m equazioni in $3N$ incognite, (le coordinate dei punti P_i), abbia soluzioni per ogni tempo t , o in altri termini, che a ogni istante t , l'insieme dei punti P_i in $(\mathbf{R}^3)^N$ per cui le [\(4.4\)](#) sono soddisfatte sia non vuoto (questa è l'ovvia richiesta che il sistema di punti “possa stare da qualche parte”!): indicheremo con $\mathcal{C}(t)$ questo insieme e lo chiameremo *spazio delle configurazioni* all'istante t (se poi in vincoli sono tutti fissi, allora \mathcal{C} un insieme fissato indipendente dal tempo.).

La seconda richiesta è che le funzioni f_k siano “abbastanza” regolari in un intorno di $\mathcal{C}(t)$ in $(\mathbf{R}^3)^N$, per ogni t , e altrettanto come funzioni di t : chiederemo che siano almeno dotate di derivate seconde continue.

La terza richiesta infine è che i vincoli che abbiamo imposto siano tutti *effettivi*, ovvero che non si siano scritte alcune equazioni vincolari implicate dalle altre. Il teorema della funzione implicita (teorema del Dini) ci fornisce la condizione sotto le quali questa richiesta è soddisfatta: costruiamo la matrice jacobiana delle derivate prime delle f_k rispetto a tutte le $3N$ variabili (che possiamo pensare di aver ordinato $(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_N)$), abbiamo quindi una matrice di m righe e $3N$ colonne:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} & \frac{\partial f_1}{\partial y_N} & \frac{\partial f_1}{\partial z_N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \frac{\partial f_m}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_N} & \frac{\partial f_m}{\partial y_N} & \frac{\partial f_m}{\partial z_N} \end{pmatrix} \quad (4.5) \quad \text{vincolati.5}$$

¹I vincoli fissi sono di gran lunga i più comuni. Inoltre la dipendenza esplicita dell'equazioni vincolari dal tempo complica un po' la trattazione: si consiglia di “leggere” tutto questa trattazione almeno una volta *supponendo i vincoli fissi*, ovvero eliminando le dipendenze esplicite dal tempo.

i vincoli saranno tutti effettivi se il rango di questa matrice è massimo²; questa condizione deve valere per ogni tempo t .

In particolare il teorema della funzione implicita ci garantisce che per ogni configurazione $\{P_1^0, \dots, P_N^0\} \in \mathcal{C}(t)$ possiamo trovare un sistema di *coordinate locali* adattate a $\mathcal{C}(t)$, ovvero un'applicazione differenziabile da un aperto di $U \times I \subset \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}$, con $l = 3N - m$, in $(\mathbf{R}^3)^N$, che denoteremo con $(P_1(q_1, \dots, q_l, t), \dots, P_N(q_1, \dots, q_l, t))$ tale che

$$f_k(P_1(q_1, \dots, q_l, t), \dots, P_N(q_1, \dots, q_l, t), t) = 0, \quad (q_1, \dots, q_l, t) \in U \times I, \quad (4.6)$$

o, in altre parole, che i punti $P_1(q_1, \dots, q_l, t), \dots, P_N(q_1, \dots, q_l, t)$ appartengono a $\mathcal{C}(t)$, per ogni $(q_1, \dots, q_l, t) \in U \times I$. Chiameremo le (q_1, \dots, q_l) *coordinate lagrangiane*.

4.1.1 Atti di moto virtuali

Nella formulazione della meccanica dei sistemi vincolati è essenziale caratterizzare tutte le possibili variazioni di configurazione che un sistema di punti può subire a partire da una configurazione data. Per fissare le idee supponiamo per il momento che il sistema sia soggetto a vincoli fissi

$$f_k(P_1, \dots, P_N) = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.7) \quad \boxed{\text{vincolati.6}}$$

Un cambiamento di configurazione $P_i \rightarrow Q_i = P_i + \Delta P_i$ sarà compatibile con i vincoli se anche le nuove posizioni soddisfano le equazioni vincolari, ovvero

$$f_k(Q_1, \dots, Q_N) = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.8) \quad \boxed{\text{vincolati.7}}$$

Qui però siamo interessati a variazioni *infinitesime* delle configurazioni, ovvero a “tendenze al moto” più che al moto effettivo: useremo la notazione δP_i per indicare queste variazioni. Esse possono essere caratterizzate matematicamente chiedendo che le configurazioni “variate” $P_i + \delta P_i$ *soddisfino le equazioni vincolari al prim'ordine* nel loro sviluppo di Taylor attorno alla configurazione $\{P_1, \dots, P_N\}$. Avremo quindi una caratterizzazione³ per i δP_i

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_k}{\partial P_i}(P_1, \dots, P_N) \cdot \delta P_i = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.9) \quad \boxed{\text{vincolati.8}}$$

Le equazioni (4.9) formano un sistema di m equazioni lineari nelle $3N$ incognite δP_i date dalle componenti dei P_i : poiché abbiamo assunto che la matrice (4.5), che è la matrice del sistema (4.9), sia di rango massimo, ne deduciamo che il vettore $(\delta P_1, \dots, \delta P_n)$ deve appartenere a un sottospazio di dimensione $l = 3N - m$ di $(\mathbf{R}^3)^N$.

²Ovviamente il rango non può essere maggiore del massimo tra m e $3N$, quindi abbiamo implicitamente assunto che $m \leq 3N$. Se $m = 3N$ la condizione di rango massimo implica che \mathcal{C} si riduce a un insieme di punti isolati di $(\mathbf{R}^3)^N$ e di conseguenza il sistema non possiede libertà di movimento. Ne seguito assumeremo sempre che $m < 3N$.

³Attenzione alla notazione: nella formula che segue, e nel resto del corso, useremo la notazione $\frac{\partial f_k}{\partial P_i}$ per indicare il gradiente (tridimensionale) di una funzione rispetto alle coordinate della sola variabile P_i . Quindi $\frac{\partial f_k}{\partial P_i}$ è un vettore di \mathbf{R}^3 e possiamo farne il prodotto scalare con $\delta P_i \in \mathbf{R}^3$.

Chiameremo *spostamenti virtuali* del sistema di punti tutte le N -ple $(\delta P_1, \dots, \delta P_n)$ di vettori di \mathbf{R}^3 che soddisfano le condizioni [\(4.9\)](#)^{vincolati.8}.

Nel caso di vincoli mobili, se vogliamo caratterizzare gli spostamenti compatibili (al primo ordine) con i vincoli, non otteniamo più la condizione [\(4.9\)](#)^{vincolati.8}, in quanto dobbiamo tener conto del fatto che il vincolo si “sposta” e dovremo modificare la [\(4.9\)](#)^{vincolati.8}. Indicando con il simbolo dP_i questo spostamento, avremo

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_k}{\partial P_i}(P_1, \dots, P_N, t) \cdot dP_i + \frac{\partial f_k}{\partial t}(P_1, \dots, P_N, t) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (4.10) \quad \text{vincolati.9}$$

Continuiamo però a considerare come *spostamenti virtuali* δP_i quei vettori che soddisfano la condizione

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_k}{\partial P_i}(P_1, \dots, P_N, t) \cdot \delta P_i = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (4.11) \quad \text{vincolati.10}$$

che non è altro che la [\(4.9\)](#)^{vincolati.8}, parametrizzata dal tempo t . Possiamo pensare quindi agli spostamenti virtuali come quelli spostamenti compatibili con la “posizione” del vincolo congelata al tempo t . Quindi nel caso dei vincoli mobili, lo spazio degli spostamenti virtuali varierà non solo da posizione a posizione ma anche al variare del tempo.

4.1.2 Spostamenti virtuali in funzione delle coordinate lagrangiane

La [\(4.9\)](#)^{vincolati.8} ci dice che l'insieme degli spostamenti virtuali forma un sottospazio vettoriale di $(\mathbf{R}^3)^N$. Inoltre la condizione di rango massimo della matrice jacobiana [\(4.5\)](#)^{vincolati.5} ci assicura che la dimensione di questo spazio è m , ovvero il numero dei gradi di libertà del sistema.

È possibile costruire una base di questo spazio vettoriale usando i vettori $\frac{\partial P_i}{\partial q_k}$ delle derivate parziali delle funzioni (vettoriali) che esprimono i punti P_i appartenenti al vincolo in funzione delle coordinate lagrangiane. Avremo infatti che

$$\delta P_i = \sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \delta q_k, \quad (4.12) \quad \text{vincolati.11}$$

⁴Una piccola divagazione storica per spiegare l'origine del nome “spostamenti virtuali”. Il nome è legato al cosiddetto *Principio dei lavori virtuali*, condizione per caratterizzare le configurazioni di equilibrio di un sistema vincolato; ecco come lo riassume Lagrange nella *Mécanique Analytique*: *Se un sistema qualsiasi di corpi o punti soggetti a delle forze qualsiasi, è in equilibrio, e si impone a questo sistema un piccolo spostamento qualsiasi, in virtù del quale ogni punto percorre uno spazio infinitamente piccolo che sarà espresso dal suo spostamento virtuale, la somma delle forze, ognuna moltiplicata per lo spazio su cui essa è applicata, percorso secondo la direzione stessa della forza, sarà sempre uguale a zero, prendendo per positivi gli spazi percorsi nel senso della forza per negativi quelli percorsi nel senso opposto.* (ovviamente possiamo semplificare la frase di Lagrange usando i prodotti scalari tra le forze e gli spostamenti, ovvero il lavoro delle forze.)

L'idea che c'è sotto è che si “saggia” una posizione di equilibrio “provando a spostare” il sistema dall'equilibrio stesso, in modo “infinitesimo”. Questo è ciò che si fa quando vogliamo farsi un'idea di quanto pesi una valigia: la si “prova a sollevare” da terra di un'altezza impercettibile, lo sforzo esercitato dal nostro braccio dovrà equilibrare quello esercitato dalla forza peso.

dove δq_k indica la variazioni della coordinata q_k . Poiché le coordinate (q_1, \dots, q_l) sono libere, di variare in un aperto di \mathbf{R}^l , queste variazioni sono arbitrarie. La (4.12) ci dice quindi che l'insieme degli spostamenti virtuali forma uno spazio vettoriale di cui i vettori $(\frac{\partial P_1}{\partial q_k}, \dots, \frac{\partial P_N}{\partial q_k}) \in (\mathbf{R}^3)^N$, $k = 1, \dots, l$, sono una base.

4.1.3 Punto vincolato a una superficie qualsiasi

Come primo esempio di cinematica di un sistema vincolato vediamo il caso di un punto vincolato a una superficie qualsiasi.

Per il momento limitiamoci ancora a un vincolo fisso, cioè esprimibile nella forma $f(x, y, z) = 0$.

Vogliamo chiarire per prima cosa l'idea di *spostamento infinitesimo* compatibile con il vincolo⁵.

Un punto vincolato a una superficie può muoversi su una qualsiasi curva contenuta nella superficie stessa: il suo "atto di moto", o spostamento infinitesimo, sarà quindi il un *vettore tangente* alla curva. L'insieme dei vettori tangenti alle curve passanti per un punto fissato di una superficie forma il piano tangente alla superficie stessa in quel punto. Possiamo quindi assumere come definizione "matematica" di *spostamento virtuale di P, a un tempo dato t, un qualsiasi vettore tangente alla superficie nel punto (geometrico) della superficie occupato da P nell'istante t*.

Ricordiamo le condizioni che assumiamo per la funzione f :

1. la funzione f è derivabile almeno 2 volte rispetto ai suoi argomenti, con derivate prime e seconde continue.
2. in tutti i punti dell'insieme $f(x, y, z) = 0$ (che assumiamo non vuoto) il gradiente di f è un vettore non nullo.

La seconda condizione è quella che garantisce l'esistenza del piano tangente alla superficie (in ogni suo punto), ovvero che l'insieme dei vettori tangenti alle curve passanti dal punto e contenute sulla superficie, forma effettivamente uno spazio vettoriale di dimensione due. Per verificare questa affermazione, sia $(x(\tau), y(\tau), z(\tau))$ una curva (parametrizzata tramite una variabile τ) che giace sulla superficie, ovvero che per ogni τ soddisfa $f(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) = 0$. A sua volta, derivando rispetto a τ otteniamo

$$\text{grad}f(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \cdot \left(\frac{dx}{d\tau}(\tau) \mathbf{e}_1 + \frac{dy}{d\tau}(\tau) \mathbf{e}_2 + \frac{dz}{d\tau}(\tau) \mathbf{e}_3 \right) = 0 \quad (4.13) \quad \boxed{\text{tangente}_0}$$

e, essendo $\text{grad}f$ un vettore non nullo, la condizione (4.13) garantisce che l'insieme dei vettori $\frac{dx}{d\tau} \mathbf{e}_1 + \frac{dy}{d\tau} \mathbf{e}_2 + \frac{dz}{d\tau} \mathbf{e}_3$ che la soddisfano formano uno spazio vettoriale di dimensione due.

Inoltre il Teorema del Dini ci garantisce che, per ogni punto della superficie, esiste un intorno in cui la superficie è rappresentabile come l'immagine di un

⁵Questa "necessità" è in verità un problema peculiare di chi affronta il problema con "troppo bagaglio matematico". Per tutti i grandi matematici che abbiamo citato cosa fosse uno spostamento virtuale era, almeno concettualmente, una cosa chiarissima; in compenso nessuno di loro possedeva una "definizione rigorosa" di funzione derivabile! In altre parole dobbiamo far vedere che la matematica degli $\varepsilon - \delta$ ha gli strumenti per descrivere, nel suo ambito, il principio dei lavori virtuali e **non** che questo principio, in fondo in fondo, non è altro che un certo qual miracoloso intruglio di geometria differenziale.

aperto D del piano. Ovvero esistono tre funzioni $x(q_1, q_2)$, $y(q_1, q_2)$ e $z(q_1, q_2)$ di due variabili $(q_1, q_2) \in D$ tali che

$$f(x(q_1, q_2), y(q_1, q_2), z(q_1, q_2)) = 0, \quad \text{per ogni } (q_1, q_2) \in D \quad (4.14) \quad \boxed{\text{mappa2}}$$

Le curve

$$q_1 \rightarrow (x(q_1, q_2), y(q_1, q_2), z(q_1, q_2)), \quad q_2 = \text{costante}$$

e

$$q_2 \rightarrow (x(q_1, q_2), y(q_1, q_2), z(q_1, q_2)), \quad q_1 = \text{costante}$$

formano il reticolo di linee coordinate sulla superficie $f = 0$. I vettori tangenti a queste curve, che indicheremo con \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 , o anche con $\frac{\partial P}{\partial q_1}$ e $\frac{\partial P}{\partial q_2}$, formano una base dello spazio tangente.

Osserviamo infine che, per ogni variazione delle variabili $(q_1, q_2) \in D$, la corrispondente variazione subita dal punto $(x(q_1, q_2), y(q_1, q_2), z(q_1, q_2))$ lascia automaticamente il punto sulla superficie.

Questo ci permette di definire tutti gli spostamenti virtuali tramite come combinazioni lineari dei vettori tangenti $\frac{\partial P}{\partial q_1}$ e $\frac{\partial P}{\partial q_2}$,

$$\delta P = \frac{\partial P}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial P}{\partial q_2} \delta q_2, \quad (4.15) \quad \boxed{\text{spostvirt2}}$$

dove con δq_1 e δq_2 abbiamo indicato le variazioni di q_1 e q_2 , che sono ora numeri qualsiasi.

Capitolo 5

Le equazioni di moto

Sia $\{P_i, m_i\}$, $i = 1, \dots, N$, un sistema di punti materiali, che supponiamo soggetto a un sistema di vincoli olonomi

$$f_k(P_1, \dots, P_N, t) = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (5.1) \quad \text{vincolati.12}$$

Supponiamo il sistema soggetto a delle forze che si esercitano sui punti indipendentemente dal fatto che il loro moto debba risultare a priori vincolato. Indicheremo con \mathbf{F}_i la risultante delle forze applicate al punto P_i . Chiameremo queste *forze direttamente applicate*.

Sotto l'azione di tali forze il moto del sistema retto dalle equazioni $m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i$ risulterà in genere incompatibile con le equazioni vincolari (5.1) (p.e. si pensi a un punto appoggiato su un piano verticale: in questo caso la forza direttamente applicata è la forza peso, e il punto abbandonerà il piano orizzontale durante il moto sotto l'azione di questa forza.)

Se vogliamo salvaguardare la descrizione del moto tramite le equazioni di Newton dobbiamo quindi supporre che i vincoli “esercitino” delle forze \mathbf{R}_i sui punti del sistema in modo che le soluzioni delle equazioni

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.2) \quad \text{vincolati.13}$$

risultino compatibili con le equazioni vincolari (5.1). Chiameremo tali forze *reazioni vincolari*.

Le (5.2) assieme alle (5.1) formano un sistema di $3N + m$ equazioni da cui dovremmo ricavare sia le incognite di moto (le $3N$ coordinate dei punti P_i) sia le $3N$ componenti delle reazioni vincolari \mathbf{R}_i . Poiché $m < 3N$, il sistema risulta indeterminato, ovvero non possiamo da queste sole “informazioni” determinare la soluzione completa del problema del moto vincolato.

5.1 Il punto vincolato

Iniziamo esaminando il caso di un punto materiale (P, m) soggetto a un solo vincolo olonomo fisso

$$f(x, y, z) = 0. \quad (5.3) \quad \text{vincolati.14}$$

Abbiamo quindi un punto costretto a muoversi su una superficie fissata. Come abbiamo già detto le equazioni di moto

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{R}, \quad (5.4) \quad \text{vincolati.15}$$

dovranno contenere una quantità vettoriale \mathbf{R} incognita il cui scopo di far sì che la soluzione di (5.4) soddisfi ad ogni istante la condizione vincolare (5.3). Cio ci dà un sistema indeterminato, avendo solo quattro equazione per determinare sei incognite, le coordinate di P e le componenti di \mathbf{R} .

L'indeterminatezza del problema così formulato è dovuta al fatto che non abbiamo specificato "come" il vincolo, nella sua realizzazione fisica, intervenga per assicurarci il soddisfacimento della condizione (5.3). Pensiamo p.e. a un oggetto appoggiato su di un tavolo: il piano del tavolo impedisce all'oggetto di cadere, in termini più formali, ci fornisce quella forza necessaria a contrastare l'effetto della forza peso; ma cosa succede se tento di muovere l'oggetto sul piano stesso? Ogni vincolo "reale" si opporrà a tale moto: è l'effetto che va sotto il nome di attrito. Questo effetto viene modellato nelle equazioni di moto tramite una forza che ha sempre direzione e verso opposti a quello del moto stesso (e quindi della velocità del corpo) e che andrà ad aggiungersi alla componente della reazione vincolare che impedisce al corpo di abbandonare il vincolo. Possiamo ridurre in molti casi l'intensità di questa componente e pensare a un modello ideale in cui questa resistenza al moto sul vincolo viene a mancare del tutto: chiameremo ideale o "liscio" un tale vincolo.

La caratterizzazione di tali vincoli è immediata in termini degli spostamenti virtuali: poiché la resistenza al moto si esercita nella direzione del moto, il lavoro da essa compiuto sarà non nullo (negativo) per ogni possibile spostamento virtuale del corpo. Da qui la definizione di vincolo ideale come quello in cui *il lavoro della reazione vincolare è nullo per ogni spostamento virtuale*, ovvero

$$\mathbf{R} \cdot \delta P = 0, \quad \text{per ogni } \delta P. \quad \text{vincolati.16}$$

Nel caso di un sistema formato da un solo punto materiale su un vincolo semplice della forma (5.3), è immediato verificare che questa condizione equivale a imporre alla reazione vincolare \mathbf{R} di essere ortogonale al piano tangente al vincolo, ovvero parallela al gradiente della funzione vincolare nella posizione occupata dal punto sul vincolo:

$$\mathbf{R} = \lambda \nabla f(x_P, y_P, z_P), \quad \text{vincolati.17}$$

dove λ è un parametro incognito (detto moltiplicatore di Lagrange), il cui valore dipenderà dalla posizione e dalla velocità del punto. Otteniamo così un sistema di equazioni, dette equazioni di Lagrange di prima specie

$$\begin{cases} m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \lambda \nabla f, \\ f(x_P, y_P, z_P) = 0, \end{cases} \quad \text{vincolati.18}$$

di quattro equazioni nelle quattro incognite x_P, y_P, z_P, λ .

La risolubilità di (5.7) è garantita dalla possibilità di eliminare l'incognita λ nel seguente modo: deriviamo due volte rispetto al tempo t l'equazione vincolare, per ottenere

$$\nabla f \cdot \mathbf{a} + \mathbf{v} \cdot H(f)\mathbf{v} = 0, \quad \text{vincolati.19}$$

dove $H(f)$ indica la matrice delle derivate seconde della funzione f . Ora moltiplichiamo scalarmente per ∇f l'equazione di moto e sostituiamo il termine $\nabla f \cdot \mathbf{a}$ tramite la (5.8). In questo modo possiamo "risolvere" l'equazione ottenuta rispetto a λ

$$\lambda = -\frac{m\mathbf{v} \cdot H(f)\mathbf{v} + \nabla f \cdot \mathbf{F}}{|\nabla f|^2}, \quad \text{vincolati.20}$$

che possiamo sostituire nell'equazione di moto, ottenendo un sistema di tre equazioni differenziali in forma normale (nota che il secondo membro di (5.9) dipende solo da le coordinate del punto P e dalle componenti della velocità \mathbf{v}), il che ci garantisce la risolubilità del problema.

L'estensione al caso di un vincolo dipendente dal tempo è immediata. Anche in questo caso la definizione di vincolo liscio è data dalla (5.5). La sola differenza è che questa condizione, che nel caso dei vincoli fissi garantisce che il lavoro compiuto dalla reazione vincolare era nullo, ora deve essere limitata al "lavoro virtuale" ovvero al prodotto scalare della reazione con la componente dello spostamento tangente al vincolo nella sua configurazione istantanea. Per chiarire questo punto si pensi a un corpo che si muova sul piano di un ascensore in movimento. Ovviamente la condizione di "vincolo liscio" deve solo tener conto che tra il piano dell'ascensore e il corpo in moto non ci sia attrito, indipendentemente dal fatto che l'ascensore stia salendo, scendendo o sia fermo. Quindi la reazione vincolare deve risultare ortogonale al piano dell'ascensore (condizione garantita dalla (5.5)). Quando l'ascensore sta salendo (o scendendo) la reazione vincolare compierà quindi un lavoro "effettivo" non nullo. Questo ha per conseguenza che nel caso dei vincoli mobili in genere non si ha la conservazione dell'energia totale anche in presenza di forze direttamente applicate di tipo conservativo.

5.2 L'equazione simbolica

L'approccio usato per un sistema di n punti soggetto a m vincoli. La generalizzazione della definizione di vincolo liscio si ottiene in analogia con la (5.5): sia $\{P_i, m_i\}$, $i = 1, \dots, N$, un sistema di punti materiali soggetto a un sistema vincolare

$$f_k(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (5.10) \quad \text{vincolati.21}$$

Anche in questo caso dobbiamo supporre che i vincoli esercitino delle forze \mathbf{R}_i sui punti P_i in modo che la soluzione delle equazioni di moto

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (5.11) \quad \text{vincolati.22}$$

siano compatibili con le condizioni vincolari (5.10). Anche in questo caso, il sistema formato da (5.11) e (5.10) è indeterminato, contendo $6N$ incognite contro le $3N + m$ equazioni.

Diremo che i vincoli sono lisci quando le reazioni vincolari \mathbf{R}_i è soddisfano la condizione

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \cdot \delta P_i = 0, \quad \text{per ogni sistema di } \delta P_i, \quad (5.12) \quad \text{vincolati.23}$$

che esprimeremo dicendo che *il lavoro virtuale delle reazioni vincolari è nullo per ogni sistema di spostamenti virtuali*.

Vediamo come questa condizione ci permetta di ridurre a m il numero delle incognite dovute alle reazioni vincolari. Ricordiamo che l'insieme degli spostamenti virtuali forma uno spazio vettoriale di dimensione $3N - m$ i quanto soluzioni del sistema di equazioni lineari (4.11). Questo implica che la (5.12) sia in realtà un sistema di $3N - m$ equazioni, le cui soluzioni possono essere scritte come

$$\mathbf{R}_i = \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial P_i}, \quad (5.13) \quad \text{vincolati.24}$$

dove λ_k , $k = 1, \dots, m$, sono parametri arbitrari (moltiplicatori di Lagrange).
(verificare per esercizio che le \mathbf{R}_i così definite sono effettivamente soluzioni di (4.11) qualsiasi siano i λ_k). Sostituendo le espressioni (5.13) nelle equazioni di moto (5.11), otteniamo il sistema di equazioni di Lagrange di prima specie

$$\begin{cases} m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{P}_i}, & i = 1, \dots, N, \\ f_k(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) = 0, & k = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (5.14) \quad \boxed{\text{vincolati.25}}$$

Il processo di eliminazione delle λ_k in (5.14), possibile in linea di principio, è algebricamente molto complesso. Vediamo come sia possibile percorrere un'altra strada che ci conduca direttamente a un sistema di tante equazioni quanti sono i gradi di libertà del sistema, che ricordiamo sono $l = 3N - m$.

Ritorniamo alle (5.11) e moltiplichiamo scalarmente (in \mathbf{R}^3) ognuna delle equazioni per lo spostamento virtuale del punto corrispondente δP_i , e sommiamo le equazioni scalari così ottenute. In virtù della assunzione che i vincoli siano lisci, ovvero la (5.12), le reazioni vincolari "scompaiono" dalla somma, ovvero abbiamo

$$\sum_{i=1}^N (m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \delta P_i = 0, \quad \text{per ogni sistema di } \delta P_i, \quad (5.15) \quad \boxed{\text{vincolati.26}}$$

che è nota con il nome di *equazione simbolica della dinamica*.

Possiamo ora sostituire in (5.15) l'espressione degli spostamenti virtuali in funzioni delle coordinate lagrangiane, (4.12). Otteniamo

$$\sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^N (m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \delta q_k = 0, \quad (5.16) \quad \boxed{\text{vincolati.27}}$$

(dove abbiamo scambiato le somme su i e su k) che ora devono valere per ogni valore delle variazioni δq_k delle l coordinate lagrangiane (ricordiamo che il vettore (q_1, \dots, q_l) appartiene a un aperto di \mathbf{R}^l). Ne segue che la somma si può annullare solo se sono nulli tutti i coefficienti delle δq_k , $k = 1, \dots, l$, ovvero se valgono le l equazioni scalari

$$\sum_{i=1}^N (m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, l. \quad (5.17) \quad \boxed{\text{vincolati.28}}$$

Queste equazioni costituiscono un sistema di equazioni differenziali necessarie (ovvio) e sufficienti (non ovvio) per determinare il moto del sistema. Per rendersi conto della sufficienza delle equazioni dobbiamo far vedere che possono essere scritte come un sistema di l equazioni differenziali del secondo ordine in forma normale, capace di determinare le coordinate lagrangiane q_k in funzione del tempo.

Nella (5.17) distinguiamo i due termini $\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k}$ e $\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = Q_k$. Il secondo termine Q_k è detto componente lagrangiana della forza. Poiché esso dipende solo dalle posizioni e dalle velocità dei punti, fa intervenire solo le componenti dei vettori (q_1, \dots, q_l) e $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l)$. Nel caso che le forze siano tutte conservative, e quindi valga

$$\mathbf{F}_i = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{P}_i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.18) \quad \boxed{\text{vincolati.29}}$$

per qualche funzione $U(P_1, \dots, P_N)$, abbiamo

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial \mathbf{q}_k} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}_k}. \quad (5.19) \quad \text{vincolati.30}$$

Resta da esprimere in modo efficace la quantità $\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial \mathbf{q}_k}$.

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial \mathbf{q}_k} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial \mathbf{q}_k}. \quad (5.20) \quad \text{vincolati.31}$$

Per far ciò utilizzeremo l'energia cinetica del sistema espressa tramite le coordinate lagrangiane.

5.3 Le equazioni di Lagrange

Consideriamo un sistema vincolato¹ le cui configurazioni siano descritte tramite un insieme di coordinate lagrangiane q_k . Il legame tra le coordinate cartesiane dei punti e le coordinate lagrangiane sarà espresso dalle relazioni

$$P_i = P_i(q_1, \dots, q_l, t), \quad (5.21) \quad \text{vincolati.32}$$

nelle quali può comparire esplicitamente il tempo nel caso i vincoli siano mobili. Un moto qualsiasi del sistema compatibile con i vincoli è determinato dall'assegnazione delle funzioni del tempo $q_1(t), \dots, q_l(t)$, e quindi dalle relazioni

$$P_i(t) = P_i(q_1(t), \dots, q_l(t), t). \quad (5.22) \quad \text{vincolati.33}$$

Derivando la (5.22) rispetto al tempo, determineremo quindi il legame tra le velocità dei punti del sistema e le coordinate lagrangiane²

$$\mathbf{v}_i = \frac{dP_i}{dt}(t) = \sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k}(q_1(t), \dots, q_l(t), t) \dot{q}_k + \frac{\partial P_i}{\partial t}(q_1(t), \dots, q_l(t), t). \quad (5.23) \quad \text{vincolati.34}$$

Possiamo ora utilizzare l'espressione delle velocità per esprimere l'energia cinetica T in funzione delle coordinate lagrangiane. Avremo

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^2 = T_2 + T_1 + T_0 = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^l a_{hk}(q_1(t), \dots, q_l(t), t) \dot{q}_h \dot{q}_k \quad (5.24) \quad \text{vincolati.35}$$

$$+ \sum_{h=1}^l b_h(q_1(t), \dots, q_l(t), t) \dot{q}_h + c(q_1(t), \dots, q_l(t), t),$$

dove i termini a_{hk} , b_h e c sono dati da³

$$a_{hk} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k},$$

¹Le considerazioni ovviamente valgono anche per un sistema libero, ovvero non soggetto a vincoli

²Fare attenzione alla somiglianza formale tra la (5.23) e la (4.12): c'è però una sostanziale differenza tra queste formule e non si dovrebbe procedere oltre senza averla capita!

³Fare il calcolo della (5.25) e non procedere oltre se non lo sapete fare!

$$b_h = \sum_{i=1}^N \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial t} \quad (5.25) \quad \text{vincolati.36}$$

$$c = \frac{1}{2} \frac{\partial P_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial t},$$

Dall'espressione di T in [\(5.24\)](#) e dall'espressione di a_{hk} in [\(5.25\)](#), abbiamo che T_2 è una forma quadratica definita positiva (poiché ovviamente $T > 0$ per ogni atto di moto non nullo) e la matrice dei coefficienti $(a_{hk}(q_1, \dots, q_l, t))$ è una matrice simmetrica e definita positiva per ogni valore delle coordinate lagrangiane e ogni tempo t . Torniamo ora all'espressione $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^2$ e deriviamo rispetto alla variabile \dot{q}_k . Nel far questo dobbiamo pensare all'espressione della T in funzione delle coordinate lagrangiane e delle coordinate di velocità lagrangiana indipendentemente dal fatto che le q_k (e di conseguenza le \dot{q}_k) in un moto siano delle funzioni del tempo. In altre parole dobbiamo pensare a T come a una funzione dello *stato cinematico* del sistema caratterizzato dalla sua configurazione e dal suo atto di moto, indipendentemente da quale moto ci abbia effettivamente portato a quello stato cinematico. Questo implica che possiamo considerare le variabili q_k e \dot{q}_k come variabili indipendenti tra loro e dal tempo t . Avremo allora

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_k} \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \cdot \mathbf{v}_i, \quad (5.26) \quad \text{vincolati.37}$$

dove abbiamo usato l'espressione di \mathbf{v}_i in funzione delle coordinate lagrangiane [\(5.23\)](#).

Deriviamo ora la [\(5.26\)](#) rispetto al tempo (per far questo pensiamo di avere un effettivo moto del sistema $(q_1(t), \dots, q_l(t))$)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \cdot \mathbf{a}_i + \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \cdot \mathbf{v}_i. \quad (5.27) \quad \text{vincolati.38}$$

Chiaramente il primo addendo è il termine che dovevamo esprimere nella [\(5.20\)](#). Nel secondo addendo possiamo ancora una volta ricorrere al fatto che nell'espressione di P_i in funzione delle coordinate lagrangiane le variabili q_k hanno un ruolo di variabili indipendenti rispetto al tempo e quindi è possibile scambiare la derivata rispetto a tempo con la derivata parziale rispetto a q_k e ottenere

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \cdot \mathbf{a}_i + \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_k} \cdot \mathbf{v}_i. \quad (5.28) \quad \text{vincolati.39}$$

Ora il secondo addendo è ovviamente la derivata parziale di T rispetto alla variabile q_k , e quindi possiamo finalmente scrivere

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \cdot \mathbf{a}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}, \quad (5.29) \quad \text{vincolati.40}$$

detta *identità di Lagrange*. Il secondo membro della [\(5.29\)](#) è noto con il nome di binomio di Lagrange

Possiamo infine riscrivere le [\(5.17\)](#) nella forma nota sotto il nome di *equazioni di Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, \dots, l. \quad \text{vincolati.41} \quad (5.30)$$

Nel caso conservativo, poiché la funzione potenziale U dipende solo dalle coordinate di posizione (ed eventualmente dal tempo nel caso dei vincoli mobili), possiamo introdurre la *funzione di Lagrange* o *lagrangiana* del sistema

$$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l, t) = T + U, \quad \text{vincolati.42} \quad (5.31)$$

e riscrivere le equazioni di Lagrange nella forma compatta

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, l. \quad \text{vincolati.43} \quad (5.32)$$

5.3.1 Risolubilità delle equazioni di Lagrange

Abbiamo annunciato che le equazioni di Lagrange, che sono equivalenti all'equazione simbolica della dinamica, sono sufficienti per determinare la dinamica di un sistema meccanico⁴. Questo significa che possiamo determinare, almeno per un tempo "piccolo" in accordo con la teoria delle equazioni differenziali, le quantità $q_k(t)$ una volta assegnate delle condizioni iniziali $q_k(t_0)$. vincolati.41

Osserviamo per prima cosa che le (5.30) sono un sistema di equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine, in quanto le derivate di ordine massimo sono le derivate seconde che compaiono quando si sviluppa la derivata totale rispetto al tempo nel termine $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$. Per la forma di T in funzione delle coordinate lagrangiane, vedi (5.24), abbiamo vincolati.43

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt} \sum_{h=1}^l a_{hk}(q_1(t), \dots, q_l(t), t) \dot{q}_h$$

(non procedere se non si ha chiaro questa prima derivazione rispetto a \dot{q}_k : si noti in particolare che il fattore $\frac{1}{2}$ scompare per la simmetria della matrice a_{hk}). Eseguendo la derivazione rispetto al tempo, segue che le derivate seconde compaiono solo nel termine

$$\sum_{h=1}^l a_{hk}(q_1(t), \dots, q_l(t), t) \ddot{q}_h,$$

e il sistema di equazioni di Lagrange ha dunque la forma

$$\sum_{h=1}^l a_{hk}(q_1(t), \dots, q_l(t), t) \ddot{q}_h = f_k(q_1(t), \dots, q_l(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_l(t), t). \quad \text{vincolati.44} \quad (5.33)$$

Ricordando che la matrice a_{hk} è una matrice definita positiva (in quanto T è positiva per costruzione) e quindi invertibile, possiamo risolvere algebricamente le (5.33) rispetto alle derivate seconde \ddot{q}_h ottenendo un sistema di e.d.o. in forma normale, al quale possiamo applicare la teoria delle equazioni differenziali per affermare che per ogni insieme, compatibile, di dati iniziali $q_1(t_0), \dots, q_l(t_0), \dot{q}_1(t_0), \dots, \dot{q}_l(t_0)$ esiste un'unica soluzione (locale) del sistema.

⁴Purché vincolato con vincoli lisci.

5.3.2 Invarianza delle equazioni di Lagrange

Supponiamo di avere due sistemi di coordinate lagrangiane per descrivere le stesse configurazioni di un sistema meccanico⁵. Indichiamo con (q_1, \dots, q_l) il primo sistema e con (η_1, \dots, η_l) il secondo sistema. Essi saranno legati da una trasformazione di coordinate, ovvero da l funzioni differenziabili che indicheremo con $(\eta_1(q_1, \dots, q_l), \dots, \eta_l(q_1, \dots, q_l))$. Indicheremo le trasformazioni inverse con $(q_1(\eta_1, \dots, \eta_l), \dots, q_l(\eta_1, \dots, \eta_l))$ ⁶.

Le trasformazioni di coordinate tra le q_k e le η_j si estendono alle variabili puntate $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l)$ e $(\dot{\eta}_1, \dots, \dot{\eta}_l)$ in modo da *preservare le velocità* dei punti del sistema. Per la velocità \mathbf{v}_i del punto P_i abbiamo

$$\mathbf{v}_i = \sum_{k=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k = \sum_{j=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial \eta_j} \dot{\eta}_j \quad (5.34)$$

ma

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_k} = \sum_{h=1}^l \frac{\partial P_i}{\partial \eta_h} \frac{\partial \eta_h}{\partial q_k} \quad (5.35)$$

da cui otteniamo le trasformazioni cercate

$$\begin{aligned} \eta_j &= \eta_j(q_1, \dots, q_l), \\ \dot{\eta}_j &= \dot{\eta}_j(q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l) = \sum_{k=1}^l \frac{\partial \eta_j}{\partial q_k}(q_1, \dots, q_l) \dot{q}_k. \end{aligned} \quad (5.36) \quad \boxed{\text{cambiocoor}}$$

Sia \mathcal{L} la funzione langragiana del sistema espressa nelle coordinate $(q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l)$. Possiamo scrivere la funzione lagrangiana anche nelle coordinate $(\eta_1, \dots, \eta_l; \dot{\eta}_1, \dots, \dot{\eta}_l)$; la indicheremo con L . Poichè le due funzioni rappresentano lo stesso sistema meccanico dovremo avere $\mathcal{L} = L$, ovvero le due funzioni sono legate, nel sistema di coordinate q e \dot{q} , dalle relazioni

$$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l) = L(\eta_1(q_1, \dots, q_l), \dots, \eta_l(q_1, \dots, q_l); \dot{\eta}_1(q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l), \dots, \dot{\eta}_l(q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l))$$

e analogamente nel sistema delle η e $\dot{\eta}$. Nota che questo ci dice che le funzioni \mathcal{L} e L sono *funzionalmente* diverse: l'uguaglianza $\mathcal{L} = L$ deve essere intesa come uguaglianza dei valori delle due funzioni quando sono calcolate rispettivamente nelle coordinate che rappresentano lo stesso stato cinematico (si riveda il caso della lagrangiana del problema a due corpi, nelle coordinate cartesiane dei punti da un lato e nelle coordinate del centro di massa e sferiche dall'altro).

Scrivendo le equazioni di Lagrange nei due sistemi di coordinate otteniamo

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, l, \quad (5.37) \quad \boxed{\text{ELq}}$$

⁵Questo è un problema che si pone quasi sempre: le coordinate lagrangiane sono, in genere, delle coordinate "locali" cioè non sono definite in tutte le possibili configurazioni del sistema. Si pensi p.e. alle coordinate angolari su una superficie sferica. Quindi abbiamo in genere bisogno di più sistemi di coordinate lagrangiane; per certe configurazioni ci sarà quindi una sovrapposizione di due o più sistemi di coordinate.

⁶Più generalmente possiamo considerare anche trasformazioni di coordinate *dipendenti dal tempo* t , qui consideriamo per semplicità il caso di vincoli fissi

nelle coordinate q, \dot{q} e

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} - \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0, \quad k = 1, \dots, l, \quad \boxed{\text{ELeta}} \quad (5.38)$$

nelle coordinate $\eta, \dot{\eta}$.

Vale

Teorema 5.3.1 *Le soluzioni di (5.38) si ottengono dalle soluzioni di (5.37) tramite le trasformazioni (5.36) .* $\boxed{\text{ELq}}$

Questo risultato è, in un certo qual senso, ovvio: il moto è lo stesso, indipendentemente dal sistema di coordinate scelto. Di più, tutto il formalismo lagrangiano è stato, fin dall'inizio, concepito per scrivere le equazioni di moto *con la stessa ricetta* in qualsiasi sistema di coordinate. Quindi la dimostrazione “analitica” di questo teorema (che lasciamo per esercizio) è una verifica a posteriori della correttezza del formalismo stesso. Tuttavia questa invarianza “analitica” è importante quando si voglia introdurre un nuovo sistema di coordinate a partire da un preesistente sistema, senza “ritornare” al sistema meccanico, cioè senza tornare a ricalcolare la funzione di Lagrange dalla sua definizione meccanica.

Questo risultato si enuncia anche dicendo che *le equazioni di Lagrange sono invarianti per cambiamento di coordinate*.

5.3.3 Coordinate cicliche

Può accadere che una delle coordinate lagrangiane, diciamo q_i , non compaia esplicitamente nella funzione di Lagrange \mathcal{L} (ma la \dot{q}_i *deve* comparire). In questo caso diremo che la coordinata è *ciclica*. Come conseguenza si ha immediatamente che la funzione $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ è una costante del moto (o integrale primo). Infatti si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (5.39)$$

ovvero

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \text{Costante}, \quad (5.40)$$

dove “Costante” significa costante rispetto al tempo cioè tale che la derivata rispetto a t della funzione $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(q_1(t), \dots, q_l(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_l(t), t)$, dove $(q_1(t), \dots, q_l(t))$ è soluzione delle equazioni di moto, è nulla. Quindi, per ogni t , vale

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(q_1(t), \dots, q_l(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_l(t), t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(q_1(t_0), \dots, q_l(t_0), \dot{q}_1(t_0), \dots, \dot{q}_l(t_0), t_0).$$

La funzione $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ è detta *momento coniugato* alla variabile q_i .

5.3.4 La conservazione dell'energia

Come nel caso delle coordinate cicliche, anche quando la funzione lagrangiana non dipende (esplicitamente) dal tempo si ha una quantità che si conserva durante il moto. Questa quantità è la funzione hamiltoniana definita da

$$\mathcal{H}(q_1, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l, t) = \sum_{i=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} \quad (5.41) \quad \boxed{\text{H}}$$

Infatti calcolando la derivata totale di \mathcal{H} si ottiene

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_{i=1}^l \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \dot{q}_i - \sum_{i=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \dot{q}_i - \sum_{i=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \quad (5.42) \quad \boxed{\text{dHdt}}$$

Il secondo e terzo addendo si cancellano: inoltre il primo e il quarto termine si cancellano tra loro in virtù dell'equazione di Lagrange (poiché stiamo calcolando una derivata totale, le funzioni q_i e \dot{q}_i in (5.42) sono delle funzioni del tempo e vale $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$). Ne segue che

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}, \quad (5.43) \quad \boxed{\text{dHdt2}}$$

e di conseguenza

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0, \quad (5.44) \quad \boxed{\text{dHdt3}}$$

se la funzione lagrangiana non dipende dal tempo. Quindi se la funzione lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo la funzione \mathcal{H} è un integrale primo ed è costante lungo le soluzioni.

Se la lagrangiana proviene da un sistema meccanico soggetto a vincoli fissi, allora la lagrangiana ha la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^l a_{hk}(q_1, \dots, q_l) \dot{q}_h \dot{q}_k + U(q_1, \dots, q_l), \quad (5.45) \quad \boxed{\text{lagrangiafissi}}$$

dove il primo addendo in (5.45) è l'energia cinetica del sistema e il secondo termine il potenziale.

Calcolando la funzione \mathcal{H} per questa lagrangiana otteniamo⁷

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^l a_{hk}(q_1, \dots, q_l) \dot{q}_h \dot{q}_k - U(q_1, \dots, q_l), \quad (5.46) \quad \boxed{\text{hamiltonianafissi}}$$

ovvero la *somma* di energia cinetica e energia potenziale $-U$.

5.3.5 Il teorema di Noether

La conservazione del momento coniugato nel caso delle variabili cicliche e la conservazione della funzione hamiltoniana, sono legati alle proprietà di invarianza della funzione di Lagrange. Nel caso di una coordinata ciclica q_h , la condizione di ciclicità, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = 0$, ci dice che comunque “trasli” la coordinata q_h la funzione lagrangiana rimane immutata (in questo caso la cosa è “ovvia” visto che la lagrangiana non dipende da q_h).

Cerchiamo di chiarire questo punto con qualche esempio. Torniamo al caso del moto centrale. In questo caso la variabile φ è ciclica. Questo semplicemente traduce il fatto che, essendo tutto simmetrico per rotazioni attorno all'asse perpendicolare al piano del moto, che è quello dove φ è la variabile angolare, il valore dell'angolo φ non deve intervenire nella dinamica: solo le sue variazioni,

⁷Questo calcolo è un caso particolare di un teorema sulle forme quadratiche (detto “di Eulero”) che dice che, data la forma quadratica $A(\xi, \xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j$ con (a_{ij}) matrice simmetrica, allora $\sum_{k=1}^n \frac{\partial A}{\partial \xi_k} \xi_k = 2A(\xi, \xi)$.

e quindi $\dot{\varphi}$, hanno importanza. Analogamente, la lagrangiana del moto di un punto “libero”, cioè a cui non sono applicate forze, è $\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$. Qui tutte e tre le coordinate (x, y, z) sono cicliche. E questo è la “conseguenza” della omogeneità dello spazio: ogni punto dello spazio è indistinguibile dagli altri. In termini matematici apparentemente più raffinati, il problema del moto del punto libero deve essere invariante per traslazione (o meglio ancora, per l’azione del gruppo delle traslazioni dello spazio euclideo!).

Anche la conservazione dell’energia, seppur meno palesemente, è legata a un’invarianza traslazionale: quella delle traslazioni temporali (cioè della variabile t).

Per generalizzare queste osservazioni occorre formalizzare meglio il concetto di “invarianza”

Per evitare complicazioni limitiamoci a funzioni lagrangiane indipendenti dal tempo. La funzione \mathcal{L} è quindi una funzione definita su un insieme $\mathcal{S} = D \times \mathbf{R}^l$ dove D è un aperto di \mathbf{R}^l ed è il dominio delle coordinate lagrangiane (q_1, \dots, q_l) mentre il secondo \mathbf{R}^l è il dominio delle velocità lagrangiane $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l)$

Uno pseudo-gruppo⁸ a un parametro di diffeomorfismi di D è una mappa da $\Phi : I \times D \rightarrow D$, dove $I \subset \mathbf{R}$ è un intervallo contenente lo zero, tale che

1. per ogni $s \in I$ la mappa $\Phi(s, \cdot) : D \rightarrow D$ è un diffeomorfismo (ovvero è biunivoca, differenziabile con inversa differenziabile); per ogni $(q_1, \dots, q_l) \in D$ la mappa $\Phi(\cdot, (q_1, \dots, q_l)) : I \rightarrow D$ è differenziabile;
2. $\Phi(0, \cdot) : D \rightarrow D$ è la trasformazione identica, $\Phi(0, (q_1, \dots, q_l)) = (q_1, \dots, q_l)$;
3. per ogni $s_1, s_2 \in I$ tali che $s_1 + s_2 \in I$, vale $\Phi(s_1, \Phi(s_2, \cdot)) = \Phi(s_2, \Phi(s_1, \cdot)) = \Phi(s_1 + s_2, \cdot)$.

Nota 5.3.2 Per ogni punto di D passa una sola curva del tipo $s \rightarrow \Phi(s, (q_1, \dots, q_l))$, anche se la “rappresentazione” non è univoca a causa della proprietà di traslazione al punto 3.

Esercizio 5.3.3 Verificare che la “traslazione” $\Phi(s, (q_1, q_2, \dots, q_l)) = (q_1 + s, q_2, \dots, q_l)$ è un gruppo a un parametro.

Esercizio 5.3.4 Verificare che $\Phi(-s, (q_1, \dots, q_l))$ è la mappa inversa di $\Phi(s, (q_1, \dots, q_l))$, ovvero che $\Phi(-s, \Phi(s, (q_1, \dots, q_l))) = (q_1, \dots, q_l)$.

Dato un gruppo a un parametro Φ , chiameremo *rilevamento* del gruppo allo spazio $\mathcal{S} = D \times \mathbf{R}^l$ il gruppo a un parametro $T\Phi : I \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ definito da

$$T\Phi(s, (q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l)) = \left(\Phi(s, (q_1, \dots, q_l)); \sum_{k=1}^l \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_k} \dot{q}_k, \dots, \sum_{k=1}^l \frac{\partial \Phi_n}{\partial q_k} \dot{q}_k \right), \quad (5.47)$$

TPhi

dove $\Phi_j, j = 1, \dots, l$ sono le componenti di del vettore $\Phi(s, (q_1, \dots, q_l))$. Nota che la regola di trasformazione delle “variabili puntate” è ancora quella che “trasforma le velocità” come nella (3.4).

⁸Il nome “pseudo-gruppo” proviene dal fatto che in genere $I \neq \mathbf{R}$ e quindi la terza proprietà richiesta è solo “localmente” una proprietà di gruppo. Nel seguito, per non appesantire, elimineremo il prefisso “pseudo”

Definizione 5.3.5 Un gruppo a un parametro Φ si dice una simmetria per la funzione lagrangiana \mathcal{L} se per ogni $s \in I$ e per ogni $(q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l) \in \mathcal{S}$ vale

$$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l) = \mathcal{L}(T\Phi(s, (q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l))) . \quad (5.48) \quad \boxed{\text{symm}}$$

Esercizio 5.3.6 Verificare che il rilevamento della “traslazione” è dato da $(q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l) \rightarrow (q_1 + s, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l)$, ovvero che le velocità lagrangiane restano invariate.

Possiamo ora enunciare il teorema di Noether

Teorema 5.3.7 Sia Φ si dice una simmetria per la funzione lagrangiana \mathcal{L} , allora la funzione $\mathcal{I} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$\mathcal{I}(q_1, \dots, q_l; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l) = \sum_{k=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\Phi_k}{ds} \Big|_{s=0} \quad (5.49) \quad \boxed{\text{Noether}}$$

è un integrale del moto, ovvero

$$\frac{d\mathcal{I}}{dt} = 0 . \quad (5.50)$$

Le quantità $\frac{d\Phi_k}{ds} \Big|_{s=0}$ che compaiono in (5.49) sono le componenti, nel sistema di coordinate $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l)$, del vettore tangente alla curva $s \rightarrow \Phi(s, (q_1, \dots, q_l))$ quando $s = 0$, quindi nel punto di coordinate (q_1, \dots, q_l) . Questo vettore è definito in tutti i punti di D : lo indicheremo con $\mathbf{V}_s(q_1, \dots, q_l)$.

Fissiamo ora un punto $\bar{Q} \in D$ di coordinate $(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_l)$ e in \bar{Q} prendiamo l’iperpiano $l-1$ dimensionale p dei punti Q di D tali che $Q-\bar{Q}$ sia perpendicolare al vettore $\mathbf{V}_s(\bar{Q}) = \mathbf{V}_s(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_l)$ ovvero $\frac{d\Phi_k}{ds} \Big|_{s=0}$ calcolato in $(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_l)$. Per continuità il vettore $\mathbf{V}_s(Q)$, definito analogamente a $\mathbf{V}_s(\bar{Q})$, sarà non parallelo all’iperpiano p , almeno nei punti Q “vicini” a \bar{Q} . Questo implica che, in un intorno $\bar{D} \subset D$ del punto \bar{Q} , ogni punto sarà raggiunto da una e una sola curva del tipo $s \rightarrow \Phi(s, (Q))$ uscente da un punto Q di p “vicino” a \bar{Q} .

Introduciamo ora un nuovo sistema di coordinate così fatto: per ogni punto $R \in \bar{D}$ la prima coordinate η_1 sarà il valore della s sulla curva $s \rightarrow \Phi(s, (Q))$ che passa per R e con $Q \in p$ (in altre parole, il valore di s necessario per raggiungere R partendo dall’iperpiano p “a $s = 0$ ”). Le altre coordinate (η_2, \dots, η_l) saranno un qualsiasi sistema di coordinate sull’iperpiano p , p.e. delle coordinate cartesiane centrate in \bar{Q} .

Estendiamo queste coordinate alle “velocità lagrangiane” introducendo le $\dot{\eta}$ in accordo con le regole di cambiamento di coordinate (5.36). In questo sistema di coordinate il vettore $\frac{d\Phi_k}{ds} \Big|_{s=0}$ ha coordinate $\dot{\eta}_1 = 1$ e $\dot{\eta}_k = 0$ per $k = 2, \dots, l$.

Sia infine L la lagrangiana espressa in queste nuove coordinate. In virtù dell’invarianza di \mathcal{L} la nuova lagrangiana L non dipende dalla variabile η_1 (ricordiamo che \mathcal{L} era costante lungo le curve $s \rightarrow \Phi(s, (Q))$); quindi η_1 è una coordinata ciclica e la funzione $\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_1}$ è una costante del moto.

Abbiamo quindi visto che l’esistenza di una simmetria implica l’esistenza di una costante del moto (e, di pù, l’esistenza di un sistema di coordinate, locali,

in cui almeno una delle coordinate è ciclica). Resta da calcolare questa costante in funzione delle “vecchie” coordinate. Si ha

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_1} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{\eta}_1}$$

poiché $\frac{\partial q_k}{\partial \dot{\eta}_1} = 0$ per ogni $k = 1, \dots, l$. Ma

$$\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{\eta}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{\eta}_1} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial q_k}{\partial \eta_j} \dot{\eta}_j \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_k}{\partial \eta_j} \frac{\partial \dot{\eta}_j}{\partial \dot{\eta}_1} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_k}{\partial \eta_j} \delta_{j1} = \frac{\partial q_k}{\partial \eta_1}.$$

Ma $\frac{\partial q_k}{\partial \eta_1}$ non è altro che la derivata della Φ_k lungo le curve $s \rightarrow \Phi(s, (Q))$, da cui la Noether (5.49).