

Corso di laurea in Matematica
SAPIENZA Università di Roma



Appunti per il Corso di Sistemi Dinamici

PAOLO BUTTÀ

Dipartimento di Matematica
"Guido Castelnuovo"
SAPIENZA Università di Roma

Indice

Capitolo 1. Introduzione	1
1.1. Processi evolutivi e sistemi dinamici	1
1.2. Sistemi dinamici classici	2
1.3. Sistemi dinamici topologici e astratti	5
1.4. Nota bibliografica	6
Capitolo 2. Sistemi dinamici a tempo discreto	7
2.1. Mappe e leggi ricorsive	7
2.2. Contrazioni	11
Capitolo 3. Sistemi dinamici a tempo continuo	19
3.1. Flusso di fase	19
3.2. Leggi dipendenti dal tempo	22
3.3. Curve integrali e curve di fase	23
3.4. Cambiamenti di coordinate	26
3.5. Integrali primi	31
3.6. Sulla completezza dei campi	33
3.7. Soluzione di alcuni esercizi	35
Capitolo 4. Flusso lineare	37
4.1. Esponenziale di matrice	37
4.2. Matrici simili, cambiamenti di base, calcolo della soluzione	40
4.3. Flusso iperbolico	43
4.4. Sottospazio centrale	47
4.5. Moto condizionatamente periodico	49
Capitolo 5. Analisi locale	55
5.1. Equilibri e loro stabilità	55
5.2. Linearizzazione	58
5.3. Stabilità ed instabilità riconosciute dalla parte lineare	61
5.4. Teorema delle varietà stabile ed instabile	66
5.5. Punti fissi iperbolici	77
5.6. Soluzione degli esercizi	79
Capitolo 6. Insiemi limite e bacini di attrazione	81
6.1. Insiemi limite	81
6.2. Funzioni di Liapunov e bacini di attrazione	83
6.3. Cicli e loro stabilità	91

6.4. Soluzione degli esercizi	95
Capitolo 7. Sistemi planari	97
7.1. Sistemi conservativi	97
7.2. Criteri di non esistenza di cicli	103
7.3. Sistemi auto-oscillanti	105
7.4. Teorema di Poincaré Bendixson	116
7.5. Appendice: applicazione alla teoria dei circuiti non lineari	120
7.6. Soluzione di alcuni esercizi	127
Capitolo 8. Sistemi dinamici topologici	129
8.1. Transitività topologica	129
8.2. Mescolamento topologico, caoticità e dipendenza sensibile	131
8.3. Esempi elementari	132
8.4. Mappa iperbolica sul toro (mappa del gatto di Arnold)	133
8.5. Teorema di Anosov sulla stabilità strutturale della mappa di Arnold	137
Capitolo 9. Dinamica iperbolica	143
9.1. Insiemi iperbolici, Ombra-Lemma	143
9.2. Sistemi periodicamente perturbati	150
9.3. Intersezioni omocline trasverse	152
9.4. Applicazione alla dinamica del pendolo forzato	160
9.5. Esistenza di intersezioni omocline trasverse in \mathbb{R}^2 e formula di Melnikov	162

Introduzione

1.1. Processi evolutivi e sistemi dinamici

Con il termine di *sistema dinamico* si indica genericamente un modello matematico atto a descrivere un processo di evoluzione in cui un sistema reale di qualsivoglia natura (fisica, chimica, biologica, sociale, etc...) evolve nel tempo. Ogni sistema dinamico è quindi caratterizzato da

- lo *spazio degli stati* S , ovvero un insieme i cui elementi rappresentano i possibili stati del sistema;
- il *tempo* t , un parametro che assume valori in un insieme $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$;
- la *legge di evoluzione*, che prescrive il susseguirsi nel tempo degli stati del sistema.

La variabile temporale può essere sia continua che discreta, ed in questo secondo caso senza perdita di generalità possiamo identificare \mathcal{T} con un sottoinsieme di \mathbb{Z} .

Esempio paradigmatico di processo evolutivo a tempo continuo è fornito da un sistema di N particelle puntiformi, libere di muoversi nello spazio e che obbediscono alle leggi della meccanica classica. In questo caso, in virtù del principio del determinismo di Newton, ad ogni istante di tempo lo stato del sistema è determinato univocamente dalle posizioni e dalle velocità delle particelle (dunque da $6N$ parametri reali, $S \subseteq \mathbb{R}^{6N}$).

In altri processi evolutivi la variabile temporale assume in modo naturale valori discreti. Ad esempio, nel lancio ripetuto di una moneta, il tempo naturale è rappresentato dal numero di lanci effettuati. Inoltre, anche processi a tempo continuo possono essere efficacemente descritti in termini di sistemi dinamici a tempo discreto. Ad esempio, al fine di monitorare la crescita di una popolazione, è sufficiente osservarla solo ad intervalli di tempo prestabiliti (ogni minuto, giorno, mese, etc.), cosicché il corrispondente modello matematico risulterà essere un sistema dinamico a tempo discreto.

Aspetto caratterizzante la teoria dei sistemi dinamici non è tanto l'analisi in sé delle leggi di evoluzione (oggetto di studio anche di altre discipline della matematica) quanto la natura delle domande poste. In particolare, l'interesse non verte sul determinare esplicitamente i singoli moti del sistema, quanto su uno studio qualitativo che permetta di descriverne il comportamento collettivo ed asintotico nel tempo. Vista la complessità dei sistemi reali tale approccio è

spesso l'unico percorribile e si focalizza sulle proprietà realmente significative del sistema. Questa idea fondamentale ha origine nei lavori di Poincaré e Boltzmann della fine del diciannovesimo secolo, che possiamo quindi identificare con il periodo in cui la moderna teoria dei sistemi dinamici ha inizio.

1.2. Sistemi dinamici classici

In queste note studiamo principalmente i *sistemi dinamici classici*, che rimangono caratterizzati dalle seguenti proprietà:

- (1) *Differenziabilità e dimensione finita*: lo spazio degli stati S (detto anche *spazio delle fasi*) possiede la struttura di una varietà differenziabile di dimensione finita, quindi $S = M$ varietà di classe C^∞ oppure $S = \mathcal{D}$ dominio di \mathbb{R}^n . Tale struttura è conservata dalla legge di evoluzione.
- (2) *Determinismo e reversibilità dell'evoluzione*: il tempo si estende indefinitamente sia nel futuro che nel passato, quindi $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ o $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$, ed il presente determina univocamente passato e futuro del sistema.
- (3) *Invarianza temporale*: la legge di evoluzione non muta nel tempo.

Notiamo che nel caso dei sistemi meccanici isolati la proprietà (3) è parte del principio di relatività di Galilei: le leggi di interazione tra i corpi rimangono immutate nel tempo.

OSSERVAZIONE 1.1. Ricordiamo che varietà differenziabili sono lo spazio euclideo \mathbb{R}^n , i domini (insiemi aperti) di tale spazio, e tutti gli insiemi che ammettono sistemi di coordinate locali, quali la circonferenza, la sfera, il toro. Senza ricorrere alla definizione più generale, intenderemo nel seguito varietà di dimensione n un sottoinsieme M di uno spazio euclideo \mathbb{R}^N , con $N > n$, tale che

$$M = \{z \in \mathbb{R}^N : \Phi_k(z) = 0 \quad \forall k = 1, \dots, N - n\}, \quad (1.1)$$

essendo $\Phi_k : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ una collezione di $N - n$ funzioni differenziabili e funzionalmente indipendenti, ovvero tali che

$$\text{rango} \left\{ \frac{\partial \Phi_k}{\partial z_i}(z) \right\} = N - n \quad \forall z \in M.$$

In effetti, sotto queste ipotesi, il teorema della funzione implicita garantisce che nell'intorno di ciascun punto di M è possibile introdurre coordinate locali. Più precisamente, per ciascun $\bar{z} \in M$ esistono un intorno W di \bar{z} , un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ ed un'applicazione differenziabile $f : U \rightarrow W$, iniettiva e di rango massimo, tale che $M \cap W = f(U) = \{z \in \mathbb{R}^N : z = f(x), x \in U\}$. In altri termini, nell'intorno W di \bar{z} la superficie M ha equazione parametrica $z = f(x)$, ovvero

$$\begin{cases} z_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ z_2 = f_2(x_1, \dots, x_n), \\ \dots \\ z_N = f_N(x_1, \dots, x_n). \end{cases} \quad (1.2)$$

Viceversa, la mappa inversa $f^{-1} : M \cap W \rightarrow U$ fornisce le coordinate locali $x = (x_1, \dots, x_n)$ come funzioni $x_i = x_i(z)$ di $M \cap W$ in \mathbb{R} .

Tranne che in pochi casi particolari, gli argomenti trattati in queste note non coinvolgeranno direttamente le proprietà geometriche e topologiche globali dello spazio delle fasi. Per tale motivo sarà quasi sempre sufficiente considerare il caso di domini di \mathbb{R}^n .

Analizziamo in dettaglio le conseguenze delle ipotesi (1)–(3) sopra elencate. L'ipotesi (2) implica che la legge di evoluzione rimane individuata da un'applicazione $\phi : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \times S \rightarrow S$, la cui valutazione $\phi(t, t_0, x)$ in $(t, t_0, x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T} \times S$ è uguale allo stato del sistema al tempo t quando x è lo stato del sistema al tempo t_0 . Per t, t_0 fissati introduciamo inoltre l'applicazione $\phi^{t, t_0} : S \rightarrow S$ tale che $\phi^{t, t_0}(x) := \phi(t, t_0, x)$. Le seguenti proprietà di ϕ sono immediate conseguenze della sua definizione e delle assunzioni in (1) e (2):

- (a) ϕ è differenziabile (C^∞) nel complesso delle sue variabili;
- (b) $\phi^{t_0, t_0} = \text{id}$ per ogni $t_0 \in \mathcal{T}$;
- (c) $\phi^{t, s} \circ \phi^{s, t_0} = \phi^{t, t_0}$ per ogni $t, s, t_0 \in \mathcal{T}$;
- (d) ϕ^{t, t_0} è biunivoca con inversa $(\phi^{t, t_0})^{-1} = \phi^{t_0, t}$ per ogni $t, t_0 \in \mathcal{T}$;
- (e) ϕ^{t, t_0} è un diffeomorfismo di S in sé per ogni $t, t_0 \in \mathcal{T}$.

Osserviamo che (d) segue da (b) e (c) scegliendo le terne di tempi (t, t_0, t) e (t_0, t, t_0) , mentre la (e) segue da (a) e (d).

Infine, l'ipotesi di invarianza temporale (3) impone che la mappa di evoluzione ϕ soddisfi l'ulteriore proprietà,

$$\phi^{t+s, t_0+s} = \phi^{t, t_0} \quad \forall t, s, t_0 \in \mathcal{T}$$

ovvero

$$\phi^{t, t_0} = \phi^{t-t_0, 0} \quad \forall t, t_0 \in \mathcal{T}.$$

Pertanto la legge di evoluzione rimane individuata dalla famiglia di trasformazioni $\phi^t := \phi^{t, 0} : S \rightarrow S$, $t \in \mathcal{T}$. Dalle proprietà (a)–(e) se ne deducono le seguenti per la famiglia $\{\phi^t\}_{t \in \mathcal{T}}$:

- (a') $(t, x) \mapsto \phi^t(x)$ è differenziabile (C^∞) di $\mathcal{T} \times S$ in S ;
- (b') $\phi^0 = \text{id}$;
- (c') $\phi^t \circ \phi^s = \phi^s \circ \phi^t = \phi^{t+s}$ per ogni $t, s \in \mathcal{T}$;
- (d') ϕ^t è biunivoca con inversa $(\phi^t)^{-1} = \phi^{-t}$ per ogni $t \in \mathcal{T}$;
- (e') ϕ^t è un diffeomorfismo di S in sé per ogni $t \in \mathcal{T}$.

In effetti (a') e (b') sono immediate, (c') segue dalla proprietà di invarianza, essendo $\phi^t \circ \phi^s = \phi^{t, 0} \circ \phi^{s, 0} = \phi^{t+s, s} \circ \phi^{s, 0} = \phi^{t+s, 0} = \phi^{t+s}$, mentre (d') ed (e') sono conseguenza di (a')–(c').

Riassumendo, le ipotesi (2) e (3) stabiliscono che il sistema dinamico sullo spazio degli stati S rimane individuato da un gruppo ad un parametro $\{\phi^t\}_{t \in \mathcal{T}}$ di automorfismi di S , ovvero un omeomorfismo del gruppo additivo di $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ (o $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$ nel caso di tempo discreto) nel gruppo delle trasformazioni biunivoche di S in sé. L'ipotesi (1) sulla struttura dello spazio delle fasi e sulla regolarità

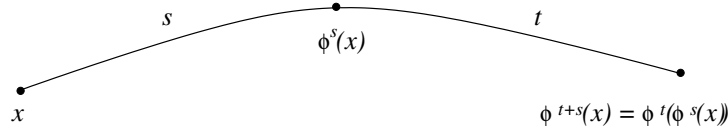


FIGURA 1.1. Proprietà di gruppo.

della dinamica aggiunge che $\{\phi^t\}_{\mathcal{T}}$ è in effetti un *gruppo ad un parametro di diffeomorfismi* di S .

DEFINIZIONE 1.1. Definiamo *moto* per $x \in S$ la funzione $t \mapsto \phi^t(x)$ di \mathcal{T} in S ed *orbita* per x l'immagine $\gamma(x) := \{\phi^t(x) : t \in \mathcal{T}\}$ in S del moto per x . Nel caso continuo $\mathcal{T} = \mathbb{R}$, l'orbita è detta anche *curva di fase*.

Dalla proprietà di invarianza segue che le orbite non possono intersecarsi, ovvero che ciascun punto dello spazio delle fasi appartiene ad un'unica orbita. Supponiamo infatti che $x \in \gamma(y)$ per qualche $y \in S$. Allora $x = \phi^s(y)$ per qualche $s \in \mathcal{T}$ e pertanto, usando la proprietà di gruppo,

$$\gamma(y) = \{\phi^t(y) : t \in \mathcal{T}\} = \{\phi^{t-s}(x) : t \in \mathcal{T}\} = \{\phi^{t'}(x) : t' \in \mathcal{T}\} = \gamma(x).$$

Altrimenti detto, se indichiamo con $\gamma_{t_0}(x)$ l'orbita del moto passante per x al tempo t_0 , ovvero $\gamma_{t_0}(x) := \{\phi^{t,t_0}(x) : t \in \mathcal{T}\}$, allora, essendo $\phi^{t,t_0} = \phi^{t-t_0}$, si ha $\gamma_{t_0}(x) = \gamma(x)$ per ogni $t_0 \in \mathcal{T}$.

OSSERVAZIONE 1.2. Considereremo talvolta sistemi per i quali l'ipotesi (3) non è verificata (ad esempio sistemi meccanici non isolati sui quali agiscono forze esterne variabili nel tempo). In questo caso $\gamma_{t_0}(x)$ dipende in generale anche da t_0 , cosicché non ha senso parlare di orbita per x se non si specifica anche il tempo di passaggio.

Vale la pena osservare sin d'ora che ogni processo evolutivo può sempre essere descritto mediante un sistema dinamico con legge di evoluzione invariante nel tempo, pur di aumentare la dimensione dello spazio degli stati. Più precisamente, assegnata la legge di evoluzione $\{\phi^{t,t_0}\}_{t,t_0 \in \mathcal{T}}$ sullo spazio delle fasi S , introduciamo lo *spazio delle fasi ampliato* $\Omega := \mathcal{T} \times S$ e su questo, per ogni $t \in \mathcal{T}$, la trasformazione $\Phi^t : \Omega \rightarrow \Omega$ ottenuta ponendo

$$\Phi^t(X) := (t_0 + t, \phi^{t_0+t,t_0}(x)) \quad \forall X = (t_0, x) \in \Omega.$$

Il processo di evoluzione $(S, \{\phi^{t,t_0}\}_{t,t_0 \in \mathcal{T}})$ è descritto equivalentemente dal sistema $(\Omega, \{\Phi^t\}_{t \in \mathcal{T}})$. Per esercizio si verifichi che $\{\Phi^t\}_{t \in \mathcal{T}}$ è un gruppo ad un parametro di trasformazioni su Ω .

OSSERVAZIONE 1.3. L'ipotesi (2) comprende due proprietà distinte, il carattere deterministico e quello reversibile della legge di evoluzione. Avremo talvolta occasione di studiare anche *processi irreversibili*, in cui il presente determina univocamente solo il futuro del sistema. In tal caso il sistema dinamico è assegnato da una famiglia $\{\phi^{t,t_0}\}_{t \geq t_0}$ di trasformazioni di S in sé tali che $\phi^{t_0,t_0} = \text{id}$

e $\phi^{t,s} \circ \phi^{s,t_0} = \phi^{t,t_0}$ per $t \geq s \geq t_0$. In particolare, ϕ^{t,t_0} non è in generale invertibile. Sotto l'ulteriore ipotesi (3), analogamente al caso reversibile, la legge di evoluzione rimane assegnata in questo caso da un semigruppato ad un parametro $\{\phi^t\}_{\mathcal{T}}$ di trasformazioni di S in sé, ovvero tale che $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+$ (o $\mathcal{T} = \mathbb{Z}_+$ nel caso di tempo discreto), $\phi^0 = \text{id}$ e $\phi^{t+s} = \phi^t \circ \phi^s$ per ogni $t, s \in \mathcal{T}$. Ovviamente, l'ulteriore ipotesi (1) equivale a richiedere che le trasformazioni siano funzioni differenziabili. Notiamo infine che l'Osservazione 1.2 si applica anche nel caso dei processi irreversibili con ovvie modifiche.

1.3. Sistemi dinamici topologici e astratti

La classificazione principale dei sistemi dinamici si basa sulla struttura dello spazio degli stati S , che si assume sempre essere conservata dalla legge di evoluzione.

Nel caso dei sistemi dinamici classici la struttura di S è quella (molto ricca) di varietà differenziabile, e la legge di evoluzione è richiesta essere differenziabile. D'altra parte, la teoria dei sistemi dinamici mira ad uno studio qualitativo delle leggi di evoluzione, al fine di descrivere il comportamento d'insieme ed asintotico nel tempo dei moti. Tali aspetti qualitativi del moto spesso non coinvolgono l'intera struttura differenziabile dello spazio delle fasi, cosicché il loro studio sistematico ha portato in modo naturale alla definizione di diverse classi di sistemi dinamici, nell'intersezione delle quali vi sono quelli classici.

Una prima generalizzazione della nozione di sistema dinamico classico è quella di *sistema dinamico topologico*, in cui si assume che lo spazio degli stati S sia uno spazio metrico (più in generale topologico), e la legge di evoluzione $\{\phi^t\}_{\mathcal{T}}$ sia un gruppo ad un parametro di omeomorfismi (ovvero un semigruppato ad un parametro di trasformazioni continue nel caso di processi irreversibili). In effetti molti aspetti interessanti del moto corrispondono a proprietà topologiche, che possono essere formulate e studiate nel contesto della teoria dei sistemi dinamici topologici.

Un differente approccio allo studio qualitativo del moto, noto con il nome di *teoria ergodica del moto*, porta invece alla nozione di *sistema dinamico astratto*. Tale teoria risale alla nascita della meccanica statistica ed in particolare all'opera di L. Boltzmann. In sintesi, il punto di partenza è assumere un'incertezza sullo stato iniziale del sistema e chiedersi come tale incertezza venga propagata nel tempo dalla legge di evoluzione. In questo caso lo spazio degli stati S è uno spazio di probabilità, dunque dotato di una σ -algebra \mathcal{A} e di una misura di probabilità μ , che rappresenta l'incertezza nella conoscenza dello stato del sistema al tempo iniziale $t = 0$. La richiesta minima sulla legge di evoluzione $\{\phi^t\}_{\mathcal{T}}$ è ora la misurabilità delle trasformazioni.

1.4. Nota bibliografica

Per approfondire gli argomenti trattati in questi appunti si possono consultare ad esempio i testi sotto riportati.¹

- [1] V.I. Arnold. *Ordinary Differential Equations*. Universitext, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992.
- [2] V.I. Arnold. *Metodi matematici della meccanica classica*. Roma: Editori Riuniti, 1979.
- [3] V.I. Arnold. *Metodi geometrici della teoria delle equazioni differenziali ordinarie*. Roma: Editori Riuniti, 1989.
- [4] J. Guckenheimer, P. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. (Applied Mathematical Sciences **42**). Berlin: Springer, 1993.
- [5] M.W. Hirsch, S. Smale, R.L. Devaney: *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*. Second/Third Edition. Academic Press/Elsevier 2003/2013.
- [6] A. Katok, B. Hasselblatt: *A first course in dynamics: with a panorama of recent developments*. Cambridge university press, 2003.
- [7] A. Katok, B. Hasselblatt: *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Cambridge university press, 1995.
- [8] S. Wiggins. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. (Texts in applied mathematics **2**) New York : Springer Verlag, 2003.

¹Fare riferimento a questa numerazione quando alcuni di questi testi verranno citati nei prossimi capitoli.

Sistemi dinamici a tempo discreto

In questo capitolo introduciamo concetti ed esempi di sistemi dinamici a tempo discreto.

2.1. Mappe e leggi ricorsive

Sia $\{\phi^t\}_{t \in \mathcal{T}}$ un sistema dinamico a tempo discreto, quindi $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$ o $\mathcal{T} = \mathbb{Z}_+$, ed indichiamo d'ora innanzi con le lettere k, h, i, j , etc., i tempi interi in \mathcal{T} .

Dalla proprietà di gruppo applicata ricorsivamente segue che $\phi^k = (\phi^1)^k$, cosicché assegnare un processo deterministico equivale ad assegnare una coppia (S, g) , con g applicazione di S in sé, e la legge di evoluzione rimane definita dalle iterazioni della mappa g :

$$\phi^0 = \text{id}, \quad \phi^k = g \circ \phi^{k-1} = \underbrace{g \circ g \circ \dots \circ g}_{k \text{ volte}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Nel caso reversibile, ovvero quando g è biunivoca, la dinamica si estende anche ai tempi negativi, ponendo

$$\phi^{-k} = g^{-1} \circ \phi^{-k+1} = \underbrace{g^{-1} \circ g^{-1} \circ \dots \circ g^{-1}}_{k \text{ volte}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Quindi la legge di evoluzione è definita dalla *legge ricorsiva*

$$x_{k+1} = g(x_k) \iff x_k = g^k(x) \text{ se } x_0 = x.$$

Nel caso reversibile si ha inoltre $x_k = g^{-1}(x_{k+1})$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

DEFINIZIONE 2.1. Assegnato il sistema dinamico (S, g) :

i) $\text{Fix}(g)$ denota l'insieme dei punti fissi di g , ovvero

$$\bar{x} \in \text{Fix}(g) \iff g(\bar{x}) = \bar{x} \iff \gamma(\bar{x}) = \{\bar{x}\}.$$

ii) $\text{Per}(g)$ denota l'insieme dei punti periodici di g , ovvero

$$\bar{x} \in \text{Per}(g) \iff \exists N \in \mathbb{N}: \bar{x} \in \text{Fix}(g^N).$$

Se $\bar{x} \in \text{Per}(g)$ allora l'orbita $\gamma(\bar{x})$ è detta *orbita periodica*. Il periodo di tale orbita è definito dal più piccolo intero positivo N per il quale $\bar{x} \in \text{Fix}(g^N)$. Esso coincide con la cardinalità di $\gamma(\bar{x})$ ed il moto associato è una funzione periodica di periodo N (ovvero $g^{k+N}(\bar{x}) = g^k(\bar{x}) \forall k$). I punti fissi sono i punti periodici di periodo $N = 1$. Un punto fisso \bar{x} è detto anche *stato stazionario*, o (posizione di)

equilibrio del sistema, poiché il moto associato è una funzione costante ($g^k(\bar{x}) = \bar{x} \forall k$).

ESEMPIO 2.1 (Legge di Malthus). Si tratta della più semplice legge sulla crescita di una popolazione. Si applica a una popolazione di individui che non interagisce con altre popolazioni, è dotata di risorse di spazio e cibo illimitate, e la cui distribuzione sul territorio è omogenea. Il numero di individui dipende dal numero di nascite e di morti che avvengono nell'unità di tempo. La legge di Malthus si basa sull'assunzione che i tassi di nascita e morte percentuali per unità di tempo siano costanti nel tempo ed indipendenti dalla numerosità. Lo spazio degli stati sono i numeri reali non negativi, dunque $S = [0, +\infty)$, dove $x \in S$ rappresenta la numerosità della popolazione. Indicando i tassi di nascita e morte con i parametri $\hat{b} \in (0, 1)$ e $\hat{d} \in (0, 1)$ rispettivamente, la legge ricorsiva è

$$x_{k+1} = x_k + \hat{b}x_k - \hat{d}x_k = Rx_k, \quad \text{con } R = 1 + \hat{b} - \hat{d}.$$

Dunque $g(x) = Rx$ con $R > 0$, e la dinamica è reversibile essendo $g^{-1}(x) = R^{-1}x$. Nel caso speciale $R = 1$, ovvero $\hat{b} = \hat{d}$, si ha $\text{Fix}(g) = S$ (la popolazione non varia poiché nascite e morti si compensano esattamente). Se $R \neq 1$ la funzione g ha l'unico punto fisso $x = 0$ mentre il comportamento asintotico nel tempo della popolazione quando $x_0 = x > 0$ è molto semplice:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} g^k(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} R^k x = \begin{cases} 0 & \text{se } R < 1, \\ +\infty & \text{se } R > 1. \end{cases}$$

Quindi la popolazione cresce senza limitazioni se $\hat{b} > \hat{d}$ e si estingue (con velocità di convergenza esponenziale nel tempo k) se $\hat{b} < \hat{d}$. Ovviamente il comportamento asintotico nel passato, quando $k \rightarrow -\infty$, corrisponde a quello nel futuro della mappa inversa, che è ancora malthusiana (con R^{-1} in luogo di R).

ESEMPIO 2.2 (Legge di Malthus modificata). La crescita senza limiti della popolazione nel caso $R > 1$ è ovviamente irrealistica e risiede nell'ipotesi di risorse di spazio e cibo illimitate. Per costruire un modello più verosimile possiamo modificare la legge di Malthus scegliendo il tasso di variazione dipendente da x , e decrescente a zero per $x \rightarrow +\infty$. Una possibile scelta è una legge a potenza inversa, $R(x) = R/(1 + bx)$ con $R, b > 0$, cosicché la legge di evoluzione diventa

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad \text{con } g(x) = \frac{Rx}{1 + bx}.$$

In questo caso la forma esplicita del moto, ovvero l'iterazione k -esima $g^k(x)$, non è esplicita come nel caso della legge di Malthus. Procediamo pertanto ad uno studio qualitativo del moto, cercando di derivarne il comportamento asintotico nel tempo.

Per mappe su \mathbb{R} , una semplice analisi grafica (il *diagramma di Lameray*) permette di descrivere facilmente i moti. Mostriamo tale procedura in dettaglio nel caso della legge di Malthus modificata.

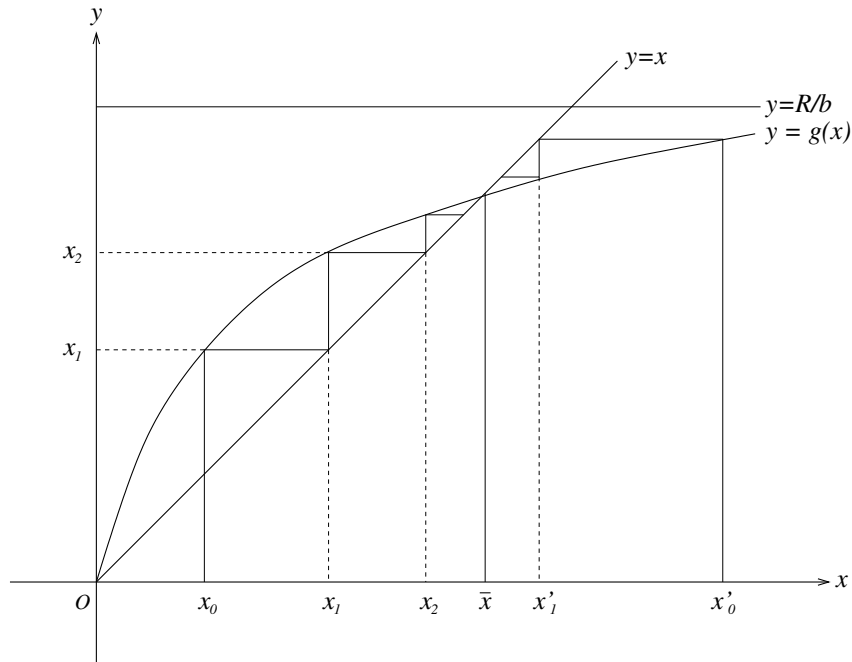


FIGURA 2.1. Costruzione grafica (diagramma di Lameray) delle iterazioni della legge di Malthus modificata con $R > 1$, nel caso di un dato iniziale $x = x_0 \in (0, \bar{x})$ oppure $x = x'_0 > \bar{x}$.

Occorre innanzitutto individuare i punti fissi della mappa (che corrispondono alle intersezioni tra il suo grafico e la bisettrice del primo e terzo quadrante) e quindi gli intervalli in cui $g(x) > x$ e $g(x) < x$. Nel caso in esame la funzione g è monotona crescente con asintoto orizzontale:

$$g(0) = 0, \quad g'(x) = \frac{R}{(1+bx)^2} > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{R}{b}.$$

Le sue intersezioni con la bisettrice dipendono dal valore del parametro R , precisamente occorre distinguere i due casi $R \in (0, 1]$ e $R > 1$.

Consideriamo il caso più interessante $R > 1$, in cui $\text{Fix}(g) = \{0; \bar{x}\}$ con $\bar{x} = (R-1)/b$, e con $g(x) > x$ per $x \in (0, \bar{x})$ e $g(x) < x$ per $x > \bar{x}$. Asseriamo che \bar{x} è un punto fisso attrattivo di g , e precisamente

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} g^k(x) = \bar{x} \quad \forall x > 0.$$

Per dimostrarlo osserviamo che dalla costruzione grafica in Figura 2.2 si evince che se $x \in (0, \bar{x})$ allora la successione $\{g^k(x)\}$ è monotona crescente contenuta in $(0, \bar{x})$ mentre se $x > \bar{x}$ allora $\{g^k(x)\}$ è monotona decrescente contenuta in (\bar{x}, x) . Pertanto fissato $x > 0$ esiste il limite $x_* > 0$ della successione $\{g^k(x)\}$. Ma \bar{x} è l'unico punto fisso di g in $(0, +\infty)$, da cui segue che $x_* = \bar{x}$ in virtù del seguente lemma elementare la cui dimostrazione è lasciata al lettore.

LEMMA 2.2. Sia $f: X \rightarrow X$ una applicazione continua su (X, d) spazio metrico. Allora

$$x_* = \lim_{k \rightarrow +\infty} f^k(x) \implies x_* \in \text{Fix}(f).$$

Se invece $R \in (0, 1]$ allora $\text{Fix}(g) = \{0\}$ e $g(x) < x$ per ogni $x > 0$, cosicché, ragionando come sopra, concludiamo che in questo caso

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} g^k(x) = 0 \quad \forall x > 0.$$

Quindi se $R > 1$ il modello prevede l'esistenza di uno stato stazionario \bar{x} verso cui tende asintoticamente il sistema qualunque sia la popolazione iniziale, mentre se $R \in (0, 1]$ la popolazione è sempre destinata ad estinguersi.

Osserviamo che la legge di Malthus modificata non è un processo reversibile poiché g non è biunivoca (è iniettiva ma non suriettiva, essendo la sua immagine $g(S) = [0, \frac{R}{b})$). Vale la pena notare che la dinamica diventa reversibile se ristretta all'intervallo $[0, \bar{x}]$. In effetti $g: [0, \bar{x}] \rightarrow [0, \bar{x}]$ è un'applicazione biunivoca, dunque esiste $g^{-1}: [0, \bar{x}] \rightarrow [0, \bar{x}]$ e, chiaramente,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} g^k(x) = \bar{x}, \quad \lim_{k \rightarrow -\infty} g^k(x) = 0 \quad \forall x \in (0, \bar{x}).$$

ESERCIZIO 2.1. Si consideri la seguente variazione della legge di Malthus su $S = [0, +\infty)$,

$$x_{k+1} = \tilde{g}(x_k), \quad \text{con } \tilde{g}(x) = \frac{Rx}{1 + b\sqrt{x}}.$$

Si verifichi che definisce un processo reversibile e si studi il comportamento asintotico nel futuro e nel passato per ogni possibile stato iniziale $x \in S$.

Nel caso della legge di Malthus modificata, oltre ai punti fissi, tutte le altre orbite hanno un comportamento asintotico semplice, precisamente sono tutte sedi di moti che convergono a punti fissi o divergono all'infinito. In particolare, quelle limitate forniscono un esempio di orbite eterocline, di cui diamo ora la definizione nel contesto dei sistemi dinamici a tempo discreto.

DEFINIZIONE 2.3. Sia $g: X \rightarrow X$ un omeomorfismo su (X, d) spazio metrico e si consideri il sistema dinamico topologico definito dalla legge ricorsiva $x_{k+1} = g(x_k)$. Allora:

(1) Sia $\bar{x} \in \text{Fix}(g)$. Il moto $x_k = g^k(x)$, $x \in X$, è detto a *meta asintotica nel futuro* (risp. *nel passato*) verso \bar{x} se

$$\bar{x} = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k \quad (\text{risp. } \bar{x} = \lim_{k \rightarrow -\infty} x_k).$$

(2) Siano $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \text{Fix}(g)$ e sia $x \in X$ tale che $x_k = g^k(x)$ è un moto a meta asintotica verso \bar{x}_1 nel futuro e verso \bar{x}_2 nel passato. Allora il punto x (risp. l'orbita $\gamma(x)$) è detto *eteroclino* (risp. *eteroclina*) ai punti \bar{x}_1 e \bar{x}_2 . Se $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 =: \bar{x}$ il punto x (risp. l'orbita $\gamma(x)$) è detto *omoclino* (risp. *omoclina*) a \bar{x} .

2.2. Contrazioni

Negli esempi precedenti la proprietà di attrattività (nel futuro o nel passato) dei punti fissi è stata facilmente dedotta grazie alla semplicità dei sistemi considerati. Nell'esempio della legge di Malthus modificata, la convergenza verso il punto fisso deriva dall'analisi del diagramma di Lameray. Invece, nel caso della legge di Malthus in cui il moto è esplicitamente noto, abbiamo anche mostrato che tale velocità di convergenza verso il punto fisso è esponenziale nel tempo.

D'altra parte, la proprietà di attrarre orbite vicine è di natura locale e quindi deve dipendere solo dalla struttura della mappa intorno al punto fisso. In questa sezione discutiamo il caso più semplice delle *contrazioni locali*, in cui tale proprietà è riconosciuta dalla parte lineare nello sviluppo della mappa attorno al punto fisso.

2.2.1. Contrazioni in \mathbb{R} . Ricordiamo dapprima il teorema delle contrazioni, ben noto risultato dell'analisi, che verrà diffusamente utilizzato nel seguito.

TEOREMA 2.4. *Sia (X, d) uno spazio metrico completo. Se la mappa $f: X \rightarrow X$ è una α -contrazione, ovvero esiste $0 < \alpha < 1$ tale che $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$ per ogni $x, y \in X$, allora*

- *f possiede un unico punto fisso (ovvero esiste un unico $\bar{x} \in X$ tale che $f(\bar{x}) = \bar{x}$),*
- *$d(f^k(x), \bar{x}) \leq \alpha^k d(x, \bar{x})$ per ogni $x \in X$ e $k \in \mathbb{N}$,*
- *$d(f^k(x), \bar{x}) \leq (1 - \alpha)^{-1} \alpha^k d(x, f(x))$ per ogni $x \in X$ e $k \in \mathbb{N}$.*

Da un punto di vista della teoria dei sistemi dinamici, questo teorema afferma che se f è una α -contrazione nello spazio metrico completo (X, d) allora il sistema dinamico topologico a tempi discreti definito dalla legge ricorsiva $x_{k+1} = f(x_k)$ ha un comportamento asintotico molto semplice: tutti i moti sono attratti dall'unico punto fisso \bar{x} della mappa f e la velocità di convergenza è (non meno che) esponenziale nel tempo.

Prendiamo ora in esame il caso della legge di Malthus modificata. Asseriamo che esiste un intorno $I = [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta]$ del punto fisso $\bar{x} = (R - 1)/b$ tale che $g(I) \subset I$ e $g: I \rightarrow I$ è una α -contrazione per un opportuno $\alpha \in (0, 1)$. Tale proprietà risiede nel fatto che $|g'(\bar{x})| < 1$, precisamente

$$g'(\bar{x}) = \frac{R}{(1 + b\bar{x})^2} = \frac{1}{R} < 1,$$

cosicché possiamo determinare $I = [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta]$ per cui

$$\max_{x \in I} |g'(x)| = \alpha < 1$$

e quindi, per la formula di Lagrange, $|g(x) - g(y)| \leq \alpha|x - y|$ per ogni $x, y \in I$. Pertanto:

- (i) $|g(x) - \bar{x}| = |g(x) - g(\bar{x})| \leq \alpha|x - \bar{x}| \leq |x - \bar{x}|$ per ogni $x \in I$, dunque $g(I) \subset I$;
- (ii) $g: I \rightarrow I$ è una α -contrazione.

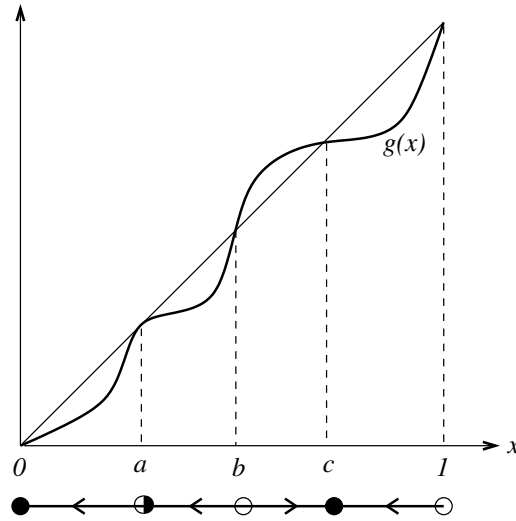


FIGURA 2.2. Diagramma di fase per un diffeomorfismo crescente su $[0, 1]$. Le frecce indicano la direzione del moto. In nero i punti fissi $x = 0, c$ che sono contrazioni locali, in bianco i punti fissi $x = b, 1$ che sono contrazioni locali per l'inversa. Il punto $x = a$ non è una contrazione ($g'(a) = 1$), in particolare attrae nel futuro da destra e nel passato da sinistra.

Chiaramente quanto descritto sopra si applica a qualunque mappa differenziabile $g: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: se $\bar{x} \in \text{Fix}(g)$ e $|g'(\bar{x})| < 1$ allora esiste I intorno di \bar{x} in \mathcal{D} tale che $g(I) \subset I$ e $g: I \rightarrow I$ è una α -contrazione per qualche $|g'(\bar{x})| \leq \alpha < 1$. Quando questo si verifica diremo che g è una *contrazione locale* attorno a \bar{x} .

Ad esempio, sempre nel caso della legge di Malthus modificata, la convergenza a 0 per $k \rightarrow -\infty$ di successioni $\{g^k(x)\}$ con $x \in (0, \bar{x})$ avviene con velocità esponenziale poiché $g^{-k}(x) = (g^{-1})^k(x)$ e, per il teorema della funzione inversa, $(g^{-1})'(0) = 1/g'(0) = 1/R < 1$.

ESEMPIO 2.3 (Diffeomorfismi su intervalli). Consideriamo la dinamica indotta da un diffeomorfismo su un intervallo che, senza perdita di generalità, possiamo assumere essere l'intervallo $[0, 1]$. La richiesta di continuità e invertibilità implica che la mappa deve essere monotona, pertanto dobbiamo distinguere tra il caso di mappe crescenti o decrescenti.

1) Sia $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ un diffeomorfismo crescente. Essendo suriettivo si ha necessariamente $0, 1 \in \text{Fix}(g)$. Consideriamo il caso generico in cui g possiede un numero finito di punti fissi. Questi dividono il dominio in intervalli disgiunti su cui g è positiva o negativa. Ciascun intervallo è invariante, ovvero contiene l'orbita di ogni suo punto x , che consiste in un'orbita eteroclina ai punti fissi estremi dell'intervallo (con $\{g^k(x)\}$ monotona crescente o decrescente a seconda del segno di $(g - \text{id})$ sull'intervallo). Attorno ai punti fissi in cui $|g'| < 1$ (risp. $|g'| > 1$) la mappa g (risp. g^{-1}) è una contrazione locale, vedi Figura 2.2.

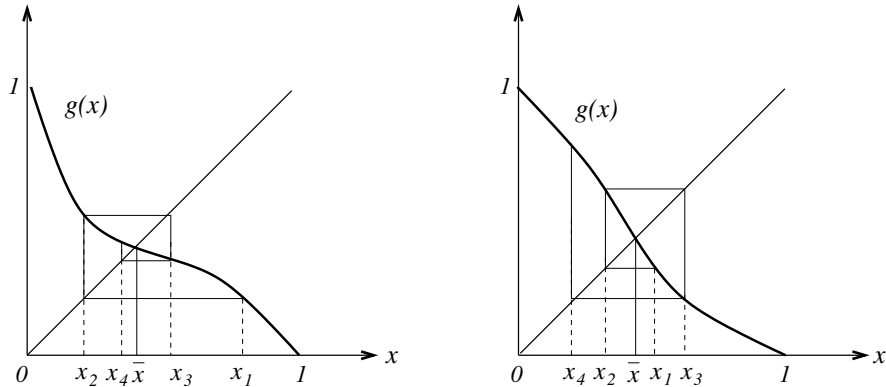


FIGURA 2.3. Esempio di diagramma di fase per diffeomorfismi decrescenti su $[0, 1]$: nella figura di sinistra \bar{x} è una contrazione locale ($|g'(\bar{x})| < 1$), in quella di destra \bar{x} è una contrazione locale per l'inversa ($|g'(\bar{x})| > 1$).

Nel caso critico $g'(\bar{x}) = 1$ il comportamento della dinamica intorno a \bar{x} dipende dai termini nonlineari nello sviluppo di g attorno \bar{x} (potrebbe essere attrattivo nel futuro, nel passato oppure può verificarsi il caso del punto $x = a$ in Figura 2.2).

2) Sia $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ un omeomorfismo decrescente. Essendo suriettivo si ha necessariamente $g(0) = 1$ e $g(1) = 0$, pertanto $0, 1 \in \text{Fix}(g^2)$ (ovvero periodici di periodo 2). Inoltre esiste un unico punto fisso $\bar{x} \in (0, 1)$ e tutte le altre orbite assumono alternativamente valori maggiori e minori di \bar{x} . Se $|g'(\bar{x})| < 1$ (risp. $|g'(\bar{x})| > 1$) g (risp. g^{-1}) è una contrazione locale attorno a tale punto, vedi Figura 2.3. Come prima, nel caso critico $g'(\bar{x}) = -1$ il comportamento della dinamica intorno a \bar{x} dipende dai termini nonlineari nello sviluppo di g attorno \bar{x} . Ad esempio, se $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ si ha $\bar{x} = 1/\sqrt{2}$ e $g^2(x) = x$, dunque tutti i punti $x \neq \bar{x}$ sono periodici di periodo 2.

ESERCIZIO 2.2. Si consideri la legge di Malthus modificata dell'Esempio 2.2. Si dimostri che per ogni $\varepsilon > 0$ e $\zeta > 0$ esiste $C = C(\varepsilon, \zeta) > 0$ tale che

$$|g^k(x) - \bar{x}| \leq C \left(\frac{1}{R} + \zeta \right)^k |x - \bar{x}| \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \geq \varepsilon.$$

OSSERVAZIONE 2.1. Anche nel caso di mappe su \mathbb{R} , una dinamica non reversibile può essere molto complicata. A titolo di esempio segnaliamo la cosiddetta *mappa logistica* $g_c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita dalla legge quadratica $g_c(x) := cx(1-x)$, il cui comportamento cambia drasticamente al variare del parametro c . Precisamente, si può dimostrare che

- se $c \in [0, 1]$ allora $g_c^k(x) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$ per ogni $x \in [0, 1]$;
- se $c \in [1, 3]$ allora $g_c^k(x) \rightarrow 1 - c^{-1}$ quando $k \rightarrow +\infty$ per ogni $x \in (0, 1)$;
- esiste $\{c_n\}$ successione con $c_1 = 3 < c_2 < \dots < c_n < 4$ tale che per $c \in (c_n, c_{n+1}]$ esistono n orbite periodiche di periodo 2^k , $k = 1, \dots, n$.

2.2.2. Contrazioni in \mathbb{R}^n . Consideriamo un sistema dinamico differenziabile a tempi discreti definito dalla legge ricorsiva

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad k \in \mathbb{N},$$

con $g \in C^r(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$, $1 \leq r \leq +\infty$, tale che $g(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$, e supponiamo $\bar{x} \in \mathcal{D}$ sia un punto fisso della mappa g , dunque $g(\bar{x}) = \bar{x}$.

La mappa g è detta *contrazione locale* intorno a \bar{x} se esiste un intorno chiuso $U \subset \mathcal{D}$ del punto \bar{x} tale che $g(U) \subseteq U$ e $g: U \rightarrow U$ è una contrazione in U rispetto alla metrica indotta da una qualche norma di \mathbb{R}^n . Cerchiamo un criterio sufficiente per verificare l'occorrenza di tale caso.

Nel seguito, se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è una matrice reale, indichiamo con $\|A\|$ la sua norma operatore, definita come

$$\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|}. \quad (2.1)$$

La definizione di $\|A\|$ dipende dalla scelta della norma $|x|$ su \mathbb{R}^n . Nel seguito, indicheremo con $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ la norma canonica di \mathbb{R}^n , indotta dal prodotto scalare standard $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, e con $\|A\|$ la relativa norma operatore di A . Utilizzeremo invece altri simboli, quali $|x|_*$, $|x|'$, \dots , per indicare differenti norme di \mathbb{R}^n , ed i simboli $\|A\|_*$, $\|A\|'$, \dots , per le relative norme operatore di A . Osserviamo infine che alcuni dei risultati seguenti coinvolgeranno norme di \mathbb{R}^n indotte da prodotti scalari. Riguardo la notazione, se $|x|_*$, $|x|'$, \dots sono norme di tale tipo, i simboli $\langle x, y \rangle_*$, $\langle x, y \rangle'$, \dots indicano i corrispondenti prodotti scalari.

PROPOSIZIONE 2.5 (test sulla derivata). *Siano $g \in C^r(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$, $1 \leq r \leq +\infty$, C un insieme convesso la cui chiusura \bar{C} sia contenuta in \mathcal{D} e $|x|_*$ una norma di \mathbb{R}^n indotta da un prodotto scalare. Allora*

$$|g(x) - g(y)|_* \leq M|x - y|_* \quad \forall x, y \in \bar{C}, \quad \text{con} \quad M = \sup_{z \in \bar{C}} \|Dg(z)\|_*,$$

dove $Dg(z)$ è la matrice jacobiana di g calcolata in z .

DIMOSTRAZIONE. Sia $v(s) = sx + (1-s)y$, $s \in [0, 1]$, l'equazione parametrica del segmento congiungente i punti x ed y . Per l'ipotesi di convessità $v(s) \in \bar{C}$ per ogni $s \in [0, 1]$. Per il teorema fondamentale del calcolo si ha

$$g(x) - g(y) = \int_0^1 ds \frac{d}{ds} g(v(s)) = \int_0^1 ds Dg(v(s))(x - y),$$

dove si è utilizzata la regola di derivazione delle funzioni composte e che $v'(s) = x - y$. Pertanto

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)|_*^2 &= \left\langle g(x) - g(y), \int_0^1 ds Dg(v(s))(x - y) \right\rangle_* \\ &= \int_0^1 ds \langle g(x) - g(y), Dg(v(s))(x - y) \rangle_* \leq \int_0^1 ds |g(x) - g(y)|_* \|Dg(v(s))(x - y)\|_* \\ &\leq \int_0^1 ds |g(x) - g(y)|_* \|Dg(v(s))\|_* |x - y|_* \leq M |g(x) - g(y)|_* |x - y|_*, \end{aligned}$$

avendo utilizzato la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz nella prima stima, la definizione di norma operatore nella seconda stima ed il fatto che $\|Dg(v(s))\|_* \leq M$ per ogni $s \in [0, 1]$ nell'ultima stima. Si ha pertanto $|g(x) - g(y)|_*^2 \leq M|g(x) - g(y)|_* |x - y|_*$, da cui la tesi. \square

Ricordiamo che lo *spettro* della matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è definito come l'insieme $\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(A - \lambda I) = 0\}$, mentre il numero $r(A) := \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(A)\}$ è detto il *raggio spettrale* di A .

TEOREMA 2.6. *Il raggio spettrale di una matrice reale $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è pari all'estremo inferiore dell'insieme delle norme operatore di A . Inoltre esso può essere approssimato con norme operatore associate a norme indotte da prodotti scalari. Altrimenti detto:*

- i) $r(A) \leq \|A\|_*$ per ogni $|x|_*$ norma di \mathbb{R}^n ;
- ii) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una norma indotta $|x|_\varepsilon = \sqrt{\langle x, x \rangle_\varepsilon}$ tale che $\|A\|_\varepsilon \leq r(A) + \varepsilon$.

DIMOSTRAZIONE. i) Sia $\lambda = |\lambda|e^{i\theta} \in \sigma(A)$ e $z = \xi + i\eta$ (con $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$) un corrispondente autovettore. Sia ora

$$m = \min\{ |(\cos \varphi)\xi - (\sin \varphi)\eta|_*; \varphi \in [0, 2\pi] \}.$$

Se $m = 0$ allora ξ ed η sono proporzionali, per cui ξ è autovettore di A e $\lambda \in \mathbb{R}$. In questo caso $|A\xi|_* = |\lambda||\xi|_*$ e, dalla definizione di norma operatore, segue che $|\lambda| \leq \|A\|_*$. Se invece $m > 0$, sia φ_0 l'angolo che realizza il minimo e poniamo $\zeta := (\cos \varphi_0)\xi - (\sin \varphi_0)\eta$. Allora, poiché identificando le parti reali ed immaginarie nell'identità $Az = \lambda z$ si ha

$$A\xi = |\lambda|(\cos \theta)\xi - |\lambda|(\sin \theta)\eta, \quad A\eta = |\lambda|(\sin \theta)\xi + |\lambda|(\cos \theta)\eta,$$

ne segue che

$$|A\zeta|_* = |(\cos \varphi_0)A\xi - (\sin \varphi_0)A\eta|_* = |\lambda| |\cos(\varphi_0 + \theta)\xi - \sin(\varphi_0 + \theta)\eta|_* \geq |\lambda|m.$$

Ma $m = |\zeta|_*$, per cui $|A\zeta|_* \geq |\lambda||\zeta|_*$ e dunque, nuovamente, $|\lambda| \leq \|A\|_*$. Vista l'arbitrarietà nella scelta di $\lambda \in \sigma(A)$, concludiamo che $r(A) \leq \|A\|_*$.

ii) Consideriamo dapprima il caso più facile in cui A è diagonalizzabile su \mathbb{C}^n . Possiamo allora determinare una matrice non singolare $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tale che $SAS^{-1} = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli n autovalori (non necessariamente distinti) di A . Definiamo allora la norma $|x|_*$ come la norma standard del vettore complesso $|Sx|$, dunque $|x|_*^2 = \langle \bar{S}x, Sx \rangle$ dove \bar{S} è la matrice complessa coniugata di S . Poiché $SA = DS$ si ha, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|Ax|_*^2 = |S Ax|^2 = |D S x|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 |(Sx)_i|^2 \leq r(A)^2 |Sx|^2 = r(A)^2 |x|_*^2.$$

Dunque $\frac{|Ax|_*}{|x|_*} \leq r(A)$ per ogni $x \neq 0$, pertanto $\|A\|_* \leq r(A)$ e quindi, in virtù del punto precedente $\|A\|_* = r(A)$ (altrimenti detto, in questo caso $r(A)$ è un minimo).

Se invece A non è diagonalizzabile possiamo determinare una matrice non singolare $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tale che $SAS^{-1} = D + N$, con $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e N matrice triangolare nulla sopra e lungo la diagonale, ovvero $N_{i,j} = 0$ se $i \leq j$. Per ciascun $\ell > 0$ sia ora $I_\ell = \text{diag}(1, \ell^{-1}, \dots, \ell^{1-n})$. Posto $S_\ell = I_\ell S$ si ha

$$S_\ell A S_\ell^{-1} = I_\ell (D + N) I_\ell^{-1} = D + N^{(\ell)},$$

con $N_{i,j}^{(\ell)} = \ell^{j-i} N_{i,j}$. Poiché $N_{i,j} \neq 0$ solo se $i > j$ allora tutti i termini non nulli di $N_{i,j}^{(\ell)}$ hanno come fattore una potenza negativa del parametro ℓ , cosicché

$$n_\ell := \max_{i,j} |N_{i,j}^{(\ell)}| \rightarrow 0 \quad \text{per } \ell \rightarrow +\infty.$$

Definiamo in questo caso $|x|_*^2 = \langle \bar{S}_\ell x, S_\ell x \rangle$, cosicché, essendo ora $S_\ell A = DS_\ell + N^{(\ell)} S_\ell$,

$$\begin{aligned} |Ax|_* &= |DS_\ell x + N^{(\ell)} S_\ell x| \leq |DS_\ell x| + |N^{(\ell)} S_\ell x| \leq r(A) |S_\ell x| + \|N^{(\ell)}\| |S_\ell x| \\ &= (r(A) + \|N^{(\ell)}\|) |x|_* \leq (r(A) + Cn_\ell) |x|_*, \end{aligned}$$

dove $\|N^{(\ell)}\|$ è la norma operatore della matrice complessa $N^{(\ell)}$ rispetto alla norma canonica di \mathbb{C}^n , che nell'ultimo passaggio viene stimata, mediante una opportuna costante, con il massimo modulo dei suoi elementi di matrice (per esercizio si trovi tale costante C). Fissato $\varepsilon > 0$ la tesi rimane dimostrata con $|x|_\varepsilon = |x|_*$, purché si scelga ℓ abbastanza grande da avere $r(A) + Cn_\ell \leq r(A) + \varepsilon$. \square

COROLLARIO 2.7 (Contrazioni lineari). *Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con $r(A) < 1$. Allora per ogni $\alpha \in (r(A), 1)$ esiste una costante $C > 0$ tale che $|A^k x| \leq C\alpha^k |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{N}$. Se inoltre A è invertibile allora $|A^{-k} x| \geq C^{-1} \alpha^{-k} |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{N}$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\varepsilon = \alpha - r(A)$ e $|x|_\varepsilon$ la norma adattata come costruita nel teorema precedente. Sia inoltre $C_\varepsilon > 1$ tale che $C_\varepsilon^{-1} |x| \leq |x|_\varepsilon \leq C_\varepsilon |x|$ (tale C_ε esiste per l'equivalenza delle norme di \mathbb{R}^n). Allora

$$|A^k x| \leq C_\varepsilon |A^k x|_\varepsilon \leq C_\varepsilon \|A^k\|_\varepsilon |x|_\varepsilon \leq C_\varepsilon \|A\|_\varepsilon^k |x|_\varepsilon \leq C_\varepsilon \alpha^k |x|_\varepsilon \leq C_\varepsilon^2 \alpha^k |x|,$$

dove nella terza stima si è utilizzata la proprietà sub-moltiplicativa della norma operatore. La stima è quindi dimostrata con $C = C_\varepsilon^2$. Se inoltre A è invertibile allora, usando la stima appena dimostrata, $|x| = |A^k A^{-k} x| \leq C\alpha^k |A^{-k} x|$, da cui $|A^{-k} x| \geq C^{-1} \alpha^{-k} |x|$. \square

OSSERVAZIONE 2.2. Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è tale che $|\lambda| > 1$ per ogni $\lambda \in \sigma(A)$ allora la matrice inversa A^{-1} esiste e soddisfa le ipotesi del Corollario 2.7. Pertanto A^k contrae per $k \rightarrow -\infty$ ed espande per $k \rightarrow +\infty$.

COROLLARIO 2.8 (Contrazioni locali). *Sia $g \in C^r(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$ con $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ ed $1 \leq r \leq +\infty$. Supponiamo che esista un punto fisso \bar{x} della mappa g tale che $r(Dg(\bar{x})) < 1$. Allora per ogni $\alpha \in (r(Dg(\bar{x})), 1)$ esiste un intorno chiuso $U \subset \mathcal{D}$ del punto fisso tale che*

- i) $g(U) \subseteq U$;

ii) $g: U \rightarrow U$ è una α -contrazione rispetto ad una norma opportuna.

DIMOSTRAZIONE. Fissato $\varepsilon > 0$ tale che $r(Dg(\bar{x})) + \varepsilon < \alpha$ sia $|x|_\varepsilon$ la norma adattata come costruita nel Teorema 2.6, cosicché $\|Dg(\bar{x})\|_\varepsilon \leq r(Dg(\bar{x})) + \varepsilon$. Sia ora $U_\delta = \{x: |x - \bar{x}|_\varepsilon \leq \delta\} \subset \mathcal{D}$. Per la continuità della matrice jacobiana, pur di scegliere δ piccolo a sufficienza si ha

$$M_\delta = \max_{x \in U_\delta} \|Dg(x)\|_\varepsilon \leq \alpha.$$

Il corollario è ora dimostrato con $U = U_\delta$ e la norma suddetta. Infatti, per la Proposizione 2.5 e la stima precedente: i) Se $x \in U$ allora $|g(x) - \bar{x}|_\varepsilon = |g(x) - g(\bar{x})|_\varepsilon \leq M_\delta |x - \bar{x}|_\varepsilon \leq |x - \bar{x}|_\varepsilon$, dunque $g(x) \in U$. ii) Se $x, y \in U$ allora $|g(x) - g(y)|_\varepsilon \leq M_\delta |x - y|_\varepsilon \leq \alpha |x - y|_\varepsilon$, dunque g è una α -contrazione in U rispetto alla norma $|x|_\varepsilon$. \square

Sistemi dinamici a tempo continuo

In questo capitolo trattiamo aspetti generali sui sistemi dinamici a tempo continuo. L'osservazione chiave è che i moti associati sono soluzioni di sistemi di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine.

3.1. Flusso di fase

Un sistema dinamico classico a tempo continuo sullo spazio delle fasi S è definito da un gruppo ad un parametro reale di diffeomorfismi $\{\phi^t\}$ su S . Quindi assegnare un sistema dinamico classico a tempo continuo equivale ad assegnare una coppia $(S, \{\phi^t\})$, detta *flusso di fase*. Nel seguito ci limitiamo al caso in cui $S = \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ (molti dei ragionamenti, coinvolgendo caratteristiche locali, si estendono senza modifiche al caso di varietà utilizzando sistemi di coordinate locali).

DEFINIZIONE 3.1. Sia $(\mathcal{D}, \{\phi^t\})$ flusso di fase sul dominio \mathcal{D} di \mathbb{R}^n . Definiamo *generatore* (o *velocità di fase*) del flusso il campo vettoriale $v \in C^\infty(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$ ottenuto ponendo

$$v(x) := \left. \frac{d}{dh} \phi^h(x) \right|_{h=0}, \quad x \in \mathcal{D}.$$

Per la proprietà di gruppo del flusso di fase notiamo che, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dt} \phi^t(x) = \left. \frac{d}{dh} \phi^{t+h}(x) \right|_{h=0} = \left. \frac{d}{dh} \phi^h(\phi^t(x)) \right|_{h=0} = v(\phi^t(x)).$$

Quindi, per ogni $x \in \mathcal{D}$, il moto $x(t) := \phi^t(x)$ è la soluzione dell'equazione differenziale ordinaria

$$\dot{x}(t) = v(x(t)) \tag{3.1}$$

tale che sia soddisfatta la condizione iniziale $x(0) = x$.

La conoscenza della velocità di fase determina univocamente il flusso associato in virtù del teorema di esistenza ed unicità per il problema di Cauchy associato a campi vettoriali regolari. Enunciamo, senza dimostrazione, tale teorema, comprensivo della proprietà di regolarità rispetto ai dati iniziali, ed un suo corollario sull'esistenza delle soluzioni massimali.

TEOREMA 3.2. Sia $v \in C^r(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$, $1 \leq r \leq +\infty$. Allora, per ogni compatto $K \subset \mathcal{D}$ esiste un intorno $I = (-\delta, \delta)$ tale che per ogni $x \in K$ esiste un'unica soluzione

$x(t)$, $t \in I$, del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(x(t)), \\ x(0) = x. \end{cases} \quad (3.2)$$

Inoltre, l'applicazione $(t, x) \mapsto x(t) =: \phi^t(x)$ appartiene a $C^r(I \times K; \mathcal{D})$ e $\phi^{t+s} = \phi^t \circ \phi^s$ per ogni $t, s \in I$ tali che $t + s \in I$.

COROLLARIO 3.3. Sia $v \in C^r(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$, $1 \leq r \leq +\infty$. Allora, per ogni $x \in \mathcal{D}$ esiste un'unica soluzione massimale $\phi^t(x)$, $t \in J_x = (-\alpha, \beta)$, del problema di Cauchy (3.2). Inoltre se $\alpha < +\infty$ [risp. $\beta < +\infty$] allora per ogni compatto $K \subset \mathcal{D}$ tale che $x \in K$ esiste un tempo $t_K \in (-\alpha, 0)$ [risp. $t_K \in (0, \beta)$] per il quale $\phi^{t_K}(x) \in \partial K$.

Usualmente il processo evolutivo è assegnato mediante la *legge locale di evoluzione* $\dot{x} = v(x)$ (le osservazioni sperimentali di un sistema reale permettono di dedurre le leggi del moto). La buona posizione del modello matematico si fonda sulla possibilità (almeno in linea di principio) di ricostruire il passato e predire il futuro sulla base della legge locale assegnata. In altri termini occorre risolvere il *problema fondamentale delle equazioni differenziali ordinarie o problema di Cauchy* (3.2): assegnata la legge locale di evoluzione ricostruire il moto del sistema dai dati iniziali. Come già osservato, il teorema precedente ed il suo corollario implicano che il generatore determina univocamente il flusso di fase associato, ma non è detto che ogni campo di velocità $v \in C^\infty(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$ sia il generatore di un flusso di fase $(\mathcal{D}, \{\phi^t\})$. Questo conduce alla seguente definizione.

DEFINIZIONE 3.4. Il campo vettoriale $v \in C^\infty(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$ è detto *completo* se $J_x = \mathbb{R}$ per ogni $x \in \mathcal{D}$, ovvero se ogni problema di Cauchy ammette soluzione globale nel tempo. In particolare, v è completo se e solo se è il generatore di un flusso di fase.

Poiché nel caso unidimensionale $n = 1$ l'Eq. (3.2) si risolve per separazione delle variabili, è facile esibire esempi di sistemi unidimensionali completi o non completi per calcolo diretto. Negli esempi che seguono tale calcolo non è riportato ed è lasciato al lettore.

1) $v(x) = ax$, $x \in \mathbb{R}$, con a parametro reale. Genera il flusso di fase $\phi^t(x) = e^{at}x$, $x \in \mathbb{R}$. Poiché ϕ^t conserva il segno è anche possibile restringerne l'azione sulla semiretta positiva e considerare il flusso di fase $\phi^t: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, che può essere interpretato come una versione a tempo continuo della legge di Malthus, in cui $x \in (0, \infty)$ rappresenta la numerosità di una popolazione e $a \in \mathbb{R}$ il tasso percentuale istantaneo di variazione della numerosità. Il comportamento asintotico nel futuro dipende in questo caso dal segno del tasso istantaneo a : la popolazione cresce indefinitivamente se $a > 0$ e si estingue se $a < 0$.

2) $v(x) = 1 + x^2$. La soluzione massimale per ogni dato iniziale $x \in \mathbb{R}$ è

$$\phi^t(x) = \tan\left(t + \arctan x\right), \quad t \in J_x = \left(-\frac{\pi}{2} - \arctan x, \frac{\pi}{2} - \arctan x\right),$$

che non è un flusso di fase, ovvero v non è completo.

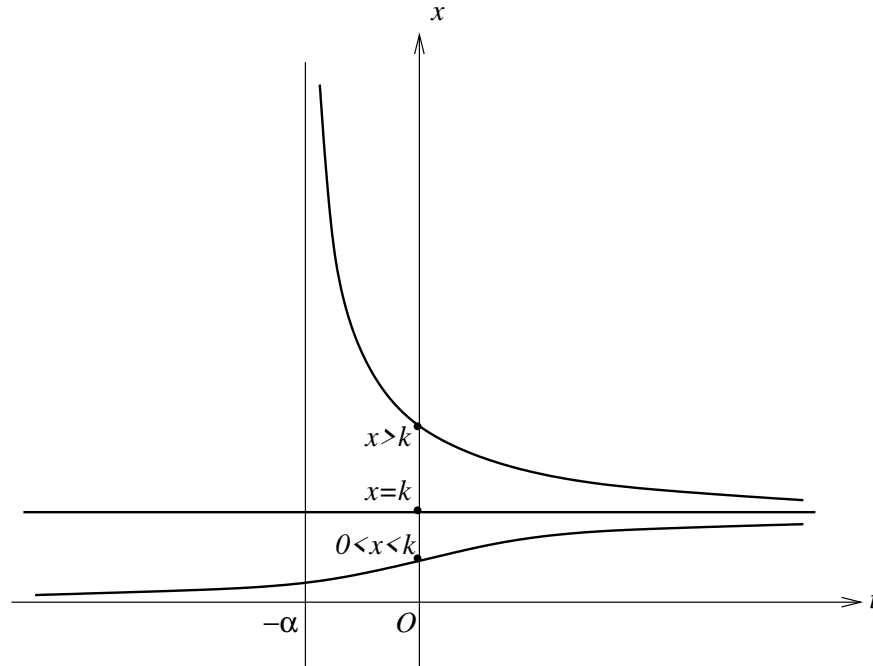


FIGURA 3.1. Grafico dei moti $t \rightarrow \phi^t(x)$ dell'equazione logistica per dati iniziali $0 < x < k$, $x = k$ e $x > k$.

3) *Equazione logistica:*

$$v(x) = a\left(1 - \frac{x}{k}\right)x, \quad x \in (0, +\infty),$$

con a, k parametri positivi. Sebbene la funzione v abbia come dominio naturale tutto l'asse reale la consideriamo qui definita solo sulla semiretta positiva poiché vogliamo interpretarla come una legge di Malthus modificata a tempo continuo. Quindi, nuovamente, $x > 0$ rappresenta la numerosità di una popolazione e, per includere il fatto che le risorse di spazio e cibo non sono illimitate, si inserisce nel modello un tasso percentuale istantaneo di variazione che decresce con la numerosità, diventando negativo quando quest'ultima supera la soglia k . La soluzione massimale per ogni dato iniziale $x > 0$ è

$$\phi^t(x) = \frac{kx}{x + e^{-at}(k-x)}, \quad t \in J_x = (-\alpha, +\infty), \quad \alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } x \in (0, k], \\ \frac{1}{a} \log \frac{x}{x-k} & \text{se } x > k. \end{cases}$$

In questo caso v non genera un flusso di fase, ma genera un semiflusso $\{\phi^t\}_{t \geq 0}$ in quanto tutte le soluzioni massimali sono globali nel futuro. Altrimenti detto, l'equazione logistica descrive un processo irreversibile. Il comportamento qualitativo del processo è del tutto analogo a quello del modello a tempo discreto: esiste uno stato stazionario, precisamente $\bar{x} = k$ (infatti $\phi^t(k) = k \forall t$), verso cui tende asintoticamente il sistema qualunque sia la popolazione iniziale ($\phi^t(x) \rightarrow k$ per $t \rightarrow +\infty \forall x > 0$), vedi Figura 3.1.

3.2. Leggi dipendenti dal tempo

L'Eq. (3.1) è *autonoma*, ovvero il campo vettoriale non dipende esplicitamente dal tempo, poiché abbiamo assunto che la legge di evoluzione rimanga immutata nel tempo. Come discusso in Sezione 1.2, in assenza di tale ipotesi la legge di evoluzione è assegnata da una famiglia di applicazioni $\phi^{t,t_0} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ che soddisfa le condizioni (a)–(e) in Sezione 1.2. Anche in questo caso possiamo definire il generatore

$$v(t, x) = \left. \frac{d}{dh} \phi^{t+h,t}(x) \right|_{h=0},$$

che è ora un campo vettoriale dipendente dal tempo, quindi $v \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$. Abbiamo ora

$$\frac{d}{dt} \phi^{t,t_0}(x) = \left. \frac{d}{dh} \phi^{t+h,t_0}(x) \right|_{h=0} = \left. \frac{d}{dh} \phi^{t+h,t}(\phi^{t,t_0}(x)) \right|_{h=0} = v(t, \phi^{t,t_0}(x)).$$

Pertanto il moto $x(t) = \phi^{t,t_0}(x)$ è soluzione di un'equazione differenziale *non autonoma*, precisamente del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t, x(t)), \\ x(t_0) = x. \end{cases} \quad (3.3)$$

Come nel caso autonomo non tutti i campi $v \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$ sono completi, nel senso che in generale il problema di Cauchy (3.3) ammette un'unica soluzione massimale ϕ^{t,t_0} , $t \in J_{t_0,x}$, con $J_{t_0,x} = (t_0 - \alpha, t_0 + \beta) \subseteq \mathbb{R}$.¹

In realtà non è necessario dimostrare nuovamente il teorema di esistenza ed unicità ed il suo corollario sulle soluzioni massimali nel caso del problema non autonomo (3.3). Infatti è facile vedere che tale problema è equivalente ad un opportuno problema autonomo nello *spazio delle fasi ampliato* $\Omega := \mathbb{R} \times \mathcal{D}$. Precisamente, sia $V \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{n+1})$ il campo vettoriale (indipendente dal tempo) ottenuto ponendo, per ciascun $X = (\tau, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{D} = \Omega$,

$$V(X) := \begin{pmatrix} 1 \\ v(\tau, x) \end{pmatrix}.$$

Allora si verifica facilmente che una funzione $X(s) \in \Omega$, con $s \in J$ intorno di $s = 0$, è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{X}(s) = V(X(s)), \\ X(0) = X = (t_0, x) \in \Omega, \end{cases} \quad (3.4)$$

se e soltanto se $X(s) = (t_0 + s, x(t_0 + s))$ con $x(t)$, $t \in t_0 + J$, soluzione del problema (3.3). In particolare, se $X(s) = \Phi^s(X) = (t_0 + s, x(t_0 + s))$, $s \in J_X = (-\alpha, \beta)$, è l'unica soluzione massimale di (3.4) allora $x(t) =: \phi^{t,t_0}(x)$, $t \in J_{t_0,x} = (t_0 - \alpha, t_0 + \beta) \subseteq \mathbb{R}$, fornisce l'unica soluzione massimale dell'Eq. (3.3).

¹Ricordiamo che la teoria generale delle equazioni differenziali si formula per campi $v \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ con Ω generico dominio di \mathbb{R}^{n+1} , ma ai fini di queste note possiamo limitarci al caso della "striscia" $\Omega = \mathbb{R} \times \mathcal{D}$.

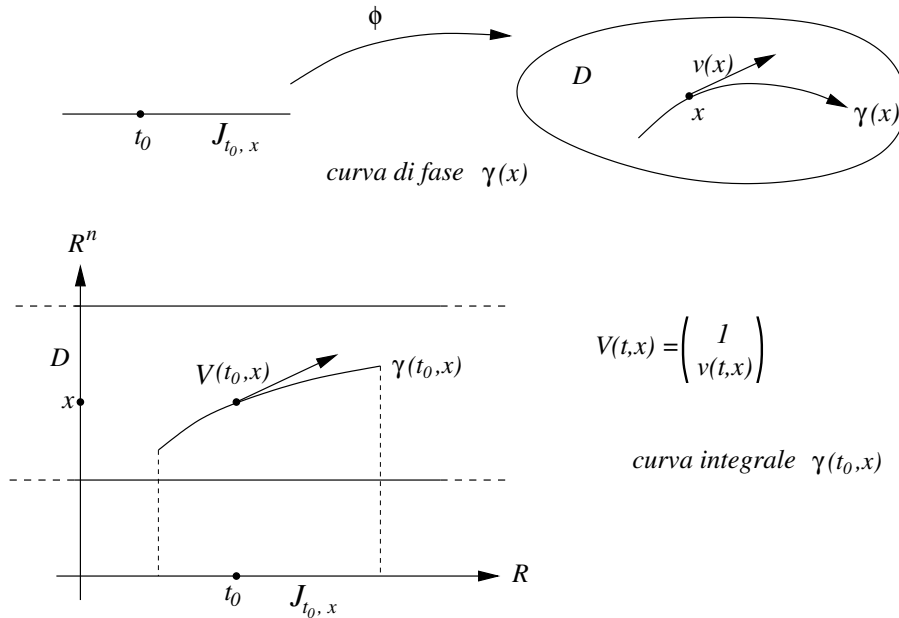


FIGURA 3.2. Curva di fase e curva integrale.

Chiaramente, nel caso di campi completi, in cui tutte le soluzioni massimali sono globali e la dinamica definisce famiglie di diffeomorfismi sullo spazio delle fasi, ritroviamo quanto descritto in generale nell’Osservazione 1.2, riguardo l’equivalenza tra la legge di evoluzione $(\mathcal{D}, \{\phi^{t, t_0}\}_{t, t_0 \in \mathbb{R}})$ ed il corrispondente gruppo ad un parametro $(\Omega, \{\Phi^t\}_{t \in \mathbb{R}})$ sullo spazio delle fasi ampliato.

3.3. Curve integrali e curve di fase

Consideriamo il problema di Cauchy (3.3) e sia $\phi^{t, t_0}(x)$, $t \in J_{t_0, x}$, la soluzione massimale. Definiamo *curva integrale* per (t_0, x) il grafico della corrispondente soluzione massimale nello spazio delle fasi ampliato $\Omega = \mathbb{R} \times \mathcal{D}$, ovvero l’insieme

$$\gamma(t_0, x) := \{(t, \phi^{t, t_0}(x)) \in \Omega : t \in J_{t_0, x}\}. \tag{3.5}$$

In virtù del teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni massimali, ogni punto dello spazio delle fasi ampliato appartiene ad un’unica curva integrale, ovvero le curve integrali non possono intersecarsi.

Nel caso autonomo $v(t, x) = v(x)$ la soluzione massimale del problema di Cauchy (3.3) si ottiene come traslata della soluzione del corrispondente problema per $t_0 = 0$,

$$\phi^{t, t_0}(x) = \phi^{t-t_0}(x), \quad t \in J_{t_0, x} = t_0 + J_x := \{s : s - t_0 \in J_x\}.$$

Quindi ciascuna curva integrale $\gamma(t_0, x)$ si ottiene trasladando di t_0 lungo l’asse dei tempi la curva $\gamma(0, x)$. In analogia con la Definizione 1.1, anche nel caso di un

campo autonomo non completo v definiamo *curva di fase* (o orbita) per $x \in \mathcal{D}$ l'insieme²

$$\gamma(x) := \{\phi^t(x) : t \in J_x\}.$$

Altrimenti detto, $\gamma(x)$ è la proiezione della curva integrale $\gamma(0, x)$ (e quindi di tutte le curve $\gamma(t_0, x)$, $t_0 \in \mathbb{R}$) sullo spazio delle fasi \mathcal{D} , vedi Figura 3.2.

PROPOSIZIONE 3.5. *Le curve di fase di un sistema differenziale autonomo non possono intersecarsi.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $x \in \mathcal{D}$ e $y \in \gamma(x)$, dunque $y = \phi^s(x)$ per qualche $s \in J_x$. Dobbiamo mostrare che $\gamma(y) = \gamma(x)$. A tal scopo è sufficiente osservare che per ogni $t \in J_y$ si ha $\phi^t(y) = \phi^t(\phi^s(x)) = \phi^{t,0}(\phi^{s,0}(x)) = \phi^{t+s,s}(\phi^{s,0}(x)) = \phi^{t+s}(x)$ con $t+s \in J_x$. Quindi $\phi^t(y) \in \gamma(x)$ per ogni $t \in J_y$. \square

È invece possibile che una curva di fase si autointersechi, ovvero che il sistema si trovi nel medesimo stato in tempi diversi, ma in questo caso la struttura della curva di fase è molto semplice, come mostra la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 3.6. *Sia $\phi^t(x)$, $t \in J_x$, la soluzione massimale di (3.2). Supponiamo che esista $t_1 \neq 0$ tale che $\phi^{t_1}(x) = x$. Allora $J_x = \mathbb{R}$ e la funzione $t \mapsto \phi^t(x)$ è periodica di periodo $T = |t_1|$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo $t_1 = T > 0$ (il caso $t_1 < 0$ è analogo). Sia ψ il prolungamento T -periodico della funzione $t \mapsto \phi^t(x)$, $t \in [0, T]$, ovvero $\psi(t) = \phi^{t-kT}(x)$ con $k = k(t)$ l'intero tale che $t - kT \in [0, T]$. È immediato verificare che $\psi(t)$ è soluzione dell'equazione. \square

Prima di commentare questo risultato premettiamo una definizione.

DEFINIZIONE 3.7. Assegnato un campo vettoriale differenziabile $v: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, il punto $x \in \mathcal{D}$ è detto *punto singolare* del campo v se $v(x) = 0$, altrimenti x è detto *punto regolare* del campo v .

Tornando alla Proposizione 3.6, essa implica che se una curva di fase $\gamma(x)$ si autointerseca allora essa è necessariamente chiusa, essendovi solo due possibilità:

- 1) se x è un punto singolare del campo allora $\gamma(x) = \{x\}$ sede di un moto stazionario, $\phi^t(x) = x$;
- 2) se x è un punto regolare del campo allora $\gamma(x)$ è un *ciclo*, ovvero una curva diffeomorfa ad una circonferenza e sede di un moto periodico di periodo minimo $|t_1|/N$, per qualche $N \in \mathbb{N}$.

Pertanto, assegnato un campo vettoriale sullo spazio euclideo, la struttura geometrica intrinseca delle curve di fase è molto semplice: un punto, una curva chiusa diffeomorfa ad una circonferenza, oppure una curva aperta diffeomorfa ad una retta.

²Vale la pena osservare che la curva di fase $\gamma(X)$ del sistema (3.4) nello spazio delle fasi ampliato coincide con la curva integrale $\gamma(t_0, x)$ del sistema (3.3), da cui la scelta della notazione (3.5) per quest'ultima.

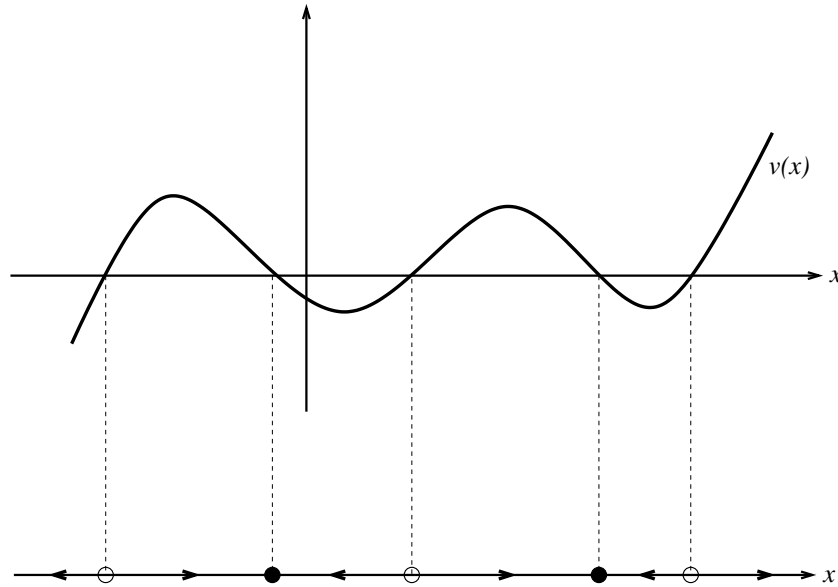


FIGURA 3.3. Diagramma di fase per un generico campo su \mathbb{R} . Le frecce indicano la direzione del moto. In nero i punti singolari attrattivi nel futuro, in bianco quelli attrattivi nel passato.

Viceversa, la disposizione di tali curve nello spazio delle fasi può essere molto complicata, e determina il comportamento asintotico nel tempo delle soluzioni. Il moderno approccio geometrico allo studio dei sistemi dinamici, che ha le sue origini nell'opera di H. Poincaré, consiste nello sviluppare tecniche per un'analisi qualitativa della geometria delle curve di fase, che non richiedono l'integrazione esplicita delle equazioni del moto.

3.3.1. Sistemi unidimensionali. Per familiarizzare con i concetti sopra introdotti consideriamo il caso elementare di un sistema autonomo in dimensione $n = 1$, in cui le equazioni del moto si integrano per separazione delle variabili. Sia quindi $v \in C^\infty(\mathcal{D}; \mathbb{R})$ con $\mathcal{D} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$. I punti singolari di v sono curve di fase corrispondenti alle soluzioni stazionarie del sistema. Se invece $v(x) \neq 0$, detti

$$\begin{aligned} x_- &:= \inf\{y \in (a, b) \cap (-\infty, x] : v(z) \neq 0 \forall z \in (y, x]\}, \\ x_+ &:= \sup\{y \in (a, b) \cap [x, +\infty) : v(z) \neq 0 \forall z \in [x, y)\}, \end{aligned}$$

applicando il metodo della separazione delle variabili, la soluzione massimale $\phi^t(x)$, $t \in J_x$, è la funzione inversa di

$$t(y) = \int_x^y dz \frac{1}{v(z)}, \quad y \in (x_-, x_+). \quad (3.6)$$

La funzione $y \mapsto t(y)$ rappresenta il tempo in cui la soluzione raggiungere la posizione $y \in (x_-, x_+)$. Ciascuno degli estremi x_\pm può essere un punto singolare del campo oppure un punto di frontiera del dominio (a, b) (nel qual caso potrebbe

coincidere con $\pm\infty$ se (a, b) è illimitato). Il tempo che la soluzione impiega per “raggiungere” questi punti (nel futuro o nel passato) è dato dai limiti

$$t_{\pm} := \lim_{y \rightarrow x_{\pm}} t(y) = \int_x^{x_{\pm}} dz \frac{1}{v(z)}, \quad (3.7)$$

che esistono essendo la funzione $t(y)$ monotona sul suo dominio (x_-, x_+) . L'integrale a secondo membro va interpretato come integrale (eventualmente) improprio: di prima specie nel caso in cui x_{\pm} è un punto singolare (la funzione integranda $1/v(z)$ diverge in $z = x_{\pm}$), di seconda specie se $x_{\pm} = \pm\infty$. Tale integrale è sicuramente divergente se $x_{\pm} \in (a, b)$; infatti in tal caso è $v(x_{\pm}) = 0$ e la curva di fase $\gamma(x)$ non può intersecare la curva $\gamma(x_{\pm}) = \{x_{\pm}\}$. Nei casi $x_- = a$ oppure $x_+ = b$ la convergenza di tale integrale implica la non globalità (nel tempo) della soluzione. In ogni caso $\gamma(x) = (x_-, x_+)$ costituisce una curva di fase (aperta), sede di un moto crescente (risp. decrescente) a seconda che ivi $v > 0$ (risp. $v < 0$).

In conclusione, lo spazio delle fasi (a, b) si decompone nell'unione dei punti singolari, ciascuno costituente una curva di fase chiusa, ed in intervalli aperti disgiunti, che separano tali punti tra loro o dalla frontiera, ciascuno costituente una curva di fase sede di un moto monotono. In particolare, un punto singolare isolato è il limite asintotico nel futuro o nel passato di un moto monotono, vedi Figura 3.3.

ESERCIZIO 3.1. Si studino i moti dell'equazione logistica con raccolta

$$\dot{x} = a\left(1 - \frac{x}{k}\right)x - h, \quad x \in (0, +\infty),$$

con a, k parametri positivi, al variare del tasso di raccolta $h > 0$.

ESERCIZIO 3.2. Stabilire quali dei seguenti campi sono completi.

- 1) $v(x) = \log x, \quad x \in (0, +\infty)$.
- 2) $v(x) = x \log x, \quad x \in (0, \infty)$.
- 3) $v(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$.
- 4) $v(x) = \sqrt{x}, \quad x \in (0, +\infty)$,
- 5) $v(x) = x^4 \cos x, \quad x \in \mathbb{R}$.

3.4. Cambiamenti di coordinate

Per analizzare un sistema differenziale è opportuno individuare il sistema di coordinate in cui il problema assuma la forma più semplice possibile. A tal scopo occorre innanzitutto stabilire la legge di trasformazione di un sistema differenziale sotto cambiamenti di coordinate, ovvero stabilire quale sia l'azione di un diffeomorfismo su un campo vettoriale.

Supponiamo che $f : \mathcal{D} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}$ sia un diffeomorfismo di \mathcal{D} nel dominio $\tilde{\mathcal{D}}$. Sia $t \mapsto \phi(t)$ una curva in \mathcal{D} soluzione dell'Eq. (3.1). Posto $\psi(t) := f(\phi(t))$ si ha

$$\dot{\psi}(t) = Df(\phi(t))v(\phi(t)) = Df(f^{-1}(\psi(t)))v(f^{-1}(\psi(t))).$$

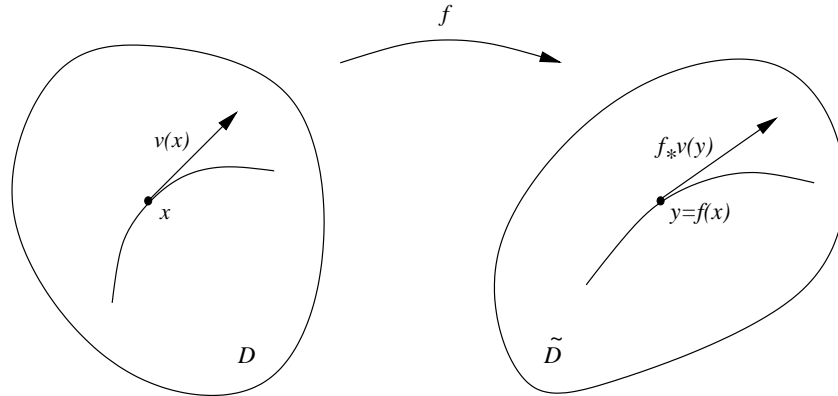


FIGURA 3.4. Azione di un diffeomorfismo f sul campo vettoriale v .

Definiamo allora immagine del campo vettoriale $v: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, sotto l'azione del diffeomorfismo f , il campo vettoriale $f_*v: \tilde{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che

$$f_*v(y) := Df(x)v(x) \Big|_{x=f^{-1}(y)}.$$

In particolare, se $(\mathcal{D}, \{\phi^t\})$ è il flusso di fase la cui velocità è data dal campo vettoriale $v \in C^\infty(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$, allora il flusso immagine tramite f , ovvero $(\tilde{\mathcal{D}}, \{\tilde{\phi}^t\})$ dove $\tilde{\phi}^t := f \circ \phi^t \circ f^{-1}$, è generato dal campo vettoriale $\tilde{v} := f_*v$.

Il diffeomorfismo f può essere interpretato come un cambiamento di coordinate in \mathcal{D} . Se $x_i: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, sono le coordinate assegnate in \mathcal{D} , le funzioni

$$y_i: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} : y_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

definiscono un nuovo sistema di coordinate ammissibile (ovvero che conserva la struttura differenziabile) in \mathcal{D} . Una curva $\phi(t)$ soluzione dell'Eq. (3.2) ha componenti $x_i(t) = x_i(\phi(t))$, $i = 1, \dots, n$, soluzioni del sistema

$$\dot{x}_i(t) = v_i(x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad i = 1, \dots, n,$$

e componenti $y_i(t) = f_i(x_1(t), \dots, x_n(t))$, $i = 1, \dots, n$, soluzioni del sistema

$$\dot{y}_i(t) = (f_*v)_i(y_1(t), \dots, y_n(t)), \quad i = 1, \dots, n.$$

Quindi $v \mapsto f_*v$ è la legge di trasformazione del campo vettoriale v sotto il cambiamento di coordinate $y = f(x)$.

3.4.1. Il teorema della scatola di flusso. Un'importante applicazione delle leggi di trasformazione dei campi vettoriali è il *teorema della scatola di flusso* (o *teorema della rettificazione*), che mostra come la struttura locale delle curve di fase in prossimità di un punto *non* singolare sia estremamente semplice.

TEOREMA 3.8. *In un intorno opportuno di un suo punto regolare, un campo vettoriale differenziabile è diffeomorfo al campo costante $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. In altri*

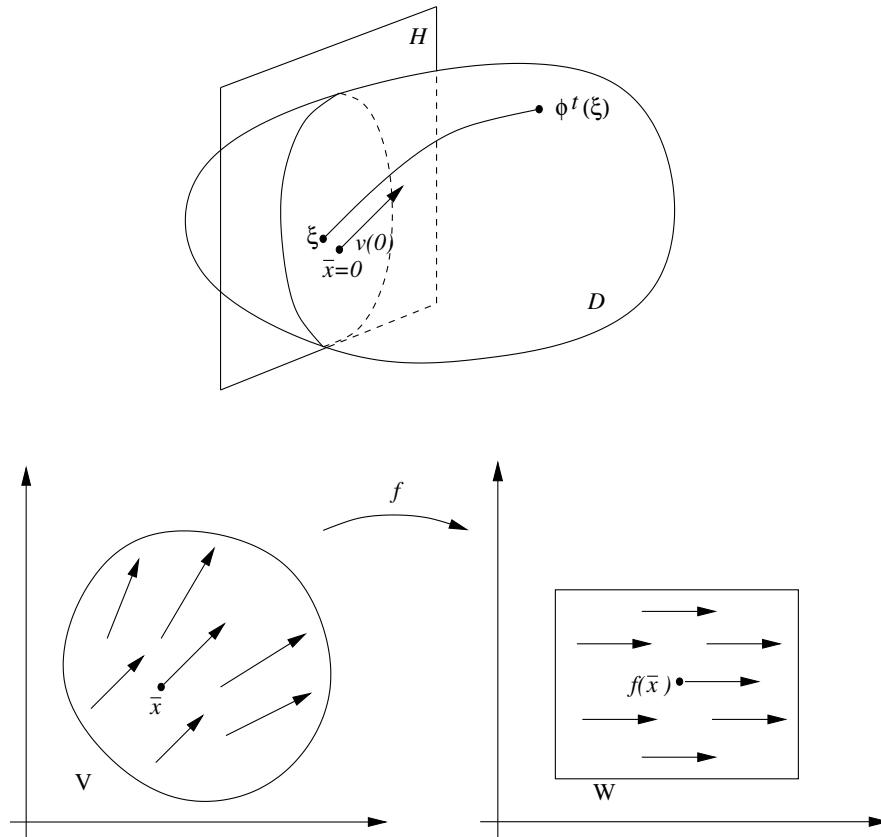


FIGURA 3.5. Diffeomorfismo di rettificazione

termini in un intorno di un punto regolare esiste un diffeomorfismo che trasforma il campo originale in e_1 .

DIMOSTRAZIONE. Sia $v \in C^r(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$, $1 \leq r \leq +\infty$, e $\bar{x} \in \mathcal{D}$ un punto non singolare (ovvero $v(\bar{x}) \neq 0$). Dobbiamo determinare un intorno $V \subset \mathcal{D}$ di \bar{x} ed un C^r -diffeomorfismo $f: V \rightarrow W$ dell'intorno V su un dominio W di \mathbb{R}^n tale che $f_* v(y) = e_1$ per ogni $x \in V$. Sia H un iperpiano ($\dim(H) = n - 1$) passante per \bar{x} e non contenente $v(\bar{x})$. Quindi $H = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x - \bar{x}) = 0\}$ per un opportuno funzionale lineare h tale che $h(v(\bar{x})) \neq 0$. Possiamo assumere il sistema di coordinate $x_i: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$\bar{x} = 0, \quad v(0) = |v(0)|e_1, \quad H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$$

(ci si può infatti ricondurre a tale caso mediante una trasformazione affine di coordinate). In tal modo ogni elemento $\xi \in H$ rimane individuato per mezzo delle $n - 1$ coordinate $(\xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Per il teorema di esistenza ed unicità locale (Teorema 3.2) esistono un intorno I di $t = 0$ e U di $\bar{x} = 0$ tali che la soluzione $\phi^t(x)$ esiste di classe C^r per ogni

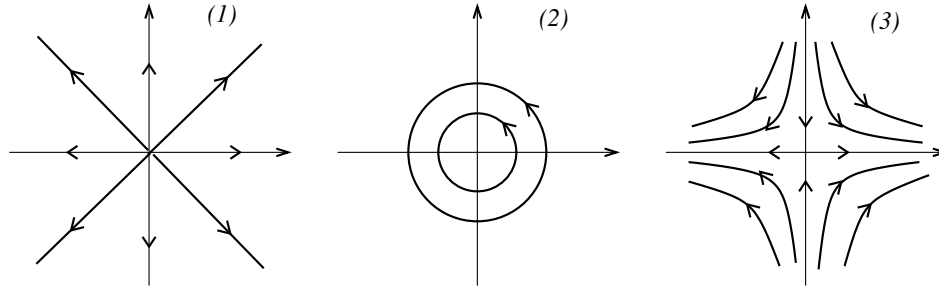


FIGURA 3.6. Esempio di flussi di fase diffeomorfi solo localmente.

$(t, x) \in I \times U$. In particolare, posto $S = U \cap H$, è definita l'applicazione di classe C^r ,

$$\psi: I \times S \rightarrow \mathcal{D}: \psi(y) = \phi^t(\xi), \quad y = (t, \xi),$$

che fornisce l'evoluzione al tempo t del punto ξ sulla sezione S . Mostriamo che ψ è un diffeomorfismo locale (intorno l'origine delle coordinate). A tal scopo è sufficiente applicare il teorema della funzione inversa: essendo la matrice jacobiana³

$$D\psi(0) = \begin{pmatrix} |v(0)| & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}$$

(Il la matrice identità su \mathbb{R}^{n-1}) non singolare, esiste un intorno $W \subset I \times S$ dell'origine tale che, posto $V = \psi(W)$, l'applicazione $\psi: W \rightarrow V$ è un C^r -diffeomorfismo. Inoltre, per ogni $x \in V$, se $x = \psi(y) = \phi^t(\xi)$,

$$\psi_* e_1(x) = D\psi(y) e_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y_1}(y) = \frac{\partial}{\partial t} \phi^t(\xi) = v(\phi^t(\xi)) = v(x),$$

ovvero $\psi_*^{-1} v(y) = e_1$ (infatti $D\psi^{-1} = (D\psi)^{-1}$). Dunque $f := \psi^{-1}$ è il C^r -diffeomorfismo cercato. \square

Si osservi che il teorema ora dimostrato afferma equivalentemente che, in un intorno V di un punto non singolare del campo v , l'equazione $\dot{x} = v(x)$ è equivalente alla semplice equazione $\dot{y} = e_1$, $y \in W$, la cui soluzione è $y_1(t) = y_1(0) + t$, $y_j(t) = y_j(0)$, $j = 2, \dots, n$.

Il seguente corollario, la cui dimostrazione è lasciata al lettore, mostra che intorno a punti non singolari tutti i campi vettoriali sono tra loro equivalenti.

COROLLARIO 3.9. *Siano $v \in C^\infty(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$, $u \in C^\infty(\tilde{\mathcal{D}}; \mathbb{R}^n)$, $\bar{x} \in \mathcal{D}$, $\bar{y} \in \tilde{\mathcal{D}}$ tali che $v(\bar{x}) \neq 0$ e $u(\bar{y}) \neq 0$. Allora esistono intorni V di \bar{x} , U di \bar{y} ed un diffeomorfismo $f: V \rightarrow U$ tali che: (i) $\bar{y} = f(\bar{x})$; (ii) $u \circ f = Df v$.*

OSSERVAZIONE 3.1. L'equivalenza stabilita nel precedente corollario è solo locale ed intorno a punti non singolari. Ad esempio, si considerino i seguenti

³Per calcolarla basta osservare che ϕ^t , in quanto soluzione del problema di Cauchy, ha sviluppo $\phi^t(\xi) = \xi + |v(0)|te_1 + o(\sqrt{t^2 + \xi^2})$.

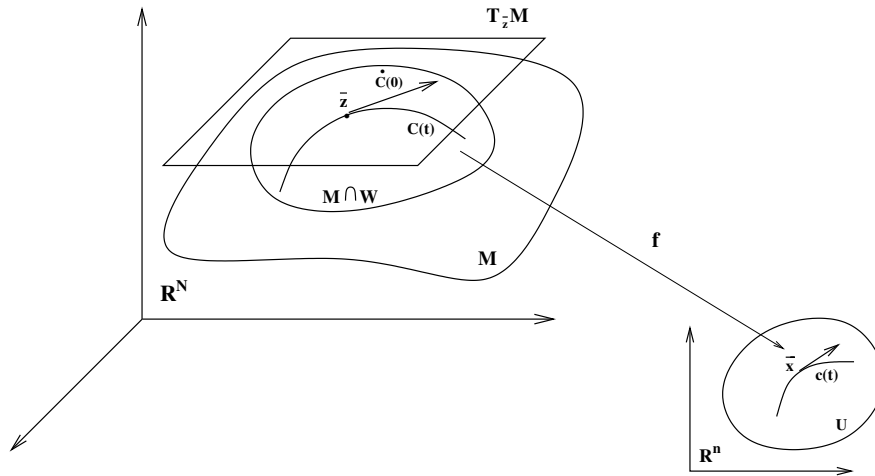


FIGURA 3.7. Spazio tangente alla superficie $M \subset \mathbb{R}^N$ nel punto \bar{z}

sistemi in \mathbb{R}^2 ,

$$(1) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

che generano i flussi di fase

$$(1) \phi^t(x) = e^t x, \quad (2) \phi^t(x) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} x, \quad (3) \phi^t(x) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} x,$$

le cui curve di fase sono descritte in Figura 3.6. I tre sistemi sono diffeomorfi in intorno di punti di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ma non in tutto \mathbb{R}^2 .

3.4.2. Equazioni differenziali su varietà. La Definizione 3.1 si estende al caso di un flusso $(M, \{\phi^t\})$ su una varietà differenziabile M definita come in (1.1). Fissato $\bar{z} \in M$, il moto $t \mapsto \phi^t(\bar{z})$ è una curva differenziabile su M , passante per \bar{z} al tempo $t = 0$. Definiamo allora velocità di fase del flusso in \bar{z} il vettore

$$v(\bar{z}) = \left. \frac{d}{dt} \phi^t(\bar{z}) \right|_{t=0}.$$

Poiché la curva giace in M , tale vettore è tangente ad M nel punto \bar{z} , ovvero appartiene allo spazio (o iperpiano) tangente ad M in \bar{z} , che indichiamo con $T_{\bar{z}}M$. Per descrivere tale spazio introduciamo un sistema di coordinate locali $x = (x_1, \dots, x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n$ in un intorno W di \bar{z} , definito mediante le equazioni parametriche $z = f(x)$, vedi l'equazione (1.2).

Chiaramente ogni curva $t \mapsto C(t)$ in $M \cap W$ tale che $C(0) = \bar{z}$ si ottiene come immagine $C(t) = f(c(t))$ di un'opportuna curva $t \mapsto c(t)$ nel dominio U tale che $c(0) = \bar{x} := f^{-1}(\bar{z})$. Allora il vettore tangente a $C(t)$ in $t = 0$ si scrive

$$\dot{C}(0) = \left. \frac{d}{dt} f(c(t)) \right|_{t=0} = Df(\bar{x}) \dot{c}(0) = \sum_{i=1}^n \dot{c}_i(0) \partial_{x_i} f(\bar{x}),$$

ovvero una combinazione lineare degli n vettori $\partial_{x_i} f(\bar{x})$, $i = 1, \dots, n$. D'altra parte, poiché f ha rango massimo, il rango di $Df(\bar{x}) = \{\partial_{x_i} f_j(\bar{x})\}$ è pari ad n , cosicché i vettori $\partial_{x_i} f(x)$, $i = 1, \dots, n$, sono linearmente indipendenti. Ne segue che l'insieme $T_{\bar{z}}M$ dei vettori tangenti ad M in \bar{z} è uno spazio lineare di dimensione n , in cui le coordinate locali inducono una base naturale. In particolare il vettore velocità di fase $\nu(\bar{z})$ è il vettore tangente ad M in \bar{z} le cui componenti ξ_1, \dots, ξ_n (nel suddetto sistema di coordinate) sono:

$$\xi_i = \left. \frac{d}{dt} x_i(\phi^t(\bar{z})) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (f^{-1})_i(\phi^t(\bar{z})) \right|_{t=0}.$$

Dunque i moti sono soluzioni dell'equazione differenziale ordinaria $\dot{z} = \nu(z)$ sulla varietà M . Tutti i risultati di natura locale sulle equazioni differenziali su domini di \mathbb{R}^n si estendono immediatamente al caso di equazioni su varietà, poiché quest'ultimo caso si riduce al primo dopo avere introdotto le coordinate locali. La struttura topologica della varietà può invece intervenire nei risultati riguardanti il comportamento globale delle soluzioni.

3.5. Integrali primi

Proprietà di un sistema differenziale possono dedursi analizzando la variazione lungo i moti di alcuni osservabili (cioè di funzioni sullo spazio delle fasi). In questo contesto, particolarmente rilevante è l'individuazione di possibili costanti (o *integrali primi*) del moto, ovvero funzioni che rimangono invariate lungo i moti. Il punto fondamentale, come mostrato di seguito, è che la variazione di un osservabile lungo i moti può essere valutata senza dover integrare le equazioni del moto.

Si definisce *derivata di Lie* della funzione $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ rispetto al campo vettoriale $\nu: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la nuova funzione $L_\nu F: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$L_\nu F(x) := \left. \frac{d}{dt} F(\phi^t(x)) \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) \nu_i(x) = \langle \nabla F(x), \nu(x) \rangle, \quad (3.8)$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è il prodotto scalare canonico di \mathbb{R}^n e $\phi^t(x)$, $t \in J_x$, la soluzione (massimale) del problema di Cauchy associato al campo ν . Si verifica immediatamente che

$$\frac{d}{dt} F(\phi^t(x)) = L_\nu F(\phi^t(x)) \quad \forall t \in J_x.$$

Dal segno di $L_\nu F$ si può così determinare se la funzione F cresce, decresce o rimane costante lungo le soluzioni. In particolare la funzione F è detta *integrale primo* (indipendente dal tempo) per il sistema (3.1) se $L_\nu F = 0$. Ne segue in tal caso che F è *costante lungo ogni soluzione di (3.1)* e che pertanto *ogni curva di fase giace interamente su uno ed un solo insieme di livello di F* .

In particolare, se sono noti $n-1$ integrali primi F_k , $k = 1, \dots, n-1$, funzionalmente indipendenti, il problema di Cauchy è completamente integrabile. Infatti, per ogni dato iniziale x_0 , l'orbita rimane fissata dall'intersezione delle $n-1$ superfici di equazione $F_k(x) = F_k(x_0)$, dopodiché la legge oraria lungo l'orbita,

che è un problema unidimensionale autonomo, si integra per separazione delle variabili (formalizzare quest'ultima osservazione).

In generale, un campo vettoriale può non ammettere integrali primi non banali (ovvero che non sono costanti in insiemi aperti del dominio). Infatti, a causa della struttura topologica delle orbite, queste possono non essere interamente contenute nella superficie di livello di nessuna funzione non banale, definita globalmente sul dominio \mathcal{D} . Viceversa, localmente esistono sempre integrali primi non banali. Più precisamente, nell'intorno di un punto non singolare del campo vettoriale, esistono addirittura $n - 1$ integrali primi funzionalmente indipendenti. In effetti, per il sistema standard $\dot{y} = e_1$, è evidente che le coordinate y_2, \dots, y_n sono $n - 1$ integrali primi funzionalmente indipendenti. D'altra parte, per il teorema della scatola di flusso, nell'intorno di un punto non singolare ogni sistema differenziale ammette coordinate in cui assume la forma standard (e l'indipendenza funzionale non dipende ovviamente dal sistema di coordinate adottato).

ESEMPPIO 3.1. Consideriamo un sistema di N particelle di masse $m_i > 0$, $i = 1, \dots, N$, interagenti mediante forze conservative. Quindi esiste una funzione delle coordinate delle particelle, $U = U(x^{(1)}, \dots, x^{(N)})$, $x^{(i)} \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, \dots, N$, detta energia potenziale, tale che le equazioni del moto sono assegnate dal sistema del secondo ordine

$$m_i \ddot{x}^{(i)} = -\nabla_{x^{(i)}} U, \quad i = 1, \dots, N.$$

Si verifica immediatamente che l'energia meccanica totale

$$\mathcal{E}(x^{(1)}, \dots, x^{(N)}, \dot{x}^{(1)}, \dots, \dot{x}^{(N)}) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} |\dot{x}^{(i)}|^2 + U(x^{(1)}, \dots, x^{(N)})$$

è un integrale primo del moto.

ESERCIZIO 3.3. Supponiamo che il sistema (3.1) ammetta un'orbita densa in \mathcal{D} . Dimostrare che allora non esistono integrali primi non banali.

ESERCIZIO 3.4. Sia $C^\infty(\mathcal{D})$ l'insieme delle funzioni reali infinitamente differenziabili su \mathcal{D} , dotato della struttura naturale di anello. La derivata di Lie rispetto ad un campo vettoriale $v : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ infinitamente differenziabile definisce un'applicazione $L_v : C^\infty(\mathcal{D}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{D})$. Dimostrare le seguenti proprietà

- 1) L_v è una derivazione sull'anello $C^\infty(\mathcal{D})$, ovvero L_v è un operatore lineare tale che $L_v(FG) = FL_vG + GL_vF$;
- 2) $L_{v+u} = L_v + L_u$;
- 3) $L_{Fv} = FL_v$;
- 4) l'operatore differenziale $[L_v, L_u] := L_vL_u - L_uL_v$ è un operatore del primo ordine. In particolare $[L_v, L_u] = L_{[v, u]}$, dove il campo $[v, u]$, detto *commutatore* o *parentesi di Lie* dei campi v, u , ha componenti

$$[v, u]_i = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j};$$

5) $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$ (identità di Jacobi).

OSSERVAZIONE 3.2. Consideriamo il sistema non autonomo $\dot{x} = v(t, x)$ sullo spazio delle fasi \mathcal{D} , che abbiamo visto essere equivalente all'equazione autonoma $\dot{X} = V(X)$ sullo spazio delle fasi ampliato $\Omega = \mathbb{R} \times \mathcal{D}$, con $V(X) = (1, v(t, x))^T$ se $X = (t, x)$. Una funzione $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ è detta *integrale primo dipendente dal tempo* per l'equazione $\dot{x} = v(t, x)$ se è un integrale primo del sistema autonomo $\dot{X} = V(X)$, dunque se

$$L_V F(X) = \langle \nabla F(X), V(X) \rangle = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x) v_i(t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in \Omega. \quad (3.9)$$

Analogamente al caso autonomo, ogni curva integrale del sistema è interamente contenuta in uno ed un solo insieme di livello di F .

ESEMPIO 3.2. Consideriamo le *equazioni non autonome sulla retta a variabili separabili*, ovvero il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = p(t)v(x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (3.10)$$

dove $v: U \rightarrow \mathbb{R}$, $p: I \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue sugli intervalli aperti U , I rispettivamente. Chiaramente se $v(x_0) = 0$ esiste la soluzione stazionaria $x(t) \equiv x_0$ del problema. Se invece $v(x_0) \neq 0$ possiamo integrare localmente l'equazione per separazione delle variabili ragionando analogamente al caso autonomo. Sia quindi (x_-, x_+) definito come in Sezione 3.3.1 e poniamo

$$G(t, x) := \int_{t_0}^t ds p(s) - \int_{x_0}^x dy \frac{1}{v(y)}.$$

Chiaramente $G: I \times (x_-, x_+) \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile con continuità e si verifica immediatamente che $G(t, \phi(t)) = 0$ lungo ogni soluzione $t \mapsto \phi(t)$ di (3.10), ovvero G è un integrale primo dipendente dal tempo. D'altra parte

$$\frac{\partial G}{\partial x}(t, x) = \frac{1}{v(x)} \neq 0 \quad \forall (t, x) \in I \times (x_-, x_+),$$

cosicché, per il teorema della funzione implicita, esiste un'unica esplicitazione $t \mapsto x(t)$ dell'equazione $G(t, x) = 0$, che fornisce quindi anche l'unica soluzione locale del problema (3.10).

3.6. Sulla completezza dei campi

Abbiamo visto che un campo vettoriale è il generatore di un flusso di fase se tutte le soluzioni del problema di Cauchy associato esistono globali nel tempo. D'altra parte, per il Corollario 3.3, condizione necessaria perché una soluzione non sia globale è che questa esca da ogni compatto contenuto nello spazio delle fasi. In taluni casi è possibile escludere tale eventualità a priori, riuscendo in tal modo a dimostrare la completezza del campo vettoriale. Vediamone alcuni esempi.

PROPOSIZIONE 3.10. *Un campo differenziabile $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con crescita al più lineare è completo.*

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi esiste $C > 0$ tale che $|v(x)| \leq C(1 + |x|)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Fissiamo $x \in \mathbb{R}^n$ e sia $\phi^t(x)$, $t \in (-\alpha, \beta)$, la corrispondente soluzione massimale. Dobbiamo dimostrare che $\alpha = \beta = +\infty$. Dimostriamo che $\beta = +\infty$, il caso $\alpha = +\infty$ è analogo. Per ogni $t \in [0, \beta)$ si ha

$$|\phi^t(x)| = \left| x + \int_0^t ds v(\phi^s(x)) \right| \leq |x| + \int_0^t ds |v(\phi^s(x))| \leq |x| + Ct + C \int_0^t ds |\phi^s(x)|,$$

cosicché, fissato un qualsiasi tempo $T \in (0, \beta)$,

$$|\phi^t(x)| \leq |x| + CT + C \int_0^t ds |\phi^s(x)| \quad \forall t \in [0, T],$$

da cui, per il Lemma di Gronwall, $|\phi^t(x)| \leq (|x| + CT)e^{CT}$ per ogni $t \in [0, T]$. Ne segue che la soluzione non raggiunge la frontiera della bolla di centro l'origine e raggio R prima del tempo T_R tale che $R = (|x| + CT_R)e^{CT_R}$, il che implica $\beta > T_R$ per ogni $R > 0$. Poiché T_R diverge per $R \rightarrow +\infty$ concludiamo che $\beta = +\infty$. \square

PROPOSIZIONE 3.11. *Siano $v: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo differenziabile ed $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ funzione differenziabile. (i) Se F ha insiemi di livello compatti ed è un integrale primo del moto allora v è completo. (ii) Se F è coerciva e $L_v F \leq 0$ su tutto \mathcal{D} allora v genera un semiflusso.*

DIMOSTRAZIONE. Nel primo caso ogni curva di fase è interamente contenuta in un compatto del dominio \mathcal{D} , pertanto è sede di un moto che si estende globalmente nel tempo (sia nel passato che nel futuro). Nel secondo caso, fissato un qualsiasi $x \in \mathcal{D}$ e posto $c = F(x)$, osserviamo che essendo $L_v F \leq 0$ si ha $\phi^t(x) \in K_c := \{y \in \mathcal{D} : F(y) \leq c\}$ per ogni $t \in J_x \cap \mathbb{R}_+$, cosicché, essendo K_c un compatto in \mathcal{D} , la soluzione si estende globalmente nel futuro, ovvero $\mathbb{R}_+ \subset J_x$. \square

ESERCIZIO 3.5. Con riferimento all'Esempio 3.1, dimostrare che le soluzioni delle equazioni di Newton sono prolungabili su tutto l'asse dei tempi nel caso in cui l'energia potenziale è una funzione due volte differenziabile su tutto \mathbb{R}^{3N} e limitata dal basso.⁴

Riportiamo senza dimostrazione⁵ il seguente risultato sull'esistenza di flussi di fase su varietà compatte.

PROPOSIZIONE 3.12. *Ogni campo vettoriale differenziabile su una varietà compatta M è completo, ovvero è il campo delle velocità di fase di un flusso di fase $(M, \{\phi^t\})$.*

⁴Si osservi che sotto tali ipotesi l'energia meccanica totale non ha in generale insiemi di livello compatti e pertanto la Proposizione 3.11 non è applicabile.

⁵Si veda il riferimento bibliografico [1].

3.7. Soluzione di alcuni esercizi

SOLUZIONE ES. 3.3. Se F è un integrale primo, allora F è una funzione continua e costante su un insieme denso in \mathcal{D} ; dunque F è costante su tutto \mathcal{D} .

SOLUZIONE ES. 3.4. Dimostriamo l'identità di Jacobi, gli altri punti sono banali. Dobbiamo dimostrare che

$$[[L_a, L_b], L_c] + [[L_b, L_c], L_a] + [[L_c, L_a], L_b] = 0.$$

Si ha

$$[[L_a, L_b], L_c] = L_a L_b L_c - L_a L_c L_b - L_b L_c L_a + L_c L_b L_a$$

ed analogamente gli altri due termini. La somma di queste espressioni è uguale a zero.

SOLUZIONE ES. 3.5. Le equazioni del moto sono equivalenti al seguente sistema del primo ordine autonomo in \mathbb{R}^{6N} ,

$$\begin{cases} \dot{x}^{(i)} = y^{(i)} \\ m_i \dot{y}^{(i)} = -\nabla_{x^{(i)}} U \end{cases} \quad (x^{(i)}, y^{(i)}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad i = 1, \dots, N.$$

La regolarità di U garantisce l'esistenza ed unicità locali delle soluzioni. Sia $t \mapsto \{(x^{(i)}(t), y^{(i)}(t)); i = 1, \dots, N\}$ una soluzione. Essendo l'energia potenziale positiva, si ha:

$$\begin{aligned} \frac{m_i}{2} y^{(i)}(t)^2 &\leq \mathcal{E}(x^{(1)}(t), \dots, x^{(N)}(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(N)}(t)) \\ &= \mathcal{E}(x^{(1)}(0), \dots, x^{(N)}(0), y^{(1)}(0), \dots, y^{(N)}(0)) \\ &= E_0 \quad \forall i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Quindi, poiché inoltre $y^{(i)}(t) = \dot{x}^{(i)}(t)$, si hanno le stime seguenti,

$$|y^{(i)}(t)| \leq \sqrt{2E_0/m_i}, \quad |x^{(i)}(t) - x^{(i)}(0)| \leq \sqrt{2E_0/m_i} |t| \quad \forall i = 1, \dots, N,$$

che valgono per tutti i tempi t per i quali la soluzione è definita. Fissato $T > 0$, consideriamo ora il compatto

$$K_T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{6N} : |x^{(i)} - x^{(i)}(0)| \leq 2T\sqrt{E_0/m_i}, |y^{(i)}| \leq 2\sqrt{E_0/m_i}, i = 1, \dots, N\}.$$

Per le stime precedenti la soluzione non può abbandonare K_T durante l'intervallo di tempi $[-T, T]$. Per il Corollario 3.3, se la soluzione esistesse solo localmente allora dovrebbe esserci un tempo t_K in cui essa raggiunge la frontiera di K . Ma per quanto detto sopra $|t_K| > T$, ovvero la soluzione si prolunga su l'intero intervallo di tempi $[-T, T]$. Vista l'arbitrarietà nella scelta di T concludiamo che la soluzione si prolunga a tutto l'asse reale dei tempi.

Flusso lineare

4.1. Esponenziale di matrice

Una classe importante di flussi di fase è costituita dai flussi lineari. Un flusso di fase $\{\phi^t\}$ su \mathbb{R}^n è detto flusso lineare se il diffeomorfismo ϕ^t è un'applicazione lineare di \mathbb{R}^n in sé. Dunque esiste una funzione matriciale differenziabile $t \mapsto P_t \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che

$$\phi^t(x) = P_t x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Inoltre si ha (i) $P_0 = \mathbb{I}$, (ii) $P_{t+s} = P_t P_s$, (iii) $P_t^{-1} = P_{-t}$, ovvero $\{P_t\}$ forma un gruppo ad un parametro di trasformazioni lineari. In particolare $P_t \in GL(n) := \{B \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det B \neq 0\}$.

Il generatore del flusso è

$$v(x) = Ax \quad \text{con} \quad A := \left. \frac{dP_h}{dh} \right|_{h=0} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Quindi il moto $\phi^t(x) = P_t x$ è soluzione dell'equazione differenziale lineare omogenea $\dot{x}(t) = Ax(t)$ con dato iniziale $x(0) = x$.

Viceversa, assegnata una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, il campo vettoriale lineare $v(x) = Ax$ è completo e genera un flusso lineare (dimostrare questa affermazione).

Per la proprietà di gruppo si ha $\dot{P}_t = AP_t$, cosicché il calcolo del flusso lineare conoscendo il generatore (ovvero la matrice A) si riduce alla determinazione della funzione differenziabile $t \mapsto P_t \in \mathbb{R}^{n \times n}$ soluzione dell'equazione differenziale

$$\begin{cases} \dot{P}_t = AP_t, \\ P_0 = \mathbb{I}. \end{cases} \quad (4.1)$$

Per analogia con il caso scalare $n = 1$, definiamo la mappa esponenziale $\exp : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ in modo tale che $P_t = \exp(At)$. A tal scopo ricordiamo che la funzione esponenziale su \mathbb{R} è definita dalla sua serie di Taylor,

$$e^a = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} := \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{a^k}{k!},$$

che converge assolutamente ed uniformemente sui compatti di \mathbb{R} . Definiamo allora *esponenziale* della matrice A la matrice¹

$$\exp A := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!}, \quad (4.2)$$

¹Una notazione equivalente per $\exp A$ è e^A .

dove il limite va inteso nella metrica indotta da una norma di $\mathbb{R}^{n \times n}$. D'altra parte, per l'equivalenza delle norme di $\mathbb{R}^{n \times n}$, tale convergenza non dipende dalla norma utilizzata per definire la metrica. Mostriamo che la definizione (4.2) è ben posta. Essendo $\mathbb{R}^{n \times n}$ uno spazio normato completo occorre dimostrare che

$$S_N := \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!}, \quad N \in \mathbb{N},$$

è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}^{n \times n}$. Per la proprietà sub-moltiplicativa della norma operatore (2.1), qualunque sia $M > N$,

$$\|S_M - S_N\| = \left\| \sum_{k=N+1}^M \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=N+1}^M \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k>N} \frac{\|A\|^k}{k!} \rightarrow 0 \quad \text{per } N \rightarrow +\infty,$$

ovvero la successione è di Cauchy. La serie in (4.2) converge inoltre assolutamente ed uniformemente sui compatti. Infatti, fissato un qualunque $a > 0$, per ogni $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $\|A\| \leq a$, si ha

$$\left\| \exp A - \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k>N} \frac{a^k}{k!},$$

ed inoltre

$$\|\exp A\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a.$$

La mappa esponenziale gode delle seguenti proprietà:

- 1) $\exp 0 = \mathbb{I}$,
- 2) $\exp(A+B) = \exp A \exp B$ se $[A, B] = 0$,
- 3) $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$,
- 4) $[\exp A, B] = 0$ se $[A, B] = 0$.

La 1) e la 4) sono immediate conseguenze della definizione (4.2), mentre la 3) segue dalle 1) e 2). Rimane da dimostrare la 2): se A e B commutano possiamo scrivere,

$$\begin{aligned} \exp(A+B) &= \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^N}{N!} = \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{1}{N!} \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} A^k B^{N-k} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{N=k}^{+\infty} \frac{A^k B^{N-k}}{k!(N-k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{A^k B^h}{k!h!} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \right) \left(\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{B^h}{h!} \right) = \exp A \exp B, \end{aligned}$$

dove la penultima uguaglianza è corretta, ovvero si possono moltiplicare termine a termine le due serie, essendo queste assolutamente convergenti.

Dimostriamo ora che $P_t = \exp(At)$, cioè che

$$\frac{d}{dt} \exp(At) = A \exp(At) = \exp(At) A,$$

ovvero che la serie

$$\exp(At) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

può essere derivata termine a termine. In effetti:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\exp[A(t+\delta)] - \exp(At)}{\delta} - A \exp(At) \right\| &= \left\| \exp(At) \left(\frac{\exp(A\delta) - \mathbb{I} - A\delta}{\delta} \right) \right\| \\ &= \left\| \exp(At) \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\delta^{k-1} A^k}{k!} \right\| \leq e^{\|A\|t} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|\delta|^{k-1} \|A\|^k}{k!} \\ &\leq \|A\|^2 e^{\|A\|(t+|\delta|)} |\delta| \rightarrow 0 \quad \text{per } \delta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

È evidente che iterando il ragionamento si dimostra che $\exp(At)$ è in realtà una funzione infinitamente derivabile e che tutte le sue derivate si ottengono derivando la serie termine a termine.

OSSERVAZIONE 4.1. La definizione di esponenziale di matrice si estende senza modifiche al caso complesso,

$$\exp: \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n} \quad \text{tale che} \quad \exp A := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!},$$

e la serie converge assolutamente ed uniformemente sui compatti. Tutte le proprietà discusse valgono senza modifiche, prestando solo attenzione al fatto che ora $\|A\|$ indica la norma operatore della matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ rispetto al norma indotta dal prodotto scalare standard di \mathbb{C}^n , ovvero

$$\|A\| = \sup_{z \neq 0} \frac{|Az|}{|z|}, \quad |z| = \sqrt{\langle z, z \rangle}, \quad \langle z, \zeta \rangle := \sum_{i=1}^n \bar{z}_i \zeta_i.$$

OSSERVAZIONE 4.2. La mappa $t \mapsto P_t \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è soluzione dell'Eq. (4.1) se e solo se è soluzione continua dell'equazione

$$P_t = \mathbb{I} + \int_0^t ds AP_s. \quad (4.3)$$

Utilizzando il metodo delle approssimazioni successive di Picard possiamo dedurre l'esistenza ed unicità di tale soluzione in $C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{n \times n})$, riottenendo in particolare l'espressione di P_t in serie di potenze di At . Le approssimazioni di Picard per l'Eq. (4.3) sono

$$\begin{aligned} P_t^{(0)} &= \mathbb{I}, \\ \dots &= \dots, \\ P_t^{(k)} &= \mathbb{I} + \int_0^t ds AP_s^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Sostituendo si ottiene

$$\begin{aligned}
 P_t^{(k)} &= \mathbb{I} + At + \int_0^t ds \int_0^s d\tau A^2 P_\tau^{(k-2)} = \mathbb{I} + At + \int_0^t d\tau (t-\tau) A^2 P_\tau^{(k-2)} \\
 &= \mathbb{I} + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \int_0^t ds \int_0^s d\tau (s-\tau) A^3 P_s^{(k-3)} \\
 &= \mathbb{I} + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \int_0^t d\tau \frac{A^2 (t-\tau)^2}{2} A P_\tau^{(k-3)} \\
 &= \dots\dots\dots \\
 &= \sum_{h=0}^k \frac{A^h t^h}{h!}.
 \end{aligned}$$

Chiaramente $\|P_t^{(k)} - P_t^{(k-1)}\| \leq (\|A\|t)^k / k!$, cosicché la successione di matrici $P_t^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, converge assolutamente ed uniformemente sui compatti di \mathbb{R} , ed il suo limite fornisce la soluzione dell'Eq. (4.3).

4.2. Matrici simili, cambiamenti di base, calcolo della soluzione

Il calcolo di P_t si riduce al problema algebrico di calcolare l'esponenziale di una matrice. A tal scopo, osserviamo che dalla definizione (4.2) è immediato verificare che

$$S(\exp A)S^{-1} = \exp(SAS^{-1}) \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \forall S \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det S \neq 0,$$

ovvero che l'applicazione esponenziale commuta con le trasformazioni di similarità.² Quindi se sappiamo calcolare $\exp A_S$ con $A_S = SAS^{-1}$ per qualche matrice non singolare S , riusciamo a calcolare anche $\exp A$.

Consideriamo preliminarmente alcuni casi particolari, mostrando poi come sia possibile ridursi a questi mediante trasformazioni di similarità.

1) Sia $A = \lambda \mathbb{I} + N$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbb{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice identità ed $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrice strettamente triangolare inferiore (ovvero $N_{i,j} = 0 \forall i \leq j$). Poiché l'identità commuta con ogni matrice, per la proprietà 2) della mappa esponenziale,

$$\exp A = \exp(\lambda \mathbb{I} + N) = \exp(\lambda \mathbb{I}) \exp N.$$

Dalla definizione di esponenziale segue immediatamente che $\exp(\lambda \mathbb{I}) = e^\lambda \mathbb{I}$. Analogamente, essendo N nilpotente di ordine n (ovvero $N^k = 0 \forall k \geq n$),

$$\exp N = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}.$$

Pertanto

$$\exp A = e^\lambda \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}.$$

²Analogamente, sotto la trasformazione di coordinate lineare $y = Sx$, il campo vettoriale $v(x) = Ax$ viene trasformato nel campo $\bar{v}(y) = A_S y$, cosicché la soluzione del problema di Cauchy $\dot{x}(t) = Ax(t)$ con dato iniziale $x(0) = x$ è $x(t) = S^{-1}y(t)$ essendo $y(t) = \exp(A_S t)y$ ed $y = Sx$.

2) Sia $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Decomponendo

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a\mathbb{I} + bJ \quad \text{con } J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ed osservando che $J^2 = -\mathbb{I}$ e che $[\mathbb{I}, J] = 0$, si ha

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} &= \exp(a\mathbb{I} + bJ) = \exp(a\mathbb{I}) \exp(bJ) = e^a \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(bJ)^k}{k!} \\ &= e^a \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-b^2\mathbb{I})^k}{(2k)!} + e^a \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-b^2\mathbb{I})^k bJ}{(2k+1)!} \\ &= e^a (\cos b\mathbb{I} + \sin bJ) \\ &= e^a R[b]. \end{aligned} \tag{4.4}$$

avendo posto

$$R[b] := \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Quindi l'azione di $\exp \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ sui vettori di \mathbb{R}^2 è la composizione di una dilatazione di un fattore e^a con una rotazione di un angolo b .

OSSERVAZIONE 4.3. Sia $\mathcal{L} := \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : A = a\mathbb{I} + bJ\}$. Si verifica facilmente che \mathcal{L} è un sottospazio bidimensionale di $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, chiuso rispetto al prodotto di matrici e che tale prodotto è commutativo su \mathcal{L} . Inoltre $\|A\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ se $A = a\mathbb{I} + bJ$ (dimostrarlo!). Si definisca quindi la mappa $\psi: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C}$ ponendo $\psi(A) = a + ib$ se $A = a\mathbb{I} + bJ$. Si può verificare che l'applicazione ψ è un isomorfismo lineare che conserva la norma ed il prodotto (assumendo \mathbb{C} dotato del prodotto e della norma usuali). Definiamo allora esponenziale di $z = a + ib$ il numero complesso $\psi(\exp A)$, ove $A = a\mathbb{I} + bJ$, ovvero

$$e^z = e^{a+ib} := e^a(\cos b + i \sin b),$$

nota come *formula di Eulero* per e^z . Inoltre, poiché ψ è una isometria lineare che conserva il prodotto, si ha anche

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\psi(A^k)}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Quest'ultima uguaglianza si può assumere come definizione di esponenziale di un numero complesso (da cui si ricava analogamente la formula di Eulero).

OSSERVAZIONE 4.4. In virtù della precedente osservazione, la formula

$$\exp(\lambda\mathbb{I} + N) = e^\lambda \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}$$

è valida anche per matrici complesse, quindi per $\lambda \in \mathbb{C}$ ed $N \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrice strettamente triangolare inferiore, con e^λ assegnato dalla formula di Eulero.

A questo punto il calcolo di $\exp(At)$ per una generica matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si riduce al caso precedente osservando che:

(i) Sussiste la seguente proprietà della mappa esponenziale, la cui dimostrazione è elementare ed è lasciata al lettore: se la matrice A possiede la seguente forma a blocchi,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

essendo $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $n_1 + n_2 = n$, allora

$$\exp A = \begin{pmatrix} \exp A_1 & 0 \\ 0 & \exp A_2 \end{pmatrix}.$$

(ii) In virtù del teorema sulla forma canonica di Jordan, per ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è possibile determinare una matrice non singolare $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tale che A_S possiede la seguente struttura a blocchi,

$$A_S = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_\ell \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

dove

$$D_j = \lambda_j \mathbb{I} + N_j \in \mathbb{C}^{n_j \times n_j}, \quad j = 1, \dots, \ell,$$

essendo

- $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ gli autovalori di A e n_1, \dots, n_ℓ le corrispondenti molteplicità algebriche;

$$\bullet N_\ell = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n_j \times n_j} \quad \forall j = 1, \dots, \ell.$$

Pertanto

$$\exp(At) = S^{-1} \begin{pmatrix} \exp(D_1 t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp(D_2 t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \exp(D_\ell t) \end{pmatrix} S,$$

dove (ricordando che gli autovalori di A sono reali o complessi coniugati)

$$\exp(D_j t) = e^{\lambda_j t} \sum_{k=0}^{n_j-1} \frac{N_k^k t^k}{k!} \quad \text{se } \lambda_j \in \mathbb{R},$$

$$\exp(D_j t) = e^{\mu_j t} (\cos(\omega_j t) \pm i \sin(\omega_j t)) \sum_{k=0}^{n_j-1} \frac{N_k^k t^k}{k!} \quad \text{se } \lambda_j = \mu_j \pm i\omega_j \quad (\omega_j > 0).$$

Abbiamo pertanto dimostrato il seguente teorema.

TEOREMA 4.1. *Lo spettro della matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sia costituito da p autovalori reali $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ di molteplicità algebrica d_1, \dots, d_p e da q autovalori complessi coniugati $\mu_1 \pm i\omega_1, \dots, \mu_q \pm i\omega_q$, di molteplicità algebrica r_1, \dots, r_q . Allora ogni elemento della matrice $\exp(At)$ e quindi ogni componente della soluzione dell'equazione $\dot{x} = Ax$ è costituito da somme di quasi-polinomi, ovvero funzioni della forma*

$$e^{\lambda_j t} P_j(t), \quad e^{\mu_k t} \cos(\omega_k t) Q_k(t), \quad e^{\mu_k t} \sin(\omega_k t) R_k(t), \quad j = 1, \dots, p, \quad k = 1, \dots, q,$$

essendo P_j e Q_k, R_k polinomi di grado inferiore a d_j ed r_k rispettivamente.

4.3. Flusso iperbolico

I risultati della precedente sezione permettono il calcolo esplicito (o numerico) di $\exp(At)$. Non è però necessario fare questo calcolo in dettaglio per descrivere il comportamento nel tempo delle soluzioni. In questa sezione studiamo il caso importante in cui gli autovalori dell'operatore A hanno tutti parte reale non nulla, mostrando come in tal caso il comportamento qualitativo del corrispondente flusso di fase è molto semplice.

DEFINIZIONE 4.2. Se tutti gli autovalori della matrice A hanno parte reale non nulla il flusso $\exp(At)$ è detto *iperbolico*. In particolare, esso è detto *contrazione (lineare)* [risp. *espansione (lineare)*] se tutti gli autovalori della matrice A hanno parte reale negativa [risp. positiva]. Corrispondentemente, il punto singolare $x = 0$ del campo vettoriale $v_A(x) = Ax$ viene detto *punto iperbolico*. In particolare esso è detto *pozzo (lineare)* [risp. *sorgente (lineare)*] se il flusso di fase è una contrazione [risp. espansione].

TEOREMA 4.3. *Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v_A(x) := Ax$ e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\alpha < \Re \lambda < \beta$ per ogni $\lambda \in \sigma(A)$. Allora esiste una forma quadratica definita positiva W su \mathbb{R}^n tale che la sua derivata di Lie lungo v_A soddisfa le disuguaglianze seguenti,*

$$2\alpha W(x) \leq L_{v_A} W(x) \leq 2\beta W(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.7)$$

Inoltre, detta $|x|_* := \sqrt{W(x)}$ la norma indotta da W ,

$$e^{\alpha t} |x|_* \leq |e^{At} x|_* \leq e^{\beta t} |x|_* \quad \forall t \geq 0. \quad (4.8)$$

DIMOSTRAZIONE. Dalla dimostrazione del Teorema 2.6 sappiamo che per ciascun $\ell > 0$ esiste una matrice non singolare $S_\ell \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tale che $S_\ell A S_\ell^{-1} = D + N^{(\ell)}$ con $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli n autovalori (non necessariamente distinti) di A e

$$\|N^{(\ell)}\| \rightarrow 0 \quad \text{per } \ell \rightarrow +\infty.$$

Definiamo allora, con ℓ da fissare in seguito,

$$W(x) := |S_\ell x|^2 = \langle \bar{S}_\ell x, S_\ell x \rangle = \langle x, \bar{S}_\ell^T S_\ell x \rangle = \langle x, Hx \rangle,$$

con $H = \Re(\bar{S}_\ell^T S_\ell) = \Re(S_\ell^T \bar{S}_\ell)$ matrice simmetrica e definita positiva.³ Si ha allora

$$\begin{aligned} L_{v_A} W(x) &= \langle \nabla W(x), v_A(x) \rangle = \langle 2Hx, Ax \rangle = 2\Re \langle S_\ell^T \bar{S}_\ell x, Ax \rangle = 2\Re \langle \bar{S}_\ell x, S_\ell Ax \rangle \\ &= 2\Re \langle \bar{S}_\ell x, (D + N^{(\ell)}) S_\ell x \rangle = \sum_{k=1}^n 2(\Re \lambda_k) |(S_\ell x)_k|^2 + 2\Re \langle \bar{S}_\ell x, N^{(\ell)} S_\ell x \rangle \end{aligned}$$

e quindi, essendo

$$|\langle \bar{S}_\ell x, N^{(\ell)} S_\ell x \rangle| \leq |\bar{S}_\ell x| |N^{(\ell)} S_\ell x| \leq |\bar{S}_\ell x| \|N^{(\ell)}\| |S_\ell x| = \|N^{(\ell)}\| W(x),$$

si ha

$$2 \left(\min_{\lambda \in \sigma(A)} (\Re \lambda) - \|N^{(\ell)}\| \right) W(x) \leq L_{v_A} W(x) \leq 2 \left(\max_{\lambda \in \sigma(A)} (\Re \lambda) + \|N^{(\ell)}\| \right) W(x),$$

da cui si deduce la stima (4.7) pur di scegliere ℓ sufficientemente grande.

Le disuguaglianze (4.8) sono conseguenza delle (4.7). Chiaramente se $x = 0$ esse sono banalmente verificate. Calcoliamo invece la derivata di W lungo una soluzione $x(t) = e^{At} x$ con $x \neq 0$. Si ha

$$\frac{d}{dt} W(x(t)) = L_{v_A} W(x(t)),$$

da cui, per la (4.7),

$$2\alpha W(x(t)) \leq \frac{d}{dt} W(x(t)) \leq 2\beta W(x(t)),$$

e dunque, essendo $W(x(t)) = |x(t)|_*^2 > 0$,

$$2\alpha \leq \frac{d}{dt} \log |x(t)|_*^2 \leq 2\beta.$$

Integrando,

$$\alpha t \leq \log \frac{|x(t)|_*}{|x(0)|_*} \leq \beta t,$$

da cui, essendo $x(t) = e^{At} x$, seguono le (4.8). \square

TEOREMA 4.4. *Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ed indichiamo con $|\cdot|_*$ la norma che appare nel Teorema 4.3.*

1) *Se e^{At} è una contrazione allora esistono costanti $b > 0$ e $K \geq 1$ tali che:*

$$\begin{cases} |e^{At} x|_* \leq e^{-bt} |x|_* \\ |e^{-At} x|_* \geq e^{bt} |x|_* \end{cases} \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (4.9)$$

e

$$\begin{cases} |e^{At} x| \leq K e^{-bt} |x| \\ |e^{-At} x| \geq K^{-1} e^{bt} |x| \end{cases} \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.10)$$

³Si osservi che $\bar{S}_\ell^T S_\ell$ è hermitiana definita positiva, cosicché $\bar{S}_\ell^T S_\ell = H + iL$ con H simmetrica definita positiva e L antisimmetrica.

2) Se e^{At} è un'espansione allora esistono costanti $a > 0$ ed $K \geq 1$ tali che:

$$\begin{cases} |e^{At}x|_* \geq e^{at}|x|_* \\ |e^{-At}x|_* \leq e^{-at}|x|_* \end{cases} \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (4.11)$$

e

$$\begin{cases} |e^{At}x| \geq K^{-1}e^{at}|x| \\ |e^{-At}x| \leq Ke^{-at}|x| \end{cases} \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.12)$$

DIMOSTRAZIONE. Le disuguaglianze (4.10) e (4.12) seguono rispettivamente dalle (4.9) e (4.11) per l'equivalenza delle norme in \mathbb{R}^n . Dimostriamo quindi le disuguaglianze (4.9) e (4.11).

Se A genera una contrazione esiste $b > 0$ tale che $\Re \lambda < -b$ per ogni $\lambda \in \sigma(A)$, cosicché la prima disuguaglianza in (4.9) segue dalla seconda disuguaglianza in (4.8) con $\beta = -b$. D'altra parte si ha inoltre che $\Re \lambda > b$ per ogni $\lambda \in \sigma(-A)$, cosicché la seconda disuguaglianza in (4.9) segue dalla prima disuguaglianza in (4.8) applicata all'operatore $-A$ con $\alpha = b$.

Se A genera un'espansione, allora $-A$ genera una contrazione e le disuguaglianze (4.11) non sono altro che le (4.9) relative all'operatore $-A$ (con $a > 0$ tale che $\Re \lambda > a$ per ogni $\lambda \in \sigma(A)$). \square

Tutte le soluzioni non nulle di una contrazione vengono attratte esponenzialmente dal pozzo $x = 0$. Viceversa, tutte le soluzioni non nulle di un'espansione crescono esponenzialmente allontanandosi dalla sorgente $x = 0$. Si osservi inoltre il significato geometrico del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ costruito nel Teorema 4.3. Nel caso della contrazione [risp. espansione] esso fornisce una struttura euclidea su \mathbb{R}^n tale che il vettore velocità di fase Ax forma con il raggio vettore x un angolo ottuso [risp. acuto]. Altrimenti detto, se $S_r^* = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_* = r\}$ è la sfera di raggio r rispetto alla norma adattata $|\cdot|_*$, tutte le traiettorie del flusso di fase si muovono verso l'interno [risp. l'esterno] di questa nel caso di una contrazione [risp. espansione], qualunque sia il valore di r .

TEOREMA 4.5. *Sia $x = 0$ un punto iperbolico del campo vettoriale $v_A(x) = Ax$. Allora esiste una decomposizione dello spazio delle fasi,*

$$\mathbb{R}^n = E^+ \oplus E^-, \quad E^\pm = \pi_\pm \mathbb{R}^n,$$

dove π_\pm sono operatori di proiezione, $\pi_+ + \pi_- = \mathbb{I}$, E^\pm sono sottospazi invarianti rispetto ad A , tali che il flusso di fase indotto su E^+ è una contrazione ed il flusso di fase indotto su E^- è un'espansione. In particolare esistono costanti $C > 0$, $\gamma_+ > 0$ e $\gamma_- > 0$ tali che

$$\begin{cases} |e^{At}\pi_+x| \leq Ce^{-\gamma_+t}|\pi_+x| \\ |e^{-At}\pi_-x| \leq Ce^{-\gamma_-t}|\pi_-x| \end{cases} \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.13)$$

DIMOSTRAZIONE. La prova si basa sul seguente risultato di algebra lineare⁴. Indichiamo con n_+ [risp. n_-] il numero di autovalori con parte reale negativa [risp. positiva], ciascuno contato con la propria molteplicità algebrica. Allora esiste $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ non singolare tale che

$$AU = UAU^{-1} = \begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix},$$

dove $A_+ \in \mathbb{R}^{n_+ \times n_+}$ [risp. $A_- \in \mathbb{R}^{n_- \times n_-}$] è tale che $\Re \lambda < 0 \forall \lambda \in \sigma(A_+)$ [risp. $\Re \lambda > 0 \forall \lambda \in \sigma(A_-)$]. Definiamo quindi

$$E^+ := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = U^{-1}y \text{ con } y = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}^{n_+} \right\},$$

$$E^- := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = U^{-1}y \text{ con } y = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad v \in \mathbb{R}^{n_-} \right\}.$$

Chiaramente E^\pm sono sottospazi invarianti rispetto ad A . Essendo U non singolare si ha la decomposizione in somma diretta $\mathbb{R}^n = E^+ \oplus E^-$, rimanendo così definiti gli operatori di proiezione $\pi_\pm : \mathbb{R}^n \rightarrow E^\pm$

$$\pi_+ x = U^{-1} \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \pi_- x = U^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad \text{dove} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = Ux.$$

Abbiamo ora

$$e^{At} \pi_+ x = U^{-1} \begin{pmatrix} e^{A_+ t} u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{At} \pi_- x = U^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{A_- t} v \end{pmatrix}, \quad \text{dove} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = Ux.$$

La stima (4.13) segue facilmente dal Teorema 4.4, ad esempio applicando la prima disuguaglianza in (4.10) alle matrici A_+ e $-A_-$. Indicando con K_\pm e b_\pm le relative costanti, si ha

$$\begin{aligned} |e^{At} \pi_+ x| &\leq \|U^{-1}\| |e^{A_+ t} u| \leq K_+ e^{-b_+ t} \|U^{-1}\| \|u\| \leq K_+ e^{-b_+ t} \|U^{-1}\| \|U\| |\pi_+ x|, \\ |e^{-At} \pi_- x| &\leq \|U^{-1}\| |e^{-A_- t} v| \leq K_- e^{-b_- t} \|U^{-1}\| \|v\| \leq K_- e^{-b_- t} \|U^{-1}\| \|U\| |\pi_- x|, \end{aligned}$$

da cui la (4.13) segue con $\gamma_\pm = b_\pm$ e $C = \max\{K_+, K_-\} \|U\| \|U^{-1}\|$. \square

I sottospazi E^+ ed E^- sono detti rispettivamente *sottospazio stabile* e *sottospazio instabile* del flusso iperbolico lineare generato da $v_A(x) = Ax$. Eccetto l'origine $x = 0$, tutte le curve di fase giacenti sullo spazio stabile [risp. instabile] sono aperte e tendono a 0 per $t \rightarrow +\infty$ [risp. $t \rightarrow -\infty$]. Tali sottospazi possono essere caratterizzati nella seguente maniera,

$$E^+ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sup_{t \geq 0} |e^{At} x| < +\infty \right\}, \quad E^- = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sup_{t \leq 0} |e^{At} x| < +\infty \right\}. \quad (4.14)$$

In effetti dalle disuguaglianze (4.13) abbiamo

$$|\pi_\pm x| = |e^{\pm At} e^{\mp At} \pi_\pm x| \leq C e^{-\gamma_\pm t} |e^{\mp At} \pi_\pm x| \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

⁴Si veda ad esempio il Teorema 2.5 nelle Note del corso di Sistemi Dinamici alla pagina <http://www1.mat.uniroma1.it/~butta/didattica/sisdin.pdf>.

cosicché

$$\begin{cases} |e^{-At}\pi_+x| \geq C^{-1}e^{\gamma_+t}|\pi_+x| \\ |e^{At}\pi_-x| \geq C^{-1}e^{\gamma_-t}|\pi_-x| \end{cases} \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.15)$$

Essendo ora $e^{At}x = e^{At}\pi_+x + e^{At}\pi_-x$, dalle disuguaglianze (4.13) e (4.15) otteniamo le identità (4.14). Segue inoltre che la decomposizione in sottospazi stabile ed instabile è unica.

4.4. Sottospazio centrale

Nella sezione precedente abbiamo ottenuto una semplice descrizione del flusso lineare nel caso iperbolico. In effetti si potrebbe dimostrare che se $\dot{x} = Ax$ è di tipo iperbolico allora essa è topologicamente equivalente all'equazione

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = x_2, \end{cases} \quad x_1 \in \mathbb{R}^{n_+}, \quad x_2 \in \mathbb{R}^{n_-}, \quad (4.16)$$

dove n_{\pm} sono le dimensioni dei suoi sottospazi stabile ed instabile. Equivalenza topologica significa che esiste un omeomorfismo (ovvero un'applicazione biunivoca e bicontinua) di \mathbb{R}^n su $\mathbb{R}^{n_+} \oplus \mathbb{R}^{n_-}$ che applica soluzioni di $\dot{x} = Ax$ in soluzioni dell'Eq. (4.16).

Consideriamo ora il caso più generale in cui esistano anche autovalori della matrice A la cui parte reale è nulla. Ragionando come nella sezione precedente, deduciamo in questo caso che sussiste una decomposizione dello spazio delle fasi in tre sottospazi invarianti $\mathbb{R}^n = E^+ \oplus E^0 \oplus E^-$ tale che, indicando con A_{\pm} , A_0 la restrizione di A ad E^{\pm} , E^0 , si ha $\Re\lambda < 0$ [risp. $\Re\lambda > 0$] per ogni $\lambda \in \sigma(A_{\pm})$ [risp. $\lambda \in \sigma(A_-)$] e $\Re\lambda = 0$ per ogni $\lambda \in \sigma(A_0)$. Il sottospazio E^0 è detto *sottospazio centrale* del flusso generato da A .

In generale non esiste una descrizione unitaria dei moti su E^0 . Altrimenti detto, non esistono criteri generali per stabilire quando due equazioni lineari, omogenee ed autonome, in cui tutti gli autovalori sono immaginari puri, sono topologicamente equivalenti.

Studiamo qui il caso in cui non sono presenti autovalori difettivi, mostrando che la dinamica può essere ridotta ad un moto condizionatamente periodico sul toro, un sistema dinamico particolarmente interessante (ad esempio per il suo ruolo centrale in meccanica hamiltoniana).

Sia quindi A matrice con autovalori immaginari puri non difettivi (ovvero con molteplicità algebrica e geometrica uguali). Assumiamo inoltre che $\text{Ker} A = \{0\}$ (il moto sul sottospazio invariante $\text{Ker} A$ sarebbe comunque banale). Pertanto la dimensione dello spazio delle fasi è pari, diciamo $m = 2n$. Indicando con $\pm i\omega_1, \dots, \pm i\omega_n$ gli autovalori di A (non necessariamente distinti), esiste una

trasformazione lineare non singolare S tale che⁵

$$A_S = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \omega_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & -\omega_n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \omega_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Nelle nuove coordinate $y = Sx$ il sistema si decompone in n sistemi bidimensionali indipendenti,

$$\begin{cases} \dot{y}_{2k-1} = -\omega_k y_{2k}, \\ \dot{y}_{2k} = \omega_k y_{2k-1}, \end{cases} \quad k = 1, \dots, n,$$

ciascuno equivalente all'oscillatore armonico di frequenza ω_k : $\ddot{y}_{2k-1} + \omega_k^2 y_{2k-1} = 0$. Esistono n integrali primi, precisamente le energie meccaniche di ciascun oscillatore. Si ha infatti $\dot{\mathcal{E}}_k(y) = \langle \nabla \mathcal{E}_k(y), \dot{y} \rangle = 0$ se $\mathcal{E}_k(y) := y_{2k-1}^2 + y_{2k}^2$ per ogni $k = 1, \dots, n$. Ciascun moto si svolge allora sull'insieme di livello

$$\Gamma_E = \{y \in \mathbb{R}^{2n} : \mathcal{E}_k(y) = E_k \quad \forall k = 1, \dots, n\},$$

dove le costanti $E = (E_1, \dots, E_n)$ sono fissate dai dati iniziali. Senza perdita di generalità assumiamo che $E_k \neq 0$ per ogni k . Possiamo allora utilizzare n coordinate polari, $(y_{2k-1}, y_{2k}) = (\rho_k \cos \theta_k, \rho_k \sin \theta_k)$, nelle quali le equazioni del moto diventano,

$$\begin{cases} \dot{\rho}_k = 0, \\ \dot{\theta}_k = \omega_k, \end{cases} \quad k = 1, \dots, n,$$

Quindi $\rho_k = \sqrt{E_k}$ e lo studio del moto sull'insieme di livello Γ_E si riduce a quello dell'equazione $\dot{\theta} = \omega$, con $\omega := (\omega_1, \dots, \omega_n)$, sul toro n -dimensionale

$$\mathbb{T}^n := S_1 \times \dots \times S_1 = \{(\theta_1, \dots, \theta_n) \bmod 2\pi\} = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n,$$

ovvero del flusso lineare

$$\phi_\omega^t(\theta) := \theta + \omega t = (\theta_1 + \omega_1 t, \dots, \theta_n + \omega_n t).$$

Questa dinamica, che analizziamo nella prossima sezione, è nota con il nome di *moto condizionatamente periodico* (o *moto quasi periodico*). I numeri $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ sono detti *frequenze* del moto (più correttamente si dovrebbe indicare con il nome di frequenze le grandezze $\nu_i = \omega_i/2\pi$).

⁵Infatti, se $\xi_k \pm i\eta_k \in \mathbb{C}^{2n}$, $k = 1, \dots, n$, sono gli autovettori complessi della matrice trasposta A^T , precisamente $A^T(\xi_k \pm i\eta_k) = \pm i\omega_k(\xi_k \pm i\eta_k)$, allora S è la matrice relativa al cambiamento di coordinate nella base reale $\{\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots, \xi_n, \eta_n\}$.

4.5. Moto condizionatamente periodico

Osserviamo preliminarmente che il flusso ϕ_ω^t conserva i volumi in \mathbb{T}^n (tutti i punti del toro sono ugualmente traslati). Nel seguito indichiamo con λ la misura normalizzata in modo tale che il volume del toro \mathbb{T}^n sia uguale ad uno,

$$d\lambda(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^n} d\theta = \frac{1}{(2\pi)^n} d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_n.$$

Se f è una funzione integrabile, indichiamo con $\lambda(f)$ la sua media rispetto a λ ,

$$\lambda(f) := \int_{\mathbb{T}^n} d\lambda(\theta) f(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} d\theta f(\theta).$$

Infine, se A è un insieme misurabile in \mathbb{T}^n , indichiamo con \mathbb{I}_A la funzione indicatrice di A ,

$$\mathbb{I}_A(\theta) := \begin{cases} 1 & \text{se } \theta \in A, \\ 0 & \text{se } \theta \notin A, \end{cases}$$

cosicché $\lambda(A) = \lambda(\mathbb{I}_A)$ è la misura dell'insieme A , ovvero la frazione di volume occupata da A rispetto al volume totale del toro

$$\lambda(A) = \int_{\mathbb{T}^n} d\lambda(\theta) \mathbb{I}_A(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_A d\theta = \frac{\int_A d\theta}{\int_{\mathbb{T}^n} d\theta}.$$

Il risultato principale sul moto quasi periodico è il contenuto del seguente teorema, noto come *teorema della media*.

TEOREMA 4.6. *Supponiamo che le frequenze $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ siano razionalmente indipendenti, ovvero che*

$$\langle k, \omega \rangle \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n : k \neq 0. \quad (4.17)$$

(Altrimenti detto, la combinazione lineare $k_1\omega_1 + \dots + k_n\omega_n$ delle frequenze a coefficienti interi k_1, \dots, k_n è nulla se e solo se $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$).

Allora, per ogni funzione $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann e per ogni dato iniziale $\theta \in \mathbb{T}^n$,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt f(\phi_\omega^t(\theta)) = \lambda(f). \quad (4.18)$$

Inoltre il limite è uniforme rispetto alla scelta del dato iniziale $\theta \in \mathbb{T}^n$.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo dapprima il risultato per i polinomi trigonometrici, ovvero per funzioni del tipo

$$P_N(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n : |k| \leq N} [a_k \cos \langle k, \theta \rangle + b_k \sin \langle k, \theta \rangle], \quad (4.19)$$

dove a_k, b_k sono coefficienti reali arbitrari. Consideriamo a tal scopo la funzione

$$e^{i \langle k, \theta \rangle} = \cos \langle k, \theta \rangle + i \sin \langle k, \theta \rangle.$$

Chiaramente

$$\int_{\mathbb{T}^n} d\lambda(\theta) e^{i \langle k, \theta \rangle} = \frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{j=1}^n \int_0^{2\pi} d\theta_j e^{i k_j \theta_j} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0, \\ 0 & \text{se } k \neq 0. \end{cases}$$

Quindi, separatamente per le parti reale ed immaginaria,

$$\int_{\mathbb{T}^n} d\lambda(\theta) \sin\langle k, \theta \rangle = 0, \quad \int_{\mathbb{T}^n} d\lambda(\theta) \cos\langle k, \theta \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0, \\ 0 & \text{se } k \neq 0. \end{cases}$$

Essendo la media spaziale un'operazione lineare sulle funzioni, concludiamo che, se P_N è definito come in (4.19),

$$\lambda(P_N) = a_0. \quad (4.20)$$

Sappiamo ora per ipotesi che se $k \neq 0$ allora $\langle k, \omega \rangle \neq 0$. Quindi, per ogni $\theta \in \mathbb{T}^n$ e $k \neq 0$,

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt e^{i\langle k, \phi_\omega^t(\theta) \rangle} = \frac{e^{i\langle k, \theta \rangle}}{T} \int_0^T dt e^{i\langle k, \omega \rangle t} = \frac{e^{i\langle k, \theta \rangle}}{i\langle k, \omega \rangle} \frac{e^{i\langle k, \omega \rangle T} - 1}{T}.$$

Poiché $|e^{i\langle k, \theta \rangle} (e^{i\langle k, \omega \rangle T} - 1)| \leq 2$, ne segue che, uniformemente rispetto a $\theta \in \mathbb{T}^n$,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{i\langle k, \phi_\omega^t(\theta) \rangle} = 0 \quad \forall k \neq 0.$$

Questo significa che, separatamente, le parti reale ed immaginaria della media temporale sono nulle,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \cos\langle k, \phi_\omega^t(\theta) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \sin\langle k, \phi_\omega^t(\theta) \rangle = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{T}^n \quad \forall k \neq 0.$$

Analogamente a sopra, per la linearità della media temporale, concludiamo che se P_N è definito come in (4.19) allora, uniformemente rispetto a $\theta \in \mathbb{T}^n$,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt P_N(\phi_\omega^t(\theta)) = a_0. \quad (4.21)$$

Dalle (4.20), (4.21), vista l'arbitrarietà nella scelta di P_N (ed N), concludiamo che il limite (4.18) è dimostrato per l'insieme dei polinomi trigonometrici.

Per estendere il risultato all'insieme delle funzioni continue sul toro, utilizziamo un teorema classico dell'analisi, il *teorema di Stone-Weierstrass*, di cui non daremo la dimostrazione. Nel presente contesto esso stabilisce che l'insieme dei polinomi trigonometrici è denso nello spazio lineare $C(\mathbb{T}^n)$ delle funzioni reali continue sul toro, dotato della struttura di spazio di Banach rispetto alla norma uniforme

$$\|f\|_\infty := \sup_{\theta \in \mathbb{T}^n} |f(\theta)|, \quad f \in C(\mathbb{T}^n).$$

Questo significa che, fissata una qualsiasi funzione $f \in C(\mathbb{T}^n)$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un polinomio P_N (per un qualche N) tale che $\|f - P_N\|_\infty < \varepsilon$.

Dimostriamo dunque il limite (4.18) per una funzione $f \in C(\mathbb{T}^n)$. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste un polinomio trigonometrico P_N tale che $\|f - P_N\|_\infty < \varepsilon/3$. Stimiamo allora

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{T} \int_0^T dt f(\phi_\omega^t(\theta)) - \lambda(f) \right| &\leq \frac{1}{T} \int_0^T dt |f(\phi_\omega^t(\theta)) - P_N(\phi_\omega^t(\theta))| \\ &\quad + \left| \frac{1}{T} \int_0^T dt P_N(\phi_\omega^t(\theta)) - \lambda(P_N) \right| + |\lambda(P_N) - \lambda(f)|. \end{aligned}$$

Ovviamente, per ogni $\theta \in \mathbb{T}^n$ e $T > 0$,

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt |f(\phi_\omega^t(\theta)) - P_N(\phi_\omega^t(\theta))| \leq \|f - P_N\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3},$$

e, analogamente,

$$|\lambda(P_N) - \lambda(f)| \leq \int_{\mathbb{T}^n} d\lambda(\theta) |f(\theta) - P_N(\theta)| \leq \|f - P_N\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'altra parte, avendo dimostrato la (4.18) per i polinomi trigonometrici, sappiamo esistere $T_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $\theta \in \mathbb{T}^n$,

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T dt P_N(\phi_\omega^t(\theta)) - \lambda(P_N) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall T > T_\varepsilon.$$

In definitiva, per ogni $\theta \in \mathbb{T}^n$,

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T dt f(\phi_\omega^t(\theta)) - \lambda(f) \right| < \varepsilon \quad \forall T > T_\varepsilon,$$

che, vista l'arbitrarietà di ε , dimostra il limite (4.18) per f continua.

Consideriamo infine il caso in cui f è integrabile secondo Riemann. È noto che in tal caso f è approssimabile con funzioni continue nel seguente senso. Per ogni fissato $\varepsilon > 0$, esistono due funzioni continue f_1 ed f_2 tali che

$$f_1 < f < f_2, \quad \lambda(f_2 - f_1) < \varepsilon.$$

Possiamo allora stimare, per ogni $T > 0$ e $\theta \in \mathbb{T}^n$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T dt f_1(\phi_\omega^t(\theta)) - \lambda(f_2) &\leq \frac{1}{T} \int_0^T dt f(\phi_\omega^t(\theta)) - \lambda(f) \\ &\leq \frac{1}{T} \int_0^T dt f_2(\phi_\omega^t(\theta)) - \lambda(f_1). \end{aligned}$$

Applicando la (4.18) alle funzioni continue f_1 ed f_2 , nel limite $T \rightarrow \infty$ troviamo

$$\begin{aligned} -\lambda(f_2 - f_1) &\leq \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt f(\phi_\omega^t(\theta)) - \lambda(f) \\ &\leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt f(\phi_\omega^t(\theta)) - \lambda(f) \\ &\leq \lambda(f_2 - f_1), \end{aligned}$$

da cui

$$\lambda(f) - \varepsilon < \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt f(\phi_\omega^t(\theta)) \leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt f(\phi_\omega^t(\theta)) < \lambda(f) + \varepsilon$$

che, vista l'arbitrarietà di ε , dimostra la (4.18) per f integrabile secondo Riemann. \square

OSSERVAZIONE 4.5. È evidente che il teorema della media si può enunciare in modo simmetrico rispetto all'evoluzione nel futuro e nel passato, ovvero

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt f(\phi_\omega^t(\theta)) = \lambda(f). \quad (4.22)$$

Per dimostrare la (4.22) è infatti sufficiente osservare che

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt f(\phi_\omega^t(\theta)) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{T} \int_0^T dt f(\phi_\omega^t(\theta)) + \frac{1}{T} \int_0^T dt f(\phi_{-\omega}^t(\theta)) \right]$$

ed applicare separatamente la (4.18) ai flussi $\phi_{\pm\omega}^t$.

COROLLARIO 4.7. *Se le frequenze sono razionalmente indipendenti ogni traiettoria del flusso ϕ_ω^t è uniformemente distribuita sul toro \mathbb{T}^n .*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo un insieme $A \subset \mathbb{T}^n$ che sia misurabile secondo Jordan. Indichiamo con $\tau_A(\theta, T)$ il tempo che la traiettoria $\phi_\omega^t(\theta)$ spende in A nel tempo $[0, T]$. Per definizione si ha

$$\tau_A(\theta, T) = \int_0^T dt \mathbb{I}_A(\phi_\omega^t(\theta)),$$

da cui, per il teorema della media,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tau_A(\theta, T)}{T} = \lambda(A).$$

Quindi il tempo medio di soggiorno nell'insieme A della traiettoria $\phi_\omega^t(\theta)$ è pari alla misura $\lambda(A)$ di A , il che dimostra l'asserto. \square

COROLLARIO 4.8. *Se le frequenze sono razionalmente indipendenti ogni orbita del flusso ϕ_ω^t è densa nel toro \mathbb{T}^n .*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che l'orbita $\gamma(\theta) = \{\phi_\omega^t(\theta) : t \in \mathbb{R}\}$ non sia densa. Quindi esistono $\theta_1 \in \mathbb{T}^n$ ed $\varepsilon > 0$ tali che $|\phi_\omega^t(\theta) - \theta_1| > \varepsilon$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Indicando con B la palla di raggio $\varepsilon/2$ e centro θ_1 , si ha ovviamente $\tau_B(\theta, T) = 0$ per ogni $T > 0$, cosicché è nullo il tempo medio di soggiorno: $\lim_{T \rightarrow \infty} \tau_B(\theta, T)/T = 0$. D'altra parte $\lambda(B) > 0$, in contraddizione con il corollario precedente. \square

Consideriamo ora il caso in cui le frequenze non sono razionalmente indipendenti. Esistono allora vettori non nulli $k \in \mathbb{Z}^n$ tali che $\langle k, \omega \rangle = 0$. La relazione $\langle k, \omega \rangle = 0$ è detta *relazione di risonanza* per ω ed il corrispondente vettore k è detto *vettore risonante* per ω . In questo caso le orbite non possono essere distribuite uniformemente sul toro, anzi nemmeno densamente. Esistono infatti integrali primi del moto non costanti su \mathbb{T}^n , precisamente ogni funzione $F : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ della forma $F(\theta) = f(\langle k, \theta \rangle)$ con $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}^n$ risonante con ω . In effetti, essendo in tal caso $\langle k, \omega \rangle = 0$,

$$F(\phi_\omega^t(\theta)) = f(\langle k, \theta + \omega t \rangle) = f(\langle k, \theta \rangle + \langle k, \omega \rangle t) = f(\langle k, \theta \rangle) = F(\theta).$$

Studiamo più in dettaglio il caso del toro bidimensionale. Se le frequenze sono razionalmente dipendenti, esistono due interi k_1, k_2 non entrambi nulli tali che $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = 0$. Senza perdita di generalità assumiamo che $k_2 \neq 0$, cosicché $\omega_2 = -k_1\omega_1/k_2$. Vi sono ora due possibilità. Se $\omega_1 = 0$ allora necessariamente

$\omega_2 = 0$ e quindi ogni punto sul toro è una posizione di equilibrio. Se invece $\omega_1 \neq 0$, sia $\tau = 2\pi k_2 / \omega_1$. Allora, per ogni $\theta \in \mathbb{T}^2$ e $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\phi_\omega^{t+\tau}(\theta) &= \phi_\omega^t(\theta) + \omega\tau = \phi_\omega^t(\theta) + \frac{2\pi k_2}{\omega_1} \left(\omega_1, -\frac{k_1 \omega_1}{k_2} \right) \\ &= \phi_\omega^t(\theta) + 2\pi(k_2, -k_1) \\ &= \phi_\omega^t(\theta) \pmod{2\pi},\end{aligned}$$

ovvero ogni orbita è chiusa e corrisponde ad un moto periodico sul toro.

Nel caso generale del toro \mathbb{T}^n con $n > 2$ la situazione è la seguente. L'insieme dei vettori risonanti per ω , detto *reticolo risonante*, che indichiamo con $\mathbb{R}R_\omega$, forma un sottogruppo di \mathbb{Z}^n . Essendo un sottogruppo discreto di \mathbb{R}^n , esso ammette r vettori linearmente indipendenti (per qualche $r \leq n$), tali che $\mathbb{R}R_\omega$ è costituito dall'insieme di tutte le combinazioni lineari a coefficienti interi di tali vettori. Si dice in tal caso che ω possiede r risonanze indipendenti, ed il numero r è detto *molteplicità della risonanza*. Sussiste allora il seguente risultato, di cui non diamo la dimostrazione.

TEOREMA 4.9. *Se le frequenze ω possiedono r vettori risonanti indipendenti, la chiusura delle traiettorie del flusso ϕ_ω^t su \mathbb{T}^n è una superficie di dimensione $(n - r)$, diffeomorfa al toro \mathbb{T}^{n-r} .*

L'idea della prova consiste nel costruire una matrice intera D (quindi $D_{i,j} \in \mathbb{Z}$) con $\det D = 1$, tale che

$$\bar{\omega} := D\omega = (0, \dots, 0, \bar{\omega}_{r+1}, \dots, \bar{\omega}_n) \text{ con } (\bar{\omega}_{r+1}, \dots, \bar{\omega}_n) \text{ razionalmente indipendenti.}$$

La matrice D definisce allora un diffeomorfismo sul toro. Infatti sia D che D^{-1} sono matrici intere, per cui se $x, y \in \mathbb{R}^n$ sono tali che $x = y \pmod{2\pi}$ (ovvero definiscono lo stesso punto del toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / (2\pi\mathbb{Z})^n$), allora si ha anche $Dx = Dy \pmod{2\pi}$ e $D^{-1}x = D^{-1}y \pmod{2\pi}$.

Ora, nelle coordinate $\bar{\theta} = D\theta$, il moto $\bar{\theta}(t) = \bar{\theta}(0) + \bar{\omega}t$ si svolge sulla superficie $\{\bar{\theta} \in \mathbb{T}^n : \bar{\theta}_i = \bar{\theta}_i(0) \forall i = 1, \dots, r\}$, isomorfa al toro \mathbb{T}^{n-r} , con distribuzione uniforme per il teorema della media ivi applicato alle frequenze $(\bar{\omega}_{r+1}, \dots, \bar{\omega}_n)$. Il toro \mathbb{T}^n risulta quindi "foliato" in superfici invarianti (i tori \mathbb{T}^{n-r} ottenuti variando i dati iniziali $\bar{\theta}_1(0), \dots, \bar{\theta}_r(0)$), dove il moto si distribuisce uniformemente.

OSSERVAZIONE 4.6. Il teorema della media vale anche nel caso delle traslazioni sul toro. Precisamente, assegnato $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, consideriamo la mappa

$$g_\alpha : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n \quad : \quad g(\theta) = \theta + \alpha \pmod{2\pi}.$$

Supponiamo che i numeri $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, 2\pi)$ siano razionalmente indipendenti, ovvero che

$$\langle k, \alpha \rangle \neq 2\pi q \quad \forall (k, q) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z} : k \neq 0. \quad (4.23)$$

Allora, per ogni funzione f integrabile secondo Riemann e per ogni $\theta \in \mathbb{T}^n$, si ha

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} f(g_\alpha^s(\theta)) = \lambda(f). \quad (4.24)$$

Osserviamo infatti che, per l'ipotesi di indipendenza, $e^{i\langle k, \alpha \rangle} \neq 1$ per ogni vettore non nullo $k \in \mathbb{Z}^n$. Allora, se $k \neq 0$,

$$\frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} e^{i\langle k, g_\alpha^s(\theta) \rangle} = \frac{e^{i\langle k, \theta \rangle}}{N} \sum_{s=0}^{N-1} e^{i\langle k, \alpha \rangle s} = \frac{e^{i\langle k, \theta \rangle}}{N} \frac{1 - e^{i\langle k, \alpha \rangle N}}{1 - e^{i\langle k, \alpha \rangle}},$$

da cui

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} e^{i\langle k, g_\alpha^s(\theta) \rangle} = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{T}^n \quad \forall k \neq 0.$$

Ne segue la validità del limite (4.24) per i polinomi trigonometrici, da cui, ragionando per approssimazione come nella dimostrazione del Teorema 4.6, si ottiene il risultato per ogni f integrabile.

ESEMPIO 4.1. Il seguente problema, che si trova proposto in vari libri di Arnold, è una interessante applicazione del teorema della media in un contesto non hamiltoniano. Consideriamo la successione dei numeri 2^n ,

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \dots$$

e costruiamo quella delle prime cifre di tali numeri,

$$1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, \dots$$

Ci chiediamo quali sono le cifre che appaiono più frequentemente. In effetti possiamo fornire una risposta molto precisa. Indicando con $\tau(k, N)$, $k = 1, \dots, 9$, il numero di volte che la cifra k appare nei primi N termini, dimostriamo che esiste il limite

$$p_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\tau(k, N)}{N} = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{k} \right).$$

Osserviamo a tal scopo che un intero n per il quale il numero 2^n ha come prima cifra k deve soddisfare la condizione

$$\exists r \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad k 10^r \leq 2^n < (k+1) 10^r,$$

ovvero

$$\exists r \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad 2\pi \log_{10} k + 2\pi r \leq n 2\pi \log_{10} 2 < 2\pi \log_{10} (k+1) + 2\pi r,$$

che, posto $\theta_k = 2\pi \log_{10} k$, possiamo riscrivere nella forma

$$n 2\pi \log_{10} 2 \in [\theta_k, \theta_{k+1}) \pmod{2\pi}.$$

In altri termini, considerata la traslazione $g_\alpha: \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ con $\alpha = 2\pi \log_{10} 2$, deve aversi $g_\alpha^n(0) \in [\theta_k, \theta_{k+1})$. Quindi $\tau(k, N)$ è il numero di volte che la traiettoria $g_\alpha^j(0) = \alpha j$ visita l'intervallo $[\theta_k, \theta_{k+1})$ nei primi N passi. Dall'Eq. (4.24) applicata alla funzione indicatrice dell'intervallo $[\theta_k, \theta_{k+1})$ segue allora che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\tau(k, N)}{N} = \lambda([\theta_k, \theta_{k+1})) = \frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{2\pi} = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{k} \right).$$

Analisi locale

Il teorema della scatola di flusso stabilisce che la struttura delle curve di fase intorno ad un punto regolare del campo di velocità di fase è estremamente semplice. Tale struttura può essere invece molto complicata intorno ad un punto singolare, che corrisponde ad una *posizione di equilibrio* del sistema. Nei casi più semplici molte informazioni importanti sono contenute nella parte lineare dello sviluppo di Taylor del campo intorno all'equilibrio. In questo capitolo presentiamo alcuni risultati in questa direzione. Discuteremo parzialmente anche analoghi risultati nel caso delle mappe, ovvero dei sistemi dinamici a tempo discreto, in cui le posizioni di equilibrio corrispondono ai punti fissi della mappa.

5.1. Equilibri e loro stabilità

Una delle prime domande naturali sul comportamento della dinamica vicino a soluzioni stazionarie riguarda le proprietà di stabilità degli equilibri, concetto già introdotto nel corso di Meccanica Razionale ed ivi approfondito nel contesto dei sistemi lagrangiani.

Consideriamo l'equazione differenziale

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in \mathcal{D}, \quad (5.1)$$

dove $v \in C^r(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$, $1 \leq r \leq +\infty$, è un campo vettoriale sul dominio $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$. Indichiamo con $\phi^t(x)$, $t \in J_x$, la soluzione massimale del problema di Cauchy di dati iniziali $\phi^0(x) = x \in \mathcal{D}$. Nel seguito denotiamo con $B_r(z)$ ($r > 0$, $z \in \mathbb{R}^n$) la bolla aperta in \mathbb{R}^n di raggio r e centro z ; sia quindi $\overline{B}_r(z)$ la sua chiusura e $\partial B_r(z)$ la sua frontiera. Dunque

$$\begin{aligned} B_r(z) &:= \{x \in \mathbb{R}^n : |x - z| < r\}, & \overline{B}_r(z) &:= \{x \in \mathbb{R}^n : |x - z| \leq r\}, \\ \partial B_r(z) &:= \{x \in \mathbb{R}^n : |x - z| = r\}. \end{aligned}$$

DEFINIZIONE 5.1. Sia $x_0 \in \mathcal{D}$ una posizione di equilibrio dell'equazione differenziale (5.1). Tale posizione è detta *stabile* se per ogni $\varepsilon > 0$ tale che $\overline{B}_\varepsilon(x_0) \subset \mathcal{D}$ esiste $\delta \in (0, \varepsilon]$ tale che $\phi^t(x) \in B_\varepsilon(x_0)$ per ogni $t \geq 0$ ed $x \in B_\delta(x_0)$. In tutti gli altri casi essa viene detta *instabile*.

OSSERVAZIONE 5.1. Nella definizione di stabilità abbiamo apparentemente assunto che tutte le soluzioni di dato iniziale $x \in B_\delta(x_0)$ esistono globalmente nel futuro. In realtà ogni soluzione può avere l'intervallo massimale di esistenza limitato nel futuro solo se essa esce da ogni compatto $K \subset \mathcal{D}$ in un tempo finito. Dunque richiedere che $\phi^t(x) \in B_\varepsilon(x_0)$ per ogni $t \in J_x \cap \mathbb{R}_+$ implica automaticamente che $J_x \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+$.

OSSERVAZIONE 5.2. La proprietà di stabilità dell'equilibrio x_0 equivale alla proprietà di continuità *uniforme nel tempo* della soluzione rispetto al dato iniziale nel punto x_0 . Più precisamente equivale a richiedere che esista un intorno U di x_0 contenuto in \mathcal{D} tale che $\phi^t(x)$ esiste globale nel futuro per ogni $x \in U$ ed inoltre

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sup_{t \geq 0} |\phi^t(x) - x_0| = 0.$$

OSSERVAZIONE 5.3. Consideriamo il caso più generale del sistema non autonomo $\dot{x} = v(t, x)$, $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{D}$ e sia $\phi^{t, t_0}(x)$, $t \in J_{t_0, x}$, la soluzione massimale del problema di Cauchy di dati iniziali $\phi^{t_0, t_0}(x) = x \in \mathcal{D}$. Diciamo che $x_0 \in \mathcal{D}$ è una posizione di equilibrio se $v(t, x_0) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Infatti in tal caso $\phi^{t, t_0}(x_0) = x_0$ per ogni $t_0, t \in \mathbb{R}$. Analogamente al caso autonomo, l'equilibrio x_0 è detto stabile se per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$ ed $\varepsilon > 0$ tale che $\overline{B_\varepsilon}(x_0) \subset \mathcal{D}$ esiste $\delta \in (0, \varepsilon]$ tale che $\phi^{t, t_0}(x) \in B_\varepsilon(x_0)$ per ogni $t \geq t_0$ ed $x \in B_\delta(x_0)$. Si osservi che in generale δ è una funzione di t_0 ed ε . Se δ può essere fissato indipendente da t_0 allora la posizione di equilibrio x_0 è detta uniformemente stabile. Nel caso autonomo, essendo $\phi^{t, t_0} = \phi^{t-t_0}$, la stabilità è sempre uniforme.

DEFINIZIONE 5.2. Sia $x_0 \in \mathcal{D}$ una posizione di equilibrio dell'equazione differenziale (5.1). Essa è detta asintoticamente stabile se è stabile ed inoltre il numero δ può essere scelto in modo tale che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi^t(x) = x_0 \quad \forall x \in B_\delta(x_0).$$

OSSERVAZIONE 5.4. La posizione di equilibrio x_0 è detta *attraente* se per qualche $\sigma > 0$ si ha che la soluzione $\phi^t(x)$ esiste globale nel futuro per ogni $x \in B_\sigma(x_0)$ ed inoltre

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi^t(x) = x_0 \quad \forall x \in B_\sigma(x_0).$$

Ad ogni posizione di equilibrio attrattiva associamo il suo *bacino di attrazione*, definito dall'insieme

$$\mathcal{B}(x_0) := \{x \in \mathcal{D} : J_x \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+, \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi^t(x) = x_0\}. \quad (5.2)$$

Tale insieme è un aperto in \mathcal{D} . Infatti se $x \in \mathcal{B}(x_0)$ esiste $T > 0$ tale che $\phi^T(x) \in B_\sigma(x_0)$. Per la continuità del flusso (rispetto ai dati iniziali), possiamo fissare $r > 0$ tale che, per ogni $y \in B_r(x)$, la soluzione $\phi^t(y)$ è definita su tutto l'intervallo $[0, T]$ e $\phi^T(y) \in B_\sigma(x_0)$. Ma allora, per la definizione di σ , anche $\phi^t(y)$ esiste globale nel futuro e converge ad x_0 per $t \rightarrow +\infty$, ovvero $y \in \mathcal{B}(x_0)$. Dunque per ogni $x \in \mathcal{B}(x_0)$ esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset \mathcal{B}(x_0)$, ovvero $\mathcal{B}(x_0)$ è aperto.

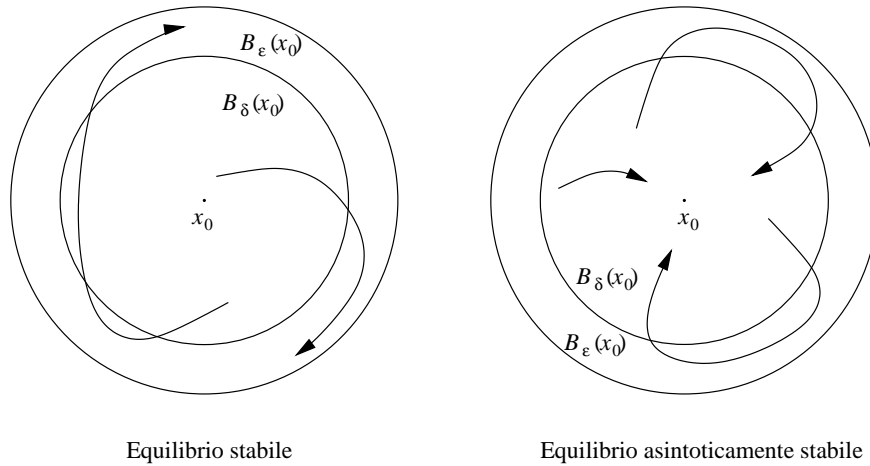


FIGURA 5.1. Equilibri stabili.

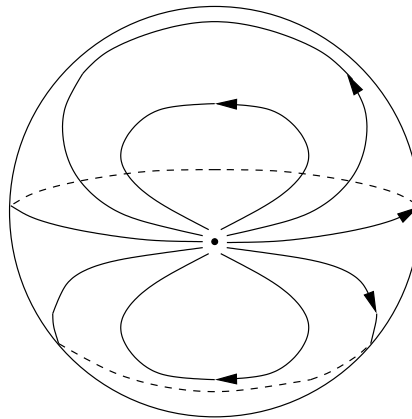


FIGURA 5.2. Equilibrio attrattivo ma instabile.

Chiaramente [stabilità] + [attrattività] \iff [asintotica stabilità]. Si osservi che la stabilità e l'asintotica stabilità sono proprietà *locali* del campo vettoriale (intorno al punto x_0), mentre l'attrattività è una proprietà non locale della dinamica. In particolare una posizione di equilibrio può essere instabile ma attrattiva: in Figura 5.2 sono rappresentate le curve di fase di un campo vettoriale definito su una superficie sferica che possiede un punto singolare attrattivo, (il cui bacino di attrazione è l'intero spazio delle fasi), ma instabile.

ESEMPIO 5.1. Consideriamo il caso lineare ed omogeneo, $v(x) = Ax$, cosicché $\phi^t(x) = e^{At}x$. Allora $x_0 = 0$ è una posizione di equilibrio. Dal Teorema 4.1 si deduce facilmente quanto segue.

- Se $\Re \lambda < 0$ per ogni $\lambda \in \sigma(A)$ allora $x_0 = 0$ è asintoticamente stabile.
- Se esiste $\lambda \in \sigma(A)$ tale che $\Re \lambda > 0$ allora $x_0 = 0$ è instabile.

- Se $\Re\lambda \leq 0$ per ogni $\lambda \in \sigma(A)$ e $\Re\lambda = 0$ per almeno un $\lambda \in \sigma(A)$, allora $x_0 = 0$ è stabile (non asintoticamente) se ciascun autovalore immaginario puro possiede molteplicità geometrica ed algebrica coincidenti, altrimenti è instabile.

OSSERVAZIONE 5.5. Esiste un'ovvia generalizzazione della nozione di stabilità e stabilità asintotica al caso di soluzioni non stazionarie di una legge di evoluzione. Supponiamo che la soluzione $\phi^{t,t_0}(x)$ dell'equazione $\dot{x} = v(t, x)$ sia definita su tutto il semiasse dei tempi $t \geq t_0$. Essa è detta stabile se esiste un intorno U di x contenuto in \mathcal{D} tale che per ogni $y \in U$ la soluzione $\phi^{t,t_0}(y)$ è anch'essa definita su tutto il semiasse dei tempi $t \geq t_0$ e

$$\limsup_{y \rightarrow x} \sup_{t \geq t_0} |\phi^{t,t_0}(y) - \phi^{t,t_0}(x)| = 0.$$

La soluzione $\phi^{t,t_0}(x)$ è detta asintoticamente stabile se è stabile ed inoltre l'intorno U può essere scelto in modo tale che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\phi^{t,t_0}(y) - \phi^{t,t_0}(x)| = 0 \quad \forall y \in U.$$

OSSERVAZIONE 5.6. Analoghe definizioni di stabilità, asintotica stabilità ed attrattività valgono per i punti fissi di mappe nel contesto dei sistemi dinamici a tempo discreto. Il punto fisso \bar{x} della mappa $g: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ è detto stabile se per ogni bolla $B_\varepsilon(\bar{x}) \subset \mathcal{D}$ esiste una bolla $B_\delta(\bar{x}) \subseteq B_\varepsilon(\bar{x})$ tale che $x \in B_\delta(\bar{x})$ implica $g^k(x) \in B_\varepsilon(\bar{x}) \forall k \in \mathbb{N}$. Il punto \bar{x} è detto attrattivo se può trovare una bolla $B_\sigma(\bar{x}) \subseteq \mathcal{D}$ tale che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} g^k(x) = \bar{x} \quad \forall x \in B_\sigma(\bar{x}).$$

Infine, un punto fisso stabile ed attrattivo viene detto asintoticamente stabile.

In virtù del Corollario 2.8, l'asintotica stabilità di un punto fisso è riconosciuta dalla parte lineare dello sviluppo di g attorno a \bar{x} se il raggio spettrale soddisfa $r(Dg(\bar{x})) < 1$, ovvero nel caso delle contrazioni locali. Come vedremo nella Sezione 5.3, un risultato analogo si ha nel caso dei flussi.

5.2. Linearizzazione

Sia $\varphi(t)$, $t \in J$, una soluzione dell'Eq. (5.1). Posto $x = \varphi(t) + \eta$, l'equazione differenziale nella variabile η si scrive

$$\dot{\eta} = A(t)\eta + f(t, \eta), \quad (5.3)$$

dove $A(t) := Dv(\varphi(t))$ ed $f(t, \eta)$ è un infinitesimo di ordine superiore: $f(t, 0) = 0$, $Df(t, 0) = 0$. *Linearizzare* l'Eq. (5.1) intorno alla soluzione $\varphi(t)$ significa trascurare i termini di ordine superiore nello sviluppo del campo intorno a $\varphi(t)$ e considerare l'equazione differenziale *lineare*

$$\dot{\eta} = A(t)\eta, \quad (t, \eta) \in J \times \mathbb{R}^n. \quad (5.4)$$

È naturale chiedersi quale connessione esista tra le soluzioni del sistema lineare (5.4) e quelle dell'equazione originale (5.1). In particolare si può sperare che almeno localmente (ovvero in un intorno della soluzione $\varphi(t)$) ogni soluzione

$\eta(t) = x(t) - \varphi(t)$ dell'Eq. (5.1) sia ben approssimata dal corrispondente problema di Cauchy per il sistema (5.4). Lo studio della relazione tra le soluzioni del problema originario e quelle del problema linearizzato inizia con un controllo accurato di queste ultime.

La situazione più semplice che possiamo considerare è quella della linearizzazione intorno ad una posizione di equilibrio. Sia quindi x_0 un punto singolare del campo vettoriale v . In tal caso l'equazione linearizzata diventa

$$\dot{\eta} = A\eta, \quad (t, \eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \quad (5.5)$$

essendo $A := Dv(x_0)$.

Entrambe le equazioni (5.4) e (5.5) sono lineari ed *omogenee*, ovvero il campo vettoriale che le definisce è una funzione lineare della variabile η ed è assente un termine di ordine 0 nella stessa η . In particolare l'Eq. (5.5) è autonoma ed allo studio delle sue soluzioni è stato dedicato il Capitolo 4.

OSSERVAZIONE 5.7. Abbiamo discusso in Sezione 3.4 la legge di trasformazione di un campo vettoriale sotto cambiamenti di coordinate, osservando come la scelta di coordinate opportune si riveli spesso strumento importante nell'analisi di un sistema dinamico. In quest'ottica, stabiliamo ora qual'è la legge di trasformazione del problema linearizzato. Sia $y = f(x)$ la trasformazione di coordinate e $\tilde{v}(y) := Df(f^{-1}(y))v(f^{-1}(y))$ il campo trasformato. Allora se $v(x_0) = 0$ e $y_0 = f(x_0)$ si ha

$$\begin{aligned} D\tilde{v}(y_0) &= \left[Df(f^{-1}(y))Dv(f^{-1}(y))Df^{-1}(y) + D(Df(f^{-1}(y)))v(f^{-1}(y)) \right]_{y=y_0} \\ &= SDv(x_0)S^{-1}, \end{aligned}$$

avendo posto $S := Df(f^{-1}(y_0)) = Df(x_0)$ ed usato che $v(f^{-1}(y_0)) = v(x_0) = 0$ e che $Df^{-1}(y_0) = S^{-1}$. Quindi le matrici relative alla parte lineare di un campo intorno ad un punto singolare calcolate in sistemi di coordinate differenti sono tra loro simili. In particolare, lo spettro della parte lineare *non dipende* dal sistema di coordinate adottato.

ESEMPIO 5.2. Consideriamo l'equazione del pendolo matematico piano,

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin \theta, \quad \omega := \sqrt{\frac{g}{\ell}},$$

dove $\theta \in \mathbb{R}$ è l'angolo (crescente in senso antiorario) che il pendolo forma con la verticale discendente, g l'accelerazione di gravità ed ℓ la lunghezza del pendolo. Nello spazio delle fasi $x = (x_1, x_2) = (\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^2$ l'equazione si riscrive come sistema del primo ordine,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 \sin x_1. \end{cases}$$

ovvero $\dot{x} = v(x)$ con

$$v(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\omega^2 \sin x_1 \end{pmatrix}.$$

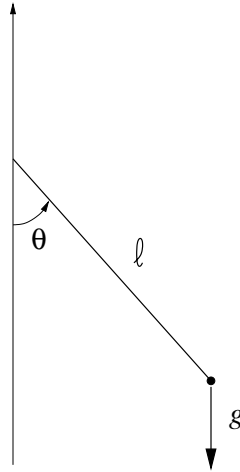


FIGURA 5.3. Il pendolo matematico piano.

Chiaramente $z_j = (j\pi, 0)$ è un punto singolare del campo per ogni $j \in \mathbb{Z}$, ovvero $v(z_j) = 0$. Si ha:

$$A_j := Dv(z_j) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(j\pi, 0) & \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(j\pi, 0) \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(j\pi, 0) & \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(j\pi, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{j+1}\omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'equazione linearizzata intorno al punto singolare z_j è allora $\dot{\eta} = A_j\eta$, ovvero:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = (-1)^{j+1}\omega^2\eta_1. \end{cases}$$

In particolare, per j pari, troviamo la ben nota equazione dell'oscillatore armonico, $\ddot{\eta}_1 + \omega^2\eta_1 = 0$, che descrive le piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio stabile $x = 0 \pmod{2\pi}$.

Più in generale, sia $q = q_0$ una posizione di equilibrio del sistema meccanico descritto dall'equazione

$$\ddot{q} = F(q), \quad q \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

Il corrispondente campo vettoriale nello spazio delle fasi $x = (q, \dot{q}) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}^n$ possiede un punto singolare in $x_0 = (q_0, 0)$. L'equazione linearizzata intorno a tale punto è

$$\dot{\eta} = A\eta, \quad \eta \in \mathbb{R}^{2n},$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ DF(q_0) & 0 \end{pmatrix},$$

essendo i blocchi a destra matrici $n \times n$. Più esplicitamente:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_i = \eta_{n+i}, \\ \dot{\eta}_{n+i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial q_j}(q_0) \eta_j, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n.$$

ESERCIZIO 5.1. Si consideri un pendolo matematico piano in cui il punto di sospensione oscilla verticalmente secondo la legge $a \cos(\gamma t)$, essendo a, γ due parametri positivi. Siano rispettivamente g, ℓ, m l'accelerazione di gravità, la lunghezza ed il peso del pendolo. Utilizzando l'angolo θ (crescente in senso antiorario) che il pendolo forma con la verticale discendente, scrivere la lagrangiana del sistema e le relative equazioni del moto. Verificare che $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$ è una posizione di equilibrio e linearizzare le equazioni del moto intorno a tale posizione.

ESERCIZIO 5.2. Si consideri il seguente sistema differenziale su \mathbb{R}^2 ,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) - x_2(1 + x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = x_1(1 + x_1^2 + x_2^2) + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2). \end{cases}$$

Utilizzando le coordinate polari (r, θ) , determinare una soluzione periodica del sistema e scrivere il sistema linearizzato intorno ad essa.

5.3. Stabilità ed instabilità riconosciute dalla parte lineare

In questa sezione vogliamo individuare criteri di stabilità o di instabilità di un punto singolare che dipendono unicamente dalla struttura del problema linearizzato. In particolare, vedremo che sarà importante solo la struttura dello spettro della matrice associata alla sviluppo lineare del campo. Questo non deve sorprendere, ricordando l'Osservazione 5.7 e considerando che le proprietà di stabilità di un punto singolare non devono dipendere dal sistema di coordinate adottato.

Premettiamo una definizione, che estende al caso non lineare quanto introdotto in Sezione 4.3. Il punto singolare x_0 dell'Eq. (5.1) è detto *iperbolico* se tutti gli autovalori della matrice jacobiana $Dv(x_0)$ hanno parte reale non nulla. In particolare, x_0 è detto *pozzo* [risp. *sorgente*] se tutti gli autovalori di $Dv(x_0)$ hanno parte reale negativa [risp. positiva].

TEOREMA 5.3 (Contrazioni locali). *Sia $x_0 \in \mathcal{D}$ un pozzo dell'Eq. (5.1), dunque $-\gamma_0 := \max\{\Re \lambda : \lambda \in \sigma(Dv(x_0))\} < 0$. Allora per ogni $\gamma \in (0, \gamma_0)$ esistono una norma $|\cdot|_*$ in \mathbb{R}^n e $\delta_0 > 0$ tali che, posto $U_\delta := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0|_* \leq \delta\}$, si ha*

i) $U_{\delta_0} \subset \mathcal{D}$;

ii) $|\phi^t(x) - x_0|_* \leq e^{-\gamma t} |x - x_0|_* \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in U_{\delta_0}$.

In particolare, x_0 è asintoticamente stabile.

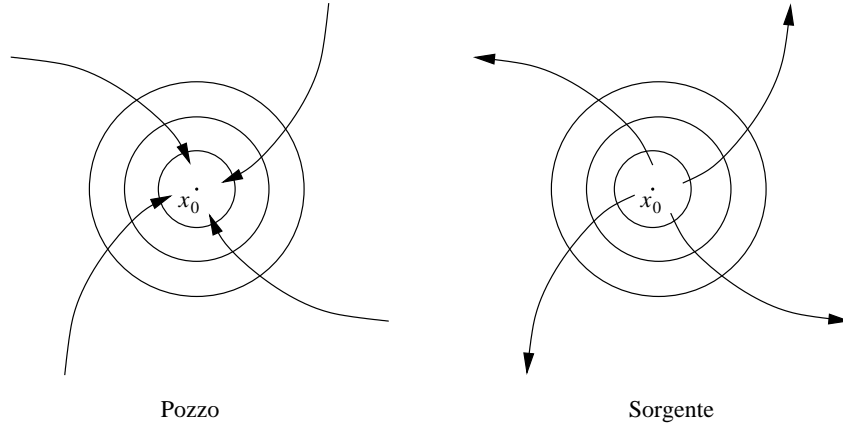


FIGURA 5.4. Pozzi e sorgenti (nella metrica adattata gli insiemi invarianti sono delle sfere).

DIMOSTRAZIONE. Senza perdere di generalità assumiamo $x_0 = 0$ (possiamo sempre ridurci a questo caso mediante il cambiamento di coordinate $x \rightarrow x - x_0$). Sviluppiamo $v(x) = v_A(x) + \hat{v}(x)$, dove $v_A(x) = Ax$, $A = Dv(x_0)$ e quindi \hat{v} tale che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\hat{v}(x)|}{|x|} = 0. \quad (5.6)$$

Fissato $\gamma \in (0, \gamma_0)$ scegliamo $\gamma' \in (\gamma, \gamma_0)$. Per il Teorema 4.3 applicato alla matrice A con $\beta = -\gamma'$ esiste una norma $|x|_* = \sqrt{W(x)}$ tale che $L_{v_A} W(x) \leq -2\gamma' W(x)$. D'altra parte,

$$|L_{\hat{v}} W(x)| = |\langle \nabla W(x), \hat{v}(x) \rangle| \leq \frac{|\hat{v}(x)|}{|x|} |x| |\nabla W(x)|. \quad (5.7)$$

Poiché $W(x)$ è una funzione quadratica si ha $|x| |\nabla W(x)| \leq CW(x)$ per qualche costante $C > 0$. Dalle (5.6) e (5.7) segue allora che $|L_{\hat{v}} W(x)| \leq o(1)W(x)$ con $o(1)$ infinitesimo per $x \rightarrow 0$. Quindi

$$L_v W(x) = L_{v_A} W(x) + L_{\hat{v}} W(x) \leq -2\gamma' W(x) + o(1)W(x).$$

Poiché $o(1) \rightarrow 0$ per $|x|_* \rightarrow 0$ ed $x_0 = 0 \in \mathcal{D}$ è possibile scegliere δ'_0 piccolo abbastanza perché si abbia $-2\gamma' + o(1) \leq -2\gamma$ e $U_{\delta'_0} \subset \mathcal{D}$.

Sia ora x un qualsiasi punto interno di $U_{\delta'_0}$ e poniamo

$$\tau := \sup\{t > 0 : \phi^s(x) \in U_{\delta'_0} \forall s \in [0, t]\}.$$

Quindi $\tau = +\infty$ significa che $\phi^t(x) \in U_{\delta'_0}$ per ogni $t \geq 0$. Viceversa, se $\tau < +\infty$, essendo la frontiera di $U_{\delta'_0}$ contenuta in \mathcal{D} , la soluzione è prolungabile oltre τ e per continuità $|\phi^\tau(x)|_* = \delta'_0$. Osserviamo ora che se $t \in [0, \tau)$ allora

$$\frac{d}{dt} |\phi^t(x)|_*^2 = L_v W(\phi^t(x)) \leq -2\gamma W(x) = -2\gamma |\phi^t(x)|_*^2,$$

da cui, ragionando come nella dimostrazione dell'Equazione (4.8),

$$|\phi^t(x)|_* \leq e^{-\gamma t} |x|_* \quad \forall x \in U_{\delta'_0} \quad \forall t \in [0, \tau).$$

In particolare $|\phi^t(x)|_* \leq |x|_* < \delta'_0$ per tutti i tempi $t \in [0, \tau)$, il che implica $\tau = +\infty$. Infatti, se fosse $\tau < +\infty$, la funzione $t \mapsto |\phi^t(x)|_*$ avrebbe una discontinuità in $t = \tau$. In conclusione $\phi^t(x) \in U_{\delta'_0}$ per ogni $t \geq 0$ e sussiste la stima $|\phi^t(x)|_* \leq e^{-\gamma t}|x|_*$ per ogni $t \geq 0$. La tesi del teorema segue scegliendo un qualsiasi $\delta_0 < \delta'_0$. \square

Similmente si dimostra l'analogo teorema nel caso delle sorgenti, di cui diamo quindi solo l'enunciato.

TEOREMA 5.4 (Espansioni locali). *Sia $x_0 \in \mathcal{D}$ una sorgente dell'Eq. (5.1), dunque $\gamma_0 := \min\{\Re\lambda : \lambda \in \sigma(Dv(x_0))\} > 0$. Allora per ogni $\gamma \in (0, \gamma_0)$ esistono una norma $|\cdot|_*$ in \mathbb{R}^n e $\delta_0 > 0$ tali che, posto $U_\delta := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0|_* \leq \delta\}$, si ha*

i) $U_{\delta_0} \subset \mathcal{D}$;

ii) $|\phi^t(x) - x_0|_* \leq e^{\gamma t}|x - x_0|_* \quad \forall t \leq 0 \quad \forall x \in U_{\delta_0}$.

In particolare, x_0 è instabile.

Il seguente corollario segue banalmente dall'equivalenza delle norme in \mathbb{R}^n .

COROLLARIO 5.5. *Nelle ipotesi del Teorema 5.3, per ogni $\gamma \in (0, \gamma_0)$ esistono $r, K > 0$ tali che*

$$|\phi^t(x) - x_0| \leq Ke^{-\gamma t}|x - x_0| \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in B_r(x_0).$$

Analogamente, nelle ipotesi del Teorema 5.4, per ogni $\gamma \in (0, \gamma_0)$ esistono $r, K > 0$ tali che

$$|\phi^t(x) - x_0| \leq Ke^{\gamma t}|x - x_0| \quad \forall t \leq 0 \quad \forall x \in B_r(x_0).$$

OSSERVAZIONE 5.8. Nel Teorema 5.3 gli insiemi U_δ sono positivamente invarianti (ovvero $\phi^t(U_\delta) \subset U_\delta \quad \forall t \geq 0$) per ogni $\delta \in [0, \delta_0]$. Analogamente, nel Teorema 5.3 questi insiemi sono negativamente invarianti (ovvero $\phi^t(U_\delta) \subset U_\delta \quad \forall t \leq 0$). Questo è dovuto alla particolare scelta della norma: viceversa, le bolle chiuse $\overline{B}_r(x_0)$ definite rispetto alla norma standard non hanno in generale alcuna proprietà di invarianza (in generale $K > 1$ nelle stime del Corollario 5.5).

ESEMPIO 5.3. Consideriamo l'equazione del pendolo matematico piano con attrito lineare

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin\theta - \beta\dot{\theta}, \quad \beta > 0. \quad (5.8)$$

La linearizzazione attorno alla posizione di equilibrio $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$ è data dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\beta \end{pmatrix},$$

i cui autovalori sono $\lambda_\pm = [-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\omega^2}]/2$. Essendo $\Re\lambda_\pm < 0$ concludiamo che $(0, 0)$ è una posizione di equilibrio asintoticamente stabile.

Più in generale, sia q_0 un minimo dell'energia potenziale $U \in C^2(I; \mathbb{R})$, $I \subseteq \mathbb{R}$, riconosciuto dalla parte lineare, ovvero $U''(q_0) > 0$. Allora $(q, \dot{q}) = (q_0, 0)$ è una posizione di equilibrio asintoticamente stabile del problema unidimensionale $\ddot{q} = -U'(q) - \beta\dot{q}$.

OSSERVAZIONE 5.9. Il Teorema 5.3 fornisce un criterio sufficiente di stabilità asintotica. Mostriamo con un semplice esempio che tale criterio non è necessario. Consideriamo il campo vettoriale in \mathbb{R}^2 ,

$$v(x) = x^\perp - a|x|^2x, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad x^\perp = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad a > 0.$$

Chiaramente $x = 0$ è una posizione di equilibrio del sistema. La matrice jacobiana è $Dv(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, cosicché le curve di fase dell'equazione linearizzata $\dot{x} = Dv(0)x$ sono (oltre l'origine) circonferenze di centro l'origine corrispondenti a moti circolari uniformi di velocità angolare $\omega = 1$. Dunque l'origine è un *centro* per tale dinamica (un equilibrio stabile non asintoticamente) e le ipotesi del Teorema 5.3 non sono verificate. È d'altra parte facile mostrare che $x = 0$ è una posizione di equilibrio asintoticamente stabile per la dinamica non lineare. Infatti, se $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ è una soluzione non nulla del sistema, allora

$$\frac{d}{dt}|x(t)|^2 = 2[x_1(t)\dot{x}_1(t) + x_2(t)\dot{x}_2(t)] = -2a[x_1(t)^2 + x_2(t)^2]^2 = -2a|x(t)|^4,$$

da cui, integrando per separazione delle variabili,

$$|x(t)|^2 = \frac{|x(0)|^2}{1 + 2a|x(0)|^2 t}. \quad (5.9)$$

Quindi tutte le bolle centrate nell'origine sono insiemi positivamente invarianti, da cui segue che ogni soluzione $\phi^t(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, esiste globale nel futuro. Inoltre $|\phi^t(x)| \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$, cosicché $x = 0$ è asintoticamente stabile (con bacino di attrazione l'intero piano \mathbb{R}^2).

Si osservi infine che nel caso $a < 0$ da (5.9) si deduce che ogni soluzione non nulla esplose in un tempo finito, in particolare $x = 0$ è instabile.

TEOREMA 5.6. *Sia $x_0 \in \mathcal{D}$ una posizione di equilibrio dell'Eq. (5.1). Se esiste $\lambda \in \sigma(Dv(x_0))$ tale che $\Re\lambda > 0$ allora x_0 è instabile. Equivalentemente, condizione necessaria per la stabilità di x_0 è che $\Re\lambda \leq 0$ per ogni $\lambda \in \sigma(Dv(x_0))$.*

DIMOSTRAZIONE. Senza perdere di generalità assumiamo $x_0 = 0$. Posto $A := Dv(0)$, supponiamo che esista $\lambda \in \sigma(A)$ tale che $\Re\lambda > 0$ e dimostriamo che $x = 0$ è instabile. Per quanto discusso nella Sezione 4.4 esiste una decomposizione di \mathbb{R}^n in somma diretta di sottospazi invarianti rispetto ad A , $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_2$, tale che, detta A_1 [risp. A_2] la restrizione di A al sottospazio E_1 [risp. E_2], si ha $\Re\lambda > 0$ per ogni $\lambda \in \sigma(A_1)$ [risp. $\Re\lambda \leq 0$ per ogni $\lambda \in \sigma(A_2)$]. Indichiamo con n_1 [risp. n_2] la dimensione di E_1 [risp. E_2]. Per le ipotesi fatte su $\sigma(A)$ il sottospazio instabile E_1 è non banale (ovvero $n_1 > 0$).

Fissiamo $\alpha > 0$ tale che $\Re\lambda > \alpha$ per ogni $\lambda \in \sigma(A_1)$. Per il Teorema 4.3 applicato ad A_1 esiste una norma $|\cdot|_1$ su E_1 tale che

$$\langle y, A_1 y \rangle_1 \geq \alpha |y|_1^2 \quad \forall y \in E_1.$$

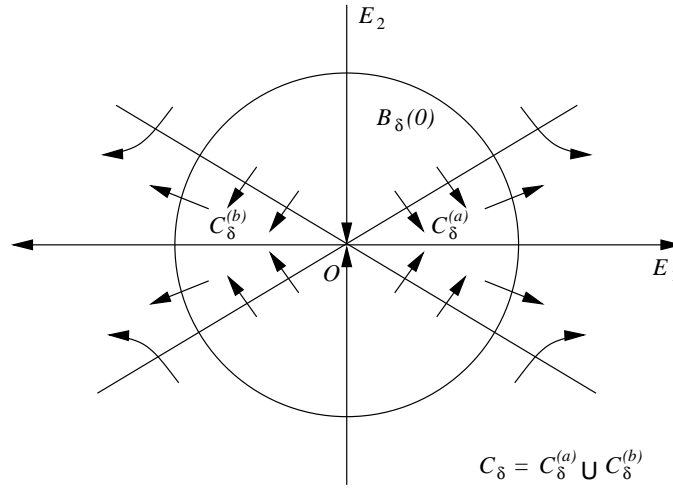


FIGURA 5.5. Il cono espulsivo.

Analogamente, fissato $\beta \in (0, \alpha)$, poiché $\sigma(A_2) \cap \mathbb{R} \subset \mathbb{R}_-$, esiste una norma $|\cdot|_2$ su E_2 tale che

$$\langle z, A_2 z \rangle_2 \leq \beta |z|_2^2 \quad \forall z \in E_2.$$

Indichiamo con $|\cdot|$ la norma euclidea su $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_2$ indotta dalle norme precedenti, ovvero

$$|x| := \sqrt{|y|_1^2 + |z|_2^2} \quad \text{se } x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \oplus E_2.$$

Lo sviluppo di Taylor al primo ordine del campo vettoriale attorno ad $x = 0$ è

$$v(x) = \begin{pmatrix} v_1(y, z) \\ v_2(y, z) \end{pmatrix} = Ax + f(x), \quad Ax = \begin{pmatrix} A_1 y \\ A_2 z \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(y, z) \\ f_2(y, z) \end{pmatrix},$$

con $f(x)$ infinitesimo di ordine superiore al primo. In particolare, per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo determinare $\delta > 0$ tale che

$$|f(x)| \leq \varepsilon |x| \quad \forall x \in \overline{B}_\delta(0) \subset \mathcal{D}.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ tale che $\gamma := \alpha - \beta - 4\varepsilon > 0$. Consideriamo il cono $C := \{x : |y|_1 > |z|_2\}$ e poniamo $C_\delta := C \cap B_\delta(0)$ (vedi Figura 5.5). Mostreremo che C_δ è espulsivo, ovvero che per ogni $x \in C_\delta$ la soluzione $\phi^t(x)$ si muove dentro C_δ fino ad attraversare la frontiera $\partial B_\delta(0)$ in un tempo finito. Dunque in particolare $x = 0$ è instabile. A tal scopo, si consideri la funzione

$$W(x) = \frac{1}{2} (|y|_1^2 - |z|_2^2).$$

La derivata di W lungo una soluzione $x(t)$ che giace in C_δ può essere stimata come segue (omettiamo la dipendenza esplicita dal tempo),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W(x) &= \langle y, \dot{y} \rangle_1 - \langle z, \dot{z} \rangle_2 \\ &= \langle y, A_1 y \rangle_1 - \langle z, A_2 z \rangle_2 + \langle y, f_1(y, z) \rangle_1 - \langle z, f_2(y, z) \rangle_2 \\ &\geq \alpha |y|_1^2 - \beta |z|_2^2 - 2|x||f(x)| \geq \alpha |y|_1^2 - \beta |z|_2^2 - 2\epsilon |x|^2 \\ &= (\alpha - 2\epsilon) |y|_1^2 - (\beta + 2\epsilon) |z|_2^2 \geq \gamma (|y|_1^2 - |z|_2^2) \\ &= 2\gamma W(x). \end{aligned}$$

Fissato $x \in C_\delta$ sia $\tau := \sup\{t > 0 : \phi^s(x) \in C_\delta \forall s \in [0, t]\}$. Dalla stima precedente, per ogni $t \in [0, \tau)$,

$$\frac{d}{dt}W(\phi^t(x)) \geq 2\gamma W(\phi^t(x)),$$

da cui, integrando,

$$W(\phi^t(x)) \geq W(x)e^{2\gamma t} \quad \forall t \in [0, \tau).$$

Essendo W una funzione continua, essa è uniformemente limitata su C_δ , per cui deve essere $\tau < +\infty$. Inoltre, essendo $W(\phi^t(x)) \geq W(x) > 0$ per ogni $t \in [0, \tau)$, $\phi^t(x)$ non può attraversare le falde del cono (dove $W = 0$), dunque deve necessariamente attraversare la frontiera $\partial B_\delta(0)$. \square

Si osservi che come corollario dei precedenti teoremi deduciamo che un punto singolare iperbolico è necessariamente o instabile o asintoticamente stabile.

SEMPIO 5.4. Consideriamo l'equazione del pendolo matematico piano in presenza o meno di attrito lineare

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin \theta - \beta \dot{\theta}, \quad \beta \geq 0.$$

La linearizzazione attorno alla posizione di equilibrio $(\theta, \dot{\theta}) = (\pi, 0)$ è data dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -\beta \end{pmatrix},$$

i cui autovalori sono $\lambda_\pm = [-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\omega^2}]/2$. Essendo $\Re \lambda_+ > 0$ e $\Re \lambda_- < 0$ (anche se $\beta = 0$) concludiamo che $(\pi, 0)$ è un punto singolare iperbolico instabile.

5.4. Teorema delle varietà stabile ed instabile

Supponiamo che il campo vettoriale $v \in C^r(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$, $1 \leq r \leq +\infty$, abbia un punto singolare iperbolico $x_0 \in \mathcal{D}$. Senza perdere di generalità possiamo assumere $x_0 = 0$. Dunque

$$v(x) = Lx + \hat{v}(x), \tag{5.10}$$

dove $L := Dv(0)$ non possiede autovalori immaginari puri. Il resto \hat{v} è un infinitesimo di ordine superiore: $\hat{v}(0) = 0$ e $D\hat{v}(0) = 0$. Indichiamo con E^+ [risp. E^-] il sottospazio stabile [risp. instabile] del flusso iperbolico lineare $\dot{x} = Lx$, vedi

Sezione 4.3. Assumiamo che le coordinate siano adattate alla decomposizione $\mathbb{R}^n = E^+ \oplus E^-$ in modo tale che

$$E^+ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \begin{pmatrix} x^+ \\ 0 \end{pmatrix}, x^+ \in \mathbb{R}^{n_+} \right\},$$

$$E^- = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \begin{pmatrix} 0 \\ x^- \end{pmatrix}, x^- \in \mathbb{R}^{n_-} \right\},$$

essendo $n_{\pm} = \dim E^{\pm}$ (mediante una trasformazione lineare possiamo sempre ridurci a tale situazione, vedi Sezione 4.3). In particolare, la matrice L assume forma a blocchi,

$$L = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

con $A \in \mathbb{R}^{n_+ \times n_+}$ una contrazione in \mathbb{R}^{n_+} e $B \in \mathbb{R}^{n_- \times n_-}$ un'espansione in \mathbb{R}^{n_-} . Assumiamo inoltre che le coordinate siano adattate, quando ristrette al sottospazio E^+ [risp. E^-], alla contrazione A [risp. all'espansione B]. In altri termini, per opportune costanti $\alpha, \beta > 0$,

$$\langle x^+, Ax^+ \rangle \leq -\alpha |x^+|^2, \quad \langle x^-, Bx^- \rangle \geq \beta |x^-|^2, \quad (5.12)$$

e quindi, per ogni $t \geq 0$,

$$|e^{At} x^+| \leq e^{-\alpha t} |x^+|, \quad |e^{-Bt} x^-| \leq e^{-\beta t} |x^-|. \quad (5.13)$$

Asseriamo ora che in un intorno di $x = 0$ il flusso non lineare possiede una struttura simile. Fissiamo $\rho > 0$ piccolo abbastanza in modo tale che, posto

$$Q := \left\{ x = \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : |x^+| < \rho, |x^-| < \rho \right\}, \quad (5.14)$$

sia $Q \subset \mathcal{D}$. Definiamo *varietà stabile locale* del punto iperbolico $x = 0$ l'insieme

$$W^+(Q) := \left\{ x \in Q : \phi^t(x) \in Q \ \forall t \geq 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi^t(x) = 0 \right\}$$

e, analogamente, *varietà instabile locale* del punto iperbolico $x = 0$ l'insieme

$$W^-(Q) := \left\{ x \in Q : \phi^{-t}(x) \in Q \ \forall t \geq 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi^{-t}(x) = 0 \right\}.$$

TEOREMA 5.7. *Se ρ è sufficientemente piccolo gli insiemi $W^{\pm}(Q) \setminus \{0\}$ sono non vuoti. Inoltre*

$$W^+(Q) = \left\{ x = \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix} \in Q : x^- = h(x^+) \right\},$$

con h di classe C^r tale che $h(0) = 0$ e $Dh(0) = 0$. Analogamente per $W^-(Q)$.

Quindi $W^{\pm}(Q)$ sono effettivamente delle varietà differenziabili (in particolare grafici di funzioni), il cui spazio tangente nell'origine coincide con i sottospazi E^{\pm} . Qualora ϕ^t è un flusso di fase su \mathcal{D} (ovvero tutte le soluzioni di $\dot{x} = v(x)$ esistono globali), definiamo *varietà stabile ed instabile globali* del punto iperbolico $x = 0$ gli insiemi

$$W^+(0) := \left\{ x \in \mathcal{D} : \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi^t(x) = 0 \right\} = \bigcup_{t \geq 0} \phi^{-t}(W^+(Q)), \quad (5.15)$$

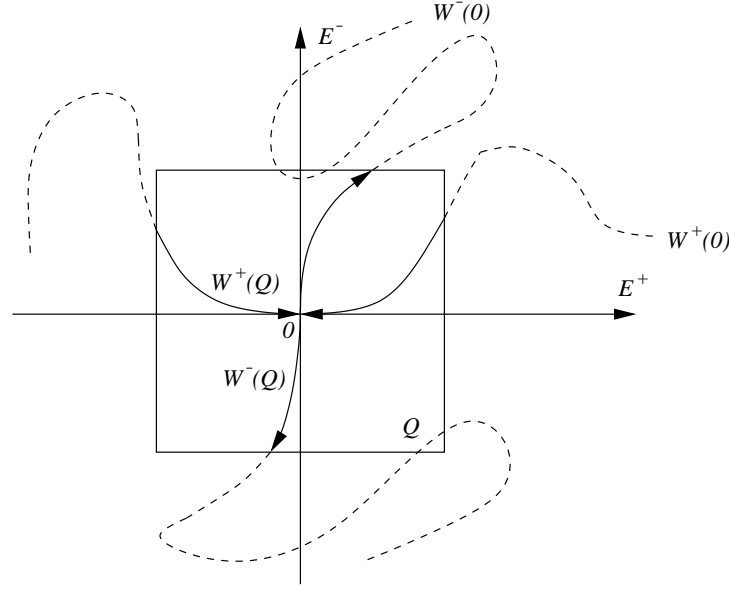


FIGURA 5.6. Varietà stabile ed instabile.

$$W^-(0) := \left\{ x \in \mathcal{D} : \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi^{-t}(x) = 0 \right\} = \bigcup_{t \geq 0} \phi^t(W^-(Q)). \quad (5.16)$$

Si osservi che le varietà $W^\pm(0)$ sono insiemi invarianti per il flusso ϕ^t , mentre $W^+(Q)$ [risp. $W^-(Q)$] è positivamente [risp. negativamente] invariante. Notiamo inoltre che nel caso bidimensionale, $n = 2$, $W^+(Q)$ [risp. $W^-(Q)$] è formata dal punto iperbolico $x = 0$ e da due rami di curve di fase corrispondenti a moti a meta asintotica verso $x = 0$ per $t \rightarrow +\infty$ [risp. $t \rightarrow -\infty$].

DIMOSTRAZIONE. Sia $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ una funzione infinitamente derivabile tale che $\eta(s) = 1$ se $s \leq 1$, $\eta(s) = 0$ se $s \geq 2$ e $|\eta'(s)| \leq 2$ per ogni $s \in \mathbb{R}_+$. Poniamo

$$g(x) := \eta(\varepsilon^{-1}|x|) \hat{v}(x),$$

con $\hat{v}(x)$ come in (5.10) ed $\varepsilon > 0$ un parametro da fissare in seguito. Chiaramente

$$\|g\|_\infty \leq \sup_{|x| \leq 2\varepsilon} |\hat{v}(x)|.$$

Inoltre, poiché $Dg(x) = \eta(\varepsilon^{-1}|x|)D\hat{v}(x) + (\varepsilon|x|)^{-1}\eta'(\varepsilon^{-1}|x|)\hat{v}(x) \otimes x$,

$$\|Dg\|_\infty \leq \sup_{|x| \leq 2\varepsilon} \|D\hat{v}(x)\| + 2\varepsilon^{-1} \sup_{|x| \leq 2\varepsilon} |\hat{v}(x)|.$$

Essendo $D\hat{v}(x)$ infinitesimo e $\hat{v}(x)$ infinitesimo di ordine superiore al primo, entrambi i termini a secondo membro tendono a zero per $\varepsilon \rightarrow 0$. In conclusione,

$$\|g\|_\infty + \|Dg\|_\infty < \delta,$$

con $\delta \rightarrow 0$ per $\varepsilon \rightarrow 0$. D'altra parte è evidente che nella bolla $B_\varepsilon(0)$ le soluzioni di $\dot{x} = v(x)$ e $\dot{x} = Lx + g(x)$ coincidono (essendo $g(x) = \hat{v}(x)$ in tale regione). Il Teorema 5.7 è allora un corollario immediato della seguente proposizione. \square

PROPOSIZIONE 5.8. Sia $t \mapsto \phi^t(x) = \begin{pmatrix} \phi^t(x)^+ \\ \phi^t(x)^- \end{pmatrix}$ il flusso di fase generato dalla legge

$$\dot{x} = Lx + g(x), \quad (5.17)$$

con L come in (5.11) e $g \in C^r(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $1 \leq r \leq +\infty$, tale che $g(0) = 0$, $Dg(0) = 0$, $\|g\|_\infty + \|Dg\|_\infty < \delta$. Siano inoltre $\alpha, \beta > 0$ come nell'Eq. (5.13). Allora, per ogni $\lambda \in (0, \alpha)$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\begin{aligned} W^+(0) &:= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sup_{t \geq 0} |\phi^t(x)| < +\infty \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x^- = h(x^+) \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |\phi^t(x)^\pm| \leq e^{-\lambda t} |x^\pm| \quad \forall t \geq 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi^t(x) = 0 \right\}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

con $h \in C^r(\mathbb{R}^{n_+}; \mathbb{R}^{n_-})$ tale che $h(0) = 0$, $Dh(0) = 0$ e $|h(a)| \leq |a|$ per ogni $a \in \mathbb{R}^{n_+}$. In particolare, per ogni $\rho > 0$ e Q come in (5.14), la varietà stabile locale di $x = 0$ punto iperbolico del problema (5.17) è

$$W^+(Q) = \left\{ x \in W^+(0) : |x^+| < \rho \right\}.$$

Analoghe affermazioni sono valide per $\phi^{-t}(\cdot)$ con $\lambda \in (0, \beta)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $t \mapsto x(t) = \begin{pmatrix} x^+(t) \\ x^-(t) \end{pmatrix}$ una soluzione dell'Eq. (5.17) che rimane limitata nel futuro. Allora essa è soluzione della seguente equazione integrale,

$$\begin{cases} x^+(t) = e^{At} x^+(0) + \int_0^t ds e^{A(t-s)} g^+(x(s)), \\ x^-(t) = - \int_t^{+\infty} ds e^{B(t-s)} g^-(x(s)), \end{cases} \quad (5.19)$$

dove $g^\pm(x) := g(x)^\pm$. In effetti, se $t \mapsto x(t)$ risolve (5.17) allora

$$x(t) = e^{Lt} x(0) + \int_0^t ds e^{L(t-s)} g(x(s)),$$

da cui, proiettando sui sottospazi E^\pm ,

$$x^+(t) = e^{At} x^+(0) + \int_0^t ds e^{A(t-s)} g^+(x(s)), \quad (5.20)$$

$$x^-(t) = e^{Bt} x^-(0) + \int_0^t ds e^{B(t-s)} g^-(x(s)). \quad (5.21)$$

Moltiplicando ora ambo i membri della (5.21) per e^{-Bt} si ottiene

$$x^-(0) = e^{-Bt} x^-(t) - \int_0^t ds e^{-Bs} g^-(x(s)). \quad (5.22)$$

Ma, per le stime (5.13),

$$|e^{-Bt} x^-(t)| \leq e^{-\beta t} |x^-(t)| \leq e^{-\beta t} \sup_{s \geq 0} |x(s)|,$$

cosicché, se $x(t)$ è limitata nel futuro, passando al limite $t \rightarrow +\infty$ nell'uguaglianza (5.22) si ha

$$x^-(0) = - \int_0^{+\infty} ds e^{-Bs} g^-(x(s)). \quad (5.23)$$

Dalle uguaglianze (5.20), (5.21) e (5.23) otteniamo l'identità (5.19).

Viceversa, ogni soluzione continua $t \mapsto x(t)$ dell'Eq. (5.19) è una soluzione limitata nel futuro dell'Eq. (5.17). Infatti si verifica facilmente che $x(t)$ è una funzione differenziabile tale che $\dot{x}(t) = Lx(t) + g(x(t))$. Inoltre, per le stime (5.13) ed essendo $\|g\|_\infty < \delta$,

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq e^{-\alpha t} |x^+(0)| + \int_0^t ds \delta e^{-\alpha(t-s)} + \int_t^{+\infty} ds \delta e^{\beta(t-s)} \\ &\leq |x(0)| + \delta \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (5.24)$$

In conclusione, l'insieme delle soluzioni limitate nel futuro dell'Eq. (5.17) coincide con l'insieme delle soluzioni continue dell'Eq. (5.19).

Sia \mathcal{C}_0 lo spazio delle funzioni continue e limitate di \mathbb{R}_+ a valori in \mathbb{R}^n , dotato della norma uniforme

$$\mathcal{C}_0 := \{x \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n) : \|x\|_\infty < +\infty\}.$$

Definiamo $F : \mathbb{R}^{n+} \times \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}_0$, $(a, x) \mapsto F(a, x) = F_a(x) = \begin{pmatrix} F_a^+(x) \\ F_a^-(x) \end{pmatrix}$, ponendo

$$\begin{aligned} F_a^+(x)(t) &= e^{At} a + \int_0^t ds e^{A(t-s)} g^+(x(s)), \\ F_a^-(x)(t) &= - \int_t^{+\infty} ds e^{B(t-s)} g^-(x(s)), \end{aligned}$$

Osserviamo che la definizione è ben posta, ovvero $F_a(x) \in \mathcal{C}_0$ per $x \in \mathcal{C}_0$. Infatti, analogamente a (5.24), stimiamo $|F_a(x)(t)| \leq |a| + \delta(\alpha^{-1} + \beta^{-1})$ per ogni $t \geq 0$.

Chiaramente una soluzione dell'Eq. (5.19) è un punto fisso dell'applicazione $F_a : \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}_0$ con $a = x^+(0)$. Viceversa, se $t \mapsto x(t)$ è un punto fisso di F_a allora

$$x^+(0) = F_a^+(x)(0) = a, \quad x^-(0) = F_a^-(x)(0) = - \int_0^{+\infty} ds e^{-Bs} g^-(x(s)),$$

cosicché $t \mapsto x(t)$ è soluzione dell'Eq. (5.19) con $x^+(0) = a$.

Si ha ora, nuovamente per le disuguaglianze (5.13),

$$\begin{aligned}
|F_a(x) - F_b(y)|(t) &\leq |e^{At}(a-b)| + \int_0^t ds |e^{A(t-s)}[g^+(x(s)) - g^+(y(s))]| \\
&\quad + \int_t^{+\infty} ds |e^{B(t-s)}[g^-(x(s)) - g^-(y(s))]| \\
&\leq e^{-\alpha t}|a-b| + \int_0^t ds e^{-\alpha(t-s)}|g(x(s)) - g(y(s))| \\
&\quad + \int_t^{+\infty} ds e^{\beta(t-s)}|g(x(s)) - g(y(s))| \\
&\leq e^{-\alpha t}|a-b| + \int_0^t ds \delta e^{-\alpha(t-s)}|x(s) - y(s)| \\
&\quad + \int_t^{+\infty} ds \delta e^{\beta(t-s)}|x(s) - y(s)|
\end{aligned}$$

(nell'ultima stima si è utilizzato $\|Dg\|_\infty < \delta$). D'altra parte,

$$\int_0^t ds e^{-\alpha(t-s)}|x(s) - y(s)| \leq \|x - y\|_\infty \int_0^t ds e^{-\alpha(t-s)} \leq \frac{1}{\alpha} \|x - y\|_\infty$$

e, analogamente,

$$\int_t^{+\infty} ds e^{\beta(t-s)}|x(s) - y(s)| \leq \frac{1}{\beta} \|x - y\|_\infty.$$

In definitiva,

$$\|F_a(x) - F_b(y)\|_\infty \leq |a-b| + \delta \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \|x - y\|_\infty.$$

Fissiamo ora δ tale che

$$\delta \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \leq \frac{1}{2}, \quad (5.25)$$

cosicché

$$\|F_a(x) - F_b(y)\|_\infty \leq |a-b| + \frac{1}{2} \|x - y\|_\infty. \quad (5.26)$$

Ponendo $b = a$ segue in particolare che $F_a: \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}_0$ è una contrazione per ogni $a \in \mathbb{R}^{n+}$, per cui esiste un'unica funzione $t \mapsto x_a(t)$ tale che $x_a = F_a(x_a)$. Pertanto x_a è l'unica soluzione limitata nel futuro dell'Eq. (5.17) tale che $x_a^+(0) = a$, ed al variare di $a \in \mathbb{R}^{n+}$ otteniamo tutte tali soluzioni, ovvero $W^+(0) = \{x_a(0) : a \in \mathbb{R}^{n+}\}$. Inoltre, dalla stima (5.26) si ricava che $\|x_a - x_b\|_\infty \leq 2|a-b|$. Ma $x_a = 0$ se $a = 0$ poiché $g(0) = 0$, per cui

$$\|x_a\|_\infty \leq 2|a|. \quad (5.27)$$

La prima identità dell'Eq. (5.18) si ottiene ponendo $h: \mathbb{R}^{n+} \rightarrow \mathbb{R}^{n-}$ tale che $h(a) := x_a^-(0)$. Occorre dimostrare che h è di classe C^r , che $Dh(0) = 0$ e che $|h(a)| \leq |a|$. Ci limitiamo qui al caso $r = 1$, la generalizzazione non è difficile. Ricordando la (5.23),

$$h(a) = - \int_0^{+\infty} ds e^{-Bs} g^-(x_a(s)),$$

da cui

$$Dh(a) = - \int_0^{+\infty} ds e^{-Bs} Dg^-(x_a(s)) \frac{\partial x_a}{\partial a}(s), \quad (5.28)$$

provvisto che $a \mapsto x_a$ è una mappa differenziabile di \mathbb{R}^{n+} in \mathcal{C}_0 . Per dimostrare quest'ultima affermazione utilizziamo il teorema della funzione implicita su spazi di Banach. A tal scopo introduciamo la notazione $L(\mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)$ per indicare l'insieme degli operatori lineari limitati dello spazio di Banach \mathcal{B}_1 nello spazio di Banach \mathcal{B}_2 . Sia ora $G: \mathbb{R}^{n+} \times \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}_0$ tale che $G(a, x) := F_a(x) - x$. Sappiamo che la funzione $a \mapsto x_a$ fornisce l'unica esplicitazione dell'equazione $G(a, x) = 0$, ovvero $G(a, x_a) = 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}^{n+}$. Per il teorema della funzione implicita, se esistono continue le funzioni

$$(a, x) \mapsto D_x G(a, x) \in L(\mathcal{C}_0; \mathcal{C}_0), \quad (a, x) \mapsto D_a G(a, x) \in L(\mathbb{R}^{n+}; \mathcal{C}_0),$$

e l'operatore $D_x G$ è invertibile, allora la mappa $a \mapsto x_a$ di \mathbb{R}^{n+} in \mathcal{C}_0 è differenziabile ed inoltre

$$D_a x_a = \frac{\partial x_a}{\partial a}(\cdot) = -[D_x G(a, x_a)]^{-1} D_a G(a, x_a).$$

Ma le derivate di G le calcoliamo esplicitamente:

i) Per ogni $\xi \in \mathcal{C}_0$ si ha $G(a, x + \xi) - G(a, x) = F_a(x + \xi) - F_a(x) - \xi$ con

$$\begin{aligned} F_a^+(x + \xi)(t) - F_a^+(x)(t) &= \int_0^t ds e^{A(t-s)} Dg^+(x(s)) \xi(s) + \mathcal{O}(\|\xi\|_\infty^2), \\ F_a^-(x + \xi)(t) - F_a^-(x)(t) &= - \int_t^{+\infty} ds e^{B(t-s)} Dg^-(x(s)) \xi(s) + \mathcal{O}(\|\xi\|_\infty^2), \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} DF_a^+(x) \xi(t) &= \int_0^t ds e^{A(t-s)} Dg^+(x(s)) \xi(s), \\ DF_a^-(x) \xi(t) &= - \int_t^{+\infty} ds e^{B(t-s)} Dg^-(x(s)) \xi(s). \end{aligned}$$

Inoltre, procedendo come nella dimostrazione della stima (5.26), otteniamo che $\|DF_a(x) \xi\|_\infty \leq \|\xi\|_\infty / 2$. Ne segue che $D_x G(a, x) = DF_a(x) - \mathbb{I}$ è invertibile, precisamente

$$D_x G(a, x)^{-1} = -[\mathbb{I} - DF_a(x)]^{-1} = - \sum_{k \geq 0} [DF_a(x)]^k,$$

la serie essendo assolutamente convergente nella norma forte di $L(\mathcal{C}_0; \mathcal{C}_0)$.

ii) Poiché $G(a + b, x) - G(a, x) = \begin{pmatrix} e^{At} b \\ 0 \end{pmatrix}$ è già una funzione lineare di b , si ha banalmente $D_a G(a, x) = \begin{pmatrix} e^{At} \\ 0 \end{pmatrix}$, nel senso che ad ogni $b \in \mathbb{R}^{n+}$ associamo la funzione $t \mapsto [D_a G(a, x) b](t) = \begin{pmatrix} e^{At} b \\ 0 \end{pmatrix}$.

Concludiamo che la funzione jacobiana $a \mapsto Dh(a)$ esiste continua ed è fornita dall'espressione (5.28). In particolare $Dh(0) = 0$. Inoltre, poiché $\|Dg\|_\infty < \delta$,

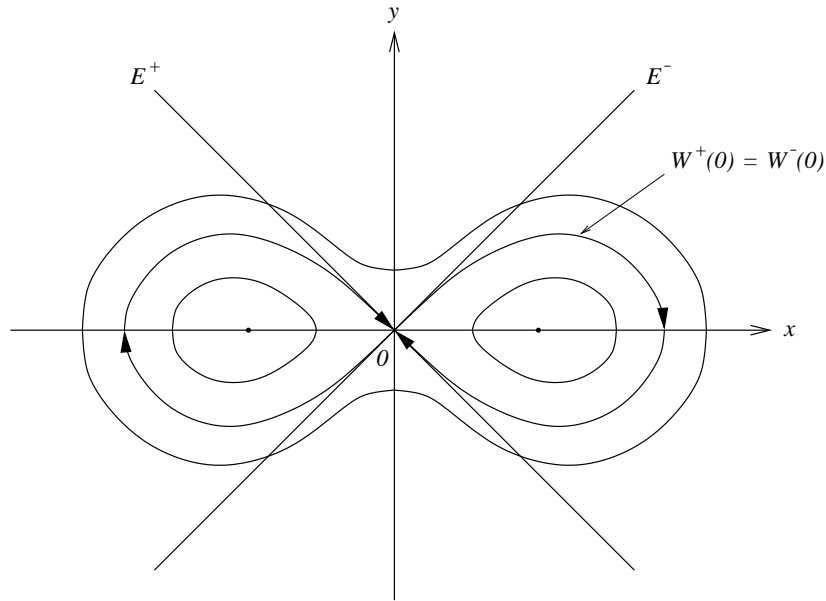


FIGURA 5.7. Varietà stabile ed instabile dell'Esempio 5.5.

utilizzando (5.25) e (5.27) otteniamo

$$|h(a)| \leq \int_0^{+\infty} ds e^{-\beta s} |g^-(x_a(s))| \leq \int_0^{+\infty} ds e^{-\beta s} \delta \|x_a\|_\infty \leq \frac{\delta}{\beta} 2|a| \leq |a|.$$

Rimane da dimostrare la seconda identità dell'Eq. (5.18) (dopodiché l'ultima è conseguenza delle precedenti). Fissato $\lambda \in (0, \alpha)$ assumiamo δ tale che, oltre alla (5.25), sia verificato che $\delta \leq (\alpha - \lambda)/2$. Posto $y(t) := x_a^+(t)$, si ha allora

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |y(t)|^2 &= 2\langle y(t), Ay(t) \rangle + 2\langle y(t), g^+(x_a(t)) \rangle \\ &\leq -2\alpha |y(t)|^2 + 2\delta |y(t)| (|y(t)| + |h(y(t))|) \\ &\leq -2(\alpha - 2\delta) |y(t)|^2 \leq -2\lambda |y(t)|^2, \end{aligned}$$

avendo utilizzato la stima (5.12), $\|Dg\|_\infty < \delta$ e $|h(y)| \leq |y|$. Integrando la precedente disequazione differenziale troviamo, per ogni $t \geq 0$, $|y(t)| \leq e^{-\lambda t} |y(0)|$, ovvero $|x_a^+(t)| \leq e^{-\lambda t} |a|$; infine $|x_a^-(t)| = |h(x_a^+(t))| \leq |x_a^+(t)| \leq e^{-\lambda t} |a|$. \square

Le varietà stabile ed instabile globali definite in (5.15) e (5.16) non sono, in generale, grafici di funzioni $h_\pm : E^\pm \rightarrow E^\mp$, e possono avere una struttura molto complicata.

ESEMPIO 5.5. Consideriamo il sistema meccanico

$$\ddot{x} = x - x^3 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = x - x^3 \end{cases}$$

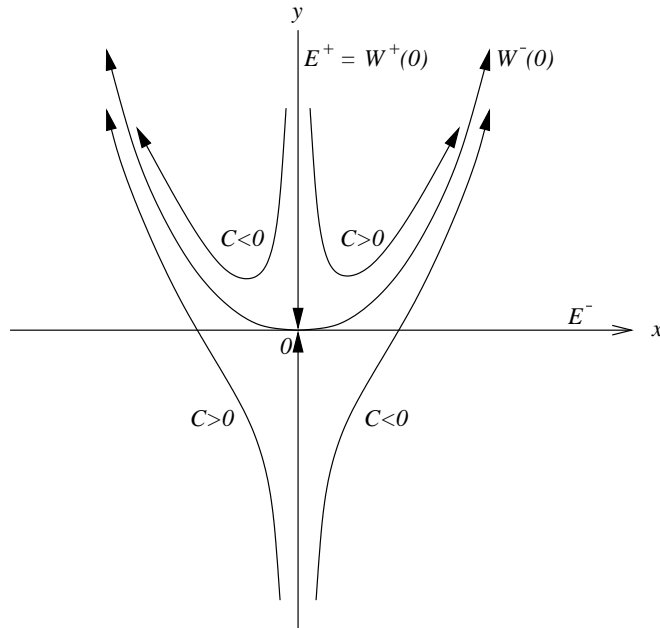


FIGURA 5.8. Varietà stabile ed instabile dell'Esempio 5.6.

Il punto singolare $(x, v) = (0, 0)$ è iperbolico, essendo

$$L = \frac{\partial(\dot{x}, \dot{v})}{\partial(x, v)}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \sigma(L) = \{-1; 1\}.$$

Dal calcolo degli autovettori associati si ricava che $E^\pm = \{(x, v) : v = \pm x\}$. Le curve di fase del sistema giacciono sulle linee di livello dell'energia $E(x, v) = v^2/2 + x^4/4 - x^2/2$. In particolare le varietà stabile ed instabile globali coincidono: $W^+(0) = W^-(0) = \{(x, v) : E(x, v) = 0\}$. In effetti, il livello critico di energia $E(x, v) = 0$ è costituito dall'unione dell'orbita stazionaria del punto singolare $(0, 0)$ con le orbite dei due moti a meta asintotica verso quest'ultimo.

ESEMPIO 5.6. Consideriamo il sistema piano

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y + x^2 \end{cases}$$

Il punto singolare $(x, y) = (0, 0)$ è iperbolico, essendo

$$L = \frac{\partial(\dot{x}, \dot{y})}{\partial(x, y)}(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \implies \sigma(L) = \{-1; 1\}.$$

Ovviamente $E^+ = \{(x, y) : x = 0\}$, $E^- = \{(x, y) : y = 0\}$. Cerchiamo le curve di fase del sistema. Notiamo che se $x(0) = 0$ allora $x(t) = 0$ ed $y(t) = y(0)e^{-t}$, cosicché E^+ è invariante anche per la dinamica non lineare. Sull'insieme invariante $\mathbb{R}^2 \setminus$

E^+ le curve di fase sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = x - \frac{y}{x}.$$

Questa si può risolvere esplicitamente ponendo $y(x) = x^2\kappa(x)$ e determinando $\kappa(x)$ per separazione delle variabili. Si trova in tal modo l'integrale generale:

$$y(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Concludiamo che

$$W^+(0) = E^+ = \{(x, y) : x = 0\}, \quad W^-(0) = \{(x, y) : y = \frac{x^2}{3}\}.$$

ESEMPIO 5.7. Riprendiamo lo studio del pendolo matematico piano con attrito lineare discusso negli Esempi 5.3 e 5.4. Vogliamo ora determinare il comportamento asintotico nel tempo di tutti i suoi possibili moti. Posto $x = (x_1, x_2) = (\theta, \dot{\theta})$, l'Eq. (5.8) è equivalente al sistema

$$\dot{x} = v(x), \quad v(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - \beta x_2 \end{pmatrix},$$

che qui consideriamo come sistema planare in \mathbb{R}^2 (anche se x_1 rappresenta un angolo). Osserviamo che l'energia meccanica associata $H(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + (1 - \cos x_1)$ ha derivata direzionale $L_v H(x) = -\beta x_2^2$. Sia $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $t \in \mathbb{R}$, una qualsiasi soluzione (notiamo che tutte le soluzioni esistono globali poiché la velocità di fase è globalmente lipschitziana). Notiamo innanzitutto che, essendo $H(x(t)) \leq H(x(0))$ e l'energia potenziale non negativa, $|x_2(t)| \leq \sqrt{2H(x(0))}$ per ogni $t \geq 0$. Mostriamo ora che necessariamente $x_2(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$. Dalle equazioni del moto e dalla precedente stima sulla velocità, possiamo stimare $|\dot{x}_2(t)| \leq 1 + \beta\sqrt{2H(x(0))}$. Ne segue in particolare che $t \mapsto x_2^2(t)$ è uniformemente continua su tutto il semiasse positivo dei tempi. Quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che $|x_2^2(t) - x_2^2(s)| < \varepsilon$ se $|t - s| < \delta$. Supponiamo per assurdo che la velocità non converga a zero. Utilizzando la uniforme continuità sopra stabilita, possiamo allora determinare una successione di tempi divergente $t_n \nearrow +\infty$, e dei numeri $\varepsilon, \delta > 0$ tali che

$$x_2^2(s) > \varepsilon \quad \forall s \in [t_n - \delta, t_n + \delta], \quad [t_n - \delta, t_n + \delta] \cap [t_k - \delta, t_k + \delta] = \emptyset \quad \forall k \neq n.$$

Detto $n(t)$ il più grande intero n tale che $t_n + \delta \leq t$ otteniamo allora

$$\begin{aligned} H(x(t)) &= H(x(0)) - \beta \int_0^t ds x_2^2(s) \\ &\leq H(x(0)) - \beta \sum_{k=0}^{n(t)} \int_{t_k - \delta}^{t_k + \delta} ds x_2^2(s) \\ &\leq H(x(0)) - 2\delta\varepsilon\beta n(t), \end{aligned}$$

il che implica $H(x(t)) \rightarrow -\infty$ per $t \rightarrow +\infty$, da cui una contraddizione essendo H una funzione non negativa. Dunque la velocità di ciascuna soluzione deve convergere a zero. Ma essendo $H(x(t))$ una funzione monotona non crescente,

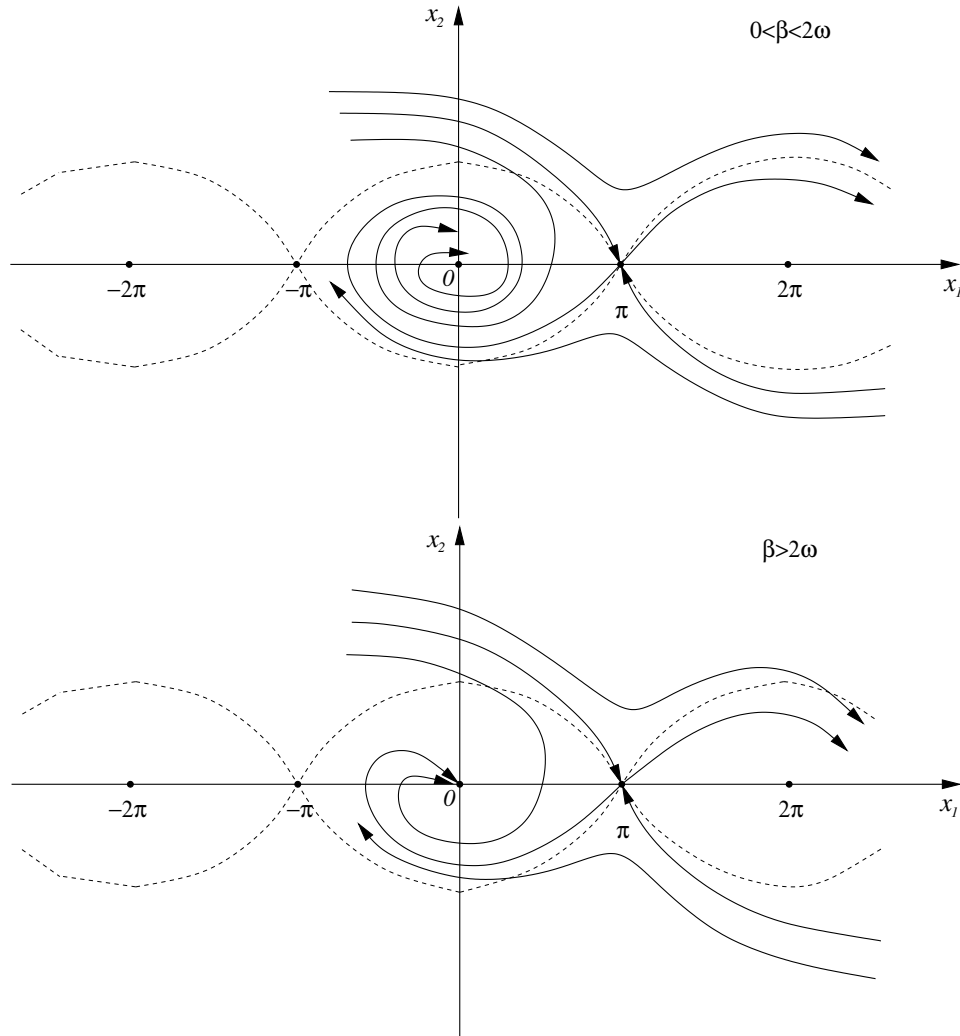


FIGURA 5.9. Curve di fase del pendolo con attrito.

esiste finito il suo limite per $t \rightarrow +\infty$. Pertanto, dalla definizione di H e poiché la velocità tende a zero, esiste anche il limite dell'energia potenziale lungo il moto, ovvero della funzione $(1 - \cos x_1(t))$, e dunque della funzione $x_1(t)$. Quindi per ciascun moto $x(t)$ esiste $x^* \in \mathbb{R}$ tale che $x(t) \rightarrow (x^*, 0)$ se $t \rightarrow +\infty$. Ma per il teorema della scatola di flusso tale limite deve essere necessariamente un punto singolare del campo $v(x)$, ovvero $x^* = k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Concludendo, esistono allora solo due possibilità sul comportamento asintotico di una soluzione del problema che non sia stazionaria: o appartiene al bacino di attrazione di una posizione di equilibrio stabile, $(2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, o compie un moto a meta asintotica sulla varietà stabile della posizione di equilibrio iperbolico $((2k+1)\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

5.5. Punti fissi iperbolici

Invece di flussi di fase consideriamo ora evoluzioni con tempi discreti, più precisamente iterazione di un diffeomorfismo (per brevità consideriamo il caso in cui esso è definito su tutto \mathbb{R}^n),

$$x_{k+1} = \psi(x_k), \quad \psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad C^r\text{-diffeomorfismo, } k \in \mathbb{Z}.$$

Supponiamo che $x = 0$ sia un punto fisso di ψ , quindi $\psi(0) = 0$. Analogamente al caso del flusso di fase, scriviamo

$$x_{k+1} = Lx_k + \hat{\psi}(x_k), \quad L := D\psi(0),$$

cosicché $\hat{\psi}(0) = 0$ e $D\hat{\psi}(0) = 0$. Si osservi che, essendo ψ un diffeomorfismo, l'operatore L è invertibile, dunque $0 \notin \sigma(L)$, ed $L^{-1} = D\psi^{-1}(0)$. Il punto fisso $x = 0$ è detto *iperbolico* se l'operatore L non possiede autovalori sulla circonferenza unitaria del piano complesso: $\sigma(L) \cap S_1 = \emptyset$, dove $S_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Al pari dei flussi lineari iperbolici, il comportamento delle iterazioni di una mappa lineare iperbolica è piuttosto semplice.

TEOREMA 5.9. *Sia $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $\sigma(L) \cap S_1 = \emptyset$. Allora esiste una decomposizione dello spazio delle fasi:*

$$\mathbb{R}^n = E^+ \oplus E^-, \quad E^\pm = \pi_\pm \mathbb{R}^n,$$

dove π_\pm sono operatori di proiezione, $\pi_+ + \pi_- = \mathbb{I}$, E^\pm sono sottospazi invarianti rispetto ad L , tali che esistono costanti $C > 0$, $\theta_+ \in (0, 1)$ e $\theta_- \in (0, 1)$ per cui

$$\begin{cases} |L^k \pi_+ x| \leq C \theta_+^k |\pi_+ x| \\ |L^{-k} \pi_- x| \leq C \theta_-^k |\pi_- x| \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (5.29)$$

Inoltre $C = 1$ per una scelta opportuna della norma su \mathbb{R}^n .

DIMOSTRAZIONE. Procedendo come nella dimostrazione del Teorema 4.5 possiamo determinare due sottospazi invarianti E^\pm tali che, detta L_+ [risp. L_-] la restrizione L ad E^+ [risp. ad E^-], si ha $\sigma(L_+) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ [risp. $\sigma(L_-) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$]. Inoltre, essendo allora L_+ [risp. L_-^{-1}] contrazioni lineari, le stime (5.29) sono conseguenza del Corollario 2.7, dell'Osservazione 2.2 e dell'equivalenza delle norme. \square

Affrontiamo finalmente il caso non lineare introdotto all'inizio della sezione. Analogamente al caso dei flussi di fase si dimostra l'esistenza delle *varietà stabile ed instabile locali* del punto fisso iperbolico $x = 0$: utilizzando la norma per cui $C = 1$ nel Teorema 5.9 e definendo Q come in (5.14), per ρ sufficientemente piccolo si ha

$$\begin{aligned} W^+(Q) &:= \left\{ x \in Q : \psi^k(x) \in Q \quad \forall k \geq 0, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \psi^k(x) = 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in Q : x^- = h^+(x^+) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W^-(Q) &:= \left\{ x \in Q : \psi^{-k}(x) \in Q \ \forall k \geq 0, \ \lim_{k \rightarrow +\infty} \psi^{-k}(x) = 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in Q : x^+ = h^-(x^-) \right\}, \end{aligned}$$

dove h^\pm sono funzioni di classe C^r tali che $h^\pm(0) = 0$ e $Dh^\pm(0) = 0$, per cui $W^\pm(Q)$ sono varietà differenziabili (in particolare grafici di funzioni) tangenti a E^\pm in $x = 0$. Si definiscono quindi *varietà stabile ed instabile globali* di $x = 0$ gli insiemi

$$\begin{aligned} W^+(0) &:= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{k \rightarrow +\infty} \psi^k(x) = 0 \right\} = \bigcup_{k \geq 0} \psi^{-k}(W^+(Q)), \\ W^-(0) &:= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{k \rightarrow +\infty} \psi^{-k}(x) = 0 \right\} = \bigcup_{k \geq 0} \psi^k(W^-(Q)). \end{aligned}$$

La dimostrazione del teorema delle varietà stabile ed instabile nel caso di diffeomorfismi è identica a quella svolta nel caso di flussi. Per completezza forniamo la traccia dei passaggi principali.

1) Si modifica la non linearità e si studia il problema $x_{k+1} = Lx_k + g(x_k)$ con $g(0) = 0$, $Dg(0) = 0$ e $\|g\|_\infty + \|Dg\|_\infty < \delta$.

2) Si mostra che ogni orbita $\{x_k; k \in \mathbb{Z}\}$ limitata nel futuro, ovvero tale che $\sup_{k \geq 0} |x_k| < +\infty$, soddisfa, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} x_k^+ &= L_+^k x_0^+ + \sum_{j=1}^k L_+^{k-j} g^+(x_{j-1}), \\ x_k^- &= - \sum_{j=k+1}^{+\infty} L_-^{k-j} g^-(x_{j-1}). \end{aligned}$$

A tal scopo si utilizza l'analogo discreto della formula della variazione delle costanti,

$$x_k = L^k x_0 + \sum_{j=1}^k L^{k-j} g(x_{j-1}) \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

che si ottiene iterando la relazione $x_k = Lx_{k-1} + g(x_{k-1})$.

3) Si definisce lo spazio di Banach

$$\mathcal{C}_0 := \{x = \{x_k; k \in \mathbb{N}\} : \|x\|_\infty < +\infty\}, \quad \|x\|_\infty := \sup_{k \geq 0} |x_k|,$$

e si dimostra che esiste $\delta > 0$ tale che la mappa $F : \mathbb{R}^{n+} \times \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}_0$ definita da

$$F(a, x) = F_a(x) = \begin{pmatrix} F_a^+(x) \\ F_a^-(x) \end{pmatrix} \text{ con}$$

$$\begin{aligned} F^+(a, x)_k &= L_+^k a + \sum_{j=1}^k L_+^{k-j} g^+(x_{j-1}), \\ F^-(a, x)_k &= - \sum_{j=k+1}^{+\infty} L_-^{k-j} g^-(x_{j-1}), \end{aligned}$$

è una contrazione su \mathcal{C}_0 per ogni $a \in \mathbb{R}^{n+}$ fissato.

4) Si dimostra che $W^+(Q) = \{x \in W^+(0) : |x^+| < \rho\}$ è positivamente invariante.

ESEMPIO 5.8. Sia $x = 0$ un punto singolare iperbolico di un campo vettoriale $v \in C^r(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ che genera un flusso di fase $t \mapsto \phi^t$. Fissato $\tau > 0$ qualsiasi, l'applicazione al tempo τ , $\psi := \phi^\tau$, definisce un diffeomorfismo le cui orbite forniscono le evolute del flusso di fase ai tempi $t_k = k\tau$: $\gamma(x) := \{\psi^k(x); k \in \mathbb{Z}\} = \{\phi^{tk}(x); k \in \mathbb{Z}\}$. Chiaramente $x = 0$ è un punto fisso di ψ . Mostriamo che è iperbolico. Posto $A = Dv(0)$, $\hat{v}(x) = v(x) - Ax$ ed utilizzando la formula della variazione delle costanti, si ha

$$\psi(x) = e^{A\tau}x + \int_0^\tau ds e^{A(\tau-s)}\hat{v}(\phi^s(x)),$$

da cui

$$D\psi(x) = e^{A\tau} + \int_0^\tau ds e^{A(\tau-s)}D\hat{v}(\phi^s(x))D\phi^s(x)$$

e dunque $L := D\psi(0) = e^{A\tau}$. Ne segue in particolare che $\sigma(L) = \{e^{\lambda\tau} : \lambda \in \sigma(A)\}$ e quindi $x = 0$ è un punto fisso iperbolico di $\psi = \phi^\tau$, le cui varietà stabile ed instabile indichiamo con $W_\tau^\pm(0)$. Verifichiamo infine che, per ogni $\tau > 0$, $W_\tau^\pm(0) = W^\pm(0)$, essendo $W^\pm(0)$ le varietà stabile ed instabile di $x = 0$, punto singolare iperbolico del flusso di fase $t \mapsto \phi^t$. L'inclusione $W^\pm(0) \subseteq W_\tau^\pm(0)$ è evidente. Viceversa, se $x \in W_\tau^\pm(0)$ allora:

$$\limsup_{t \rightarrow \pm\infty} |\phi^t(x)| \leq \limsup_{k \rightarrow \pm\infty} \max_{s \in [-\tau, \tau]} |\phi^s(\phi^{k\tau}(x))| = \max_{s \in [-\tau, \tau]} |\phi^s(0)| = 0,$$

dunque $x \in W^\pm(0)$.

5.6. Soluzione degli esercizi

SOLUZIONE Es. 5.1. A meno di termini dipendenti soltanto dal tempo ed eliminando una derivata totale rispetto al tempo si verifica che la lagrangiana del sistema è

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}, t) = \frac{m\ell^2}{2}\dot{\theta}^2 + m\ell [g + a\gamma^2 \cos(\gamma t)] \cos \theta,$$

da cui ricaviamo le equazioni del moto,

$$\ddot{\theta} = -\omega^2(t) \sin \theta, \quad \omega(t) := \sqrt{\frac{g + a\gamma^2 \cos(\gamma t)}{\ell}},$$

ovvero, nello spazio delle fasi $x = (x_1, x_2) = (\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega^2(t) \sin x_1. \end{cases}$$

Essendo $x = 0$ un punto singolare del campo vettoriale ($v(0, t) = 0 \forall t$) allora $x(t) = 0$ è soluzione di equilibrio del sistema. Linearizzando si ottiene il sistema non autonomo $\dot{y} = A(t)y$, $y \in \mathbb{R}^2$, dove

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

La corrispondente equazione del secondo ordine è

$$\ddot{y} + \omega^2(t)y = 0,$$

nota con il nome di *equazione di Mathieu*.

SOLUZIONE ES. 5.2. Le coordinate polari sono definite dalla trasformazione

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta \\ x_2 = r \sin \theta \end{cases} \quad r > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Osserviamo preliminarmente che tale trasformazione è ben definita solo sull'aperto $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. D'altra parte l'origine delle coordinate è un punto singolare del campo vettoriale. Quindi esso costituisce da solo un'orbita chiusa (corrispondente alla soluzione stazionaria $x(t) = 0$) e tutte le altre soluzioni hanno orbite giacenti sull'aperto $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. La matrice jacobiana della trasformazione di coordinate è

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(r, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix},$$

cosicché la legge di trasformazione dei vettori tangenti è

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix},$$

Quindi il sistema nelle coordinate polari si scrive

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_r(r, \theta) \\ v_\theta(r, \theta) \end{pmatrix}$$

essendo

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_r(r, \theta) \\ v_\theta(r, \theta) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} v_1(x_1(r, \theta), x_2(r, \theta)) \\ v_2(x_1(r, \theta), x_2(r, \theta)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} r(1-r^2) \cos \theta - r(1+r^2) \sin \theta \\ r(1+r^2) \cos \theta - r(1-r^2) \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sviluppando i calcoli si trova

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r^2), \\ \dot{\theta} = 1+r^2. \end{cases}$$

È immediato verificare che la funzione $t \mapsto (r(t), \theta(t)) = (1, \theta_0 + 2t)$ è soluzione del sistema. Essa corrisponde ad un moto circolare uniforme la cui orbita è la circonferenza unitaria di centro l'origine. La linearizzazione del sistema differenziale intorno alla soluzione periodica è allora $\dot{y} = Ay$, essendo

$$A = \frac{\partial(v_r, v_\theta)}{\partial(r, \theta)} \Big|_{\substack{r=1 \\ \theta=\theta_0+2t}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La soluzione periodica in coordinate cartesiane è

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_0 + 2t) \\ \sin(\theta_0 + 2t) \end{pmatrix}.$$

Insiemi limite e bacini di attrazione

6.1. Insiemi limite

Per descrivere le proprietà geometriche delle curve di fase di un sistema dinamico è utile associare ad esse dei particolari insiemi, detti insiemi limite.

Assegnato il sistema differenziale (5.1), sia $x \in \mathcal{D}$ ed indichiamo al solito con $\phi^t(x)$, $t \in J_x$ la soluzione massimale del problema di Cauchy di dati iniziali $\phi^0(x) = x$ e con $\gamma(x) := \{\phi^t(x) : t \in J_x\}$ la relativa curva di fase. Definiamo inoltre

$$\begin{aligned}\gamma_+(x) &:= \{\phi^t(x) : t \in J_x \cap [0, +\infty)\} && \text{semiorbita positiva per } x, \\ \gamma_-(x) &:= \{\phi^t(x) : t \in J_x \cap (-\infty, 0]\} && \text{semiorbita negativa per } x.\end{aligned}$$

Osserviamo che se $\mathbb{R}_+ \subset J_x$ [risp. $\mathbb{R}_- \subset J_x$] allora $\gamma_+(x)$ [risp. $\gamma_-(x)$] è positivamente [risp. negativamente] invariante ed in particolare si ha

$$\phi^{\pm t}(\gamma_{\pm}(x)) = \gamma_{\pm}(\phi^{\pm t}(x)) \subset \gamma_{\pm}(x) \quad \forall t \geq 0.$$

Sia $x \in \mathcal{D}$ tale che $\mathbb{R}_+ \subset J_x$. Chiamiamo *insieme ω -limite* (o *insieme limite positivo*) di x , che indichiamo con $\omega(x)$, la collezione di tutti i punti $y \in \mathcal{D}$ per ciascuno dei quali esiste una successione di numeri positivi $\{t_k; k \in \mathbb{N}\}$ tale che $t_k \rightarrow +\infty$ e $\phi^{t_k}(x) \rightarrow y$ per $k \rightarrow +\infty$. Quindi

$$\omega(x) := \{y \in \mathcal{D} : \exists \{t_k\}, t_k \rightarrow +\infty \text{ tale che } \lim_{k \rightarrow +\infty} \phi^{t_k}(x) = y\}.$$

Analogamente, se $\mathbb{R}_- \subset J_x$ chiamiamo *insieme α -limite* (o *insieme limite negativo*) l'insieme

$$\alpha(x) := \{y \in \mathcal{D} : \exists \{t_k\}, t_k \rightarrow -\infty \text{ tale che } \lim_{k \rightarrow +\infty} \phi^{t_k}(x) = y\}.$$

LEMMA 6.1. *Gli insiemi $\omega(x)$ ed $\alpha(x)$ sono chiusi in \mathcal{D} ed invarianti. Inoltre, se la chiusura della semiorbita $\gamma_+(x)$ [risp. $\gamma_-(x)$] è un insieme compatto contenuto in \mathcal{D} , allora $\omega(x)$ [risp. $\alpha(x)$] è un insieme non vuoto, compatto e connesso, tale che*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\phi^t(x), \omega(x)) = 0 \quad [\text{risp. } \lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(\phi^t(x), \alpha(x)) = 0]. \quad (6.1)$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo le affermazioni per l'insieme $\omega(x)$, l'altro caso è del tutto simile.

Mostriamo dapprima che $\omega(x)$ è un chiuso in \mathcal{D} . Sia

$$\{y_k; k \in \mathbb{N}\} \subset \omega(x) \quad \text{tale che} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = y \in \mathcal{D}.$$

Dobbiamo dimostrare che $y \in \omega(x)$. Fissato un intero $p > 0$ scegliamo k_p tale che $|y - y_{k_p}| < (2p)^{-1}$. Consideriamo una successione divergente di tempi $\{t_j; j \in \mathbb{N}\}$ tale che $\phi^{t_j}(x) \rightarrow y_{k_p}$ per $j \rightarrow +\infty$. Fissiamo quindi un intero j_p così grande che $t_{j_p} > p$ e $|\phi^{t_{j_p}}(x) - y_{k_p}| < (2p)^{-1}$. Posto $\tau_p = t_{j_p}$, otteniamo in tal modo una successione divergente di tempi $\{\tau_p; p \in \mathbb{N}\}$ tale che $|\phi^{\tau_p}(x) - y| \leq |\phi^{t_{j_p}}(x) - y_{k_p}| + |y_{k_p} - y| < p^{-1}$, ovvero $\phi^{\tau_p}(x) \rightarrow y$ per $p \rightarrow +\infty$. Dunque $y \in \omega(x)$.

Mostriamo ora che $\omega(x)$ è invariante. Sia $y \in \omega(x)$, cosicché esiste $t_k \nearrow +\infty$ tale che $\phi^{t_k}(x) \rightarrow y$. Per il teorema di continuità rispetto ai dati iniziali, per ogni $t \in J_y$ esiste k_t tale che $t \in J_{\phi^{t_k}(x)}$ per ogni $k > k_t$ ed inoltre

$$\phi^t(y) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \phi^t(\phi^{t_k}(x)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \phi^{t+t_k}(x),$$

ovvero $\phi^t(y) \in \omega(x)$.

Supponiamo ora che la chiusura $\overline{\gamma_+(x)}$ della semiorbita $\gamma_+(x)$ sia compatta e contenuta in \mathcal{D} . Chiaramente $\omega(x)$ è non vuoto poiché esistono successioni convergenti in $\gamma_+(x)$ per compattezza. Inoltre $\omega(x)$ è un compatto essendo un chiuso contenuto in $\overline{\gamma_+(x)}$. Dimostriamo che è connesso ragionando per assurdo. Supponiamo quindi che $\omega(x) = B_1 \cup B_2$ con B_1 e B_2 compatti e disgiunti. Per le proprietà di separazione di \mathbb{R}^n esiste un insieme aperto e limitato A tale che

$$B_1 \subset A \subset \bar{A} \subset \mathcal{D} \setminus B_2.$$

Per definizione di ω -limite esistono successioni divergenti di tempi $\{t_k^{(i)}; k \in \mathbb{N}\}$, $i = 1, 2$, tali che

$$\exists y_i = \lim_{k \rightarrow +\infty} \phi^{t_k^{(i)}}(x) \in B_i, \quad i = 1, 2.$$

Allora, per continuità, la traiettoria $t \mapsto \phi^t(x)$ interseca la frontiera $\partial A = \bar{A} \setminus A$ infinite volte ed in corrispondenza di una successione divergente di tempi. Per compattezza, possiamo determinare una successione divergente di tempi $\{\tau_k; k \in \mathbb{N}\}$ tale che $\phi^{\tau_k}(x)$ converge ad un punto $y \in \partial A$. Quindi $y \in \omega(x)$ da cui una contraddizione essendo $\omega(x) \cap \partial A = \emptyset$.

Infine, supponiamo per assurdo che il limite (6.1) sia falso. Allora esistono $\varepsilon > 0$ ed una successione di tempi divergente $\{t_k; k \in \mathbb{N}\}$ per i quali si ha $\text{dist}(\phi^{t_k}(x), \omega(x)) > \varepsilon$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Per compattezza possiamo estrarre una sottosuccessione convergente. Detto y il limite di tale sottosuccessione, per la continuità della distanza si ha $\text{dist}(y, \omega(x)) \geq \varepsilon$. Ma essendo $\overline{\gamma_+(x)} \subset \mathcal{D}$ è anche $y \in \omega(x)$, da cui una contraddizione. \square

ESEMPPIO 6.1. Vediamo alcuni esempi semplici di insiemi limite.

1) Sia x_0 un punto singolare attrattivo e $\mathcal{B}(x_0)$ il suo bacino di attrazione. Allora $\omega(x) = \{x_0\}$ per ogni $x \in \mathcal{B}(x_0)$.

2) Sia $\gamma(x)$ un'orbita chiusa. Nel caso banale $\gamma(x) = \{x\}$, x è un punto singolare del campo e l'orbita è l'immagine della soluzione stazionaria $\phi^t(x) = x$. Nel caso non banale essa è l'immagine di una soluzione periodica, ovvero esiste un più piccolo tempo $T > 0$ tale che $\phi^T(x) = x$. In entrambi i casi $\omega(x) = \alpha(x) = \gamma(x)$. Infatti gli insiemi limite sono contenuti in $\gamma(x)$ essendo l'orbita chiusa e d'altra

parte per ogni punto $y \in \gamma(x)$ esiste un $\tau \in [0, T]$ tale che $y = \phi^{\tau+kT}(x)$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Dunque $y \in \omega(x) \cap \alpha(x)$.

3) Si consideri il flusso lineare sul toro \mathbb{T}^2 studiato nella Sezione 4.5. Dal Corollario 4.7 concludiamo che se le frequenze sono razionalmente indipendenti allora $\omega(\theta) = \alpha(\theta) = \mathbb{T}^2$ per ogni $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{T}^2$. Se invece le frequenze sono razionalmente dipendenti allora le orbite sono chiuse, dunque $\omega(\theta) = \alpha(\theta) = \gamma(\theta)$ per ogni $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{T}^2$.

ESERCIZIO 6.1. Sia $t \mapsto \phi^t(x)$, $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, un flusso di fase. Dimostrare le seguenti identità.

$$\begin{aligned}\omega(x) &= \bigcap_{t \geq 0} \overline{\phi^t(\gamma_+(x))} = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_+(\phi^t(x))} = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq t} \phi^s(x)}, \\ \alpha(x) &= \bigcap_{t \leq 0} \overline{\phi^t(\gamma_-(x))} = \bigcap_{t \leq 0} \overline{\gamma_-(\phi^t(x))} = \bigcap_{t \leq 0} \overline{\bigcup_{s \leq t} \phi^s(x)}.\end{aligned}$$

6.2. Funzioni di Liapunov e bacini di attrazione

La dimostrazione del Teorema 5.3 si basa sull'esistenza di una norma che decresce lungo le soluzioni vicine alla posizione di equilibrio. L'idea di A. M. Liapunov è di utilizzare altre funzioni per controllare le proprietà di stabilità e, nel caso di asintotica stabilità, per individuarne il bacino di attrazione.

DEFINIZIONE 6.2. Sia $x_0 \in \mathcal{D}$ un punto singolare del sistema differenziale (5.1). Una funzione numerica $W \in C^0(\mathcal{U}) \cap C^1(\mathcal{U} \setminus \{x_0\})$ definita in un intorno $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{D}$ di x_0 è detta *funzione di Liapunov* per l'equilibrio x_0 se

- (1) $W(x_0) = 0$ e $W(x) > 0$ per $x \neq x_0$,
- (2) $L_v W(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathcal{U} \setminus \{x_0\}$.

Se la condizione (2) è rafforzata nella forma

- (3) $L_v W(x) < 0$ per ogni $x \in \mathcal{U} \setminus \{x_0\}$,

allora W viene detta *funzione di Liapunov in senso stretto*. Si osservi che, essendo $L_v(x) := \langle \nabla W(x), v(x) \rangle$, l'esistenza di una funzione di Liapunov in senso stretto implica che x_0 è l'unico punto singolare nell'intorno \mathcal{U} di definizione di W .

Come mostra il seguente teorema, l'esistenza di una funzione di Liapunov per una posizione di equilibrio ne garantisce la stabilità.

TEOREMA 6.3 (Teorema di Liapunov). *Sia $x_0 \in \mathcal{D}$ un punto singolare del sistema differenziale (5.1). Se esiste una funzione di Liapunov allora x_0 è stabile.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $\varepsilon > 0$ tale che $\overline{B_\varepsilon(x_0)} \subset \mathcal{U}$ e poniamo

$$\alpha := \min\{W(x) : x \in \partial B_\varepsilon(x_0)\}.$$

Per l'ipotesi (1) su W è $\alpha > 0$. Per la continuità di W l'insieme $V := \{x \in B_\varepsilon(x_0) : W(x) < \alpha\}$ è un insieme aperto di \mathbb{R}^n , ed inoltre esso contiene x_0 poiché $W(x_0) =$

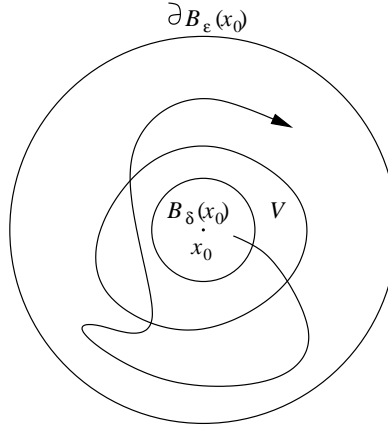


FIGURA 6.1. La soluzione di dati iniziali in V non può toccare $\partial B_\varepsilon(x_0)$.

0. Dunque esiste $\delta > 0$ tale che $B_\delta(x_0) \subset V$. Per ogni $x \in B_\delta(x_0)$, $x \neq x_0$, poniamo

$$\tau := \sup\{t > 0: \phi^s(x) \in B_\varepsilon(x_0) \forall s \in [0, t]\}.$$

Dimostriamo che $\tau = +\infty$. Ragioniamo per assurdo ed assumiamo $\tau < +\infty$. Essendo $\overline{B_\varepsilon(x_0)} \subset \mathcal{D}$, la soluzione $\phi^t(x)$ è prolungabile oltre τ e per continuità $\phi^\tau(x) \in \partial B_\varepsilon(x_0)$, da cui $W(\phi^\tau(x)) \geq \alpha$. D'altra parte, per l'ipotesi (2), $W(\phi^t(x))$ è decrescente per $t \in [0, \tau)$. Quindi $W(\phi^t(x)) \leq W(x) < \alpha$ per ogni $t \in [0, \tau)$. Si giunge così ad una contraddizione poiché la funzione $t \mapsto W(\phi^t(x))$ avrebbe una discontinuità in $t = \tau$. Quindi ogni soluzione che origina da punti in $B_\delta(x_0)$ rimane in $B_\varepsilon(x_0)$ per tutti i tempi. Vista l'arbitrarietà di ε concludiamo che x_0 è stabile. \square

COROLLARIO 6.4 (Teorema di Lagrange-Dirichlet). *Consideriamo il sistema meccanico descritto dalla lagrangiana*

$$\mathcal{L}(q, \xi) = \frac{1}{2} \langle \xi, A(q)\xi \rangle + \langle b(q), \xi \rangle - U(q), \quad (6.2)$$

dove le coordinate q sono definite in un aperto Ω di \mathbb{R}^d , $\xi \in \mathbb{R}^d$ sono le velocità, $A \in C^2(\Omega; \mathcal{M}_d)$, $b \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$, $U \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$, e la matrice $A(q)$ è definita positiva per ogni $q \in \Omega$. Si assuma che $q_0 \in \Omega$ è un minimo proprio (locale) dell'energia potenziale U . Allora $(q_0, 0)$ è una posizione di equilibrio stabile.

DIMOSTRAZIONE. Le equazioni del moto,

$$\frac{d}{dt} \nabla_\xi \mathcal{L}(q, \dot{q}) = \nabla_q \mathcal{L}(q, \dot{q}),$$

possono essere poste in forma normale essendo $A(q)$ invertibile. Più precisamente esse equivalgono al seguente sistema del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{q} = \xi \\ \dot{\xi} = F(q, \xi) \end{cases} \quad (q, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^d,$$

essendo

$$F(q, \xi) = -A^{-1}(q) \left[\nabla U(q) + \langle \xi, \nabla A(q) \rangle \xi - \frac{1}{2} \nabla_q \langle \xi, A(q) \xi \rangle + B(q) \xi \right],$$

dove $B(q)$ è la matrice antisimmetrica di elementi

$$B_{i,j}(q) = \frac{\partial b_i}{\partial q_j}(q) - \frac{\partial b_j}{\partial q_i}(q).$$

Poiché la lagrangiana \mathcal{L} è indipendente dal tempo il sistema ammette l'integrale primo dell'energia meccanica totale

$$\mathcal{H}(q, \xi) = \langle \xi, \nabla_{\xi} \mathcal{L}(q, \xi) \rangle - \mathcal{L}(q, \xi) = \frac{1}{2} \langle \xi, A(q) \xi \rangle + U(q).$$

Posto $W(q, \xi) = \mathcal{H}(q, \xi) - U(q_0)$, per le ipotesi su q_0 segue immediatamente che W è una funzione di Liapunov in un opportuno intorno di $(q_0, 0)$ (non in senso stretto, essendo la derivata lungo i moti $\dot{W}(q, v) = 0$). \square

ESERCIZIO 6.2. Si consideri il seguente sistema in \mathbb{R}^3 ,

$$\begin{cases} \dot{x} = 3y(z-1) \\ \dot{y} = -x(z-1) \\ \dot{z} = -(x^2+1)z^3 \end{cases}$$

Dimostrare che la posizione di equilibrio $(0, 0, 0)$ è stabile determinando una funzione di Liapunov. È tale equilibrio asintoticamente stabile? [Suggerimento: Cercare la funzione di Liapunov nella forma $W(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ per opportuni valori di $a, b, c > 0$.]

Passiamo ora allo studio della stabilità asintotica mediante funzioni di Liapunov. Premettiamo il seguente lemma, che avrà un ruolo centrale in tutti i ragionamenti successivi.

LEMMA 6.5. Sia $x_0 \in \mathcal{D}$ un punto singolare del sistema differenziale (5.1) e $W: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di Liapunov per x_0 . Supponiamo che K sia un compatto in \mathcal{U} e che $x \in K$ sia tale che $\gamma_+(x) \subset K$. Allora $\omega(x) \subset K$ e la funzione W è costante in $\omega(x)$.

DIMOSTRAZIONE. Chiaramente $\omega(x) \subset \overline{\gamma_+(x)} \subset K$. Inoltre esiste il limite $\beta = \lim_{t \rightarrow +\infty} W(\phi^t(x))$ poiché $t \mapsto W(\phi^t(x))$ una funzione non crescente. Ma ogni $y \in \omega(x)$ è il limite di una successione $\phi^{t_k}(x)$ con $t_k \rightarrow +\infty$ per $k \rightarrow +\infty$, pertanto

$$W(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} W(\phi^{t_k}(x)) = \beta \quad \forall y \in \omega(x),$$

ovvero W è costante su $\omega(x)$. \square

TEOREMA 6.6. Sia $x_0 \in \mathcal{D}$ un punto singolare del sistema differenziale (5.1) e $W: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di Liapunov in senso stretto per x_0 . Allora x_0 è asintoticamente stabile. Inoltre, se K è un intorno compatto di x_0 contenuto in \mathcal{U} e positivamente invariante, allora K appartiene al bacino di attrazione $\mathcal{B}(x_0)$ del punto singolare.

DIMOSTRAZIONE. In virtù del Teorema 6.3, x_0 è un equilibrio stabile. Pertanto, al fine di dimostrarne l'asintotica stabilità, occorre verificare che x_0 è anche attrattivo. A tal scopo osserviamo che, per il medesimo teorema, esistono $B_\delta(x_0) \subset \bar{B}_\varepsilon(x_0) \subset \mathcal{U}$ tali che $\gamma_+(x) \subset \bar{B}_\varepsilon(x_0)$ per ogni $x \in B_\delta(x_0)$. Per il Lemma 6.5 concludiamo allora che, per ogni $x \in B_\delta(x_0)$, $\omega(x)$ è un insieme non vuoto, contenuto in $\bar{B}_\varepsilon(x_0)$, in cui la funzione W è costante. Essendo $\omega(x)$ invariante e $L_\nu W < 0$, questo implica che $\omega(x)$ non può contenere punti regolari. Dunque $\omega(x) = \{x_0\}$ per ogni $x \in B_\delta(x_0)$, ovvero x_0 è attrattivo.

La dimostrazione della seconda affermazione è del tutto analoga. Essendo K positivamente invariante allora per ogni $x \in K$ si ha che $\omega(x)$ è un insieme non vuoto, contenuto in K , in cui la funzione W è costante. Ma $K \subset \mathcal{U}$ implica che $L_\nu W < 0$ in $K \setminus \{x_0\}$, cosicché deve aversi $\omega(x) = \{x_0\}$ per ogni $x \in K$, ovvero $K \subset \mathcal{B}(x_0)$. \square

ESEMPIO 6.2 (Il modello epidemiologico SIRS). Si tratta di un modello che descrive una popolazione di individui in cui è diffusa una malattia contagiosa non mortale. Gli individui sono divisi in tre classi: i sani suscettibili di infettarsi, gli infetti ed i guariti. Indichiamo rispettivamente con S , I e R le numerosità di tali classi. L'evoluzione nel tempo della popolazione è retta dal seguente sistema,

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta SI + \mu R, \\ \dot{I} = \beta SI - \nu I, \\ \dot{R} = \nu I - \mu R, \end{cases} \quad (6.3)$$

che va interpretato come di seguito. Il tasso istantaneo con cui i sani diventano infetti è proporzionale, per il tramite del fattore $\beta > 0$, al prodotto tra la numerosità dei sani S e quella degli infetti I . Infatti è ragionevole assumere che il tasso di infezione sia proporzionale al numero di incontri tra sani ed infetti, e quest'ultimo, in prima approssimazione, si stima con il prodotto tra la numerosità dei sani e quella degli infetti. Gli infetti, d'altra parte, guariscono con legge malthusiana di tasso $\nu > 0$. Similmente, i guariti perdono l'immunità, diventando suscettibili di reinfettarsi, con legge malthusiana di tasso $\mu > 0$, da cui l'acronimo SIRS (Susceptible - Infectious - Recovered - Susceptible). Nei membri di destra nelle (6.3) appaiono le somme algebriche dei tassi sopra descritti relativi a ciascuna classe di individui, fornendone in tal modo la variazione istantanea complessiva.

Osserviamo che la numerosità totale $N = S + I + R$ è conservata nel tempo (ovvero $\dot{N} = 0$), pertanto l'analisi del sistema (6.3) si riduce a quella di un sistema planare dipendente da un ulteriore parametro \bar{N} , che rappresenta la numerosità totale. Ad esempio, esprimendo $R(t)$ in termini di $S(t)$ e $I(t)$, ovvero $R(t) = \bar{N} - S(t) - I(t)$, l'evoluzione delle variabili $x = (x_1, x_2) = (S, I)$ rimane governata dal sistema planare

$$\dot{x} = v(x), \quad v(x) = \begin{pmatrix} -\beta x_1 x_2 + \mu(\bar{N} - x_1 - x_2) \\ \beta x_1 x_2 - \nu x_2 \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

che deve essere considerato nella regione

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^2: x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 < \bar{N}\},$$

o anche nella sua chiusura $\overline{\mathcal{D}}$, dove le tre grandezze S, I, R sono non negative (e dunque interpretabili come numerosità di popolazioni),

Trattandosi di un modello che descrive l'evoluzione di processi (biologici) non reversibili, è ragionevole aspettarsi che sia significativo solo per fare previsioni nel futuro. In questo senso, la prima osservazione importante è che il dominio ammissibile \mathcal{D} (e anche la sua chiusura $\overline{\mathcal{D}}$) è positivamente invariante. Questo si vede controllando la direzione del campo v sulla frontiera di \mathcal{D} . Si ha

$$v(x_1, 0) = \begin{pmatrix} \mu(\bar{N} - x_1) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(0, x_2) = \begin{pmatrix} \mu(\bar{N} - x_2) \\ -v x_2 \end{pmatrix},$$

$$v(x_1, \bar{N} - x_1) = \begin{pmatrix} -\beta x_1(\bar{N} - x_1) \\ (\beta x_1 - v)(\bar{N} - x_1) \end{pmatrix}.$$

Chiaramente $v(x)$ è tangente alla frontiera di \mathcal{D} sul cateto $\{x = (x_1, 0): 0 \leq x_1 \leq \bar{N}\}$ e punta verso l'interno di \mathcal{D} sul cateto $\{x = (0, x_2): 0 \leq x_2 \leq \bar{N}\}$. Per quanto riguarda l'ipotenusa $\{x = (x_1, \bar{N} - x_1): 0 < x_1 < \bar{N}\}$, poiché le componenti (v_1, v_2) del campo ivi soddisfano $v_1 < 0$ e $v_2/v_1 = -1 + v/(\beta x_1) > -1$, si deduce che il campo punta verso l'interno di \mathcal{D} anche lungo l'ipotenusa.

Un semplice calcolo mostra che il sistema possiede i due punti singolari

$$x^* = (\bar{N}, 0), \quad \bar{x} = (\bar{S}, \bar{I}) = \left(\bar{S}, \mu \frac{\bar{N} - \bar{S}}{\mu + \beta \bar{S}} \right), \quad \text{dove } \bar{S} = \frac{v}{\beta}.$$

L'equilibrio x^* corrisponde all'assenza di malattia nella popolazione. L'equilibrio \bar{x} è interno al dominio \mathcal{D} solo se $\bar{S} < \bar{N}$ e coincide con x^* se $\bar{S} = \bar{N}$. Analizziamo il modello nel caso più interessante in cui $\bar{S} < \bar{N}$. Essendo

$$Dv(x^*) = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta \bar{N} - \mu \\ 0 & \beta \bar{N} - v \end{pmatrix}, \quad Dv(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -\beta \bar{I} - \mu & -\beta \bar{S} - \mu \\ \beta \bar{I} & 0 \end{pmatrix},$$

si deduce che x^* è un punto iperbolico e \bar{x} un pozzo. Inoltre, avendo già notato che il campo vettoriale è orizzontale lungo l'asse delle ascisse, la varietà stabile globale di x^* coincide con tale asse. In particolare, l'insieme limite positivo di tutti i dati iniziali sul cateto orizzontale $\{x = (x_1, 0): 0 \leq x_1 \leq \bar{N}\}$ coincide con x^* .

Completiamo l'analisi mostrando che \bar{x} attrae tutti i rimanenti punti in $\overline{\mathcal{D}}$. A tal scopo mostriamo che l'equilibrio $\bar{x} = (\bar{S}, \bar{I})$ possiede un funzionale di Liapunov in senso stretto, precisamente

$$W(x) = x_2 - \bar{I} - \bar{I} \log \frac{x_2}{\bar{I}} + \frac{1}{2\bar{S}} (x_1 + x_2 - \bar{S} - \bar{I})^2.$$

Dallo studio del segno della derivata è immediato verificare che $f(x_2) := x_2 - \bar{I} - \bar{I} \log \frac{x_2}{\bar{I}}$ è non negativa e nulla solo in $x_2 = \bar{I}$, da cui segue immediatamente che W è non negativa e nulla solo in $x = \bar{x}$. Infine, attraverso alcuni semplici

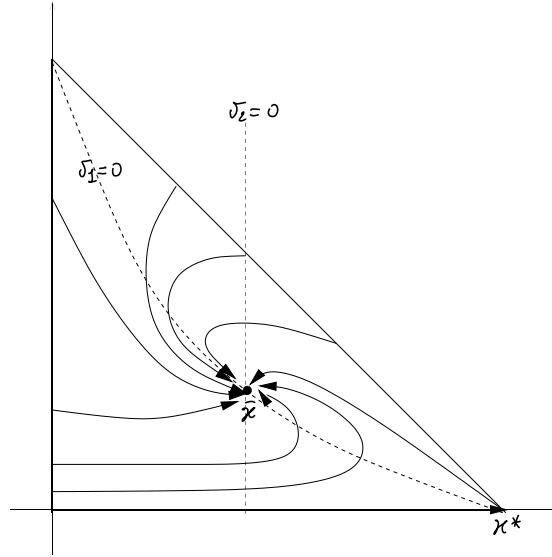


FIGURA 6.2. Diagramma delle fasi del modello SIRS. La linea verticale e la linea curva tratteggiate sono i punti in cui si annulla, rispettivamente, la componente verticale e quella orizzontale del campo.

passaggi algebrici,

$$\begin{aligned}
 L_v W(x) &= \langle \nabla W(x), v(x) \rangle = \beta(x_2 - \bar{I})(x_1 - \bar{S}) \\
 &\quad + \frac{1}{\bar{S}}(x_1 + x_2 - \bar{S} - \bar{I})(\mu\bar{N} - \mu x_1 - (\mu + \nu)x_2) \\
 &= -\beta(x_2 - \bar{I})^2 + (x_1 + x_2 - \bar{S} - \bar{I})\left(-\beta\bar{I} + \frac{\mu\bar{N}}{\bar{S}} - \frac{\mu(x_1 + x_2)}{\bar{S}}\right) \\
 &= -\beta(x_2 - \bar{I})^2 - \frac{\mu}{\bar{S}}(x_1 + x_2 - \bar{S} - \bar{I})^2,
 \end{aligned}$$

avendo utilizzato nell'ultima uguaglianza che $\bar{I} = \mu \frac{\bar{N} - \bar{S}}{\mu + \beta\bar{S}}$. Chiaramente $L_v W < 0$ per ogni $x \neq \bar{x}$, dunque W è una funzione di Liapunov in senso stretto. Possiamo allora applicare il Teorema 6.6 a ciascuno dei compatti positivamente invarianti

$$K_c := \bar{\mathcal{D}} \cap \{x: W(x) \leq c\}, \quad c > 0.$$

Pertanto il bacino di attrazione di \bar{x} contiene l'unione $\bigcup_{c>0} K_c$, che si verifica facilmente coincidere con $\bar{\mathcal{D}} \setminus \{x = (x_1, 0): 0 \leq x_1 \leq \bar{N}\}$.

ESEMPIO 6.3 (Flussi gradienti). I sistemi meccanici sono caratterizzati da una legge di conservazione, ovvero dall'esistenza di un integrale primo, l'energia meccanica. Una classe di sistemi con un comportamento alquanto differente è

costituito dai *sistemi gradienti*. Essi sono definiti da equazioni del tipo

$$\dot{x} = -\nabla F(x), \quad (6.5)$$

dove $F \in C^2(\mathcal{D}; \mathbb{R})$, \mathcal{D} un aperto in \mathbb{R}^n .

COROLLARIO 6.7. *Le curve di fase del sistema (6.5) attraversano ortogonalmente le superfici di livello $F^{-1}(c) := \{x \in \mathcal{D} : F(x) = c\}$, $c \in \mathbb{R}$, nei punti regolari di F . I punti critici di F sono posizioni di equilibrio del sistema. I minimi isolati sono asintoticamente stabili.*

DIMOSTRAZIONE. Sia \bar{x} un punto regolare di F (ovvero $\nabla F(\bar{x}) \neq 0$) e poniamo $c = F(\bar{x})$. Senza perdere di generalità assumiamo che $\frac{\partial F}{\partial x_n}(\bar{x}) \neq 0$. Per il teorema della funzione implicita esiste un intorno U di \bar{x} ed una funzione $g \in C^2(V; \mathbb{R})$, $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ intorno di $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1})$, tali che $g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}) = \bar{x}_n$ ed $F^{-1}(c) \cap U$ è il grafico della funzione g (ovvero una superficie di codimensione uno). Inoltre, se $\lambda \rightarrow x(\lambda)$ è una qualsiasi curva giacente su $F^{-1}(c)$ tale che $x(0) = \bar{x}$, essendo $F(x(\lambda)) \equiv c$ si ha in particolare

$$0 = \frac{d}{d\lambda} F(x(\lambda)) \Big|_{\lambda=0} = \langle \nabla F(\bar{x}), x'(0) \rangle.$$

Quindi $\nabla F(\bar{x})$ è ortogonale ad ogni vettore $x'(0)$ tangente ad $F^{-1}(c)$ in \bar{x} .

Chiaramente x_0 è una posizione di equilibrio dall'equazione (6.5) se e solo se $\nabla F(x_0) = 0$, ovvero se x_0 è un punto critico della funzione F . Osserviamo infine che

$$\dot{F}(x) = -\langle \nabla F(x), \dot{x} \rangle = -|\nabla F(x)|^2,$$

cosicché $\dot{F}(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathcal{D}$ ed $\dot{F}(x) = 0$ se e solo se x è una posizione di equilibrio. Ne segue che se x_0 è un minimo isolato di F allora $W(x) := F(x) - F(x_0)$ è una funzione di Liapunov in senso stretto per x_0 , da cui la asintotica stabilità. \square

ESERCIZIO 6.3. Sia $F \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ tale che $F^{-1}(-\infty, c] := \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) \leq c\}$ è compatto per ogni $c \in \mathbb{R}$. Si assuma inoltre che $\nabla F(x) \neq 0$ a meno di un insieme finito di punti z_1, \dots, z_k . Dimostrare che allora, qualunque sia il dato iniziale $x \in \mathbb{R}^n$, la soluzione $t \mapsto \phi^t(x)$ del sistema gradiente $\dot{x} = -\nabla F(x)$ è definita per ogni $t \geq 0$ ed inoltre:

$$\exists \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi^t(x) = z_j,$$

per qualche $j = j(x)$. [Suggerimento: Dimostrare dapprima che in un sistema gradiente ogni punto di $\omega(x)$ è necessariamente una posizione di equilibrio.]

Concludiamo la sezione con un ultimo teorema di asintotica stabilità, che si può applicare efficacemente in alcuni casi in cui non è nota una funzione di Liapunov in senso stretto.

TEOREMA 6.8 (Teorema di Barbashin-Krasovskii). *Sia $x_0 \in \mathcal{D}$ un punto singolare del sistema differenziale (5.1) per il quale esista una funzione di Liapunov $W: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo inoltre che esista un intorno compatto $\mathcal{P} \subset \mathcal{U}$ di x_0 tale che*

(a) \mathcal{P} è positivamente invariante,

(b) non esistono orbite interamente contenute in $\mathcal{P} \setminus \{x_0\}$ lungo le quali la funzione W è costante.

Allora x_0 è asintoticamente stabile e $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}(x_0)$.

DIMOSTRAZIONE. Per l'assunto (a) ed il Lemma 6.5, se $x \in \mathcal{P}$ allora $\omega(x)$ è un insieme non vuoto, contenuto in \mathcal{P} , su cui la funzione W è costante. Per l'assunto (b) ne segue che $\omega(x) = \{x_0\}$ per ogni $x \in \mathcal{P}$. Pertanto x_0 è attrattivo e $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}(x_0)$. D'altra parte x_0 è anche stabile per il Teorema 6.3, da cui la stabilità asintotica. \square

COROLLARIO 6.9 (Problema lagrangiano con forze dissipative). *Consideriamo un sistema meccanico descritto dal sistema differenziale del secondo ordine*

$$\frac{d}{dt} \nabla_{\xi} \mathcal{L}(q, \dot{q}) = \nabla_q \mathcal{L}(q, \dot{q}) + Q(q, \dot{q}),$$

dove la lagrangiana $\mathcal{L}(q, \xi)$ è definita come in (6.2) e le forze addizionali $Q \in C^2(\Omega \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ sono delle "dissipazioni complete", ovvero tali che:

$$Q(q, 0) = 0 \quad \forall q \in \Omega, \quad \langle \xi, Q(q, \xi) \rangle < 0 \quad \forall q \in \Omega \quad \forall \xi \neq 0. \quad (6.6)$$

Si assuma che $q_0 \in \Omega$ è un minimo isolato dell'energia potenziale U . Allora $(q_0, 0)$ è una posizione di equilibrio asintoticamente stabile.

DIMOSTRAZIONE. Analogamente al caso conservativo analizzato nel Corollario 6.4, le equazioni del moto possono essere poste in forma normale. Utilizzando la medesima notazione introdotta nel suddetto corollario, otteniamo ora

$$\begin{cases} \dot{q} = \xi \\ \dot{\xi} = F(q, \xi) + A^{-1}(q)Q(q, \xi) \end{cases} \quad (q, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^d,$$

Posto $W(q, \xi) = \mathcal{H}(q, \xi) - U(q_0)$ con $\mathcal{H}(q, \xi)$ l'energia meccanica totale del sistema, la sua variazione lungo i moti è ora

$$\dot{W}(q, \xi) = \langle \xi, Q(q, \xi) \rangle.$$

Dall'ipotesi (6.6) segue che W è una funzione di Liapunov, cosicché $(q_0, 0)$ è una posizione di equilibrio stabile. D'altra parte W non è una funzione di Liapunov in senso stretto, infatti $\dot{W}(q, 0) = 0$ per ogni $q \in \Omega$. Per dimostrare la stabilità asintotica possiamo utilizzare i due metodi seguenti.

1) Appliciamo il teorema di Barbashin-Krasovskii. Fissato $\varepsilon > 0$ consideriamo il sottoinsieme dello spazio delle fasi

$$\mathcal{D}_\varepsilon := \{(q, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^d : W(q, \xi) \leq \varepsilon\}.$$

Chiaramente \mathcal{D}_ε è positivamente invariante poiché W non cresce lungo le soluzioni. Indichiamo con \mathcal{P}_ε la componente connessa di \mathcal{D}_ε che contiene il punto $(q_0, 0)$. Essendo q_0 un minimo isolato, se ε è scelto sufficientemente piccolo allora \mathcal{P}_ε è un intorno chiuso e limitato di $(q_0, 0)$ tale che

$$F(q, 0) = -A^{-1}(q)\nabla U(q) \neq 0 \quad \forall (q, 0) \in \mathcal{P}_\varepsilon \setminus \{(q_0, 0)\}. \quad (6.7)$$

Inoltre \mathcal{P}_ε è positivamente invariante, essendo strettamente separato dal suo complementare in \mathcal{D}_ε . Rimane da verificare la condizione (b) del Teorema 6.8. Poiché $\dot{W}(q, \xi) = 0$ solo se $\xi = 0$, le uniche orbite lungo le quali la funzione W è costante sono le posizioni di equilibrio. La condizione (b) segue allora dalla (6.7) che implica $(q_0, 0)$ essere l'unica posizione di equilibrio in \mathcal{P}_ε . Dunque q_0 è asintoticamente stabile e $\mathcal{P}_\varepsilon \subset \mathcal{B}(q_0, 0)$.

2) Costruiamo una funzione di Liapunov W_1 in senso stretto. Per le ipotesi fatte sull'energia potenziale, esiste un intorno \mathcal{U} di $(q_0, 0)$ tale che $\mathcal{U} \setminus (q_0, 0)$ non contiene posizioni di equilibrio e $W(q, \xi) = \mathcal{H}(q, \xi) - U(q_0) > 0 \forall (q, \xi) \in \mathcal{U} \setminus (q_0, 0)$. Fissiamo quindi una bolla $B_r(q_0, 0)$ di raggio r e centro $(q_0, 0)$ tale che $\phi^s(B_r(q_0, 0)) \subset \mathcal{U}$ per ogni $s \in [0, 1]$. Poiché $(q_0, 0)$ è soluzione stazionaria, tale scelta è possibile in virtù della continuità rispetto ai dati iniziali della soluzione $\phi^t(q, \xi)$. Definiamo allora

$$W_1: B_r(q_0, 0) \rightarrow \mathbb{R} : W_1(q, \xi) = \int_0^1 ds W(\phi^s(q, \xi)).$$

Tale funzione è di Liapunov in senso stretto. Infatti la sua derivata di Lie è

$$\dot{W}_1(q, \xi) = \frac{d}{dt} \int_0^1 ds W(\phi^{s+t}(q, \xi)) \Big|_{t=0} = \int_0^1 ds \dot{W}(\phi^s(q, \xi)).$$

Poiché $\mathcal{U} \setminus (q_0, 0)$ non contiene equilibri, la funzione integranda è negativa a meno di un insieme numerabile di tempi s , e quindi l'integrale è strettamente negativo. \square

6.3. Cicli e loro stabilità

Le curve di fase del flusso generato da un campo vettoriale $v \in C^r(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$, $1 \leq r \leq +\infty$, possono essere costituite da singoli punti, essere diffeomorfe ad una retta, oppure ad una circonferenza. In quest'ultimo caso la curva di fase viene detta *ciclo* ed è l'orbita di una soluzione periodica non banale.

Il ciclo γ è detto *stabile* secondo Liapunov se per ogni intorno aperto U di γ compattamente contenuto in \mathcal{D} (quindi $\gamma \subset U \subset \bar{U} \subset \mathcal{D}$) esiste un intorno V di γ tale che $\phi^t(V) \subset U$ per ogni $t \geq 0$. Il ciclo γ è detto *asintoticamente stabile* se è stabile ed inoltre l'intorno V può essere scelto in modo tale che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\phi^t(x), \gamma) = 0 \quad \forall x \in V. \quad (6.8)$$

Analogamente al caso delle posizioni di riposo, associamo ad ogni ciclo asintoticamente stabile γ il suo bacino di attrazione, definito dall'insieme aperto

$$\mathcal{B}(\gamma) := \{x \in \mathcal{D} : J_x \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+, \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\phi^t(x), \gamma) = 0\}.$$

OSSERVAZIONE 6.1. La nozione di stabilità [risp. asintotica stabilità] di un ciclo, che descrive proprietà geometriche delle curve di fase ad esso vicine, non va confusa con la nozione di stabilità [risp. asintotica stabilità] delle soluzioni periodiche di cui il ciclo è l'orbita (vedi l'Osservazione 5.5). In particolare una soluzione periodica non banale di un'equazione differenziale autonoma

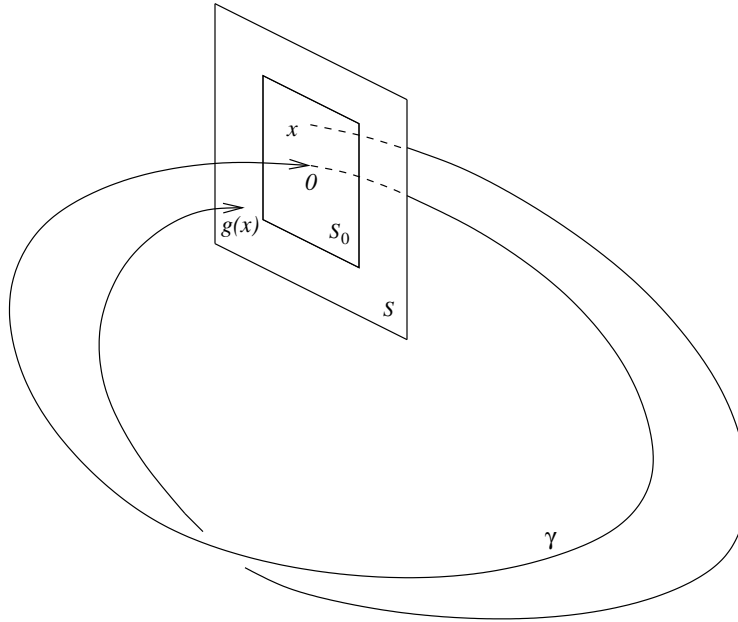


FIGURA 6.3. Applicazione di Poincaré.

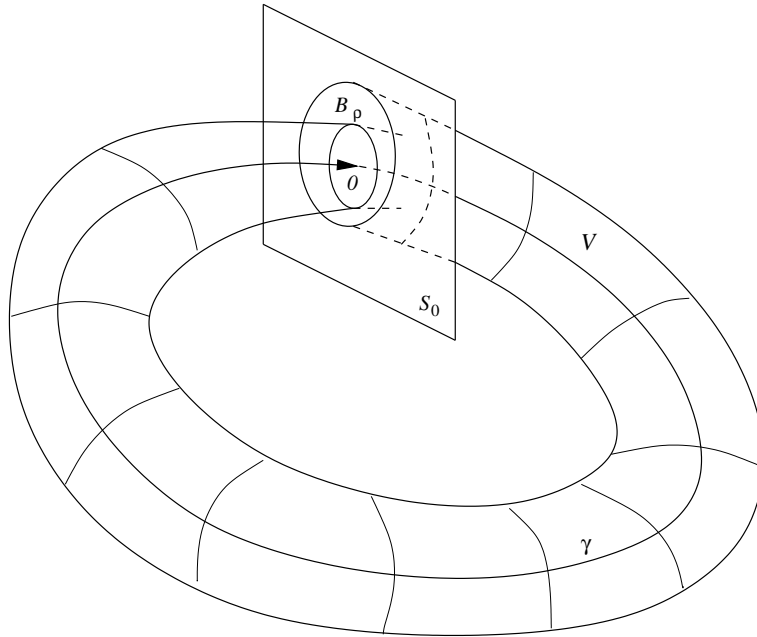
non può mai essere asintoticamente stabile. Infatti soluzioni con condizioni iniziali in punti differenti del ciclo non possono avvicinarsi indefinitamente per $t \rightarrow +\infty$. Altrimenti detto, se $\gamma(x)$ è un ciclo e T è il periodo della soluzione periodica $t \mapsto \phi^t(x)$, allora per ogni $y \in \gamma(x)$ e $k \in \mathbb{Z}$ si ha $|\phi^{kT}(y) - \phi^{kT}(x)| = |x - y|$, cosicché $|\phi^t(x) - \phi^t(y)| \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$.

È ora possibile ridurre l'analisi della stabilità di un ciclo a quella di un punto fisso di una mappa opportuna.

Sia $v \in C^r(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$, $1 \leq r \leq +\infty$, e $\gamma \subset \mathcal{D}$ un ciclo. Fissiamo un punto su γ che possiamo senza perdere di generalità assumere coincidente con l'origine del sistema di coordinate. Sia ora H un iperpiano ($\dim(H) = n - 1$) passante per l'origine e non contenente $v(0)$. Quindi $H = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$ per un opportuno funzionale lineare h tale che $h(v(0)) \neq 0$. Definiamo *sezione trasversale locale* di v in 0 un aperto S di H contenente 0 e tale che $h(v(x)) \neq 0$ per ogni $x \in \bar{S}$. Sia T il periodo del ciclo. È possibile determinare un intorno aperto U di $x = 0$ contenuto in \mathcal{D} ed un'unica funzione $\tau \in C^1(U; \mathbb{R})$ tale che $\tau(0) = T$ e $\phi^{\tau(x)}(x) \in S$ per ogni $x \in U$. Infatti, essendo $\phi^T(0) = 0$, la funzione differenziabile $G(t, x) := h(\phi^t(x))$ è tale che

$$G(T, 0) = h(0) = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial t}(T, 0) = h(v(0)) \neq 0,$$

cosicché, per il teorema della funzione implicita, esiste un intorno U di $x = 0$ ed un'unica funzione $\tau \in C^1(U; \mathbb{R})$ tale che $G(\tau(x), x) = 0$ e $\tau(0) = T$. Posto $S_0 = S \cap U$

FIGURA 6.4. L'insieme invariante V

definiamo *applicazione di Poincaré* la funzione

$$g: S_0 \rightarrow S_0 \quad : \quad g(x) = \phi^{\tau(x)}(x).$$

Questa funzione è anche detta *mappa del primo ritorno*: infatti $\tau(x)$ è esattamente il primo tempo in cui la soluzione che origina da $x \in S_0$ torna sulla sezione S (vedi Figura 6.3). Chiaramente $g(0) = 0$, ovvero l'origine è un punto fisso del sistema dinamico discreto definito da g . Si osservi che in generale g non è definita su tutto S .

TEOREMA 6.10. *Se $Dg(0)$ è una contrazione lineare allora l'orbita γ è asintoticamente stabile.*

DIMOSTRAZIONE. Sia U un intorno aperto di γ . Indichiamo con $|\cdot|$ una norma su \mathbb{R}^n tale che la sua restrizione all'iperpiano H (contenente la sezione locale S) coincide con la norma $|\cdot|_*$ adattata alla contrazione $Dg(0) \in L(H)$. Per il Corollario 2.8 ed utilizzando la continuità del flusso rispetto ai dati iniziali esiste $\rho > 0$ tale che, posto $B_\rho := \{x \in H : |x| < \rho\}$, le seguenti condizioni sono verificate:

- 1) $\phi^t(x) \in U$ per ogni $t \in [0, 2T]$ e per ogni $x \in B_\rho$;
- 2) $B_\rho \subset S_0$ e $\tau(x) \leq 2T$ per ogni $x \in B_\rho$;
- 3) esiste $\mu \in (0, 1)$ tale che $|g(x)| \leq \mu|x|$ per ogni $x \in B_\rho$.

Definiamo ora

$$V := \{\phi^t(x) : x \in B_\rho, t > 0\} = \bigcup_{t>0} \phi^t(B_\rho). \quad (6.9)$$

Chiaramente V è un insieme aperto contenente γ e positivamente invariante (vedi Figura 6.4). Essendo $g(B_\rho) \subset B_\rho$ le mappe g^k , $k \in \mathbb{N}$, sono definite su B_ρ . Inoltre

$$|g^k(x)| \leq \mu^k |x|, \quad \tau(g^k(x)) \leq 2T \quad \forall x \in B_\rho \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Quindi, per $x \in B_\rho$ e $t \geq 0$, si ha

$$\phi^t(x) = \phi^s(g^N(x)),$$

essendo $N = N(x, t)$ il massimo numero di ritorni sulla sezione S_0 della soluzione uscente da x che siano non successivi al tempo t , dunque

$$N = \max \left\{ k \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^k \tau(g^{j-1}(x)) \leq t \right\},$$

con $s = s(t)$ il tempo rimanente,

$$s = t - \sum_{j=1}^N \tau(g^{j-1}(x)).$$

Essendo $s \in [0, 2T]$ e $g^N(x) \in B_\rho$ la condizione 1) garantisce che $\phi^t(x) \in U$ per ogni $x \in B_\rho$. Quindi $V \subset U$ da cui segue la stabilità del ciclo essendo V positivamente invariante. Inoltre $N \rightarrow +\infty$ se $t \rightarrow +\infty$, cosicché

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g^N(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} g^k(x) = 0 \quad \forall x \in B_\rho.$$

Allora, utilizzando la continuità del flusso rispetto ai dati iniziali, per ogni $x \in B_\rho$,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\phi^t(x), \gamma) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\phi^s(g^N(x)), \gamma) \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} |\phi^s(g^N(x)) - \phi^s(0)| \\ &\leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{u \in [0, 2T]} |\phi^u(g^k(x)) - \phi^u(0)| = 0, \end{aligned}$$

da cui segue il limite (6.8) con V definito come in (6.9), e dunque la asintotica stabilità del ciclo. \square

OSSERVAZIONE 6.2. Sia γ un ciclo asintoticamente stabile ed x nel bacino di attrazione di γ . Esiste quindi un tempo $t_0 \geq 0$ ed una funzione $t \mapsto z_t \in \gamma$, $t \geq t_0$ tale che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\phi^t(x) - z_t| = 0.$$

D'altra parte, se T è il periodo del ciclo, essendo $z_t = \phi^T(z_t)$,

$$|\phi^{t+T}(x) - \phi^t(x)| \leq |\phi^T(\phi^t(x)) - \phi^T(z_t)| + |z_t - \phi^t(x)|,$$

cosicché

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\phi^{t+T}(x) - \phi^t(x)| = 0.$$

Diciamo in tal caso che x possiede *periodo asintotico* T . In altri termini, le traiettorie vicine ad un ciclo asintoticamente stabile si comportano, per tempi grandi, come se avessero lo stesso periodo del ciclo.

OSSERVAZIONE 6.3. Nel caso in cui $Dg(0)$ è una contrazione lineare si può dimostrare un'ulteriore proprietà delle orbite attratte dal ciclo γ : esse vanno "in fase" con il moto di un punto su γ , ovvero

$$\forall x \in \mathcal{B}(\gamma) \exists! z \in \gamma : \lim_{t \rightarrow +\infty} |\phi^t(x) - \phi^t(z)| = 0.$$

OSSERVAZIONE 6.4. L'applicazione di Poincaré non dipende dalla scelta del punto sul ciclo e della sezione trasversale, nel senso che due applicazioni differenti sono tra loro coniugate mediante un opportuno diffeomorfismo. Siano S_1 ed S_2 due qualsiasi sezioni trasversali al campo vettoriale nei punti $x_1 \in \gamma$ ed $x_2 \in \gamma$ rispettivamente. Consideriamo le corrispondenti applicazioni di Poincaré, $g_1 : S_{1,0} \rightarrow S_1$ e $g_2 : S_{2,0} \rightarrow S_2$. Supponiamo ad esempio che $x_2 = \phi^\tau(x_1)$ per qualche $\tau \in [0, T]$, essendo T il periodo del ciclo. Fissiamo ora un intorno S di x_1 sulla sezione trasversale tale che $S \subset S_{1,0}$ ed $\tilde{S} := \phi^\tau(S) \subset S_{2,0}$. Chiaramente la mappa $h : S \rightarrow \tilde{S}$ definita da $h(x) = \phi^\tau(x)$ è un diffeomorfismo tale che $h \circ g_1 = g_2 \circ h$ (sul dominio di definizione S di h). In particolare $Dg_1(x_1) = Dh^{-1}(x_2)Dg_2(x_2)Dh(x_1)$, cosicché $\sigma(Dg_1(x_1)) = \sigma(Dg_2(x_2))$.

OSSERVAZIONE 6.5. Per stabilire se g è una contrazione può essere utile il seguente risultato, che lega lo spettro di $Dg(0)$ a quello della matrice jacobiana $D\phi^T(0)$ relativa alla soluzione periodica valutata dopo un periodo. Osserviamo preliminarmente che $v(0)$ è autovettore di autovalore 1 di tale matrice, poiché, derivando l'identità $\phi^T(\phi^s(0)) = \phi^{T+s}(0)$ rispetto al parametro s e valutando per $s = 0$ si ottiene $D\phi^T(0)v(0) = v(\phi^T(0)) = v(0)$. Fissiamo le coordinate rispetto ad una base $\{f^{(k)}\}_{k=1}^n$ di \mathbb{R}^n che abbia $f^{(1)} = v(0)$ ed i rimanenti vettori di base giacenti sull'iperpiano H . In tali coordinate è $g = (g_2, \dots, g_n)$ con $g_k(x_2, \dots, x_n) = \phi_k^{\tau(x_2, \dots, x_n)}(0, x_2, \dots, x_n)$, cosicché

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_j}(0) = \frac{\partial \phi_k^T}{\partial x_j}(0) + v_k(0) \frac{\partial \tau}{\partial x_j}(0) = \frac{\partial \phi_k^T}{\partial x_j}(0) \quad \forall k, j = 2, \dots, n,$$

dove la seconda uguaglianza segue dal fatto che $v_k(0) = f_k^{(1)} = \delta_{1,k}$. D'altra parte $D\phi^T(0)f^{(1)} = f^{(1)}$, pertanto la matrice $D\phi^T(0)$ assume la forma a blocchi,

$$D\phi^T(0) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots \\ 0 & Dg(0) \end{pmatrix},$$

da cui segue che il resto dello spettro di $D\phi^T(0)$ coincide con quello di $Dg(0)$. Dunque, se $\sigma(D\phi^T(0)) = \{1, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}\}$, la condizione $|\lambda_j| < 1 \forall j = 1, \dots, n-1$ implica l'asintotica stabilità del ciclo.

6.4. Soluzione degli esercizi

SOLUZIONE ES. 6.1. Consideriamo il caso dell'insieme ω -limite, l'altro caso è analogo. Le seconde due uguaglianze sono ovvie poiché, per la proprietà di gruppo del flusso di fase, $\phi^t(\gamma_+(x)) = \gamma_+(\phi^t(x)) = \cup_{s \geq t} \phi^s(x)$. Sia ora $y \in \omega(x)$ e $t_k \nearrow +\infty$ tale che $\phi^{t_k}(x) \rightarrow y$. Per ogni $t > 0$ la sottosuccessione $\{\phi^{t_k}(x); t_k \geq t\}$ è contenuta in $\phi^t(\gamma_+(x))$ e converge a y . Dunque $y \in \overline{\phi^t(\gamma_+(x))}$ per ogni $t \geq 0$.

Viceversa, sia $y \in \overline{\phi^t(\gamma_+(x))}$ per ogni $t \geq 0$. Comunque scelto un intero positivo $k > 0$ possiamo allora determinare un tempo $t_k > k$ tale che $|\phi^{t_k}(x) - y| < 1/k$. Dunque $y \in \omega(x)$.

SOLUZIONE ES. 6.2. Osserviamo preliminarmente che, essendo

$$A := \frac{\partial(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})}{\partial(x, y, z)}(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \sigma(A) = \{0, \pm\sqrt{3}i\},$$

non sono applicabili i criteri di stabilità riconosciuta dalla parte lineare. Consideriamo la funzione $W(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$; si ha

$$\dot{W}(x, y, z) = 2ax\dot{x} + 2by\dot{y} + 2cz\dot{z} = 2(3a - b)xy(z - 1) - 2c(x^2 + 1)z^4.$$

Se $3a = b$ allora $\dot{W}(x, y, z) = -2c(x^2 + 1)z^4$. Quindi $W(x, y, z) = a(x^2 + 3y^2) + cz^2$ con $a, c > 0$ è una funzione di Liapunov: è positiva tranne che in $(0, 0, 0)$ e $\dot{W}(x, y, z) \leq 0$. Dunque $(0, 0, 0)$ è stabile. Tale equilibrio non può essere asintoticamente stabile. Infatti il piano cartesiano di equazione $z = 0$ è un insieme invariante per la dinamica e le equazioni del moto su tale piano si riducono al sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = -3y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

che sono le equazioni di un oscillatore armonico ($\ddot{y} + 3y = 0$). In particolare tutti i moti su questo piano (eccetto la soluzione stazionaria $(0, 0)$) sono periodici. Concludiamo osservando che i moti che non si svolgono sul piano $z = 0$ sono da questo comunque attratti. In effetti,

$$\frac{d}{dt}z^2 = -2(x^2 + 1)z^4 \leq -2z^4,$$

per cui, integrando la disuguaglianza,

$$z^2(t) \leq \frac{z^2(0)}{1 + 2tz^2(0)},$$

ovvero $z^2(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$.

SOLUZIONE ES. 6.3. Essendo F non crescente lungo le soluzioni, l'insieme $F^{-1}(-\infty, x]$ è positivamente invariante, cosicché la soluzione $\phi^t(x)$ rimane confinata in un compatto e dunque si prolunga globalmente nel futuro. Ragionando come nella dimostrazione del teorema di Barbashin-Krasovskii, si verifica che la funzione F è costante lungo l'orbita $\gamma(y)$ di ciascun punto $y \in \omega(x)$. Quindi, essendo $\dot{F} = -|\nabla F|^2$, $\omega(x)$ può essere costituito unicamente da punti critici di F . D'altra parte, essendo $\gamma_+(x)$ limitata, per il Lemma 6.1 l'insieme $\omega(x)$ è non vuoto e connesso. Dunque $\omega(x) = \{z_j\}$ per qualche $j = j(x)$, cosicché, utilizzando la (6.1), $\phi^t(x) \rightarrow z_j$ per $t \rightarrow +\infty$.

Sistemi planari

Nel seguito presentiamo le proprietà principali ed alcuni esempi significativi dei sistemi planari, ovvero del tipo

$$\dot{x} = v(x), \quad (7.1)$$

dove $v \in C^r(\mathcal{D}; \mathbb{R}^2)$, $1 \leq r \leq +\infty$, e \mathcal{D} è un dominio di \mathbb{R}^2 . Quando non specificato altrimenti, supporremo sempre che il sistema sia completo, ovvero che rimane definito il relativo flusso di fase $\{\phi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ su \mathcal{D} .

7.1. Sistemi conservativi

7.1.1. Sistemi hamiltoniani. Il prototipo di sistema conservativo con un grado di libertà è fornito dal moto di un punto materiale lungo una retta sottoposto ad una forza puramente posizionale. Detta $q \in \mathbb{R}$ la coordinata del punto ed m la sua massa, l'equazione del moto si scrive $m\ddot{q} = -U'(q)$, dove $-U(q)$ è una funzione primitiva della forza.

Più in generale, un sistema meccanico conservativo con un grado di libertà è assegnato dalle equazioni di Eulero-Lagrange associate ad una lagrangiana naturale, ovvero della forma

$$\mathcal{L}(q, \xi) = \frac{1}{2} a(q) \xi^2 - U(q), \quad (q, \xi) \in I \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2,$$

dove $a, U \in C^2(I)$, $a(q) > 0 \forall q \in I$. Ogni moto $t \mapsto q(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale del sistema del secondo ordine

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi}(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t)). \quad (7.2)$$

Il sistema è conservativo poiché possiede l'integrale primo dell'energia generalizzata

$$\mathcal{H}(q, \xi) = \xi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi}(q, \xi) - \mathcal{L}(q, \xi) = \frac{1}{2} a(q) \xi^2 + U(q).$$

Il caso elementare del moto di un punto materiale si ottiene nel caso in cui $a(q) = m = \text{cost.}$ e, corrispondentemente, l'energia generalizzata si riduce all'energia meccanica totale, $\mathcal{H}(q, \xi) = \frac{1}{2} m \xi^2 + U(q)$.

Il modo più immediato di trascrivere l'Eq. (7.2) in un sistema del primo ordine consiste nell'utilizzare le coordinate posizione e velocità (q, ξ) , ottenendo

$$\begin{cases} \dot{q} = \xi, \\ \dot{\xi} = G(q, \xi), \end{cases} \quad (7.3)$$

dove la seconda equazione è la forma normale $\ddot{q} = G(q, \dot{q})$ dell'Eq. (7.2), ovvero

$$G(q, \xi) = -\frac{1}{a(q)} \left[\frac{1}{2} a'(q) \xi^2 + U'(q) \right].$$

Esiste d'altra parte una formulazione più vantaggiosa dell'Eq. (7.2). Definito il momento cinetico (o impulso generalizzato)

$$p = \frac{\partial L}{\partial \xi}(q, \xi) = a(q) \xi,$$

si osserva che la relazione inversa si scrive

$$\xi = \frac{p}{a(q)} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p),$$

avendo definito la funzione di Hamilton (o hamiltoniana)

$$H(q, p) = \mathcal{H}(q, a(q)^{-1} p) = \frac{p^2}{2a(q)} + U(q).$$

A questo punto si verifica immediatamente che $t \mapsto (q(t), \xi(t))$ è soluzione di (7.3) se e solo se, posto $p(t) = a(q(t))\xi(t)$, la legge $t \mapsto (q(t), p(t))$ è soluzione delle equazioni di Hamilton

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p), \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p). \end{cases} \quad (7.4)$$

Quanto ora esposto si generalizza al caso di sistemi lagrangiani con un numero qualsiasi di gradi di libertà e con lagrangiane non necessariamente naturali e prende il nome di formulazione canonica (o hamiltoniana) delle equazioni di Eulero-Lagrange.

Posto $x = (x_1, x_2) = (q, p)$ e $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, il sistema hamiltoniano planare (7.4) si riscrive in forma compatta

$$\dot{x} = J \nabla H(x). \quad (7.5)$$

La funzione di Hamilton è un integrale primo del moto, essendo

$$L_{J \nabla H} H(x) = J \nabla H(x) \cdot \nabla H(x) = 0$$

per l'antisimmetria della matrice J (in effetti l'hamiltoniana coincide con l'energia generalizzata $\mathcal{H}(q, \xi)$ quando espressa nelle variabili (q, p)).

7.1.2. Sistemi conservativi non hamiltoniani. Più in generale, consideriamo sistemi della forma

$$\dot{x} = Q(x)^{-1} J \nabla F(x), \quad (7.6)$$

dove F , Q sono funzioni regolari ed F è non banale, ovvero non costante in ogni sottoinsieme aperto di \mathcal{D} . Chiaramente F è un integrale primo poiché $L_{Q^{-1} J \nabla F} F(x) = 0$.

La forma (7.6) comprende la quasi totalità dei sistemi planari conservativi, intesi come sistemi che possiedono un integrale primo. Infatti, se richiediamo che il sistema (7.1) abbia F come integrale primo, allora la condizione di ortogonalità $L_\nu F(x) = \nu(x) \cdot \nabla F(x) = 0$ tra i vettori del piano $\nu(x)$ e $\nabla F(x)$ implica che laddove $\nabla F(x) \neq 0$ deve esistere uno scalare $K(x)$ tale che $\nu(x) = K(x)\nabla F(x)^\perp$, con $\nabla F(x)^\perp = J\nabla F(x)$ il vettore ottenuto ruotando $\nabla F(x)$ di un angolo retto in senso orario. Qualora $K(x)$ si estenda ad una funzione regolare e non nulla su tutto il dominio \mathcal{D} otteniamo la forma (7.6) con $Q(x) = K(x)^{-1}$. Osserviamo che tale forma implica in particolare che tutti e soli i punti singolari di ν sono i punti critici di F .

Per un generico campo planare $\nu(x)$, se $Q(x)$ è un fattore integrante della forma differenziale $\nu_2(x)dx_1 - \nu_1(x)dx_2$ allora $\nu(x) = Q(x)^{-1}J\nabla F(x)$ per qualche $F(x)$. Dalla teoria delle forme differenziali è noto che tale fattore, almeno localmente, può sempre essere determinato. Ciò che caratterizza i sistemi conservativi è la richiesta che le funzioni $Q(x)$ ed $F(x)$ in (7.6) devono essere definite globalmente sullo spazio delle fasi e soddisfare le proprietà prescritte.

Se l'integrale primo F di un sistema conservativo è noto (ovvero se si determina il fattore integrante Q), allora le equazioni del moto sono integrabili. Infatti, si può descrivere qualitativamente il ritratto di fase poiché ciascun orbita è interamente contenuta in un qualche insieme di livello di F (che, per le ipotesi su F , è unione di curve del piano). Inoltre, si può determinare la legge oraria lungo l'orbita per separazione delle variabili. Infatti, fissato il dato iniziale \bar{x} non critico per F (altrimenti la soluzione è banalmente quella stazionaria) e posto $c = F(\bar{x})$, possiamo esplicitare l'equazione $F(x_1, x_2) = c$ intorno a \bar{x} . Per fissare le idee, supponiamo ad esempio che si possa esplicitare la variabile x_2 , ovvero sia $x_2 = g(x_1)$. Possiamo cercare la soluzione locale nella forma $\phi^t(\bar{x}) = (x_1(t), g(x_1(t)))$ con $x_1(t)$ soluzione dell'equazione a variabili separabili $\dot{x}_1 = v_1(x_1, g(x_1))$.

ESEMPIO 7.1. Un esempio di sistema conservativo di origine non meccanica è fornito dal famoso *modello predatore-preda di Volterra-Lotka*. Si tratta di un sistema descrivente due specie in simbiosi, l'una, x_1 , le "prede", l'altra, x_2 , i "predatori". Le equazioni del sistema sono

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (A - Bx_2)x_1, \\ \dot{x}_2 = (Cx_1 - D)x_2, \end{cases}$$

con $A, B, C, D > 0$. Si suppone quindi che in assenza di predatori le prede crescono con legge malthusiana di tasso costante A mentre in assenza di prede i predatori muoiono con legge malthusiana di tasso costante D . Quando sono presenti entrambi, il tasso di crescita delle prede è diminuito ad ogni incontro con un predatore (per un termine $-Bx_2$), mentre quello dei predatori è aumentato ad ogni incontro con una preda (per un termine Cx_1). Visto il significato delle grandezze x_1, x_2 il dominio in cui consideriamo il sistema è ovviamente il quadrante positivo, $\mathcal{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$. Notiamo che \mathcal{R}_+ è invariante

poiché la sua frontiera è l'unione delle tre curve di fase corrispondenti alla soluzione stazionaria $(0, 0)$ ed alle due leggi malthusiane di crescita delle prede in assenza di predatori e di decrescita dei predatori in assenza di prede. All'interno della regione \mathcal{R}_+ vi è un ulteriore punto singolare, $\bar{x} = (D/C, A/B)$. Mostriamo infine che questo sistema è conservativo. In effetti,

$$\begin{pmatrix} (A - Bx_2)x_1 \\ (Cx_1 - D)x_2 \end{pmatrix} = -x_1x_2 \begin{pmatrix} -Ax_2^{-1} + B \\ -C + Dx_1^{-1} \end{pmatrix} = -x_1x_2 \begin{pmatrix} \partial_{x_2} F \\ -\partial_{x_1} F \end{pmatrix},$$

avendo definito $F(x) = Cx_1 - D \log x_1 + Bx_2 - A \log x_2$. Pertanto $Q(x) = -(x_1x_2)^{-1}$ è il fattore integrante ed $F(x)$ l'integrale primo. Notiamo che F è una funzione convessa, con \bar{x} minimo assoluto ed unico punto critico, e che F diverge a $+\infty$ sulla frontiera di \mathcal{R}_+ e per $|x| \rightarrow +\infty$. Ne segue che, eccetto il livello più basso corrispondente al punto di minimo e sede della soluzione stazionaria \bar{x} , tutti gli altri insiemi di livello sono curve chiuse e lisce, ciascuna sede di un moto periodico attorno a \bar{x} . In particolare, l'equilibrio \bar{x} è stabile (non asintoticamente), proprietà che osserviamo non avrebbe potuto essere dedotta dallo studio del linearizzato.

Osserviamo infine che espresso nelle nuove coordinate $q = \log x_2$ e $p = \log x_1$ il modello di Volterra-Lotka è un sistema hamiltoniano (fornendo peraltro un esempio di sistema hamiltoniano di origine non lagrangiana).

ESEMPIO 7.2. Consideriamo il modello epidemiologico SIRS dell'Esempio 6.2. Se modifichiamo le ipotesi assumendo che gli individui guariti ottengono l'immunità a vita, ovvero poniamo $\mu = 0$ nel sistema (6.3), otteniamo il seguente modello epidemiologico, detto modello SIR (Susceptible - Infectious - Recovered),

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta SI, \\ \dot{I} = \beta SI - \nu I, \\ \dot{R} = \nu I. \end{cases} \quad (7.7)$$

Come nel caso del modello SIRS, la numerosità totale $N = S + I + R$ è conservata nel tempo ($\dot{N} = 0$), cosicché, scrivendo $R(t) = \bar{N} - S(t) - I(t)$, l'evoluzione delle variabili $x = (x_1, x_2) = (S, I)$ rimane in questo caso governata dal sistema planare

$$\dot{x} = v(x), \quad v(x) = \begin{pmatrix} -\beta x_1 x_2 \\ \beta x_1 x_2 - \nu x_2 \end{pmatrix}. \quad (7.8)$$

Il dominio significativo per l'interpretazione del modello è ora

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^2: x_1 > 0, x_2 > 0\},$$

o anche nella sua chiusura $\overline{\mathcal{D}}$. Osserviamo infatti che, a differenza del modello SIRS, la numerosità totale \bar{N} non appare nel sistema ridotto (7.8). Chiaramente, per fissati dati iniziali $x(0) = (S(0), I(0))$, si assumerà $\bar{N} > S(0) + I(0)$ in modo che sia anche $R(0) > 0$.

In questo caso la regione \mathcal{D} è invariante, in quanto il semiasse positivo delle ascisse è costituito da un continuum di punti singolari del campo, mentre il

semiasse positivo delle ordinate (privato dell'origine) è una curva di fase corrispondente alla legge malthusiana $\dot{x}_2 = -v x_2$, che descrive una popolazione inizialmente tutta infetta (poiché $x_1 = 0$) che guarisce con tasso esponenziale.

Poiché $Dv(x_1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -\beta x_1 \\ 0 & \beta x_1 - v \end{pmatrix}$, la matrice jacobiana del campo nei punti singolari $(x_1, 0)$ ha autovalori $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = \beta x_1 - v$, che è positivo se $x_1 > \bar{S}$ e negativo se $x_1 < \bar{S}$, con $\bar{S} := \frac{v}{\beta}$.

Per descrivere la dinamica all'interno di \mathcal{D} osserviamo che il campo vettoriale si scrive nella forma $v(x) = -\beta x_1 x_2 J \nabla F(x)$ con $F(x) = x_1 + x_2 - \bar{S} \log x_1$. Pertanto il sistema (7.8) è conservativo con integrale primo del moto la funzione F . Assegnato $c \in \mathbb{R}$, l'insieme di livello $\Gamma_c = \{x \in \mathbb{R}^2 : F(x) = c\}$ coincide con il grafico della funzione $f_c(x_1) = c - x_1 + \bar{S} \log x_1$, che è una funzione concava con un massimo in $x_1 = \bar{S}$ e $f(0^+) = f(+\infty) = -\infty$. In particolare, se $f_c(\bar{S}) > 0$, il grafico di f_c interseca il semiasse positivo in due punti $x_{\pm}(c)$ con $x_-(c) < \bar{S} < x_+(c)$.

Pertanto, se $x \in \mathcal{D}$ allora la curva di fase associata è $\gamma(x) = \Gamma_c \cap \mathcal{D}$, con $c = F(x)$, pertanto un'orbita eteroclina, sede di un moto asintotico agli equilibri $(x_-(c), 0)$ (nel futuro) e $(x_+(c), 0)$ (nel passato). In particolare, se $x_1 > \bar{S}$ si osserva una fase di crescita della popolazione $x_2(t)$ degli infetti fino al valore massimo $f_c(\bar{S})$ e quindi una fase di decrescita con $x_2(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$. Se invece $x_1 \leq \bar{S}$ si ha solo la fase di decrescita della popolazione degli infetti.

ESERCIZIO 7.1. Qual'è il fattore integrante del sistema (7.3)?

ESERCIZIO 7.2. Si consideri il sistema meccanico non hamiltoniano $2\ddot{q} = -q - \dot{q}^2$. Scriverlo come sistema del primo ordine nelle coordinate posizione e velocità (q, ξ) , verificare che $F(q, \xi) = e^q(\xi^2 + q - 1)$ è un integrale primo del sistema e determinare il fattore integrante. Studiare quindi il ritratto di fase e descrivere i moti sui diversi insiemi di livello di F .

7.1.3. Invarianti integrali. La classe dei sistemi planari conservativi è strettamente legata a quella dei sistemi che possiedono un invariante integrale. Ricordiamo che un generico flusso di fase $\{\phi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ in $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto possedere un invariante integrale se esiste una funzione $\rho(x)$, positiva su tutto \mathcal{D} e localmente integrabile, tale che

$$\int_A dx \rho(x) = \int_{\phi^t(A)} dx \rho(x) \quad (7.9)$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$ ed ogni A sottoinsieme limitato e misurabile di \mathcal{D} . La funzione $\rho(x)$ è detta densità dell'invariante integrale. Sotto l'ipotesi di differenziabilità, condizione necessaria e sufficiente perché ρ sia la densità di un invariante integrale è che sia soluzione dell'equazione

$$\operatorname{div}(\rho v) = 0, \quad (7.10)$$

dove $v(x)$ è il generatore del flusso. Ricordiamo infatti che il membro di destra dell'Eq. (7.9) definisce una misura che ammette densità $\rho_t(x)$ (ovvero tale che $\int_{\phi^t(A)} dx \rho(x) = \int_A dx \rho_t(x)$ per ogni A misurabile), e tale densità è soluzione dell'equazione di continuità $\partial_t \rho_t(x) + \operatorname{div}(\rho_t v) = 0$. Pertanto l'Eq. (7.9) equivale a

richiedere che $\rho_t(x) = \rho(x)$ sia una soluzione stazionaria (cioè indipendente dal tempo) dell'equazione di continuità, ovvero che soddisfi l'Eq. (7.10).

Nel caso particolare dei sistemi planari l'Eq. (7.10) diventa

$$\frac{\partial(\rho v_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho v_2)}{\partial x_2} = 0,$$

ovvero $\rho(x)$ è un fattore integrante della forma $v_2(x)dx_1 - v_1(x)dx_2$. Pertanto, almeno localmente (e globalmente se \mathcal{D} è semplicemente connesso), esiste un integrale primo $F(x)$ tale che $v(x) = \rho(x)^{-1} J\nabla F(x)$. Viceversa, un sistema planare conservativo con fattore integrante $Q(x)$ positivo ammette anche un invariante integrale, precisamente quello di densità $\rho(x) = Q(x)$. Nel caso particolare delle equazioni di Hamilton (7.4) l'invariante integrale ha densità costante $\rho(x) = 1$, ovvero coincide con la misura d'area.

7.1.4. Punti singolari ed orbite periodiche. La presenza di un integrale primo non banale impone delle limitazioni sul carattere dei possibili punti singolari ed orbite periodiche presenti in un sistema. Una prima osservazione è che non possono esservi punti singolari asintoticamente stabili. Infatti, supponiamo per assurdo che esista un tale punto \bar{x} . Pertanto è possibile determinare una bolla $B_\delta(\bar{x})$, di raggio $\delta > 0$ e centrata in \bar{x} , tale che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi^t(x) = \bar{x} \quad \forall x \in B_\delta(\bar{x}).$$

Se ora F è l'integrale primo, dunque $F(\phi^t(x)) = F(x)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, ne segue, per continuità, che

$$F(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} F(\phi^t(x)) = F\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \phi^t(x)\right) = F(\bar{x}) \quad \forall x \in B_\delta(\bar{x}),$$

ovvero F è costante su tutto l'aperto $B_\delta(\bar{x})$, in contraddizione con la non banalità di F . Chiaramente lo stesso discorso si applica per punti singolari asintoticamente stabili per $t \rightarrow -\infty$.

Analogo ragionamento porta ad escludere in sistemi conservativi la presenza di orbite periodiche attrattive (per $t \rightarrow \pm\infty$). Nel caso dei sistemi planari, come mostriamo qui di seguito, tali orbite coincidono con quelle isolate.

Definiamo *ciclo limite* un ciclo isolato di un sistema planare. Altrimenti detto, l'applicazione di Poincaré ad esso associata possiede un punto fisso isolato. Il nome di ciclo limite deriva dal fatto che le curve di fase prossime ad un ciclo isolato sono necessariamente delle spirali che si avvolgono intorno ad esso per $t \rightarrow +\infty$ o $t \rightarrow -\infty$, come segue dalla seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 7.1. *Un ciclo γ di un sistema autonomo piano è un ciclo limite se e solo se esiste un intorno aperto V di γ tale che per ogni $x \in V$ si ha $\gamma = \omega(x)$ oppure $\gamma = \alpha(x)$.*

DIMOSTRAZIONE. Si giunge facilmente a tale conclusione utilizzando il fatto che curve di fase distinte non possono intersecarsi. Indichiamo con Γ la regione finita del piano delimitata dal ciclo γ . Si consideri una sezione trasversale locale

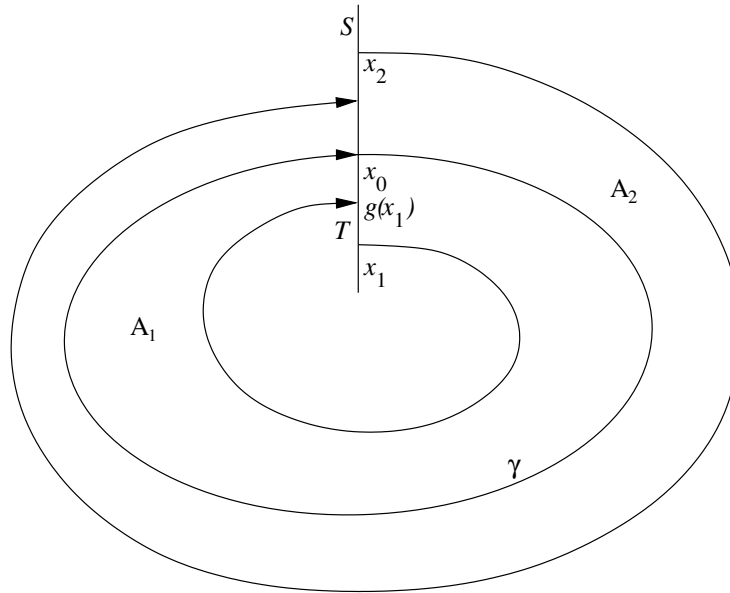


FIGURA 7.1. Ciclo limite stabile.

S del campo vettoriale in $x_0 \in \gamma$ e sia $g : S_0 \rightarrow S$ la corrispondente applicazione di Poincaré. Per le ipotesi sul ciclo possiamo assumere che x_0 è l'unico punto fisso di g . Sia ora $x_1 \in S_0 \cap \Gamma$ e si consideri il segmento T su S di estremi x_1 e $g(x_1)$. Supponiamo ad esempio che $|g(x_1) - x_0| < |x_1 - x_0|$. Allora la regione finita A_1 , delimitata dal ciclo γ , dal segmento T e dalla porzione di curva di fase $\{\phi^t(x_1) : 0 \leq t \leq \tau(x_1)\}$, è positivamente invariante. Inoltre, per ogni $y \in T$, la sequenza $\{g^k(y); k \in \mathbb{N}\}$ di punti giacente sulla porzione di S delimitata da x_0 e x_1 è monotona e deve quindi convergere necessariamente ad x_0 , essendo questo l'unico punto fisso di g . Dunque $\gamma = \omega(x)$ per ogni $x \in A_1$. Qualora fosse stato $|g(x_1) - x_0| > |x_1 - x_0|$ avremmo concluso analogamente, considerando la successione $\{g^{-k}(y); k \in \mathbb{N}\}$, che $\gamma = \alpha(x)$ per ogni $x \in A_1$. Ripetendo il ragionamento per un punto $x_2 \in S_0 \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$ determiniamo in tal modo una regione A_2 , simile ad A_1 , tale che $\gamma = \omega(x)$ (o $\gamma = \alpha(x)$) per ogni $x \in A_2$. Il teorema segue con V un intorno aperto di γ contenuto in $A_1 \cup A_2$. \square

Qualora $\gamma = \omega(x)$ per ogni $x \in V$ (come in Figura 7.1) il ciclo limite è asintoticamente stabile, in tutti gli altri casi è instabile.

7.2. Criteri di non esistenza di cicli

Dall'analisi della sezione precedente segue che se un sistema conservativo planare possiede un'orbita periodica allora deve esistere un *continuum* di tali curve che riempie completamente una porzione del piano delle fasi (si pensi al modello di Volterra-Lotka oppure ai moti periodici attorno ad una buca di potenziale per un sistema meccanico con un grado di libertà).

Nel caso di sistemi planari non conservativi, quindi non integrabili, si pone il problema di sviluppare tecniche per stabilire l'esistenza o meno di orbite periodiche. In questa sezione forniamo alcuni criteri di non esistenza.

L'esistenza di funzioni di Liapunov che decrescono strettamente lungo le soluzioni non stazionarie rappresenta ovviamente una ostruzione alla presenza di orbite periodiche. Infatti lungo tali orbite la funzione di Liapunov varierebbe periodicamente nel tempo, contraddicendo la proprietà di decrescenza. Questa è il caso dei sistemi dissipativi o del modello SIRS.

Il seguente criterio ed una sua ovvia generalizzazione sono invece una semplice applicazione del teorema della divergenza.

TEOREMA 7.2 (Criterio di Bendixson). *Sia $v \in C^r(\mathcal{D}; \mathbb{R}^2)$, $1 \leq r \leq +\infty$, e $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio semplicemente connesso. Supponiamo che $\operatorname{div} v(x)$ sia definita in segno e non identicamente nulla in nessun aperto di \mathcal{D} . Allora il sistema $\dot{x} = v(x)$ non ha orbite periodiche in \mathcal{D} .*

DIMOSTRAZIONE. Per assurdo, sia γ un'orbita periodica in \mathcal{D} ed indichiamo con Γ la regione delimitata da γ . Essendo \mathcal{D} semplicemente connesso la frontiera $\partial\Gamma$ di Γ coincide con γ e quindi, per il teorema della divergenza,

$$\int_{\Gamma} dx \operatorname{div} v = \int_{\gamma} d\sigma v \cdot \mathbf{n},$$

dove \mathbf{n} è la normale esterna a Γ lungo la frontiera. Ma il campo vettoriale v è tangente alla curva di fase γ in ogni suo punto, cosicché il flusso di v attraverso γ che appare nel membro di destra è nullo. D'altra parte l'integrale nel membro di sinistra è diverso da zero per le ipotesi fatte, da cui una contraddizione. \square

TEOREMA 7.3 (Criterio di Dulac). *Sia $v \in C^r(\mathcal{D}; \mathbb{R}^2)$, $1 \leq r \leq +\infty$, e $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio semplicemente connesso. Supponiamo che esista una funzione numerica $Q \in C^1(\mathcal{D})$ tale che $\operatorname{div}(Qv)(x)$ sia definita in segno e non identicamente nulla in nessun aperto di \mathcal{D} . Allora il sistema $\dot{x} = v(x)$ non ha orbite periodiche in \mathcal{D} .*

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente ripetere il ragionamento precedente con il campo $Q(x)v(x)$ al posto di $v(x)$, poiché anch'esso è tangente alla curva di fase γ in ogni suo punto. \square

ESERCIZIO 7.3. Utilizzando il risultato dell'Esercizio 7.1 ed il Criterio di Dulac, trovare condizioni sufficienti sulla forza generalizzata $\Phi(q, \xi)$ nell'equazione

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \xi}(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t)) + \Phi(q(t), \dot{q}(t)). \quad (7.11)$$

per l'assenza di orbite periodiche. Le forze dissipative, ovvero tali che si abbia $\Phi(q, \xi)\xi < 0 \forall \xi \neq 0$, soddisfano tali condizioni?

7.3. Sistemi auto-oscillanti

Due classi importanti di sistemi non conservativi non lineari sono i sistemi *dissipativi* e i sistemi *auto-oscillanti*. Abbiamo già incontrato esempi di sistemi dissipativi e, più in generale, di sistemi che presentano un comportamento asintotico stazionario (ad esempio il modello SIRS). La seconda classe corrisponde invece a sistemi che presentano un ciclo limite attrattivo (globalmente o comunque con un bacino di attrazione ampio), cosicché il comportamento asintotico è oscillatorio con un periodo che *non dipende* dalle condizioni iniziali. In questa sezione studiamo due esempi di sistemi auto-oscillanti, un modello biologico (l'equazione logistica con raccolta periodica) e l'oscillatore di Van der Pol, originariamente introdotto per descrivere un particolare circuito elettrico auto-oscillante.

Il modello biologico è in realtà un sistema unidimensionale non autonomo, con dipendenza periodica dal tempo, che può essere però riformulato come sistema planare autonomo. A tal scopo, premettiamo una sezione in cui discutiamo in generale (non solo per sistemi bidimensionali) il caso di campi vettoriali dipendenti periodicamente dal tempo.

7.3.1. Il caso periodico. Supponiamo che il membro di destra dell'Eq. (3.3) sia una funzione $v \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$ dipendente periodicamente dal tempo, ovvero esiste $T > 0$ tale che $v(t + T, x) = v(t, x)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Supponiamo inoltre che v generi almeno un processo irreversibile, dunque $[t_0, +\infty) \subset J_{t_0, x}$ per ogni $(t_0, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{D}$.

La peculiarità di questo caso è che le curve integrali rimangono tali se vengono traslate di multipli del periodo T , precisamente sussiste l'identità

$$\phi^{t+T, t_0+T} = \phi^{t, t_0} \quad \text{per ogni } \begin{cases} t \geq t_0 & \text{se } J_{t_0, x} \supset [t_0, +\infty), \\ t_0, t \in \mathbb{R} & \text{se } J_{t_0, x} = \mathbb{R}. \end{cases}$$

Infatti, posto $\psi(t) = \phi^{t+T, t_0+T}(x)$,

$$\dot{\psi}(t) = v(t+T, \psi(t)) = v(t, \psi(t)), \quad \psi(t_0) = x,$$

da cui $\psi(t) = \phi^{t, t_0}(x)$.

Combinando questa proprietà di invarianza con quella di gruppo si ha

$$\phi^{t+T, t_0} = \phi^{t+T, t_0+T} \circ \phi^{t_0+T, t_0} = \phi^{t, t_0} \circ \phi^{t_0+T, t_0}. \quad (7.12)$$

Dunque il moto di dati iniziali (t_0, x) al tempo $t + T$ coincide con il moto di dati iniziali $(t_0, \phi^{t_0+T, t_0}(x))$ al tempo t . Geometricamente significa che possiamo identificare i punti dello spazio delle fasi ampliato $\Omega = \mathbb{R} \times \mathcal{D}$ che differiscono per multipli di T in tempo.

Fissiamo da ora in poi $t_0 = 0$ (non è limitativo, poiché possiamo sempre ridurre a questo caso considerando il nuovo campo vettoriale $\bar{v}(t, x) = v(t_0 + t, x)$). Definiamo *mappa stroboscopica* o *applicazione di Poincaré* associata al sistema la funzione

$$g \in C^\infty(\mathcal{D}; \mathcal{D}) : g(x) := \phi^{T, 0}(x).$$

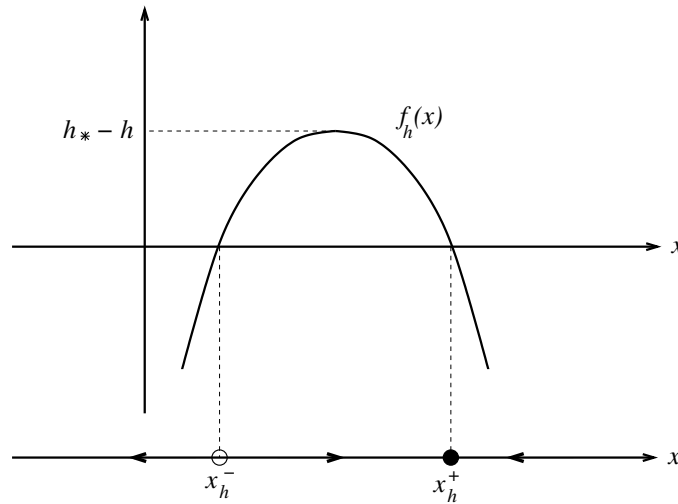


FIGURA 7.2. Diagramma di fase dell'equazione logistica con raccolta $h < h_*$.

Dalla proprietà (7.12) otteniamo $\phi^{nT+s,0} = \phi^{nT+s,nT} \circ \phi^{nT,0} = \phi^{s,0} \circ \phi^{nT,0}$. In particolare, per $s = T$ si ha $\phi^{(n+1)T,0} = g \circ \phi^{nT,0}$, da cui $\phi^{nT,0} = g^n$ per induzione. In definitiva,

$$\phi^{nT+s,0} = \phi^{s,0} \circ g^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall s \geq 0, \quad (7.13)$$

che si estende anche a valori negativi, ovvero per ogni $s \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}$, nel caso reversibile (in cui esiste l'inversa g^{-1}). Quindi la dinamica rimane determinata dalla conoscenza dell'evoluzione nel singolo intervallo $[0, T]$.

7.3.2. L'equazione logistica con raccolta periodica. Consideriamo l'equazione logistica con raccolta introdotta nell'Esercizio 3.1,

$$\dot{x} = f_h(x) := a \left(1 - \frac{x}{k}\right) x - h, \quad x \in (0, +\infty), \quad (7.14)$$

con a, k parametri positivi, al variare del tasso di raccolta $h > 0$. Il grafico di $f_h(x)$ è una parabola con concavità rivolta verso il basso. In particolare, posto $h_* = ak/4$, si ha che

- (i) se $h \in (0, h_*)$ la funzione $f_h(x)$ si annulla nei punti $x_h^\pm = \frac{k}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{h}{h_*}}\right)$ ed è negativa per $x \notin [x_h^-, x_h^+]$ e positiva per $x \in (x_h^-, x_h^+)$;
- (ii) se $h = h_*$ la funzione $f_h(x)$ si annulla in $x_* = \frac{k}{2}$ ed è negativa per $x \neq x_*$;
- (iii) se $h > h_*$ la funzione $f_h(x)$ è sempre negativa.

Il diagramma di fase nel caso (i) è illustrato in Figura 7.2. Rispetto al caso $h = 0$, è ora possibile l'estinzione della popolazione in tempo finito: esistono valori di x per i quali $\phi^t(x)$ è una soluzione monotona decrescente tale che al tempo $\tau_x = \int_0^x dy |f_h(y)|^{-1}$ si ha $\phi^{\tau_x}(x) = 0$. Precisamente, questo avviene se $x \in (0, x_h^-)$ nel caso (i), se $x < x_*$ nel caso (ii), per ogni $x > 0$ nel caso (iii). Da un punto di vista puramente analitico, $\phi^t(x)$ si prolunga oltre τ_x fino al tempo

$t_x = \int_{-\infty}^x dy |f_h(y)|^{-1}$, con $\phi^t(x) \rightarrow -\infty$ per $t \rightarrow t_x$. D'altra parte, $\phi^t(x)$ assume valori negativi per $t \in (\tau_x, t_x)$, incompatibile con l'interpretazione della variabile come numerosità della popolazione, cosicché la soluzione è significativa solo fino al tempo t_x .

Osserviamo infine che attraversando il valore critico $h = h_*$ il diagramma di fase si modifica in modo drastico (due punti singolari si fondono e quindi spariscono). Esso fornisce un semplice esempio di un fenomeno generale nella teoria dei sistemi dinamici, detto *biforcazione locale*.¹

Supponiamo ora che la raccolta non sia costante ma avvenga con cadenza periodica. Un semplice modello che descrive questa situazione è ottenuto con l'equazione non autonoma

$$\dot{x} = v_h(t, x) := a \left(1 - \frac{x}{k}\right) x - \frac{h}{2} (1 + \sin t), \quad x \in (0, +\infty), \quad (7.15)$$

dunque $t \mapsto v_h(t, x)$ campo 2π -periodico. Come discusso nella sezione precedente tale sistema è equivalente al sistema autonomo

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 1, \\ \dot{x} = a \left(1 - \frac{x}{k}\right) x - \frac{h}{2} (1 + \sin \theta), \end{cases}$$

definito sul cilindro $C := \{(x, \theta) : x \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})\}$. Precisamente, la soluzione $(x(t), \theta(t))$ di dati iniziali $(\theta(0), x(0)) = (t_0, x)$ è data da $(t_0 + t, \phi_h^{t, t_0}(x))$, con $\phi_h^{t, t_0}(x)$ soluzione dell'Eq. (7.15). Chiaramente siamo interessati alle soluzioni con $x > 0$, dunque nel semi-cilindro positivo $C_+ = \{(x, \theta) \in C : x > 0\}$.

Vogliamo dimostrare che se h è sufficientemente piccolo esistono due cicli isolati che avvolgono il semi-cilindro positivo C_+ , di cui uno stabile ed uno instabile, a cui corrispondono quindi due soluzioni 2π -periodiche dell'Eq. (7.15) (una che attrae nel futuro ed una che attrae nel passato i moti vicini).

A tal scopo cerchiamo i punti fissi della mappa stroboscopica associata $g_h := \phi_h^{2\pi, 0}$. Occorre però prestare attenzione al fatto che in questo caso tale mappa non è definita su tutta la sezione $S = \{(0, x) : x \in \mathbb{R}\} \subset C$ in quanto $\phi^{t, 0}$ non è un semiflusso: in generale, la soluzione $\phi^{t, 0}(x)$ può divergere ad un tempo $t \leq 2\pi$. Per stimare il dominio di g_h osserviamo che, essendo $f_h(x) \leq v_h(t, x) \leq f_0(x)$ con f_h come in Eq. (7.14), le medesime disuguaglianze hanno luogo tra le corrispondenti soluzioni con uguale posizione iniziale. Dallo studio dell'equazione autonoma (7.14) deduciamo allora che la mappa g_h è sicuramente definita sull'insieme

$$S_h := \{(0, x) : x > z_h\},$$

dove z_h è il dato iniziale per il quale la soluzione dell'Eq. (7.14) diverge a $-\infty$ esattamente al tempo $t = 2\pi$. Pertanto:

¹Per un'introduzione su questo argomento si possono consultare le Sezioni 2.2 e 2.3 nell'*Introduzione ai Sistemi Dinamici, Scuola Galileiana*, note redatte dal Prof. Giancarlo Benettin e reperibili al sito <https://www.math.unipd.it/~benettin/Galileiana/dispense.pdf>.

(i) se $h \in [0, h_*)$ allora $z_h < x_h^-$ ed è determinato dalla condizione

$$2\pi = \int_{-\infty}^{z_h} dy \frac{1}{|f_h(y)|} = \frac{k}{a} \int_{-\infty}^{z_h} dy \frac{1}{(x_h^+ - y)(x_h^- - y)} = \frac{k}{a(x_h^+ - x_h^-)} \log \frac{x_h^+ - z_h}{x_h^- - z_h},$$

da cui, posto $\delta_h = \sqrt{1 - \frac{h}{h_*}}$ ed essendo quindi $x_h^\pm = \frac{k}{2}(1 \pm \delta_h)$

$$z_h = \frac{k}{2} \frac{e^{2\pi a \delta_h} (1 - \delta_h) - 1 - \delta_h}{e^{2\pi a \delta_h} - 1}$$

(in particolare $z_0 = -k/(e^{2\pi a} - 1) < 0$);

(ii) se $h = h_*$ allora $z_h < x_* = \frac{k}{2}$ ed è determinato dalla condizione

$$2\pi = \int_{-\infty}^{z_h} dy \frac{1}{|f_h(y)|} = \frac{k}{a} \int_{-\infty}^{z_h} dy \frac{1}{(x_* - y)^2} = \frac{k}{a} \frac{1}{x_* - z_h},$$

da cui

$$z_h = \frac{k}{2} - \frac{k}{2\pi a};$$

(iii) se $h > h_*$ allora z_h è determinato dalla condizione

$$\begin{aligned} 2\pi &= \int_{-\infty}^{z_h} dy \frac{1}{|f_h(y)|} = \int_{-\infty}^{z_h} dy \frac{1}{\frac{a}{k}(y - x_*)^2 + (h - h_*)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{ak(h - h_*)}} \left[\arctan \left(\frac{a(z_h - x_*)}{k(h - h_*)} \right) + \frac{\pi}{2} \right], \end{aligned}$$

che ammette soluzione, e precisamente

$$z_h = x_* + \frac{k(h - h_*)}{a} \tan \left(2\pi \sqrt{ak(h - h_*)} - \frac{\pi}{2} \right),$$

solo se

$$0 < 2\pi \sqrt{ak(h - h_*)} < \pi,$$

ovvero se $h < h_* + \frac{1}{4ak}$.

Assumiamo da ora in poi $0 \leq h < h_* + \frac{1}{4ak}$, cosicché la mappa stroboscopica $g_h: S_h \rightarrow S$ è ben definita sull'insieme (non vuoto) S_h . Dimostriamo che per h sufficientemente piccolo tale mappa possiede due punti fissi $0 < q_h^- < q_h^+$, dei quali q_h^- instabile e q_h^+ asintoticamente stabile. Chiaramente le orbite $\gamma(q_h^\pm) := \{(t, \phi^{t,0}(q_h^\pm)) : t \in [0, 2\pi]\}$ sono cicli limite 2π -periodici dell'Eq. (7.15), di cui uno stabile ed uno instabile.

Consideriamo dapprima il caso $h = 0$, ovvero l'equazione logistica senza raccolta studiata in Sezione 3.1. Dalla soluzione esplicita si ricava immediatamente che la mappa g_0 possiede i due punti fissi $q_0^- = 0$ e $q_0^+ = k$ (corrispondenti alle soluzioni stazionarie dell'equazione logistica), con $g_0(x) > x$ in $(0, k)$ e $g_0(x) < x$ se $x \notin [0, k]$, vedi Figura 7.3. In particolare $q_0^- = 0$ è instabile e $q_0^+ = k$ asintoticamente stabile.

²Altrimenti detto, se $h \geq h_* + \frac{1}{4ak}$ la stima $v_h(t, x) \geq f_h(x)$ non ci permette di dedurre l'esistenza di un dominio non vuoto per la mappa stroboscopica.

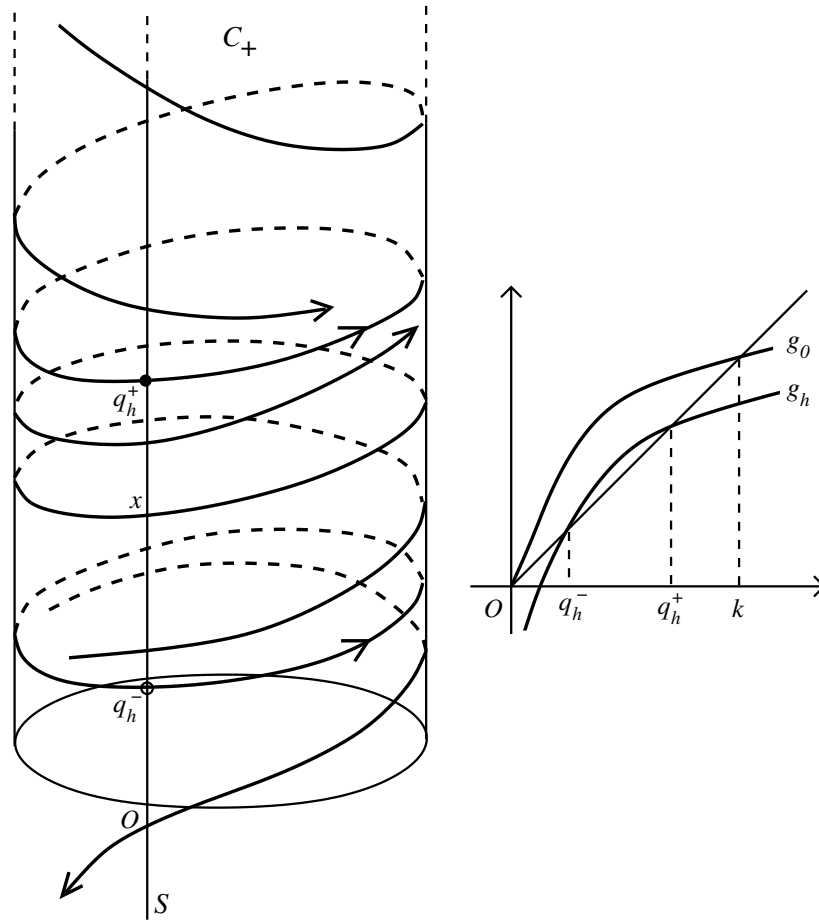


FIGURA 7.3. Cicli limite per l'equazione logistica con raccolta periodica con $h \in (0, h_c)$. L'orbita per $x \in (q_h^-, q_h^+)$ è eteroclina ai due cicli.

Studiamo ora la mappa stroboscopica per $h > 0$. Per l'equazione alle variazioni si ha

$$\frac{\partial \phi_h^{t,0}}{\partial x}(x) = \exp \int_0^t ds \frac{\partial v_h}{\partial x}(s, \phi_h^{s,0}(x)) > 0,$$

da cui, in particolare,

$$g'_h(x) = \exp \int_0^{2\pi} ds \frac{\partial v_h}{\partial x}(s, \phi_h^{s,0}(x)) > 0.$$

Derivando ulteriormente e notando che $\frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2}(t, x) = -\frac{2a}{k}$ si ha inoltre

$$g''_h(x) = g'_h(x) \int_0^{2\pi} ds \frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2}(s, \phi_h^{s,0}(x)) \frac{\partial \phi_h^{s,0}}{\partial x}(x) = -\frac{2a}{k} g'_h(x) \int_0^{2\pi} ds \frac{\partial \phi_h^{s,0}}{\partial x}(x) < 0.$$

Pertanto la funzione $x \mapsto g_h(x)$ è concava crescente. Inoltre, essendo $\frac{\partial v_h}{\partial h} = -\frac{1}{2}(1 + \sin t) \leq 0$, la funzione $h \mapsto g_h(x)$ è monotona decrescente. Ne segue che g_h possiede al più due punti fissi, $0 < q_h^- < q_h^+ < k$, dei quali q_h^- instabile e q_h^+ asintoticamente stabile. Inoltre, per h piccolo tali punti esistono per ragioni di continuità (visto che esistono per $h = 0$), vedi Figura 7.3. I cicli associati $\gamma(q_h^\pm)$ giacciono interamente nel semi-cilindro positivo C_+ poiché, essendo $v_h(t, x) < 0$ per ogni $x < 0$ e $t \in \mathbb{R}$, il semi-cilindro negativo $C_- = \{(\theta, x) : x \leq 0\}$ è positivamente invariante (e quindi non può contenere solo una parte di un ciclo).

Aumentando il valore di h i punti fissi si avvicinano tra loro ed esiste un valore critico h_c in cui coincidono, dando luogo ad un unico ciclo semi-stabile. Se invece $h > h_c$ si ha estinzione in tempo finito della popolazione per qualsiasi dato iniziale.

7.3.3. L'equazione di Van der Pol. Dimostriamo l'esistenza di un ciclo limite stabile per l'equazione di Van der Pol,

$$\ddot{q} = -q + \varepsilon(1 - q^2)\dot{q}, \quad \varepsilon > 0, \quad (7.16)$$

considerata come *perturbazione* ($\varepsilon \ll 1$) di un sistema hamiltoniano (l'oscillatore armonico). Riscriviamo l'equazione come sistema planare del primo ordine,

$$\dot{x} = v(x), \quad v(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 \end{pmatrix}. \quad (7.17)$$

Il sistema possiede l'unico punto singolare $x = (0, 0)$ che è instabile, poiché

$$Dv(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

ha autovalori $\lambda_\pm = \frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} - 1}$, la cui parte reale è sempre positiva (precisamente l'origine è un fuoco instabile per $\varepsilon < 2$ ed un nodo instabile per $\varepsilon > 2$). Posto $H(x) = \frac{1}{2}|x|^2$, (pari all'energia meccanica dell'oscillatore armonico), la sua derivata direzionale lungo il campo vettoriale definito dall'Eq. (7.17) è $L_v H(x) = \varepsilon(1 - x_1^2)x_2^2$. Quindi la perturbazione $\varepsilon(1 - x_1^2)x_2$ è un termine dissipativo (un attrito non lineare) solo se $|x_1| > 1$. Viceversa, se $|x_1| < 1$, esso fornisce energia al sistema.

Per studiare il sistema nell'insieme invariante $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ conviene utilizzare come coordinate la coppia (E, θ) , dove $E = H(x)$ e θ è l'angolo tra x ed il semiasse positivo,

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{2E} \cos \theta, \\ x_2 = \sqrt{2E} \sin \theta, \end{cases}$$

nelle quali il sistema assume la forma seguente,

$$\begin{cases} \dot{E} = \varepsilon F(E, \theta), \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon G(E, \theta), \end{cases} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} F(E, \theta) = 2E \sin^2 \theta (1 - 2E \cos^2 \theta), \\ G(E, \theta) = \sin \theta \cos \theta (1 - 2E \cos^2 \theta). \end{cases} \quad (7.18)$$

Se $\varepsilon = 0$ la variabile energia E è una costante del moto, mentre la variabile angolare θ compie un moto uniforme con velocità angolare $\omega = -1$: tutte le circonferenze sono orbite periodiche di uguale periodo $T_0 = 2\pi$. Se $\varepsilon > 0$ ma piccolo, la variabile E non è più costante lungo il moto, ma varia lentamente nel tempo (essendo $\dot{E} \sim \varepsilon$), mentre la variabile angolare varia molto più rapidamente ($\dot{\theta} \sim -1$). Sfrutteremo questo fatto per costruire una mappa di primo ritorno su una sezione trasversale, mostrando che essa ammette un punto fisso asintoticamente stabile, da cui l'esistenza di un ciclo limite.

Premettiamo un ragionamento euristico, fondato su un principio generale della teoria delle perturbazioni in presenza di variabili lente e veloci, che permette di indovinare quale sia qualitativamente il moto della variabile lenta E . L'idea è che tale moto sia approssimativamente descritto da un'equazione chiusa, detta *equazione mediata*, che si ottiene sostituendo il membro di destra dell'equazione vera $\dot{E} = \varepsilon F(E, \theta)$ con la sua media rispetto alla variabile angolare veloce, dunque

$$\dot{E} = \varepsilon \bar{F}(E), \quad \bar{F}(E) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta F(E, \theta) = E \left(1 - \frac{E}{2}\right).$$

L'equazione mediata prevede quindi due punti di equilibrio, uno instabile in $E = 0$ ed uno asintoticamente stabile in $E_* = 2$. Lo studio dell'equazione mediata suggerisce pertanto l'esistenza, per ε piccolo, di un ciclo limite asintoticamente stabile prossimo alla circonferenza di raggio $\sqrt{2E_*} = 2$.

Per comprendere meglio l'origine dell'equazione mediata, si osservi che, poiché E varia su tempi di ordine ε^{-1} , possiamo confondere la sua derivata con il rapporto incrementale calcolato su intervalli di tempo di ordine $1 \ll \Delta t \ll \varepsilon^{-1}$, ad esempio $\Delta t \simeq \varepsilon^{-\delta}$ con $\delta \in (0, 1)$. Ma per tempi s appartenenti ad un siffatto intervallo $[t, t + \Delta t]$ si ha $\theta(s) = \theta(t) + t - s + O(\varepsilon \Delta t)$ e $E(s) = E(t) + O(\varepsilon \Delta t)$, per cui

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &\simeq \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\varepsilon}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} ds [F(E(t), \theta(t) + t - s) + O(\varepsilon \Delta t)] \\ &= \frac{\varepsilon}{\Delta t} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha F(E(t), \alpha) + O(\varepsilon^2 \Delta t) \\ &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha F(E(t), \alpha) + O\left(\frac{\varepsilon}{\Delta t}\right) + O(\varepsilon^2 \Delta t) \\ &= \varepsilon \bar{F}(E(t)) + O\left(\frac{\varepsilon}{\Delta t}\right) + O(\varepsilon^2 \Delta t), \end{aligned}$$

dove $\alpha = s - t - \theta(t)$, $\alpha_1 = -\theta(t)$, $\alpha_2 = -\theta(t) + \Delta t$. Nella seconda uguaglianza si è sfruttato che $F(E, \theta)$ è una funzione pari di θ e, nell'ultima uguaglianza, che l'integrale sull'intervallo $[\alpha_1, \alpha_2]$ si scrive, a meno di un errore $O\left(\frac{1}{\Delta t}\right)$, come $\Delta t/2\pi$ volte l'integrale su un singolo periodo della funzione 2π -periodica $\alpha \mapsto F(E(t), \alpha)$.

Dimostriamo ora l'esistenza del ciclo limite. Sia $t \mapsto (E(t), \theta(t)) = \phi^t(E_0, \theta_0)$ la soluzione dell'Eq. (7.18) di dati iniziali (E_0, θ_0) . Osserviamo innanzitutto che $\dot{E}(t) \leq 2\varepsilon E(t)$ e quindi $E(t) \leq E_0 e^{2\varepsilon t}$. Questo garantisce che tutte le soluzioni

sono globali. Notiamo inoltre che sussiste la stima $|\dot{\theta}(t)+1| \leq \varepsilon(1+2E(t))$. Fissato $R > 2$, assumiamo allora $\varepsilon \in (0, \varepsilon_R]$ con ε_R tale che

$$e^{6\pi\varepsilon_R} < 2, \quad \varepsilon_R(1+4R) < \frac{1}{4},$$

cosicch 

$$E(t) \leq 2R, \quad |\dot{\theta}(t)+1| \leq \frac{1}{4} \quad \forall t \in [0, 3\pi] \quad \forall E_0 \in (0, R) \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_R].$$

In particolare $t \mapsto \theta(t)$   monotona per $t \in [0, 3\pi]$ e $\theta_0 - \frac{15}{4}\pi \leq \theta(3\pi) \leq \theta_0 - \frac{9}{4}\pi$. Ne segue che

$$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_R] \quad \forall (E_0, \theta_0) \in (0, R) \times \mathbb{R} \quad \exists! T_\varepsilon = T_\varepsilon(E_0, \theta_0) \in (0, 3\pi): \theta(T_\varepsilon) = \theta_0 - 2\pi.$$

Quindi, se $\varepsilon \in (0, \varepsilon_R]$, ogni segmento $S_\alpha \doteq \{(E, \alpha) : r \in (0, R)\}$, $\alpha \in [0, 2\pi)$,   una sezione trasversale al campo vettoriale sulla quale   definita la mappa del primo ritorno di Poincar . Per fissare le idee scegliamo $\alpha = 0$, cosicch  tale mappa  

$$g_\varepsilon : (0, R) \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad : \quad g_\varepsilon(E) = E + \int_0^{T_\varepsilon} ds \varepsilon F(E(s), \theta(s)),$$

essendo ora $(E(t), \theta(t)) = \phi^t(E, 0)$ e $T_\varepsilon = T_\varepsilon(E, 0)$. Per dimostrare l'esistenza di un punto fisso isolato di g_ε per ε piccolo utilizziamo il teorema della funzione implicita. A tal scopo occorre calcolare lo sviluppo al primo ordine in ε di g_ε con un controllo del resto (e della sua derivata rispetto ad E).

Dalle equazioni del moto e dalle stime precedenti si ha

$$\begin{aligned} |E(t) - E| &\leq \int_0^t ds \varepsilon |F(E(s), \theta(s))| \leq \varepsilon t 2E e^{2\varepsilon t} (1 + 2E e^{2\varepsilon t}), \\ |\theta(t) + t| &\leq \int_0^t ds \varepsilon |G(E(s), \theta(s))| \leq \varepsilon t (1 + 2E e^{2\varepsilon t}). \end{aligned}$$

Quindi, essendo $T_\varepsilon \leq 3\pi$, esiste una costante positiva $C_0 = C_0(R)$ tale che, per ogni $\varepsilon \in (0, \varepsilon_R]$,

$$\sup_{s \in [0, T_\varepsilon]} |E(s) - E| \leq C_0 \varepsilon, \quad \sup_{s \in [0, T_\varepsilon]} |\theta(s) + s| \leq C_0 \varepsilon, \quad |T_\varepsilon - 2\pi| \leq C_0 \varepsilon \quad (7.19)$$

(l'ultima disuguaglianza segue dalla seconda poich  $\theta(T_\varepsilon) = -2\pi$). Essendo

$$\int_0^{2\pi} ds F(E, -s) = \int_0^{2\pi} ds 2E \sin^2 s (1 - 2E \cos^2 s) = 2\pi E \left(1 - \frac{E}{2}\right),$$

possiamo riscrivere,

$$\int_0^{T_\varepsilon} ds F(E(s), \theta(s)) = 2\pi E \left(1 - \frac{E}{2}\right) + \varepsilon h(E, \varepsilon),$$

con

$$h(E, \varepsilon) \doteq \int_{2\pi}^{T_\varepsilon} ds \varepsilon^{-1} F(E, -s) + \int_0^{T_\varepsilon} ds \varepsilon^{-1} [F(E(s), \theta(s)) - F(E, -s)].$$

Dalle stime (7.19) e la regolarit  di F possiamo determinare una costante positiva $C_1 = C_1(R)$ tale che

$$\sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_R]} \sup_{E \in (0, R)} |h(E, \varepsilon)| \leq C_1. \quad (7.20)$$

Un'analisi più delicata permette di stimare anche la derivata di h rispetto ad E , mostrando che esiste una costante positiva $C_2 = C_2(R)$ tale che

$$\sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_R]} \sup_{E \in (0, R)} \left| \frac{\partial h}{\partial E}(E, \varepsilon) \right| \leq C_2. \quad (7.21)$$

(per la dimostrazione rimandiamo il lettore interessato al termine di questa sottosezione). Quindi

$$g_\varepsilon(E) = E + 2\pi\varepsilon E \left(1 - \frac{E}{2}\right) + \varepsilon^2 h(E, \varepsilon),$$

con $h(E, \varepsilon)$ soddisfacente le stime (7.20) ed (7.21). L'equazione di punto fisso $g_\varepsilon(E) = E$ diventa perciò $\varepsilon K(E, \varepsilon) = 0$ con

$$K(E, \varepsilon) = 2\pi E \left(1 - \frac{E}{2}\right) + \varepsilon h(E, \varepsilon).$$

Ovviamente se $\varepsilon = 0$ tutti i valori di E sono soluzione e corrispondono agli infiniti cicli dell'oscillatore armonico. Se $\varepsilon > 0$ occorre risolvere l'equazione $K(E, \varepsilon) = 0$. L'unica soluzione positiva di $K(E, 0) = 0$ è $E = 2$. Se $\varepsilon \neq 0$ possiamo utilizzare il teorema della funzione implicita. Infatti,

$$\frac{\partial K}{\partial E}(E, \varepsilon) = 2\pi(1 - E) + \varepsilon \frac{\partial h}{\partial E}(E, \varepsilon) \implies \frac{\partial K}{\partial E}(2, 0) = -2\pi \neq 0,$$

per cui esiste un intorno $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ ed un'unica funzione continua $\varepsilon \mapsto \bar{E}(\varepsilon)$, $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, tale che $K(\bar{E}(\varepsilon), \varepsilon) = 0$ e $\bar{E}(0) = 2$. Fissato $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ esiste quindi un punto fisso isolato della mappa di Poincaré, $g_\varepsilon(\bar{E}(\varepsilon)) = \bar{E}(\varepsilon)$, che corrisponde ad un ciclo limite γ_ε per il sistema (7.18) vicino alla circonferenza di raggio $\sqrt{2\bar{E}(0)} = 2$.

Mostriamo infine che γ_ε è asintoticamente stabile per ε piccolo. Questo è equivalente a dimostrare che $\bar{E}(\varepsilon)$ è un punto fisso attrattivo per la dinamica discreta definita dalla relazione ricorsiva $E_k = g_\varepsilon(E_{k-1})$. Poiché

$$g'_\varepsilon(E) = 1 + 2\pi\varepsilon(1 - E) + \varepsilon^2 \frac{\partial h}{\partial E}(E, \varepsilon).$$

si ha $g'_\varepsilon(2) = 1 - 2\pi\varepsilon + O(\varepsilon^2) < 1$ per $\varepsilon > 0$ piccolo. Essendo $\bar{E}(\varepsilon)$ continua ed $\bar{E}(0) = 2$, segue che per ε piccolo è anche $g'_\varepsilon(\bar{E}(\varepsilon)) < 1$. Dunque la dinamica discreta è una contrazione locale attorno al punto fisso. Il diagramma di Lameray associato a questa dinamica è riportato in Figura 7.4.

ESERCIZIO 7.4. Si consideri l'equazione nel caso $\varepsilon < 0$, verificando che in tal caso l'equilibrio $(0, 0)$ è attrattivo e che esiste, per $|\varepsilon|$ piccolo, un ciclo limite instabile prossimo alla circonferenza di raggio $r = 2$.

In effetti si può dimostrare con metodi non perturbativi che per ogni $\varepsilon > 0$ l'equazione di van der Pol possiede un unico ciclo limite che attrae tutte le traiettorie di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, come mostrato in Sezione 7.5.

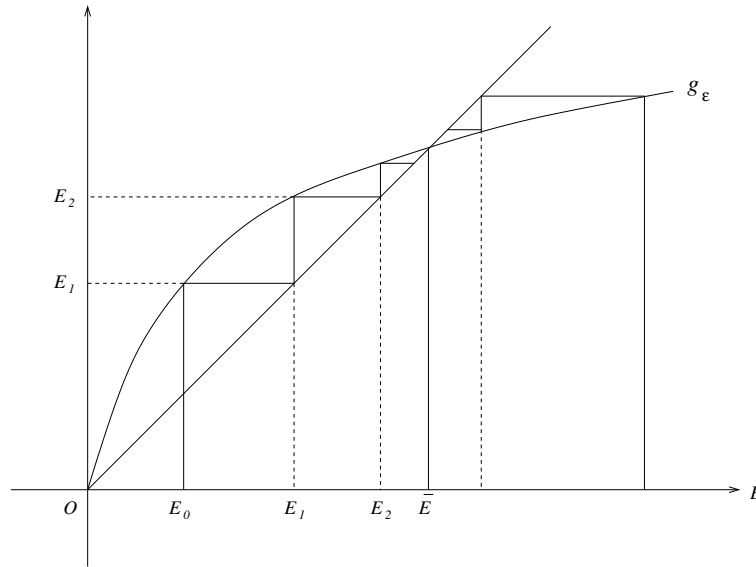


FIGURA 7.4. Diagramma di Lameray della dinamica discreta $E_k = g_\varepsilon(E_{k-1})$, da cui si deduce che il punto fisso $\bar{E} = 2 + O(\varepsilon)$ è attrattivo.

Osserviamo infine che un'opportuna variante dell'equazione di van der Pol fornisce un esempio dell'importante fenomeno di biforcazione noto come *biforcazione di Hopf*. Si consideri il sistema

$$\ddot{q} = -q + (\varepsilon - q^2)\dot{q}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R},$$

ovvero

$$\dot{x} = v(x), \quad v(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + (\varepsilon - x_1^2)x_2 \end{pmatrix}. \quad (7.22)$$

Si verifica immediatamente che l'unica posizione di equilibrio $x = (0, 0)$ è un pozzo per $\varepsilon < 0$ ed una sorgente per $\varepsilon > 0$; più precisamente, entrambi gli autovalori di $Dv(0, 0)$ attraversano l'asse immaginario quando ε cambia segno.

Se $\varepsilon < 0$ la forza generalizzata è una dissipazione poiché $L_v H(x) = -(|\varepsilon| + x_1^2)x_2^2$. Applicando il teorema di Barbashin-Krasovskii (Teorema 6.8) con intorno compatto $\mathcal{D} = \bar{B}_r(0)$, $r > 0$ arbitrario, si deduce che questo caso $\omega(x) = \{(0, 0)\}$ per ogni dato iniziale $x \in \mathbb{R}^2$.

Se invece $\varepsilon > 0$ notiamo che, riscrivendo l'Eq. (7.22) nelle coordinate $y = \varepsilon^{-1/2}x$, riotteniamo l'equazione di Van der Pol,

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 + \varepsilon(1 - y_1^2)y_2 \end{pmatrix}.$$

In virtù di quanto dimostrato in precedenza ne segue che per ogni $\varepsilon > 0$ piccolo il sistema (7.22) possiede un ciclo limite attrattivo vicino alla circonferenza di raggio $2\sqrt{\varepsilon}$. Altrimenti detto, quando il parametro ε attraversa il valore critico

$\varepsilon = 0$ l'equilibrio $x = (0, 0)$ biforca da pozzo a sorgente ed un ciclo limite stabile "emerge" dall'equilibrio. Questo tipo di biforcazione è detta biforcazione di Hopf (diretta).³

Dimostrazione dell'eq. (7.21). La funzione

$$X(t) \doteq \begin{pmatrix} \frac{\partial E(t)}{\partial E} \\ \frac{\partial \theta(t)}{\partial E} \end{pmatrix}$$

risolve l'equazione alle variazioni,

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t ds \varepsilon \frac{\partial(F, G)}{\partial(E, \theta)}(s) X(s),$$

dove

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(E, \theta)}(t) \doteq \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial E}(E(t), \theta(t)) & \frac{\partial F}{\partial \theta}(E(t), \theta(t)) \\ \frac{\partial G}{\partial E}(E(t), \theta(t)) & \frac{\partial G}{\partial \theta}(E(t), \theta(t)) \end{pmatrix}.$$

Nella variabile $Y(t) \doteq X(t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, l'equazione si riscrive,

$$Y(t) = \int_0^t ds \varepsilon \frac{\partial(F, G)}{\partial(E, \theta)}(s) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t ds \varepsilon \frac{\partial(F, G)}{\partial(E, \theta)}(s) Y(s). \quad (7.23)$$

Essendo $E(t) \leq 2R$ per $t \leq 3\pi$, dalla definizione di F e G si verifica facilmente che esiste una costante positiva $C_3 = C_3(R)$ tale che:

$$\left\| \frac{\partial(F, G)}{\partial(E, \theta)}(t) \right\| \leq C_3 \quad \forall t \leq 3\pi.$$

Allora dall'Eq. (7.23) otteniamo

$$|Y(t)| \leq 3\pi C_3 \varepsilon + C_3 \varepsilon \int_0^t ds |Y(s)| \quad \forall t \leq 3\pi,$$

da cui, per il Lemma di Gronwall, $|Y(t)| \leq 3\pi C_2 \varepsilon e^{C_2 \varepsilon t}$ per ogni $t \leq 3\pi$. In definitiva, esiste una costante positiva $C_4 = C_4(R)$ tale che:

$$\sup_{s \in [0, T_\varepsilon]} \left| \frac{\partial E(s)}{\partial E} - 1 \right| \leq C_4 \varepsilon, \quad \sup_{s \in [0, T_\varepsilon]} \left| \frac{\partial \theta(s)}{\partial E} \right| \leq C_4 \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_R]. \quad (7.24)$$

Infine, essendo $T_\varepsilon = T_\varepsilon(E, 0)$ l'unica soluzione dell'equazione $\theta(T_\varepsilon) + 2\pi = 0$, per il teorema della funzione implicita essa è una funzione derivabile tale che

³Per ulteriori dettagli si veda ad esempio il punto C della Sezione 3.5 nell'*Introduzione ai Sistemi Dinamici, Scuola Galileiana*, note redatte dal Prof. Giancarlo Benettin e reperibili al sito <https://www.math.unipd.it/~benettin/Galileiana/dispense.pdf>.

$\dot{\theta}(T_\varepsilon)\partial_E T_\varepsilon = 0$ e dunque $\partial_E T_\varepsilon = 0$ essendo $\dot{\theta}(T_\varepsilon) \neq 0$. Si ha così:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial E}(E, \varepsilon) &= \int_{2\pi}^{T_\varepsilon} ds \varepsilon s^{-1} \frac{\partial F}{\partial E}(E, -s) + \int_0^{T_\varepsilon} ds \varepsilon^{-1} \frac{\partial F}{\partial \theta}(E(s), \theta(s)) \frac{\partial \theta(s)}{\partial E} \\ &\quad + \int_0^{T_\varepsilon} ds \varepsilon^{-1} \left[\frac{\partial F}{\partial E}(E(s), \theta(s)) \frac{\partial E(s)}{\partial E} - \frac{\partial F}{\partial E}(E, -s) \right]. \end{aligned}$$

Utilizzando la regolarità di F e le stime (7.19) e (7.24) concludiamo che esiste una costante positiva $C_2 = C_2(R)$ per la quale sussiste la stima (7.21). \square

7.4. Teorema di Poincaré Bendixson

La disposizione delle curve di fase nel piano è notevolmente più semplice che in spazi di dimensione maggiore. Questo è conseguenza del fatto che una curva separa localmente il piano ma non lo spazio. Il seguente teorema mostra come le orbite del piano siano attratte da oggetti geometrici relativamente semplici.

TEOREMA 7.4 (Teorema di Poincaré-Bendixson). *Sia $v \in C^r(\mathcal{D}; \mathbb{R}^2)$, $1 \leq r \leq +\infty$, un campo vettoriale sul piano con punti singolari isolati. Supponiamo che la semiorbita $\gamma_+(x)$ sia limitata e la sua chiusura contenuta in \mathcal{D} . Allora $\omega(x)$ è uno dei seguenti tipi di insieme:*

- 1) *un punto singolare;*
- 2) *un ciclo;*
- 3) *l'unione di un numero finito di punti singolari e curve di fase ciascuna delle quali tende ad uno di questi punti singolari per $t \rightarrow \pm\infty$ (eventualmente lo stesso).*

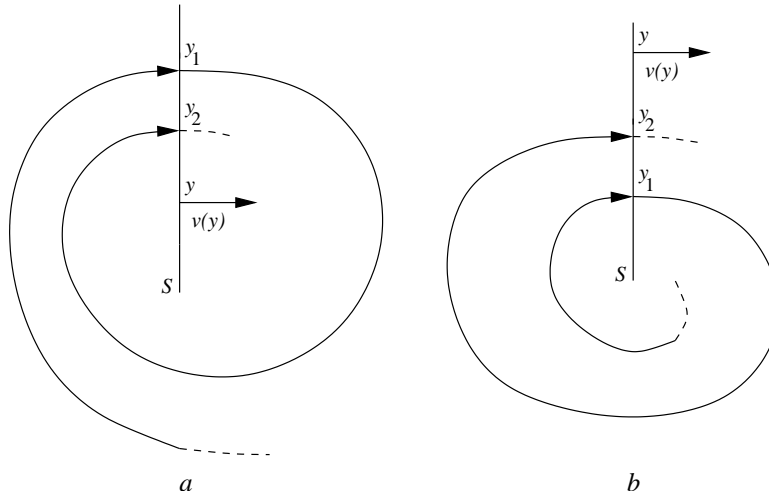
Si possono dedurre interessanti conseguenze da questo teorema. Ad esempio, un compatto $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$ positivamente invariante contiene necessariamente almeno un punto singolare o un ciclo limite.

La dimostrazione del Teorema 7.4 si fonda sulla nota proprietà delle curve chiuse, immagini continue di una circonferenza, di separare il piano in due regioni disgiunte, di cui una limitata e l'altra illimitata (questo risultato, noto come *Lemma di Jordan*, lo abbiamo tacitamente già utilizzato nella dimostrazione della Proposizione 7.1, asserendo l'esistenza delle regioni finite Γ , A_1 ed A_2). Per tale motivo il teorema si estende a superfici bidimensionali quali la sfera, dove questa proprietà è ancora valida, ma non a superfici di genere più alto, quali il toro \mathbb{T}^2 .

Le peculiarità del caso piano si esplicano in alcune proprietà delle sezioni trasversali locali, che sono il contenuto della seguente proposizione e del successivo corollario.

PROPOSIZIONE 7.5. *Sia $v \in C^r(\mathcal{D}; \mathbb{R}^2)$, $1 \leq r \leq +\infty$, ed $x \in \mathcal{D}$ tale che $[0, +\infty) \subset J_x$. Supponiamo che esista un punto regolare $y \in \omega(x)$ (i.e. $v(y) \neq 0$) e sia S una sezione trasversale locale di v in y . Allora:*

- 1) *per ogni $N > 0$ esiste un tempo $t_N > N$ tale che $\phi^{t_N}(x) \in S$;*

FIGURA 7.5. Possibili intersezioni distinte tra $\gamma_+(x)$ ed S .

2) y è l'unica intersezione di $\omega(x)$ con S .

DIMOSTRAZIONE. 1) Per il teorema della funzione inversa (vedi la dimostrazione del teorema della scatola di flusso), la mappa $(\xi, t) \mapsto \phi^t(\xi)$, $(\xi, t) \in S \times \mathbb{R}$, è un diffeomorfismo locale intorno a $(y, 0)$ (ovvero (ξ, t) sono coordinate locali). In particolare esiste un intorno U di y tale che per ogni $z \in U$ esiste un unico tempo $\tau(z)$ per cui $|\tau(z)| < 1$ e $\phi^{\tau(z)}(z) \in S \cap U$. D'altra parte, essendo $y \in \omega(x)$, per ogni $N > 0$ esiste $\tau_N > N + 1$ per cui $\phi^{\tau_N}(x) \in U$. Il punto 1) è quindi dimostrato con $t_N = \tau_N + \tau(z)$, $z = \phi^{\tau_N}(x)$.

2) Osserviamo preliminarmente che il numero di intersezioni con S di ogni arco chiuso e limitato dell'orbita $\gamma_+(x)$ è al più finito. Infatti, supponiamo per assurdo che esista una successione di tempi $\tau_k \rightarrow \bar{\tau} < +\infty$ tale che $\phi^{\tau_k}(x)$ interseca S per ogni $k \in \mathbb{N}$. Allora, poiché $\bar{y} = \phi^{\bar{\tau}}(x) \in \bar{S}$, il vettore $\phi^{\tau_k}(x) - \bar{y}$ ha la direzione di S per ogni k , mentre $\phi^{\tau_k}(x) - \bar{y} = v(\bar{y})(\tau_k - \bar{\tau}) + O((\tau_k - \bar{\tau})^2)$, da cui un assurdo essendo S trasversale alla direzione $v(\bar{y})$.

Supponiamo ora che esistano due intersezioni consecutive distinte di $\gamma_+(x)$ con S , che indichiamo con $y_1 = \phi^{t_1}(x)$ ed $y_2 = \phi^{t_2}(x)$. La curva ottenuta unendo il segmento di S delimitato dai punti y_1 ed y_2 con il tratto di curva di fase $\{\phi^t(x); t \in [t_1, t_2]\}$ è una curva di Jordan, cosicché il suo complemento sul piano è costituito dall'unione di due regioni aperte, di cui una limitata ed una illimitata. A seconda dei casi la regione limitata (vedi Figura 7.5a) ovvero la regione illimitata (vedi Figura 7.5b) è positivamente invariante. Ne segue che la successiva intersezione $y_3 = \phi^{t_3}(x)$ deve necessariamente essere distinta da y_2 , ed inoltre y_2 giace su S tra y_1 ed y_3 . Abbiamo dunque due possibilità:

i) Esiste un'unica intersezione di $\gamma_+(x)$ con S . Poiché per il punto 1) sopra dimostrato la semiorbita $\gamma_+(x)$ interseca S in almeno due tempi differenti ne

segue che essa è un ciclo. In particolare y è l'unica intersezione di $\omega(x) = \gamma(x)$ con S .

ii) Esistono infinite intersezioni distinte $\{y_k = \phi^{t_k}(x); k \in \mathbb{N}\}$, $t_k \rightarrow +\infty$, che formano una successione monotona lungo S . Il limite di tale successione deve necessariamente coincidere con y poiché altrimenti, ragionando come sopra, potremmo determinare una regione positivamente invariante la cui chiusura non contiene y , in contraddizione con l'assunto $y \in \omega(x)$. Per l'unicità del limite il punto y è necessariamente l'unica intersezione di $\omega(x)$ con S . \square

COROLLARIO 7.6. *Sia $v \in C^r(\mathcal{D}; \mathbb{R}^2)$, $1 \leq r \leq +\infty$, ed $x \in \mathcal{D}$ tale che la semiorbita $\gamma_+(x)$ sia limitata e la sua chiusura contenuta in \mathcal{D} .*

1) *Se esiste un punto regolare $y \in \gamma_+(x) \cap \omega(x)$ allora $\gamma(x)$ è un ciclo (in particolare $\gamma_+(x) = \gamma(x) = \omega(x)$).*

2) *Se esiste un ciclo γ contenuto in $\omega(x)$ allora $\gamma = \omega(x)$.*

DIMOSTRAZIONE. 1) Sia S una sezione trasversale locale di v in $y \in \gamma_+(x) \cap \omega(x)$. Poiché $\omega(x)$ è invariante, si ha $\gamma_+(x) \subseteq \omega(x)$ e quindi, per il punto 2) della Proposizione 7.5, y è l'unica intersezione di $\gamma_+(x)$ con S . Ne segue, per il punto 1) della medesima proposizione, che $\gamma_+(x)$ è un ciclo.

2) Supponiamo per assurdo che $\omega(x) \setminus \gamma$ sia non vuoto. Essendo $\omega(x)$ connesso, esiste $y \in \gamma$ che è punto di accumulazione di $\omega(x) \setminus \gamma$. Sia S una sezione trasversale locale di v in y . Analogamente al punto 1) della Proposizione 7.5, possiamo determinare $z \in \omega(x) \setminus \gamma$ sufficientemente vicino ad y in modo tale che $\phi^t(z) \in S$ per qualche $t \in \mathbb{R}$. Ma $\phi^t(z)$ è un punto di $\omega(x)$ distinto da y , il che contraddice l'unicità stabilita nel punto 2) della Proposizione 7.5, da cui l'assurdo. Dunque $\omega(x) = \gamma$ necessariamente. \square

Dimostrazione del Teorema 7.4. Se $\omega(x)$ non possiede punti regolari allora, essendo connesso, è costituito da un unico punto singolare, $\omega(x) = \{x_0\}$, ed ovviamente $\phi^t(x) \rightarrow x_0$ per $t \rightarrow +\infty$.

Supponiamo viceversa che esista un punto regolare $y \in \omega(x)$. Sappiamo allora che rimane definita l'intera orbita per y ed inoltre $\gamma(y)$, $\omega(y)$ ed $\alpha(y)$ sono contenuti in $\omega(x)$. Abbiamo ora due possibilità:

i) Esiste un punto regolare $z \in \omega(y) \cup \alpha(y)$. Assumiamo $z \in \omega(y)$ (se $z \in \alpha(y)$ ripetiamo il ragionamento sul flusso inverso $\phi^{-t}(y)$). Fissata una sezione trasversale locale S di v in z , per il punto 1) della Proposizione 7.5, esiste $\bar{z} \in S \cap \gamma(y)$. Essendo $z, \bar{z} \in \omega(x)$, per il punto 2) della medesima proposizione deduciamo che $z = \bar{z}$ necessariamente. Ma allora $z \in \gamma(y) \cap \omega(y)$ e quindi, per il punto 1) del Corollario 7.6, $\gamma(y)$ è un ciclo. Applicando infine il punto 2) del medesimo corollario concludiamo che $\omega(x)$ coincide con tale ciclo.

ii) Non esistono punti regolari in $\omega(y) \cup \alpha(y)$. In tal caso $\gamma(y)$ è un'orbita aperta con $\omega(y) = \{z_1\}$ ed $\alpha(y) = \{z_2\}$, essendo z_1, z_2 punti singolari non necessariamente distinti. \square

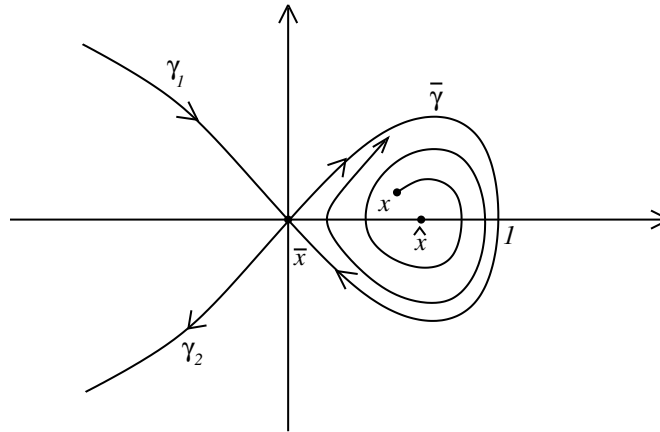


FIGURA 7.6. Se $\lambda < 0$ allora $\omega(x) = \bar{\gamma} = \gamma \cup \{\bar{x}\}$ per ogni $x \in \Lambda$.

Un esempio del caso 3) del Teorema 7.4. Consideriamo il seguente sistema,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_1^2 + \lambda x_2(x_1^3 - x_1^2 + x_2^2), \end{cases}$$

dove λ è un parametro reale. Esso presenta un punto singolare iperbolico in $\bar{x} = (0, 0)$ ed un punto singolare in $\hat{x} = (\frac{2}{3}, 0)$, che è un pozzo per $\lambda > 0$ ed una sorgente per $\lambda < 0$. Posto $H(x) = x_1^3 - x_1^2 + x_2^2$, il sistema assume la forma

$$\dot{x} = \nu(x), \quad \nu(x) = J\nabla H(x) + \lambda x_2 H(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se $\lambda = 0$ il sistema è hamiltoniano e gli insiemi di livello dell'energia $\Gamma_E = \{x: H(x) = E\}$ sono invarianti. Inoltre, essendo \hat{x} un minimo proprio di H , esso è un equilibrio stabile.

Se $\lambda \neq 0$, poiché $L_\nu H(x) = 2\lambda x_2^2 H(x)$, l'insieme di livello $\Gamma_0 = \{x: H(x) = 0\}$ rimane invariante anche in questo caso (infatti $\nu(x)$ è tangente a Γ_0 in tutti i punti $x \in \Gamma_0 \setminus \{\bar{x}\}$). Tale insieme, che è l'unione dei grafici delle funzioni $x_2 = \pm|x_1|\sqrt{1-x_1}$, è sede di quattro curve di fase: il punto singolare iperbolico \bar{x} , una curva γ ad esso omoclina che giace nel semipiano $x_1 > 0$, una curva illimitata γ_1 asintotica nel futuro a \bar{x} che giace nel secondo quadrante ed una curva illimitata γ_2 asintotica nel passato a \bar{x} che giace nel terzo quadrante, vedi Figura 7.6. Chiaramente le varietà stabile ed instabile di \bar{x} sono $W^+(\bar{x}) = \gamma \cup \{\bar{x}\} \cup \gamma_1$ e $W^-(\bar{x}) = \gamma \cup \{\bar{x}\} \cup \gamma_2$.

Sia ora Λ la regione finita del piano delimitata da $\bar{\gamma} := \gamma \cup \{\bar{x}\}$ e privata del punto singolare \hat{x} . Se $\lambda = 0$ tale regione è riempita da un continuum di orbite periodiche giacenti sugli insiemi di livello di energia $-\frac{4}{27} < E < 0$ (dove $-\frac{4}{27} = H(\hat{x})$). Se invece $\lambda \neq 0$ asseriamo che per ogni $x \in \Lambda$ si ha $\omega(x) = \bar{\gamma}$ se $\lambda < 0$, ovvero $\alpha(x) = \bar{\gamma}$ se $\lambda > 0$. Dimostriamolo nel caso $\lambda < 0$ (il ragionamento per $\lambda > 0$ è analogo).

Poiché Λ è invariante, la curva di fase $\gamma(x)$ è contenuta in Λ e quindi $\omega(x)$ è un compatto, connesso e non vuoto, contenuto nella chiusura $\bar{\Lambda}$. Osserviamo ora che $H < 0$ in Λ . Inoltre $L_v H(x) = 2\lambda x_2^2 H(x) > 0$ per ogni $x \in \Lambda$ ad eccezione dei punti giacenti sull'asse orizzontale $x_2 = 0$. Ma in tali punti $v(x)$ ha componente verticale non nulla, per cui se $x \in \Lambda$ allora $\gamma(x)$ interseca tale asse al più in un insieme numerabile. Pertanto la funzione $t \mapsto H(\phi^t(x))$ è strettamente crescente e non positiva, cosicché ammette un limite $-\frac{4}{27} < E_0 \leq 0$ per $t \rightarrow +\infty$. In particolare $H(y) = E_0$ per ogni $y \in \omega(x)$. Questo implica che $E_0 = 0$. Infatti, se fosse $E_0 < 0$, si avrebbe $\omega(x) \subset \Lambda$ e quindi $H(\phi^t(y)) > E_0$ per $y \in \omega(x)$ e $t > 0$, in contraddizione con il fatto che anche $\phi^t(y) \in \omega(x)$. Dunque $\omega(x) \subset \bar{\Lambda} \cap \Gamma_0 = \bar{\gamma}$. Ma non può essere $\omega(x) = \gamma$ poiché γ non è un chiuso, mentre non può essere $\omega(x) = \{\bar{x}\}$ poiché in $\bar{\Lambda}$ solo l'orbita γ è attratta da \bar{x} essendo quest'ultimo un punto iperbolico. In conclusione $\omega(x) = \bar{\gamma}$ come asserito.

ESERCIZIO 7.5. Sia $v \in C^r(\mathcal{D}; \mathbb{R}^2)$, $1 \leq r \leq +\infty$, e γ un ciclo tale che la regione limitata ed aperta U da esso racchiusa è interamente contenuta in \mathcal{D} . Dimostrare che U deve contenere almeno un ciclo o un punto singolare del campo.

ESERCIZIO 7.6. Dimostrare che un compatto $K \subset \mathcal{D}$ positivamente invariante e semplicemente connesso contiene almeno un punto singolare [Suggerimento: utilizzare l'asserto dell'esercizio precedente].

7.5. Appendice: applicazione alla teoria dei circuiti non lineari

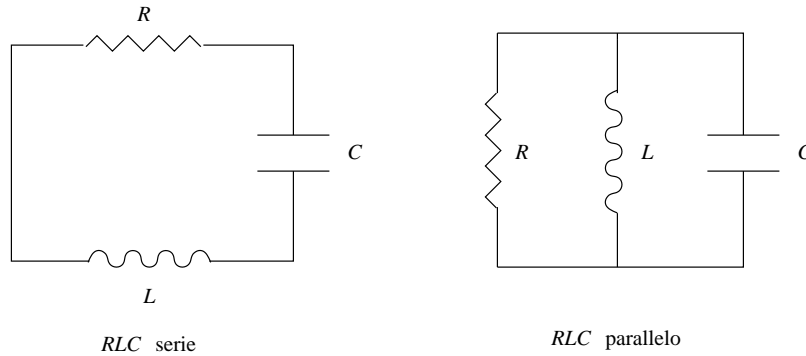
Caratterizziamo un circuito dal punto di vista matematico. Introduciamo dapprima i *rami* costituenti un circuito. Essi sono dei segmenti o loro deformazioni continue. A ciascun ramo viene associata una *caratteristica* Z . Più rami si uniscono facendo concorrere i loro estremi e formando i *nodi*. I rami si possono incontrare solo nei nodi. Un circuito è quindi un'unione connessa di rami. A ciascun ramo si associa una *corrente* i ed a ciascun estremo di un ramo un potenziale V , essendo i e V variabili reali. Siano α e β gli estremi del ramo r . Per convenzione associamo alla corrente i_r del ramo r verso positivo da α verso β , definendo contestualmente la *caduta di potenziale* lungo tale ramo la quantità $v_r := V(\alpha) - V(\beta)$.

Per ogni ramo r la relativa caratteristica Z_r stabilisce una relazione funzionale tra le grandezze i_r e v_r . Nei casi di interesse fisico tale relazione assume la forma di una legge differenziale del primo ordine

$$F\left(i_r, v_r, \frac{di_r}{dt}, \frac{dv_r}{dt}\right) = 0.$$

Tra le caratteristiche più semplici ricordiamo:

- 1) la resistenza R : (i_R, v_R) tali che $v_R = Ri_R$;
- 2) la induttanza L : (i_L, v_L) tali che $v_L = L \frac{di_L}{dt}$;
- 3) la capacità C : (i_C, v_C) tali che $i_C = C \frac{dv_C}{dt}$.

FIGURA 7.7. Circuiti RLC .

Le correnti che circolano nei rami di un circuito sono legate tra loro attraverso una legge di conservazione, nota come *legge di Kirchoff*: essa stabilisce che la somma algebrica delle correnti dei rami che concorrono in un nodo è nulla.

Consideriamo a titolo di esempio i circuiti RLC serie e parallelo descritti in Figura 7.6.

Nel primo caso, essendo $i_R = i_L = i_C$, tutte le grandezze si esprimono in funzione della corrente $i = i_R$. Derivando rispetto al tempo l'identità $v_R + v_L + v_C = 0$ otteniamo un'equazione del secondo ordine per la corrente

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0.$$

Quindi l'evoluzione della corrente è quella di un oscillatore lineare smorzato di pulsazione $1/\sqrt{LC}$ e fattore di smorzamento R/L . Analogamente, nel caso del circuito RLC parallelo, essendo ora $v_R = v_L = v_C$ ed $i_R + i_L + i_C = 0$, troviamo l'equazione per $v = v_R$,

$$C \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{L} = 0.$$

I due circuiti sopra considerati non possono presentare cicli limite, e più in particolare il fenomeno delle *autoscillazione* (quando, indipendentemente dalle condizioni iniziali, il sistema “rilassa” sempre su un moto periodico fissato). Anche l'assenza della resistenza R (che è responsabile dello smorzamento) ovvero nel caso dei semplici circuiti LC serie o parallelo si ottiene al più un oscillatore armonico, dove tutto lo spazio delle fasi è coperto da orbite periodiche. Per ottenere un dispositivo autoscillante è necessario inserire nel circuito RLC un elemento non lineare. Classicamente questo è ottenuto mediante un *triode* (vedi Figura 7.7). Nel triodo la corrente anodica i_A (elettroni emessi dall'anodo) passa attraverso una griglia (che ha il compito di accelerare gli elettroni) e tale corrente è tutta raccolta dal catodo. Attraverso il ramo di griglia non passa corrente ($i_M = 0$): l'induttanza M connessa alla griglia ha il solo compito di alimentare il potenziale di griglia v_G . Senza entrare in ulteriori dettagli fisici, le

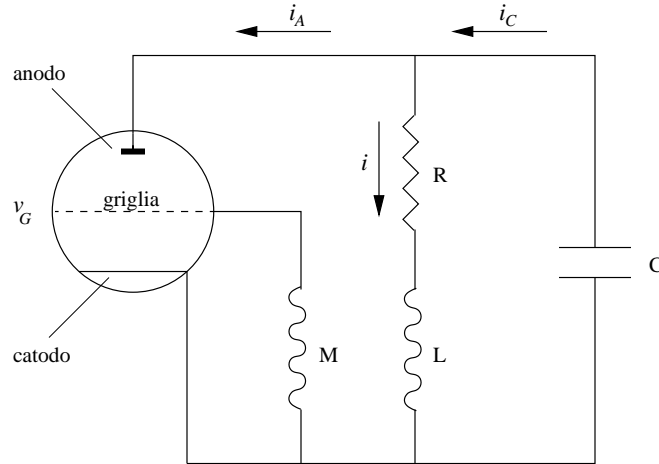


FIGURA 7.8. Triodo.

leggi del triodo sono

$$i_A = f(v_G), \quad v_G = M \frac{di_L}{dt}.$$

La funzione f che appare nella prima equazione è detta la *caratteristica* del triodo. Essa è una funzione monotona crescente con limiti $f(-\infty) = 0$, $f(+\infty) = i_{\text{sat}}$ (detta corrente di saturazione del triodo). Nuovamente tutte le grandezze del circuito sono determinate dalla corrente $i = i_R$, la cui equazione di evoluzione si ottiene derivando la relazione $v_R + v_L + v_C$, utilizzando la legge di Kirchoff ($i = i_L = i_A + i_C$) e le caratteristiche del circuito

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} - \frac{1}{C} f\left(M \frac{di}{dt}\right) = 0. \quad (7.25)$$

Poniamo per semplicità $M = R = L = C = 1$. Introducendo le variabili

$$x = \frac{di}{dt}, \quad y = f(0) - i,$$

l'Eq. (7.25) diventa

$$\begin{cases} \dot{x} = y - G(x), \\ \dot{y} = -x, \end{cases} \quad (7.26)$$

con $G(x) = x - f(x) + f(0)$. Posto $g(x) = G'(x)$ il sistema (7.26) è equivalente all'equazione del secondo ordine

$$\ddot{x} + g(x)\dot{x} + x = 0, \quad (7.27)$$

detta *equazione di Lienard*.

Il sistema (7.26) possiede un unico punto singolare in $(0,0)$. La matrice jacobiana in tale punto è $\begin{pmatrix} -G'(0) & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Quindi l'origine delle coordinate è una sorgente se $G'(0) < 0$ ed un pozzo se $G'(0) > 0$. Inoltre, definito $W(x, y) := (x^2 + y^2)/2$,

si ha

$$\dot{W}(x, y) = -xG(x), \quad (7.28)$$

da cui segue che nel caso in cui la funzione $G(x)$ è monotona crescente (si ricordi che $G(0) = 0$), l'origine delle coordinate è punto singolare attrattivo con bacino di attrazione l'intero piano. In questo caso il circuito è detto *passivo*: qualunque siano le condizioni iniziali, esso dissipa la sua energia e tende a "spegnersi" (come nel caso dei circuiti lineari *RLC* serie e parallelo).

Supponiamo ora che $G'(0) = 1 - f'(0) < 0$. In altri termini la caratteristica del triodo è tale che esso, per piccoli valori di x ($= \frac{di}{dt}$), fornisce al circuito più corrente di quanta ne dissipa la resistenza, cosicché $(0, 0)$ è una sorgente (il circuito non si spegne mai). D'altra parte, poiché il triodo si satura (ovvero $f(x)$ è limitata), per grandi valori di x la dissipazione dovuta alla resistenza domina e tutte le orbite rimangono presumibilmente limitate. Sotto alcune ipotesi aggiuntive sulla funzione $G(x)$ mostreremo che in tal caso esiste un ciclo limite stabile. Tale ciclo è unico ed è quindi un *attrattore globale*: tutte le condizioni iniziali, purché diverse dalla posizione di equilibrio $(0, 0)$, sono attratte da esso.

D'ora innanzi assumeremo che la funzione $G(x)$ goda delle seguenti proprietà

- i) $G(x) = -G(-x)$;
- ii) $G(x) \rightarrow +\infty$ se $x \rightarrow +\infty$;
- iii) esiste $\alpha > 0$ tale che $G(\alpha) = 0$, $G(x) < 0$ per $x \in (0, \alpha)$, $G(x)$ crescente per $x > \alpha$.

Un caso particolare ed importante è quello dell'equazione di Van der Pol,

$$\ddot{x} = -x + k(1 - x^2)\dot{x}, \quad k > 0, \quad (7.29)$$

che corrisponde a $G(x) = k(x^3/3 - x)$ (già studiata in Sezione 7.3.3 nel caso particolare in cui $k = \varepsilon$ è un parametro piccolo).

Consideriamo le quattro curve,

$$\begin{aligned} y^+ &= \{(x, y) : x = 0, y > 0\}, & y^- &= \{(x, y) : x = 0, y < 0\}, \\ G^+ &= \{(x, y) : x > 0, y = G(x)\}, & G^- &= \{(x, y) : x < 0, y = G(x)\}, \end{aligned}$$

ed indichiamo con I, II, III e IV le regioni del piano da esse delimitate come in Figura 7.8.

PROPOSIZIONE 7.7. *Ogni soluzione del sistema (7.26) è definita globalmente nel futuro. Inoltre ogni traiettoria non stazionaria attraversa ripetutamente le curve y^+ , G^+ , y^- e G^- passando in senso orario attraverso le regioni I, II, III e IV.*

DIMOSTRAZIONE. Dalla direzione del campo vettoriale si deduce che ogni soluzione che al tempo iniziale si trova sulla curva y^+ [risp. G^+] deve entrare necessariamente nella regione I [risp. II]. Consideriamo ora una soluzione $t \mapsto (x(t), y(t))$ con dato iniziale (x_0, y_0) contenuto nella regione I. Sia K il compatto delimitato dall'origine $(0, 0)$, dalle curve y^+ , G^+ e dalla retta $y = y_0$. Poniamo

$$T = \sup\{t > 0 : (x(s), y(s)) \in K \forall s \in [0, t]\}.$$

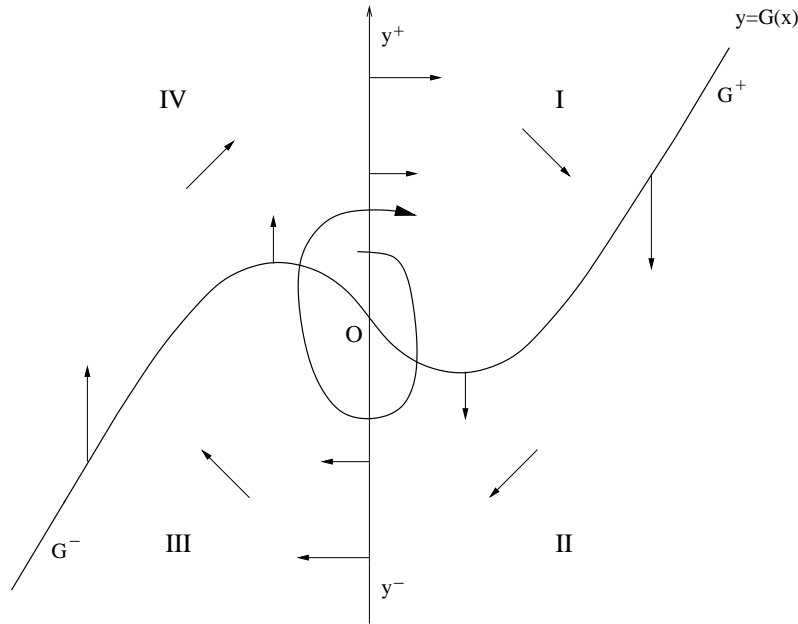


FIGURA 7.9. Le curve di fase ruotano in senso orario.

Dalla prima equazione in (7.26) si ha $\dot{x}(t) \geq 0$ se $t \in [0, T)$, e quindi

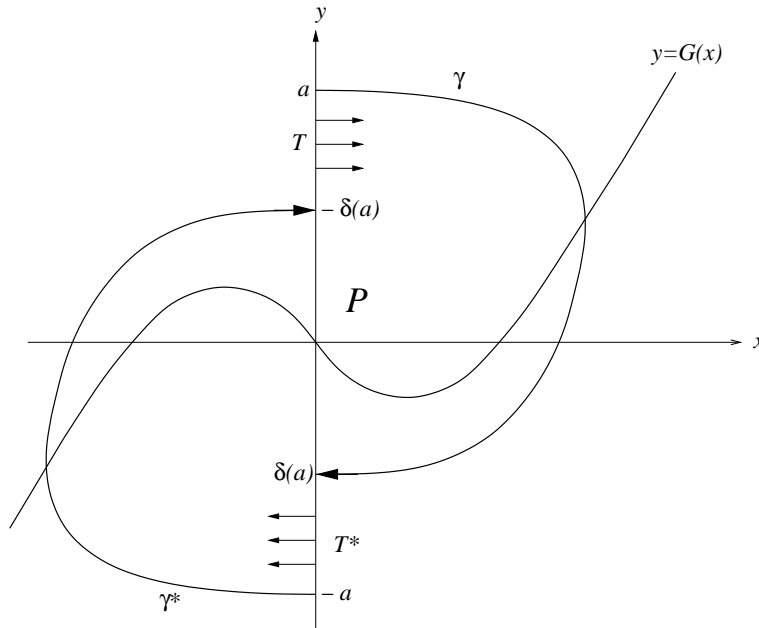
$$y(t) = y_0 - \int_0^t ds x(s) \leq y_0 - x_0 t \quad \forall t \in [0, T).$$

Essendo $y(t) \geq \min\{G^+(x) : x > 0\}$ per ogni $t \in [0, T)$, concludiamo che $T < +\infty$ necessariamente. Dunque la soluzione abbandona K in un tempo finito. Ma per la direzione del campo vettoriale sulla frontiera di K ciò avviene necessariamente attraversando G^+ , ovvero entrando nella regione II. Consideriamo ora una soluzione $t \mapsto (x(t), y(t))$ con dato iniziale (x_0, y_0) contenuto nella regione II. Dal sistema (7.26) ricaviamo $\dot{x}(t) < 0$ ed $y(t) \geq y_0 - x_0 t$ fintanto che la soluzione giace nella regione II. Ciò significa che essa non può esplodere in un tempo finito senza prima abbandonare tale regione. Sia quindi

$$\bar{T} = \sup\{t > 0 : (x(s), y(s)) \in \text{II} \forall s \in [0, t]\}.$$

Vogliamo dimostrare che $\bar{T} < +\infty$. Assumiamo per assurdo che $\bar{T} = +\infty$. Allora $x(t)$ ed $y(t)$ sono monotone decrescenti su tutto l'asse positivo dei tempi. Giungiamo ad una contraddizione se mostriamo che $(x(+\infty), y(+\infty)) \in y^-$. Osserviamo dapprima che se fosse $y(+\infty) = -\infty$ la prima equazione in (7.26) implicherebbe l'assurdo $\dot{x}(+\infty) = -\infty$. Se fosse $x(+\infty) > 0$ dalla seconda equazione in (7.26) si avrebbe $y(+\infty) = -\infty$ e quindi nuovamente un assurdo. Infine, essendo l'origine delle coordinate una sorgente segue che $y(+\infty) < 0$. In conclusione $(x(+\infty), y(+\infty)) \in y^-$.

La dimostrazione delle analoghe affermazioni per le regioni III e IV è del tutto simile. \square

FIGURA 7.10. La regione invariante P .

Dalla proposizione precedente rimane definita la mappa $\delta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^-$ tale che $\delta(a)$ è l'ordinata della prima intersezione con il semiasse y^- della curva soluzione di dati iniziali $(0, a)$.

PROPOSIZIONE 7.8. *Se a è sufficientemente grande allora $|\delta(a)| < a$.*

L'esistenza di un'orbita periodica è ora un semplice corollario della proposizione precedente e del teorema di Poincaré-Bendixson. Osserviamo preliminarmente che la simmetria della funzione G implica che se $t \mapsto (x(t), y(t))$ è soluzione del sistema (7.28) allora anche $t \mapsto (-x(t), -y(t))$ è soluzione. Ne segue che, fissato a sufficientemente grande, si hanno gli archi di traiettoria γ e γ^* come in Figura 7.9. Allora la regione finita P delimitata dalle curve γ , γ^* e dai segmenti T , T^* è positivamente invariante. Essendo l'unico punto singolare una sorgente, il teorema di Poincaré-Bendixson garantisce l'esistenza di un'orbita periodica in P .

DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE 7.8. Decomponiamo l'arco di traiettoria dal punto $A = (0, a)$ al punto $D = (0, \delta(a))$ nei tre archi orientati, $\gamma_1 = AB$, $\gamma_2 = BC$ e $\gamma_3 = CD$, essendo B e C le intersezioni della retta $x = a$ con il suddetto arco (vedi Figura 7.10). Ricordando che $W(x, y) = (x^2 + y^2)/2$, si ha

$$\frac{1}{2} (|\delta(a)|^2 - a^2) = W(0, \delta(a)) - W(0, a) = \int_{\gamma_1} dW + \int_{\gamma_2} dW + \int_{\gamma_3} dW.$$

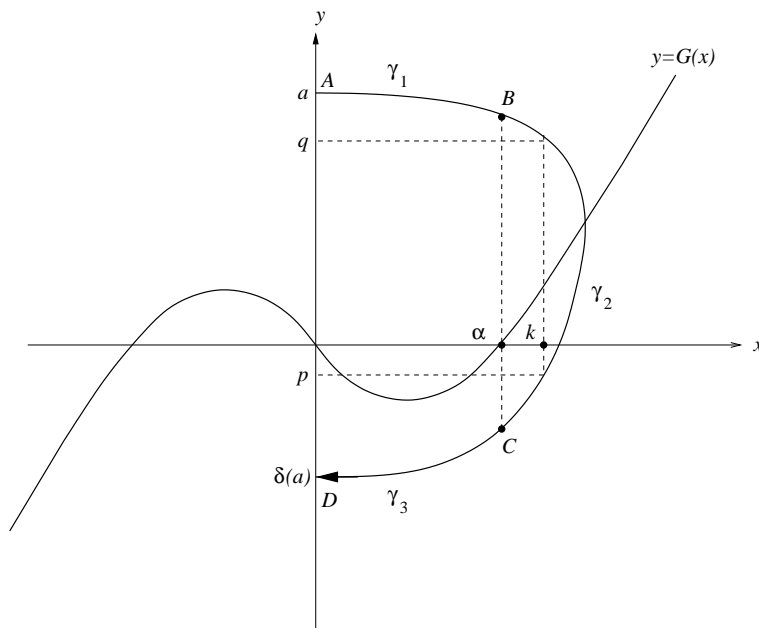


FIGURA 7.11.

Osserviamo che la curva γ_1 [risp. γ_3] è il grafico di una funzione $y_1(x) > G(x)$ [risp. $y_3(x) < G(x)$], con $x \in [0, \alpha]$. Dalla (7.28) ed essendo $\dot{x} = y - G(x)$ si ha

$$I(a) := \int_{\gamma_1} dW + \int_{\gamma_3} dW = \int_0^\alpha dx \frac{-xG(x)}{y_1(x) - G(x)} + \int_0^\alpha dx \frac{-xG(x)}{G(x) - y_3(x)}.$$

La curva γ_2 è invece il grafico di una funzione $x_2(y) \geq \alpha$, $y \in [y_3(\alpha), y_1(\alpha)]$. Dalla (7.28) ed essendo $\dot{y} = -x$,

$$J(a) := \int_{\gamma_2} dW = - \int_{y_3(\alpha)}^{y_1(\alpha)} dy G(x_2(y)).$$

La funzione $I(a)$ è positiva e converge a zero per $a \rightarrow +\infty$. È infatti evidente che il minimo (su $[0, \alpha]$) delle funzioni $y_1(x) - G(x)$ e $G(x) - y_3(x)$ diverge per $a \rightarrow +\infty$. La funzione $J(a)$ è invece negativa e converge a $-\infty$ per $a \rightarrow +\infty$. Infatti, fissato $k > \alpha$ come in Figura 7.10, si ha $|J(a)| \geq G(k)|p - q|$ con $G(k) > 0$ e $|p - q| \rightarrow +\infty$ per $a \rightarrow +\infty$. Concludiamo che per a grande $I(a) + J(a) < 0$, ovvero $|\delta(a)| < a$. \square

In realtà da un'analisi più accurata delle proprietà di monotonia della mappa $a \mapsto \delta(a)$, si può dimostrare che l'orbita periodica trovata è unica, dunque un attrattore globale. Più precisamente si può vedere che $I(a)$ e $J(a)$ sono entrambe monotone decrescenti, cosicché esiste un unico punto $a^* > 0$ tale che $\delta(a^*) = -a^*$. D'altra parte l'applicazione $\sigma: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tale che $\sigma(a) = -\delta(-\delta(a))$ fornisce l'ordinata del primo ritorno sul semiasse y^+ della curva soluzione di dati iniziali $(0, a)$, cosicché si ha un'orbita periodica per $(0, a)$ se e solo se a è un punto fisso di σ , ovvero $\delta(a) = -a$.

7.6. Soluzione di alcuni esercizi

SOLUZIONE ES. 7.1. Si verifica immediatamente che il membro di destra del sistema (7.3) si scrive nella forma $-a(q)^{-1}J\nabla\mathcal{H}(q, \xi)$, dunque il fattore integrante è $-a(q)$.

SOLUZIONE ES. 7.3. Per l'Esercizio 7.1 il sistema (7.11) si scrive nella forma

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = -a(q)^{-1}J\nabla\mathcal{H}(q, \xi) + \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi(q, \xi) \end{pmatrix} =: v(q, \xi).$$

Applichiamo il criterio di Dulac con $Q(q, \xi) = a(q)$. Poiché $\operatorname{div}(J\mathcal{H}) = 0$ otteniamo $\operatorname{div}(Qv) = a(q)\partial_{\xi}\Phi(q, \xi)$, cosicché una condizione sufficiente per la non esistenza di orbite periodiche è che $\partial_{\xi}\Phi(q, \xi)$ sia definita in segno.

SOLUZIONE ES. 7.4. Se $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ è soluzione dell'Eq. (7.17), posto $z(t) = (z_1(t), z_2(t)) := (x_1(-t), -x_2(-t))$, si ha

$$\dot{z}_1(t) = -\dot{x}_1(-t) = -x_2(-t) = z_2(t),$$

$$\dot{z}_2(t) = \dot{x}_2(-t) = -x_1(-t) + \varepsilon(1 - x_1(-t)^2)x_2(-t) = -z_1(t) - \varepsilon(1 - z_1(t)^2)z_2(t).$$

Quindi $z(t)$ risolve l'equazione di van der Pol (7.17) ma con parametro $-\varepsilon$ invece di ε . Pertanto, indicando con $\phi_{\varepsilon}^t(x_1, x_2)$ il flusso associato all'Eq. (7.17), abbiamo mostrato che sussiste la simmetria $\phi_{-\varepsilon}^t(x_1, x_2) = \phi_{\varepsilon}^{-t}(x_1, -x_2)$. In particolare, l'esistenza di un ciclo limite stabile prossimo alla circonferenza di raggio $r = 2$ per $\varepsilon > 0$ e piccolo implica, attraverso questa simmetria, l'esistenza di un ciclo limite instabile prossimo alla circonferenza di raggio $r = 2$ per $\varepsilon < 0$ e piccolo (il cambio di stabilità è dovuto all'inversione della direzione del tempo nella simmetria).

SOLUZIONE ES. 7.5. Il compatto $K = \gamma \cup U$ è invariante. Supponiamo per assurdo che U non contenga né punti singolari né cicli. Per il teorema di Poincaré-Bendixson, si deduce che $\gamma = \omega(x) = \alpha(x)$ per ogni $x \in U$. Ma allora, fissata una sezione trasversale locale S di un punto $y \in \gamma$, possiamo determinare due sequenze di tempi divergenti, $t_k, s_k \nearrow +\infty$ tali che $\phi^{t_k}(x), \phi^{-s_k}(x) \in S$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $\phi^{t_k}(x), \phi^{-s_k}(x) \rightarrow y$ per $k \rightarrow +\infty$. Giungiamo in tal modo ad una contraddizione poiché le successive intersezioni di un'orbita con una sezione locale devono formare una successione monotona lungo la sezione stessa.

SOLUZIONE ES. 7.6. Se K contiene un numero finito di cicli, almeno uno di questi racchiude una regione che non contiene altri cicli. Essendo tale regione invariante, per l'Esercizio 7.5 essa deve contenere almeno un punto singolare. Se invece esistono infiniti cicli contenuti in K , fissiamo una successione di cicli γ_n , $n \in \mathbb{N}$, tale che $|\Gamma_n| \rightarrow \beta$, essendo Γ_n la regione racchiusa dal ciclo γ_n e β l'estremo inferiore delle aree delle regioni racchiuse da cicli contenuti in K . Per compattezza esiste una successione convergente $\{x_n; k \in \mathbb{N}\}$ tale che $x_n \in \gamma_n$. Il limite x di tale successione deve necessariamente appartenere ad un ciclo γ , poiché altrimenti sarebbe attratto da qualche ciclo limite e, per la Proposizione 7.1, anche qualche x_n lo sarebbe. Inoltre, detta Γ la regione finita racchiusa da γ , deve aversi $|\Gamma_n| \rightarrow |\Gamma|$ per $n \rightarrow +\infty$ (provarlo!) cosicché $|\Gamma| = \beta$. Nuovamente per

L'Esercizio 7.5, poiché Γ non contiene cicli, deve contenere almeno un punto singolare.

Sistemi dinamici topologici

Introduciamo alcuni concetti e risultati sulle leggi ricorsive definite da mappe continue su spazi metrici (dunque sistemi dinamici topologici a tempo discreto). L'idea è introdurre gli strumenti necessari a descrivere e classificare le dinamiche con comportamento asintotico complicato (al contrario dei sistemi planari descritti nel capitolo precedente). Ci limitiamo al caso delle leggi ricorsive dove è più semplice formulare i risultati. Questi si generalizzano comunque al caso dei flussi (o si applicano direttamente a dinamiche a tempo continuo con costruzioni quali ad esempio le sezioni di Poincaré o le mappe stroboscopiche).

8.1. Transitività topologica

Sia $g: X \rightarrow X$ una mappa continua sullo spazio metrico (X, d) e si consideri la legge ricorsiva associata $x_{k+1} = g(x_k)$, $k \in \mathbb{N}$.

DEFINIZIONE 8.1. La mappa g è detta *topologicamente transitiva* se per ogni coppia U, V di insiemi aperti non vuoti in X esiste un intero $N = N(U, V)$ tale che $g^N(U) \cap V \neq \emptyset$.

Pertanto un sistema dinamico topologicamente transitivo è caratterizzato dal fatto che ogni aperto comunque piccolo dello spazio delle fasi contiene punti la cui evoluzione interseca qualunque altro aperto. Altrimenti detto, lo spazio delle fasi non può essere partizionato in due insiemi disgiunti il cui interno è non vuoto e che sono invarianti rispetto alla dinamica.

Sotto alcune ipotesi sulla struttura dello spazio delle fasi, la transitività topologica equivale all'esistenza di un'orbita densa.

TEOREMA 8.2. *Valgono le seguenti implicazioni.*

- (i) *Se (X, d) è perfetto (ovvero non ha punti isolati) e g possiede un'orbita densa allora g è topologicamente transitiva.*
- (ii) *Se (X, d) è completo e separabile e g è topologicamente transitiva allora g possiede un'orbita densa.*

DIMOSTRAZIONE. (i) Sia $\gamma_+(x) = \{g^j(x)\}_{j \in \mathbb{N}}$ l'orbita densa. Fissati gli aperti $U, V \neq \emptyset$, per la densità di $\gamma_+(x)$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $g^n(x) \in U$ e, per le ipotesi su

(X, d) , $V' := V \setminus \{x; g(x); g^2(x); \dots; g^n(x)\}$ è un aperto non vuoto.¹ Pertanto esiste $m \in \mathbb{N}$, $m > n$, tale che $g^m(x) \in V'$. Dunque $g^N(U) \cap V \neq \emptyset$ per $N = m - n$.

(ii) Sia $\{U_j\}$ una base numerabile di aperti di X . Quindi per ogni $x \in X$ e U intorno di x esiste $j \in \mathbb{N}$ tale che $x \in U_j \subset U$. Pertanto è sufficiente costruire un'orbita che visita tutti gli aperti U_j della base. Sia $N_1 \geq 0$ tale che $g^{N_1}(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$, cosicché $U_1 \cap g^{-N_1}(U_2)$ è un insieme aperto non vuoto e quindi esistono $x_1 \in X$ e $0 < r_1 < \frac{1}{2}$ tali che $B_{r_1}(x_1) =: V_1 \subset \bar{V}_1 \subset U_1 \cap g^{-N_1}(U_2)$. Sia ora $N_2 \geq 0$ tale che $g^{N_2}(V_1) \cap U_3 \neq \emptyset$, cosicché, ragionando come sopra, esistono $x_2 \in X$ e $0 < r_2 < \frac{1}{4}$ tali che $B_{r_2}(x_2) =: V_2 \subset \bar{V}_2 \subset V_1 \cap g^{-N_2}(U_3)$. Procedendo induttivamente, per ogni $j \geq 1$ troviamo un intero $N_j \geq 0$ ed una bolla $V_j = B_{r_j}(x_j)$ con $0 < r_j < \frac{1}{2^j}$ tali che $\bar{V}_j \subset V_{j-1} \cap g^{-N_j}(U_{j+1})$. Poiché $V_{j+1} \subset V_j$ si ha $d(x_{j+1}, x_j) < \frac{1}{2^j}$ e pertanto la successione $\{x_j\}$ è di Cauchy. Per la completezza dello spazio metrico esiste allora $\bar{x} = \lim_{j \rightarrow \infty} x_j$, la cui orbita $\gamma_+(\bar{x})$ ha la proprietà cercata. Infatti, per costruzione, $\bar{x} \in \bar{V}_1 \subset U_1$ e $g^{N_j}(\bar{x}) \in g^{N_j}(\bar{V}_j) \subset U_{j+1}$ per ogni $j \geq 1$. \square

Per illustrare il significato del precedente teorema consideriamo i seguenti due semplici controesempi.

(i) Consideriamo lo spazio metrico (X, d) definito da

$$X = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\}, \quad d(x, y) = |x - y|,$$

e la mappa

$$g: X \rightarrow X, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{n+1} & \text{se } x = \frac{1}{n} \end{cases}$$

Chiaramente l'orbita $\gamma(1)$ è densa in X , ma g non è topologicamente transitiva poiché, considerati gli aperti (in X) $U_n = \{\frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, si ha $g^k(U_n) \cap U_{n-1} = \emptyset$ per ogni $k \geq 0$.

(ii) Sia E_2 l'espansione lineare su $S^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ definita dal raddoppio dell'angolo,²

$$E_2: S^1 \rightarrow S^1, \quad E_2(\theta) = 2\theta \pmod{2\pi}.$$

Tale mappa possiede un insieme denso di punti periodici. Infatti i punti periodici di periodo n , che indichiamo con $\text{Per}_n(E_2)$, sono gli angoli $\theta \neq 0$ tali che $2^n\theta = \theta \pmod{2\pi}$, ovvero

$$\text{Per}_n(E_2) = \left\{ \frac{2\pi k}{2^n - 1}; k = 1, \dots, 2^n - 1 \right\},$$

da cui segue che $\text{Per}(E_2) = \cup_n \text{Per}_n(E_2)$ è denso. Consideriamo allora lo spazio $X = \text{Per}(E_2)$ reso metrico con la usuale distanza tra punti di S^1 e

$$g: X \rightarrow X, \quad g(x) = E_2(x)$$

¹Ricordiamo che se z è un punto isolato dello spazio metrico (X, d) allora l'insieme $\{z\}$ costituito dal singolo punto z è un aperto in X .

²Alternativamente, identificando $S^1 = \{e^{i\theta}; \theta \in \mathbb{R}\} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, la mappa E_2 assume la forma moltiplicativa $E_2(z) = z^2$.

(la restrizione di E_2 su X). Chiaramente non esistono orbite dense di g poiché ogni orbita è finita (periodica) mentre X ha cardinalità infinita. D'altra parte, g è topologicamente transitiva. Infatti, essendo i punti di $\text{Per}_n(E_2)$ equidistanti, per ogni coppia di intervalli di S^1 esiste un'orbita periodica che li interseca entrambi.

8.2. Mescolamento topologico, caoticità e dipendenza sensibile

DEFINIZIONE 8.3. La mappa g è detta *topologicamente mescolante* se per ogni coppia di aperti U, V in X esiste un intero $N = N(U, V)$ tale che $g^n(U) \cap V \neq \emptyset$ per ogni intero $n \geq N$.

DEFINIZIONE 8.4. La mappa g è detta *caotica* se è topologicamente transitiva e l'insieme $\text{Per}(g)$ dei punti periodici è denso in X .

La proprietà centrale delle mappe topologicamente mescolanti e delle mappe caotiche (tranne casi banali) è la dipendenza sensibile dai dati iniziali, di cui diamo di seguito la definizione precisa.

DEFINIZIONE 8.5. La mappa g ha *dipendenza sensibile dai dati iniziali* se esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X$ ed ogni $\varepsilon > 0$ esistono $y \in B_\varepsilon(x)$ ed un intero $n > 0$ tali che $d(g^n(y), g^n(x)) \geq \delta$.

TEOREMA 8.6. *Valgono le seguenti implicazioni.*

- (i) *Se (X, d) non è composto da un'unica orbita periodica e g è caotica allora g ha dipendenza sensibile dai dati iniziali.*
- (ii) *Se (X, d) è composto da almeno due punti e g è topologicamente mescolante allora g ha dipendenza sensibile dai dati iniziali.*

DIMOSTRAZIONE. (i) Siano p, q punti periodici e sia $\delta < \frac{1}{8} \text{dist}(\gamma(q), \gamma(p))$. Dimostriamo la proprietà di dipendenza sensibile con tale δ . Fissato $x \in X$, si ha necessariamente $\text{dist}(x, \gamma(q)) \geq 4\delta$ oppure $\text{dist}(x, \gamma(p)) \geq 4\delta$. Supponiamo, senza perdita di generalità, che sia $\text{dist}(x, \gamma(q)) \geq 4\delta$. Fissiamo ora $\varepsilon \in (0, \delta]$ (ovviamente non è limitativo restringersi a tali valori di ε) e scegliamo $t \in B_\varepsilon(x)$ un punto periodico di g , che sappiamo esistere per l'ipotesi di caoticità della mappa. Se n è il periodo dell'orbita $\gamma(t)$, definiamo l'insieme (aperto)

$$V = \bigcap_{j=0}^n g^{-j}(B_\delta(g^j(q))).$$

Essendo g caotica sappiamo inoltre che esiste un intero k tale che $g^k(B_\varepsilon(x)) \cap V \neq \emptyset$, per cui esiste $z \in B_\varepsilon(x)$ tale che $g^k(z) \in V$. Sia $\ell \in \mathbb{N}$ tale che $k < n\ell \leq k+n$ e poniamo $N = n\ell$. Si ha allora

$$\begin{aligned} d(g^N(t), g^N(z)) &= d(t, g^N(z)) \geq d(x, g^{N-k}(q)) - d(x, t) - d(g^N(z), g^{N-k}(q)) \\ &\geq 4\delta - \varepsilon - d(g^N(z), g^{N-k}(q)) \geq 3\delta - d(g^N(z), g^{N-k}(q)), \end{aligned}$$

avendo usato la disuguaglianza triangolare $d(x, g^{N-k}(q)) \leq d(x, t) + d(t, g^N(z)) + d(g^N(z), g^{N-k}(q))$ nella prima stima. Osserviamo ora che, essendo $g^k(z) \in V$ ed

$N - k \leq n$, si ha $g^k(z) \in g^{-(N-k)}(B_\delta(g^{N-k}(q)))$ e quindi $g^N(z) = g^{N-k}(g^k(z)) \in B_\delta(g^{N-k}(q))$, cosicché $d(g^N(z), g^{N-k}(q)) \leq \delta$. Pertanto $d(g^N(t), g^N(z)) \geq 2\delta$, per cui deve aversi almeno $d(g^N(x), g^N(z)) \geq \delta$ oppure $d(g^N(x), g^N(t)) \geq \delta$. La proprietà di dipendenza sensibile come in Definizione 8.5 segue allora scegliendo, corrispondentemente, $y = z$ o $y = t$.

(ii) Siano $x_1, x_2 \in X$ e scegliamo $\delta < \frac{1}{4}d(x_1, x_2)$. Per ipotesi, fissati $x \in X$ ed $\varepsilon \in (0, \delta]$ esiste $N \geq 0$ tale che $g^n(B_\varepsilon(x)) \cap B_\delta(x_i) \neq \emptyset$ per ogni $i = 1, 2$ ed $n \geq N$. Pertanto, fissato $n \geq N$, esistono $y_1, y_2 \in B_\varepsilon(x)$ tali che $d(g^n(y_i), x_i) \leq \delta$, $i = 1, 2$. Ne segue che $d(g^n(y_1), g^n(y_2)) \geq 2\delta$ e quindi deve aversi $d(g^n(x), g^n(y_i)) \geq \delta$ per almeno $i = 1$ o $i = 2$. La proprietà di dipendenza sensibile come in Definizione 8.5 segue allora scegliendo, corrispondentemente, $y = y_1$ o $y = y_2$. \square

8.3. Esempi elementari

Un esempio di mappa topologicamente transitiva è fornito dalle traslazioni sul toro, introdotte nell'Osservazione 4.6, nel caso in cui si applica il teorema della media. Precisamente, assegnato $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, consideriamo la mappa

$$g_\alpha: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n \quad : \quad g_\alpha(\theta) = \theta + \alpha \pmod{2\pi}$$

e supponiamo che i numeri $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, 2\pi)$ siano razionalmente indipendenti, vedi Eq. (4.23). Allora, valendo il limite (4.24), ne segue in particolare che ogni orbita è densa sul toro, dunque la mappa g_α è topologicamente transitiva essendo \mathbb{T}^n uno spazio perfetto.

Viceversa, se esistono $(k, q) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}$ tali che $\langle k, \alpha \rangle = 2\pi q$ con $k \neq 0$, allora la mappa non è topologicamente transitiva. Infatti, ad esempio, la funzione $\cos(\langle k, \theta \rangle)$ è costante lungo le orbite e pertanto nessuna di queste può essere densa sul toro.

Osserviamo che la traslazione sul toro non può essere topologicamente mescolante. Un modo di vederlo è notare che si tratta di un'isometria. Infatti sussiste la seguente semplice proposizione.

PROPOSIZIONE 8.7. *Sia $g: X \rightarrow X$ un'isometria³ sullo spazio metrico (X, d) . Allora g non ha dipendenza sensibile dai dati iniziali.*

DIMOSTRAZIONE. Ovvio: qualsiasi sia $\delta > 0$, se $\varepsilon < \delta$ e $y \in B_\varepsilon(x)$ allora si ha $d(g^n(y), g^n(x)) = \varepsilon < \delta$ per ogni $n \geq 0$. \square

Un esempio elementare di mappa caotica e topologicamente mescolante è fornito dall'espansione lineare E_2 su S^1 introdotta nella sezione precedente. Abbiamo già mostrato che essa possiede un insieme denso di punti periodici, dimostriamo ora che è topologicamente mescolante, e quindi anche caotica. A tal scopo è sufficiente osservare che per ogni intervallo $I = (\theta_1, \theta_2)$ contenuto in S^1 esiste un intero n_I tale che $g^n(I) = S^1$ per ogni $n \geq n_I$ (basta scegliere $n_I > 2\pi/|I|$).

³Ovvero $d(g(x), g(x')) = d(x, x')$ per ogni $x, x' \in X$

8.4. Mappa iperbolica sul toro (mappa del gatto di Arnold)

Si tratta di un esempio famoso di dinamica caotica invertibile (a differenza delle mappe espansive tipo E_2 che non sono invertibili). Per la sua definizione, si parte dalla mappa lineare su \mathbb{R}^2 definita dalla matrice unimodulare⁴

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $z \in (2\pi\mathbb{Z})^2$ implica $Az, A^{-1}z \in (2\pi\mathbb{Z})^2$, la mappa lineare A induce un diffeomorfismo sul toro $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$, precisamente l'applicazione $F_A: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ tale che

$$F_A(\theta) = (2\theta_1 + \theta_2, \theta_1 + \theta_2) \pmod{2\pi},$$

con inversa

$$F_A^{-1}(\theta) = F_{A^{-1}}(\theta) = (\theta_1 - \theta_2, 2\theta_2 - \theta_1) \pmod{2\pi}.$$

In Figura 8.1 è descritta l'azione di F_A sul toro, che si ottiene applicando la matrice A ai punti della cella $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ e riportando successivamente quelli che escono dalla cella all'interno della stessa mediante l'identificazione degli elementi nella stessa classe di equivalenza del quoziente $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$. L'effetto finale è che il quadrato iniziale viene "mischiato" (e si può immaginare l'effetto delle successive iterazione della mappa). L'origine del nome "mappa del gatto di Arnold" è dovuta al fatto che il matematico V.I. Arnold ne spiega l'azione disegnando la testa di un gatto nella cella e mostrandone l'immagine dopo l'azione della mappa F_A , vedi Figura 8.2.

Osserviamo $\theta = 0$ è l'unico punto fisso della mappa F_A . Mostriamo che trattasi di un punto fisso iperbolico. A tal scopo osserviamo preliminarmente che $DF_A(\theta) = A$ per ogni $\theta \in \mathbb{T}^2$; infatti la mappa è non-lineare solo per l'operazione di quoziente, per cui la sua jacobiana, che agisce sullo spazio tangente $T_\theta \mathbb{T}^2 \approx \mathbb{R}^2$ coincide con l'azione della matrice A . Ma la matrice A possiede autovalori

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2},$$

da cui l'iperbolicità del punto fisso essendo $0 < \lambda_2 < 1 < \lambda_1$. I corrispondenti autovettori,

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{pmatrix},$$

generano i sottospazi instabile ed stabile,

$$E^- = \{\alpha u_1; \alpha \in \mathbb{R}\}, \quad E^+ = \{\alpha u_2; \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

La semplicità della mappa permette di calcolare anche le varietà stabile ed instabile del punto fisso. In effetti queste coincidono con le curve sul toro che si ottengono proiettando (attraverso l'operazione di quoziente) le rette passanti

⁴Viene detta unimodulare una matrice quadrata con valori interi ed avente determinante pari a 1 o -1.

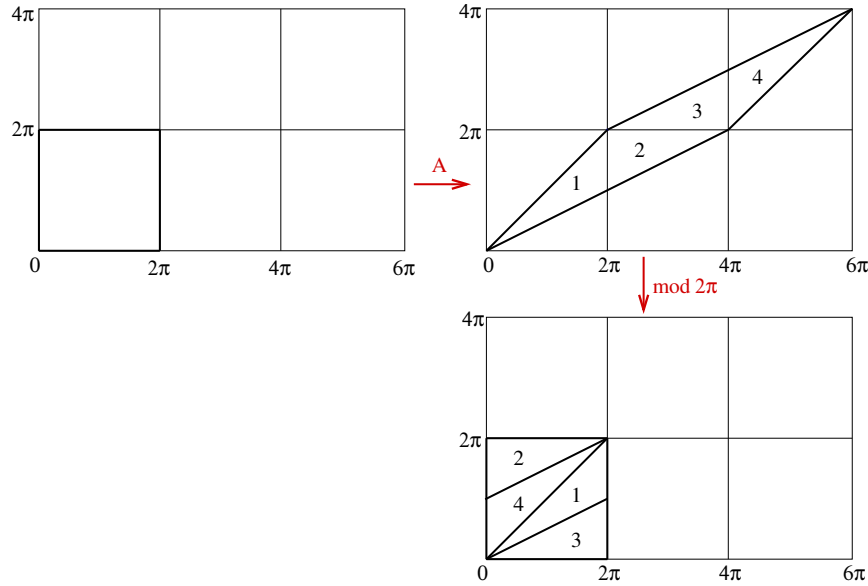


FIGURA 8.1. Azione di F_A sui punti della cella fondamentale $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ del toro $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$.

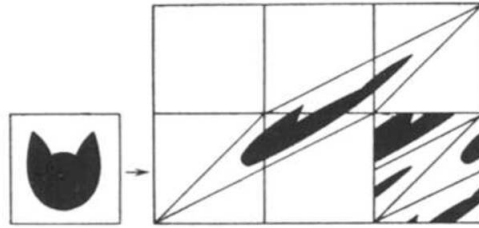


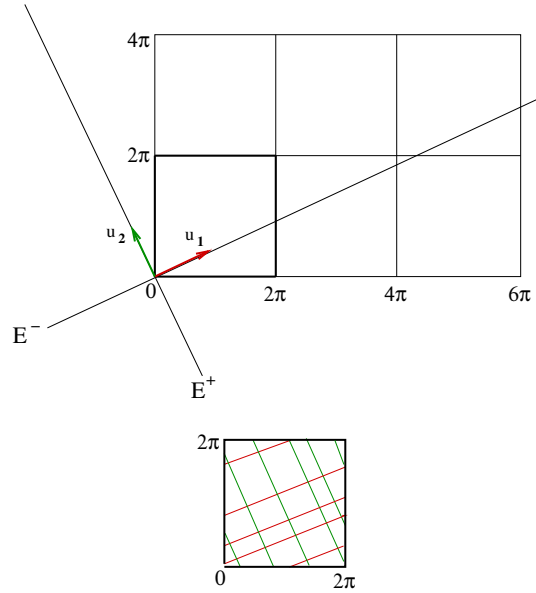
FIGURA 8.2. Immagine presa in prestito dal libro: V.I. Arnold, Metodi geometrici della teoria delle equazioni differenziali ordinarie. Editori riuniti 1989.

per l'origine del piano e dirette, rispettivamente, come gli autovettori u_2 ed u_1 . Dunque,

$$W^+(0) = \left\{ \theta \in \mathbb{T}^2 : \theta = \left(t, -\frac{\sqrt{5}+1}{2} t \right) \pmod{2\pi}, t \in \mathbb{R} \right\},$$

$$W^-(0) = \left\{ \theta \in \mathbb{T}^2 : \theta = \left(t, \frac{\sqrt{5}-1}{2} t \right) \pmod{2\pi}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Notiamo ora che $W^\pm(0)$ sono le curve di fase passanti per $\theta = 0$ relative al flusso lineare su \mathbb{T}^2 di frequenze $\omega^\pm = \left(1, \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2} \right)$. Essendo tali frequenze razionalmente indipendenti ne segue che le varietà stabile ed instabile riempiono uniformemente il toro. Inoltre, poiché le direzioni u_1 ed u_2 sono tra loro ortogonali, tali curve si intersecano ortogonalmente, dando luogo ad un insieme

FIGURA 8.3. Sottospazi e varietà invarianti del punto fisso di F_A .

denso di punti omoclini al punto fisso $\theta = 0$ (più precisamente trattasi di punti omoclini trasversi.)⁵

PROPOSIZIONE 8.8. *L'insieme dei punti periodici della mappa F_A coincide con l'insieme dei punti di \mathbb{T}^2 di coordinate commensurabili con π : $\text{Per}(F_A) = (2\pi\mathbb{Q}/2\pi\mathbb{Z})^2$. In particolare, $\text{Per}(F_A)$ è denso in \mathbb{T}^2 .*

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo separatamente che (i) $(2\pi\mathbb{Q}/2\pi\mathbb{Z})^2 \subseteq \text{Per}(F_A)$ e che (ii) $\text{Per}(F_A) \subseteq (2\pi\mathbb{Q}/2\pi\mathbb{Z})^2$.

(i) Sia

$$\theta = 2\pi\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{q}\right)$$

con p, r, q interi non negativi tali che $p, r < q$. Allora

$$F_A(\theta) = 2\pi\left(\frac{2p+r}{q}, \frac{p+r}{q}\right) \pmod{2\pi},$$

e pertanto

$$F_A^n(\theta) = 2\pi\left(\frac{s}{q}, \frac{t}{q}\right) \pmod{2\pi},$$

con s, t interi non negativi. Ma esistono solo q^2 punti distinti in \mathbb{T}^2 di questa forma, per cui l'orbita $\{F_A^n(\theta)\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un insieme finito. Dunque esistono due interi positivi $m > m'$ tali che $F_A^m(\theta) = F_A^{m'}(\theta)$, da cui $\theta = F_A^{m-m'}(\theta)$, ovvero $\theta \in \text{Per}(F_A)$.

⁵Ovvero punti $v \in W^+(0) \cap W^-(0)$, $v \neq 0$, tali che $T_v W^+(0) \oplus T_v W^-(0) = \mathbb{R}^2$, si veda più avanti la parte sulla teoria iperbolica.

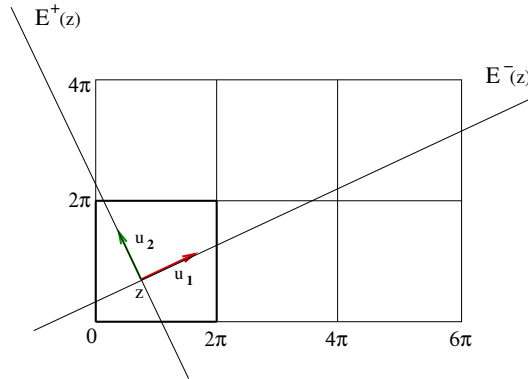


FIGURA 8.4. Le famiglie di rette $E^\pm(z)$ (che proiettate formano le famiglie invarianti di curve $W^\pm(\theta)$).

(ii) L'equazione di punto fisso per la mappa F_A^n si scrive

$$F_A^n(\theta) = \theta \pmod{2\pi} \iff (A^n - I)\theta = 2\pi k, \text{ per qualche } k \in \mathbb{Z}^2.$$

Ma $\det(A^n - I) \neq 0$ poiché λ_1, λ_2 non sono radici dell'unità e quindi $1 \notin \sigma(A^n)$ qualsiasi sia l'intero positivo n . Ne segue che l'equazione di punto fisso ammette la soluzione $\theta = 2\pi(A^n - I)^{-1}k$, che è un elemento di $(2\pi\mathbb{Q})^2$ poiché la matrice $(A^n - I)^{-1}$ ha elementi razionali. \square

TEOREMA 8.9. *La mappa F_A è topologicamente mescolante.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo le famiglie di rette $\{E^-(z)\}_{z \in \mathbb{R}^2}$ e $\{E^+(z)\}_{z \in \mathbb{R}^2}$ così definite (vedi Figura 8.4),

$$E^-(z) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = z + tu_1, t \in \mathbb{R}\}, \quad E^+(z) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = z + tu_2, t \in \mathbb{R}\}.$$

Dalle ovvie identità $A(z + tu_i) = Az + \lambda_i tu_i$, $i = 1, 2$, deduciamo che tali famiglie sono invarianti sotto l'azione della matrice A , precisamente $AE^\pm(z) = E^\pm(Az)$, e che

$$|Ax - Az| = \begin{cases} \lambda_1 |x - z| & \text{se } x \in E^-(z), \\ \lambda_2 |x - z| & \text{se } x \in E^+(z). \end{cases}$$

Proiettando queste rette sul toro otteniamo due famiglie di curve $\{W^\pm(\theta)\}_{\theta \in \mathbb{T}^2}$, con

$$W^-(\theta) = \{\theta' : \theta' = \theta + tu_1 \pmod{2\pi}, t \in \mathbb{R}\},$$

$$W^+(\theta) = \{\theta' : \theta' = \theta + tu_2 \pmod{2\pi}, t \in \mathbb{R}\},$$

che hanno le seguenti proprietà:

- (1) $F_A W^\pm(\theta) = W^\pm(F_A(\theta))$ (in particolare sono invarianti sotto l'azione di F_A);
- (2) se $J = \{\theta + tu_i : |t| < k\}$ allora $|F_A^n(J)| = \lambda_i^n |J|$, $i = 1, 2$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$;
- (3) ciascuna curva $W^\pm(\theta)$ si distribuisce uniformemente su \mathbb{T}^2 .

Il punto (2) afferma che F_A dilata di un fattore λ_1 nella direzione u_1 e contrae di un fattore $\lambda_2 = \lambda_1^{-1}$ nella direzione u_2 . Il punto (3) segue dal fatto che $W^\pm(\theta)$

sono le curve di fase passanti per θ relative al flusso lineare su \mathbb{T}^2 di frequenze $\omega^\pm = (1, \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2})$ (analogamente a quanto già osservato per le varietà invarianti $W^\pm(0)$).

Ricordiamo ora che il Teorema 4.6 sulla coincidenza delle medie stabilisce che il limite della media temporale viene raggiunto uniformemente rispetto al dato iniziale. Pertanto, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $T = T(\varepsilon) > 0$ tale che, per ogni $\theta \in \mathbb{T}^2$, qualsiasi curva $I \subset W^\pm(\theta)$ di lunghezza $|I| \geq T$ interseca ogni disco $B_\varepsilon \subset \mathbb{T}^2$ di raggio ε .

Possiamo ora dimostrare la proprietà di mescolamento topologico. Fissati due aperti U, V del toro \mathbb{T}^2 , scegliamo $\theta \in U$ e $k > 0$ tale che $J = \{\theta + tu_1 : |t| < k\} \subset U$. Sia quindi B_ε un disco di raggio ε contenuto in V (che è sempre possibile trovare pur di scegliere ε abbastanza piccolo) e sia $T = T(\varepsilon)$ come sopra. Allora, scegliendo un intero $N > 0$ tale che $\lambda_1^N |J| > T$ si ha $F_A^n(J) \cap B_\varepsilon \neq \emptyset$ per ogni $n \geq N$ e quindi, a fortiori, $F_A^n(U) \cap V \neq \emptyset$ per ogni $n \geq N$. \square

8.5. Teorema di Anosov sulla stabilità strutturale della mappa di Arnold

In questa sezione presentiamo un risultato importante ed inaspettato, noto come il Teorema di Anosov, in cui si dimostra la stabilità strutturale della mappa del gatto di Arnold nella classe di tutti i diffeomorfismi del toro.

TEOREMA 8.10 (Teorema di Anosov). *Sia $F_A: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ la mappa del gatto di Arnold e sia $B \in \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ un diffeomorfismo tale che $\|B - F_A\|_\infty + \|D(B - F_A)\|_\infty < \delta$. Esistono $\delta_0 > 0$ e $c > 0$ tali che se $\delta < \delta_0$ allora B è un diffeomorfismo coniugato a F_A per il tramite di un omeomorfismo $G: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ tale che $\|G - \text{id}\|_\infty \leq c\delta$.*

In particolare, ne segue che ogni diffeomorfismo C^1 -vicino a F_A è caotico e topologicamente mescolante.

La dimostrazione del Teorema 8.10 si basa su un risultato analogo per diffeomorfismi vicini mappe lineari iperboliche. Per semplicità di notazione (e ai fini della dimostrazione del Teorema di Anosov) consideriamo il caso bidimensionale, ma dalla dimostrazione sarà evidente come l'estensione in dimensione qualsiasi è ovvia.

PROPOSIZIONE 8.11. *Sia $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ una matrice iperbolica invertibile e $g \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ tale che $\|g\|_\infty + \|Dg\|_\infty < \delta$. Definiamo $\psi_g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\psi_g(x) := Ax + g(x)$; in particolare, $\psi_0(x) = Ax$. Esistono $\delta_0 > 0$ e $c > 0$ tali che se $\delta < \delta_0$ allora ψ_g è un diffeomorfismo coniugato a ψ_0 per il tramite di un omeomorfismo $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\|H - \text{id}\|_\infty \leq c\delta$.*

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo innanzitutto che se $\delta < 1/(2\|A^{-1}\|)$ allora ψ_g è un diffeomorfismo. In effetti:

i) ψ_g è biunivoca poiché, fissato $y \in \mathbb{R}^2$, l'equazione $\psi_g(x) = y$ si riscrive come equazione di punto fisso, $x = F(x)$, con $F(x) := A^{-1}(y - g(x))$ che è una contrazione essendo $|F(x) - F(x')| = |A^{-1}(g(x) - g(x'))| \leq \|A^{-1}\|\delta|x - x'| \leq \frac{1}{2}|x - x'|$.

ii) ψ_g^{-1} è differenziabile per il teorema della funzione inversa poiché la matrice jacobiana $D\psi_g(x) = A + Dg(x) = A(\mathbb{I} + A^{-1}Dg(x))$ è invertibile per ogni $x \in \mathbb{R}^2$ in quanto $\|A^{-1}Dg(x)\| \leq \|A^{-1}\|\delta < \frac{1}{2}$.

Costruiamo ora l'omeomorfismo H tale che $H \circ \psi_0 = \psi_g \circ H$. Cerchiamo H nella forma $H(x) = x + h(x)$ con $\|h\|_\infty < c\delta$ per un opportuno c . La funzione incognita h appartiene allo spazio di Banach $C_0(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ dei campi vettoriali continui e limitati munito della norma dell'estremo superiore. Sostituendo $H = \text{id} + h$ nell'equazione $H \circ \psi_0 = \psi_g \circ H$ otteniamo

$$Ax + h(Ax) = Ax + Ah(x) + g(x + h(x)),$$

da cui deduciamo che h deve risolvere l'equazione

$$h(Ax) - Ah(x) = g(x + h(x)),$$

che riscriviamo nella forma

$$Lh = g + \Phi(h), \quad (8.1)$$

avendo introdotto l'operatore lineare

$$L: C_0(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2) \text{ tale che } Lh(x) = h(Ax) - Ah(x)$$

ed il funzionale non lineare

$$\Phi: C_0(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2) \text{ tale che } \Phi(h)(x) := g(x + h(x)) - g(x).$$

Risolviamo dapprima il problema lineare $Lh = g$, ovvero dimostriamo l'esistenza dell'operatore inverso L^{-1} , dopodiché l'equazione non lineare verrà risolta con il metodo delle contrazioni.

Problema lineare. Consideriamo dapprima il caso in cui lo spettro della matrice iperbolica ed invertibile A consta di due autovalori reali $\lambda_\pm \neq 0$ tali che $|\lambda_+| < 1 < |\lambda_-|$. Pertanto $\mathbb{R}^2 = E^+ \oplus E^-$ con E^\pm il sottospazio unidimensionale corrispondente all'autovalore λ_\pm . In particolare $|A\xi| \leq \alpha|\xi|$ se $\xi \in E^+$ ed $|A^{-1}\xi| \leq \beta|\xi|$ se $\xi \in E^-$, con $\alpha = |\lambda_+| < 1$ e $\beta = |\lambda_-^{-1}| < 1$. Possiamo allora decomporre

$$C_0(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2) = C_0(\mathbb{R}^2; E^+) \oplus C_0(\mathbb{R}^2; E^-)$$

dove, con ovvia notazione, $C_0(\mathbb{R}^2; E^\pm)$ sono i campi vettoriali continui h tali che $h(x) \in E^\pm$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$. Assegnato $h \in C_0(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, indichiamo nel seguito con h^\pm le sue componenti in $C_0(\mathbb{R}^2; E^\pm)$.

Osserviamo che $C_0(\mathbb{R}^2; E^\pm)$ sono sottospazi chiusi di $C_0(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ ed invarianti sotto l'azione di L (infatti $h \in C_0(\mathbb{R}^2; E^\pm)$ implica banalmente che $h(Ax), Ah(x) \in E^\pm \forall x \in \mathbb{R}^2$ e quindi che $Lh \in C_0(\mathbb{R}^2; E^\pm)$). Pertanto, se decomponiamo la soluzione incognita nella forma $h = h^+ + h^-$, allora h^\pm sono soluzioni delle equazioni $Lh^\pm = g^\pm$, che possiamo risolvere separatamente. A tal scopo scriviamo L nella forma $L = S - A$, dove $Sh(x) := h(Ax)$ è un operatore di traslazione invertibile ($S^{-1}h(x) = h(A^{-1}x)$) con norma operatore $\|S\|_\infty = \|S^{-1}\|_\infty = 1$, mentre (con un abuso di notazione) A è l'operatore che agisce puntualmente con la matrice A , ovvero $(Ah)(x) := Ah(x)$. Allora:

(i) $Lh^+ = g^+$ si riscrive nella forma $(\mathbb{I} - S^{-1}A)h^+ = S^{-1}g^+$ che ha soluzione $h^+ = (\mathbb{I} - S^{-1}A)^{-1}S^{-1}g^+$ con $(\mathbb{I} - S^{-1}A)^{-1} = \sum_{j \geq 0} (S^{-1}A)^j$ ben definito essendo $\|S^{-1}A\|_\infty \leq \alpha < 1$. In particolare $\|h^+\|_\infty \leq (1 - \alpha)^{-1}\|g^+\|_\infty$.

(ii) $Lh^- = g^-$ si riscrive nella forma $(\mathbb{I} - A^{-1}S)h^- = -A^{-1}g^-$ che ha soluzione $h^- = -(\mathbb{I} - A^{-1}S)^{-1}A^{-1}g^-$ con $(\mathbb{I} - A^{-1}S)^{-1} = \sum_{j \geq 0} (A^{-1}S)^j$ ben definito essendo $\|A^{-1}S\|_\infty \leq \beta < 1$. In particolare $\|h^-\|_\infty \leq \beta(1 - \beta)^{-1}\|g^-\|_\infty$.

In conclusione, esiste L^{-1} con norma $\|L^{-1}\|_\infty \leq (1 - \alpha)^{-1} + \beta(1 - \beta)^{-1}$.

Se invece gli autovalori λ_\pm della matrice A sono tali che $0 < |\lambda_\pm| < 1$ (contrazione) oppure $|\lambda_\pm| > 1$ (espansione), fissiamo una norma adattata tale che, per opportuni $\alpha, \beta < 1$, si abbia $|A\xi| \leq \alpha|\xi| \forall \xi \in \mathbb{R}^2$ nel caso A sia una contrazione, ovvero $|A^{-1}\xi| \leq \beta|\xi| \forall \xi \in \mathbb{R}^2$ nel caso A sia un'espansione. L'esistenza di L^{-1} si deduce allora riscrivendo l'equazione $Lh = g$ nella forma $(\mathbb{I} - S^{-1}A)h = S^{-1}g$ nel caso A sia una contrazione, ovvero $(\mathbb{I} - A^{-1}S)h = -A^{-1}g$ nel caso A sia un'espansione, e ragionando come fatto, rispettivamente, nei precedenti punti (i) e (ii).

Problema non lineare. Riscriviamo l'Eq. (8.1) nella forma

$$h = L^{-1}g + L^{-1}\Phi(h).$$

che è l'equazione di punto fisso per il funzionale

$$F: C_0(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2) \text{ tale che } F(h) := L^{-1}g + L^{-1}\Phi(h).$$

Poiché $\|F(h_1) - F(h_2)\|_\infty \leq \|L^{-1}\|_\infty \delta \|h_1 - h_2\|_\infty$, se assumiamo $\delta < 1/(2\|L^{-1}\|_\infty)$ allora $\|F(h_1) - F(h_2)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|h_1 - h_2\|_\infty$, dunque F è una contrazione e l'equazione di punto fisso ammette un'unica soluzione $h \in C_0(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$. Inoltre,

$$\begin{aligned} \|h\|_\infty &= \|F(h)\|_\infty \leq \|L^{-1}g\|_\infty + \|L^{-1}\Phi(h)\|_\infty \leq \|L^{-1}\|_\infty(\delta + \delta\|h\|_\infty) \\ &\leq \|L^{-1}\|_\infty\delta + \frac{1}{2}\|h\|_\infty, \end{aligned}$$

da cui $\|h\|_\infty \leq c\delta$ con $c = 2\|L^{-1}\|_\infty$.

Conclusion. Rimane da dimostrare che $H = \text{id} + h$ è omeomorfismo. A tal scopo è sufficiente dimostrare che H è biunivoca, poiché la continuità della funzione inversa H^{-1} segue allora da un teorema generale di topologia, noto come Teorema sull'Invarianza del Dominio.⁶

Per dimostrare l'iniettività osserviamo che dalla relazione $H \circ \psi_0 = \psi_g \circ H$ segue banalmente $H \circ \psi_0^{-1} = \psi_g^{-1} \circ H$ e quindi $H \circ \psi_0^k = \psi_g^k \circ H$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Supponiamo ora che siano x, y tali che $H(x) = H(y)$. Allora

$$H \circ \psi_0^k(x) = \psi_g^k \circ H(x) = \psi_g^k \circ H(y) = H \circ \psi_0^k(y)$$

⁶Una dimostrazione "breve" e semplice di questo teorema si trova alla pagina <https://terrytao.wordpress.com/2011/06/13/brouwers-fixed-point-and-invariance-of-domain-theorems-and-hilberts-fifth-problem/> del sito di Terence Tao.

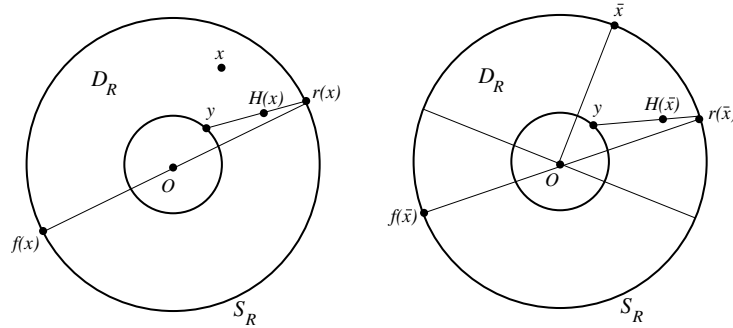


FIGURA 8.5. A sinistra: costruzione della mappa $f: D_R \rightarrow D_R$. A destra: se $\bar{x} \in S_R$ allora $|H(\bar{x}) - \bar{x}| \leq R - |y|$, cosicché $r(\bar{x})$ deve giacere sulla semicirconferenza che contiene \bar{x} ed è sottesa dal diametro ortogonale alla direzione \bar{x} . In particolare $\bar{x} \neq f(\bar{x})$, dunque f non può avere un punto fisso.

e quindi $A^k x - A^k y = h(A^k y) - h(A^k x)$. Ma $|h(A^k y) - h(A^k x)| \leq 2c\delta$ mentre, essendo A iperbolica, se $x - y \neq 0$ allora $|A^k(x - y)|$ diverge in almeno uno dei limiti $k \rightarrow +\infty$ o $k \rightarrow -\infty$. Ne segue che deve aversi necessariamente $x = y$.

Infine, per dimostrare la suriettività, ragioniamo per assurdo e supponiamo che esista $y \notin H(\mathbb{R}^2)$. Scelto ora $R > |y| + c\delta$ e considerato il disco chiuso $D_R = \{x: |x| \leq R\}$ e la sua frontiera $S_R = \{x: |x| = R\}$, poniamo

$$r: D_R \rightarrow S_R \text{ tale che } r(x) = y + t(H(x) - y) \text{ con } t > 0 \text{ per cui } r(x) \in S_R.$$

La funzione r è ben definita poiché $y - H(x) \neq 0$ per ogni $x \in D_R$ (essendo $y \notin H(\mathbb{R}^2)$). Inoltre è una funzione continua, cosicché l'applicazione $f: D_R \rightarrow D_R$ ottenuta ponendo $f(x) = -r(x)$ è anch'essa continua, vedi Figura 8.5 a sinistra. Pertanto, per il teorema del punto fisso di Brouwer, possiede almeno un punto fisso. Dalla definizione di f segue che dovrebbe quindi esistere un punto $\bar{x} \in S_R$ tale che $\bar{x} = -r(\bar{x})$. Mostriamo che questo non è possibile, da cui l'assurdo. A tal scopo notiamo che

$$|H(\bar{x}) - \bar{x}| \leq c\delta < R - |y|,$$

cosicché $r(\bar{x})$ giace sicuramente sulla semicirconferenza che contiene \bar{x} ed è sottesa dal diametro ortogonale alla direzione \bar{x} , dunque $r(\bar{x}) \neq -\bar{x}$ necessariamente, vedi Figura 8.5 a destra. \square

Possiamo ora dimostrare il Teorema di Anosov.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 8.10. Sia $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la funzione periodica definita da $g(x) = B(\theta) - F_A(\theta)$ per x nella classe di equivalenza di θ . Allora $\psi_g(x) = Ax + g(x)$, con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, soddisfa le ipotesi della Proposizione 1 essendo $\|g\|_\infty + \|Dg\|_\infty < \delta$, con in più la proprietà di periodicità di g . Se indichiamo ora con $C_{\text{per}}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ il sottospazio chiuso di $C_0(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ costituito dai campi vettoriali continui e periodici, notiamo che tale sottospazio è invariante sotto l'azione di L e Φ , per cui possiamo procedere come nella dimostrazione della Proposizione 1,

ma risolvendo l'equazione (8.1) in tale sottospazio. In tal modo otteniamo l'omeomorfismo $H = \text{id} + h$ di coniugio tra ψ_g e ψ_0 con la proprietà ulteriore che $h \in C_{\text{per}}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$. In particolare, $H(x) - H(y) \in (2\pi\mathbb{Z})^2$ se $x - y \in (2\pi\mathbb{Z})^2$, cosicché H induce un omeomorfismo G sul toro che, per costruzione, possiede le proprietà volute. \square

Concludiamo la sezione osservando che dalla Proposizione 8.11, o meglio dalla sua versione in dimensione qualsiasi, segue un altro importante teorema della teoria dei sistemi dinamici, noto come Teorema di Hartman-Grobman o teorema di linearizzazione, che descrive il comportamento di un sistema dinamico nell'intorno di un punto di equilibrio iperbolico da un punto di vista topologico.

TEOREMA 8.12 (Teorema di Hartman-Grobman). *Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice iperbolica. Allora ogni diffeomorfismo $\psi: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{D}$ con punto fisso iperbolico $\bar{x} \in \mathcal{D}$ tale che $D\psi(\bar{x}) = A$ è localmente omeomorfo a $\psi_0(x) = \bar{x} + A(x - \bar{x})$.*

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo come nella dimostrazione del teorema sulle varietà stabile ed instabile. Sia $\eta: \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ una funzione infinitamente derivabile tale che $\eta(s) = 1$ se $s \leq 1$, $\eta(s) = 0$ se $s \geq 2$ e $|\eta'(s)| \leq 2$ per ogni $s \in \mathbb{R}_+$. Definiamo, per ogni ε tale che $\overline{B_{2\varepsilon}(\bar{x})} \subset \mathcal{D}$,

$$g(x) = \begin{cases} [\psi(x) - \bar{x} - A(x - \bar{x})]\eta(|x - \bar{x}|/\varepsilon) & \text{se } x \in B_{2\varepsilon}(\bar{x}), \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{2\varepsilon}(\bar{x}), \end{cases}$$

cosicché $g(\bar{x}) = 0$, $Dg(\bar{x}) = 0$, e $\|g\|_\infty + \|Dg\|_\infty < \delta$ con $\delta \rightarrow 0$ per $\varepsilon \rightarrow 0$. Possiamo allora applicare la Proposizione 8.11 e costruire un omeomorfismo di coniugio H tra $\psi_0(x) = \bar{x} + A(x - \bar{x})$ e $\psi_g(x) = \bar{x} + A(x - \bar{x}) + g(x)$. In particolare, $H(\bar{x}) = \bar{x}$ essendo \bar{x} l'unico punto fisso di ψ_g e ψ_0 :⁷

$$H(\bar{x}) = H(\psi_0(\bar{x})) = \psi_g(H(\bar{x})) \implies H(\bar{x}) = \bar{x}.$$

La restrizione di H in un intorno sufficientemente piccolo di \bar{x} fornisce l'omeomorfismo locale cercato. \square

⁷L'unicità del punto fisso di ψ_g segue dal fatto che l'equazione $\psi_g(x) = x$ si riscrive nella forma $(\text{II} - A)(x - \bar{x}) = g(x)$ e quindi $x = \bar{x} + (\text{II} - A)^{-1}g(x) =: G(x)$, con $G(x)$ contrazione poiché $|G(x) - G(x')| \leq \|(\text{II} - A)^{-1}\|\delta$ e, nella costruzione dell'omeomorfismo H , abbiamo scelto $\delta < 1/(2\|L^{-1}\|_\infty) \leq 1/(2\|(\text{II} - A)^{-1}\|)$.

Dinamica iperbolica

In questo capitolo introduciamo una classe particolarmente importante di sistemi dinamici, detti sistemi iperbolici. La proprietà di iperbolicità di un sistema, che può essere presente in tutto lo spazio delle fasi o in qualche sua parte, rappresenta uno dei meccanismi più diffusi che danno luogo a dinamiche complesse. In particolare, l'emergenza di moti caotici in sistemi differenziali di dimensione $n > 2$ può essere individuata dalla presenza di intersezioni trasverse tra le varietà stabile ed instabili di opportune mappe di Poincaré.

9.1. Insiemi iperbolici, Ombra-Lemma

La proprietà centrale della mappa del gatto di Arnold, che si può dimostrare essere preservata dall'omeomorfismo di coniugio con diffeomorfismi C^1 -vicini, è l'esistenza di una decomposizione dello spazio tangente in ogni punto in due famiglie invarianti di sottospazi tali che la linearizzazione della mappa contrae su uno e dilata sull'altro.

In quanto segue, quando non altrimenti specificato, (M, ψ) indica un sistema dinamico in cui M è un aperto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ o, più in generale, una varietà di dimensione n , e $\psi: M \rightarrow M$ un diffeomorfismo. Indichiamo con $d(x, y)$ la distanza tra i punti $x, y \in M$.

DEFINIZIONE 9.1 (Insiemi iperbolici, diffeomorfismi di Anosov). Il sottoinsieme Λ di M è detto un *insieme iperbolico* per ψ se

- (i) Λ è compatto ed invariante ($\psi(\Lambda) = \Lambda$);
- (ii) esiste una decomposizione continua $x \mapsto E_x^\pm$ dello spazio tangente ad M , $T_x M = E_x^+ \oplus E_x^-$, per $x \in \Lambda$, in famiglie invarianti: $D\psi(x)E_x^\pm = E_{\psi(x)}^\pm$;
- (iii) esistono costanti $K > 0$ e $\mu \in (0, 1)$ tali che

$$|D\psi^{\pm k}(x)\xi| \leq K\mu^k|\xi| \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \Lambda \quad \forall \xi \in E_x^\pm. \quad (9.1)$$

Un *diffeomorfismo (o sistema) di Anosov* è un diffeomorfismo $\psi: M \rightarrow M$, con M varietà compatta, tale che l'intero spazio delle fasi M costituisce un insieme iperbolico.

La mappa del gatto di Arnold fornisce chiaramente un esempio di sistema di Anosov. Come già osservato, si può dimostrare che anche i diffeomorfismi C^1 -vicini a F_A possiedono tale proprietà. Più in generale, vale una versione

più generale del teorema di Anosov, in cui si dimostra che ogni sistema di Anosov è strutturalmente stabile (non sorprende, visto che tutta la costruzione della Sezione 8.5 si basa sulla decomposizione in famiglie invarianti dello spazio tangente).

ESEMPIO 9.1. Chiaramente se \bar{x} è un punto fisso iperbolico del diffeomorfismo ψ , l'insieme $\Lambda = \{\bar{x}\}$ è un insieme iperbolico, con $E_{\bar{x}}^{\pm} = E^{\pm}$ gli spazi stabile ed instabile di $D\psi(\bar{x})$.

Più in generale, supponiamo che \bar{x} sia un punto fisso iperbolico di $\Psi := \psi^N$ per qualche intero positivo $N > 1$. Quindi $\bar{x} \in \text{Per}_N(\psi)$ e l'orbita $\gamma(\bar{x})$ è periodica,

$$\gamma(\bar{x}) = \{p_0, \dots, p_{N-1}\} \quad (p_0 = \bar{x}, \quad p_j = \psi^j(\bar{x})).$$

Dimostriamo che $\Lambda := \gamma(\bar{x})$ ha la struttura di insieme iperbolico per ψ . Chiaramente Λ è compatto ed invariante. Costruiamo ora la decomposizione $x \mapsto E_x^{\pm}$, $x \in \Lambda$. Siano E^{\pm} i sottospazi stabile ed instabile della matrice iperbolica $D\Psi(\bar{x})$. Definiamo

$$E_{p_0}^{\pm} = E^{\pm}, \quad E_{p_j}^{\pm} := D\psi(p_{j-1})E_{p_{j-1}}^{\pm} \quad \forall j = 1, \dots, N-1.$$

Osserviamo che, per la regola di derivazione delle funzioni composte,

$$E_{p_j}^{\pm} = D\psi(p_{j-1})D\psi(p_{j-2}) \cdots D\psi(p_0)E^{\pm} = D\psi^j(p_0)E^{\pm} = D\psi^j(\bar{x})E^{\pm}.$$

La proprietà di invarianza

$$D\psi(p_j)E_{p_j}^{\pm} = E_{\psi(p_j)}^{\pm} = E_{p_{j+1}}^{\pm} \quad \forall j = 0, \dots, N-1$$

è banalmente verificata per $j = 0, \dots, N-2$, mentre per $j = N-1$ è sufficiente osservare che $p_N = \psi(p_{N-1}) = p_0$ e

$$D\psi(p_{N-1})E_{p_{N-1}}^{\pm} = D\psi(p_{N-1})D\psi^{N-1}(\bar{x})E^{\pm} = D\Psi(\bar{x})E^{\pm} = E^{\pm} = E_{p_N}^{\pm}.$$

Notiamo inoltre che $T_{p_j}M = E_{p_j}^+ \oplus E_{p_j}^-$ poiché ψ^j è un diffeomorfismo (quindi $D\psi^j(\bar{x})$ è invertibile) e $T_{p_0}M = E^+ \oplus E^-$ per la scelta di E^{\pm} .

Rimane da dimostrare la stima (9.1). Se $k \in \mathbb{N}$ scriviamo $k = i + Nh$ con h la parte intera di k/N ed $i = k - Nh \in \{0, \dots, N-1\}$. Essendo $D\psi^{Nh}(p_0) = [D\Psi(\bar{x})]^h$,

$$D\psi^k(p_j) = D\psi^{j+k}(p_0)D\psi^{-j}(p_j) = D\psi^{j+i}(p_0)[D\Psi(p_0)]^h D\psi^{-j}(p_j).$$

Allora, posto

$$\bar{C} = \max_{|s| \leq 2N} \max_{p \in \gamma(p_0)} \|D\psi^s(p)\|$$

ed applicando le stime (5.29) alla matrice $D\Psi(p_0)$, si ha, per ogni $\xi \in E_{p_j}^+$,

$$|D\psi^k(p_j)\xi| \leq \bar{C}^2 C \theta_+^h |\xi|,$$

da cui la stima (9.1) con $K = C\bar{C}^2/\theta_+$ e $\mu = \theta_+^{1/N}$. Analogamente si ragiona per i vettori $\xi \in E_{p_j}^-$.

La dinamica in prossimità di un insieme iperbolico è altamente imprevedibile e tale comportamento è ben descritto da un importante risultato, noto in letteratura come il *Lemma dell'orbita ombra* (o *Ombra-Lemma*), per la cui formulazione sono richieste alcune definizioni preliminari.

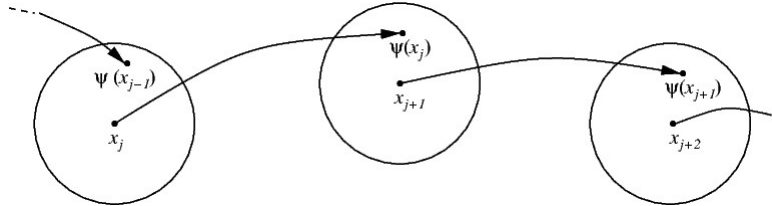


FIGURA 9.1. ε -pseudo-orbita del diffeomorfismo ψ .

DEFINIZIONE 9.2. Sia $\varepsilon > 0$. La sequenza $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \subset M$ è detta ε -pseudo-orbita di ψ se

$$d(x_{i+1}, \psi(x_i)) < \varepsilon \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

DEFINIZIONE 9.3. Siano $\delta > 0$ e $\{q_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \subset M$ una sequenza. L'orbita $\{p_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ del diffeomorfismo $\psi: M \rightarrow M$ [dunque $p_{i+1} = \psi(p_i)$] si dice una δ -ombra-orbita di $\{q_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ se

$$d(p_i, q_i) < \delta \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

L'Ombra-Lemma stabilisce che ε -pseudo-orbite costituite da punti di un insieme iperbolico possono essere ombreggiate da orbite vere; quanto migliore è l'ombreggiamento (cioè quanto più piccolo è richiesto essere δ) tanto più la pseudo-orbita dovrà, in principio, essere prossima ad una vera orbita (quindi ε piccolo).

TEOREMA 9.4 (Lemma dell'orbita ombra). *Sia Λ un insieme iperbolico del diffeomorfismo ψ . Allora esiste $\delta_0 > 0$ tale che ad ogni $\delta \in (0, \delta_0)$ corrisponde un numero $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ in modo che ciascuna ε -pseudo-orbita $\{q_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ di punti in Λ ammette un'unica δ -ombra-orbita $\{p_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$:*

$$\forall \{q_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \subset \Lambda: d(q_{i+1}, \psi(q_i)) < \varepsilon \quad \exists! \{p_i\}_{i \in \mathbb{Z}}: d(p_i, q_i) < \delta, \quad p_{i+1} = \psi(p_i)$$

Se inoltre

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} d(q_{i+1}, \psi(q_i)) = 0 \quad \left[\text{risp.} \quad \lim_{i \rightarrow -\infty} d(q_{i+1}, \psi(q_i)) = 0 \right] \quad (9.2)$$

allora

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} d(p_i, q_i) = 0 \quad \left[\text{risp.} \quad \lim_{i \rightarrow -\infty} d(p_i, q_i) = 0 \right]. \quad (9.3)$$

DIMOSTRAZIONE. Per semplicità di notazione assumiamo che $M = \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$. Sia $q = \{q_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ una ε -pseudo-orbita di ψ , con $\varepsilon > 0$ da fissare in seguito. Cerchiamo un'orbita vera di ψ , $p = \{p_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, prossima a q , nella forma $p = q + x = \{q_i + x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ per qualche $x = \{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$. Quindi x deve essere soluzione dell'equazione:

$$q_i + x_i = \psi(q_{i-1} + x_{i-1}), \quad i \in \mathbb{Z},$$

che riscriviamo nella forma:

$$x_i = D\psi(q_{i-1})x_{i-1} + f_i(x_{i-1}), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (9.4)$$

essendo:

$$f_i(x_{i-1}) := [\psi(q_{i-1} + x_{i-1}) - D\psi(q_{i-1})x_{i-1} - \psi(q_{i-1})] + \psi(q_{i-1}) - q_i.$$

Notiamo che:

$$f_i(0) = \psi(q_{i-1}) - q_i, \quad Df_i(x_{i-1}) = D\psi(q_{i-1} + x_{i-1}) - D\psi(q_{i-1}).$$

In particolare, essendo q una ε -pseudo-orbita e poiché Λ è compatto,

$$\left\{ \begin{array}{l} i) \quad |f_i(0)| < \varepsilon \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \\ ii) \quad \sup_{j \in \mathbb{Z}} \|Df_j(x_{j-1})\| \rightarrow 0 \text{ se } \sup_{j \in \mathbb{Z}} |x_j| \rightarrow 0. \end{array} \right. \quad (9.5)$$

Introduciamo lo spazio di Banach

$$E := \{y = \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}} : |y| < \infty\}, \quad |y| := \sup_{i \in \mathbb{Z}} |y_i|.$$

Cerchiamo la soluzione dell'Eq. (9.4) in tale spazio (infatti se $p = q + x$ ombreggia la sequenza limitata $q \subset \Lambda$ allora $x \in E$). Riscriviamo l'Eq. (9.4) nella forma:

$$(\mathbb{I} - L)x = F(x), \quad (9.6)$$

dove:

$$(Lx)_i := D\psi(q_{i-1})x_{i-1}, \quad F(x)_i := f_i(x_{i-1}).$$

In particolare, L è un operatore lineare e continuo su E , F è una funzione derivabile con continuità, essendo $(DF(x)y)_i = Df_i(x_{i-1})y_i$, e l'Eq. (9.5) diventa:

$$\left\{ \begin{array}{l} i) \quad |F(0)| < \varepsilon, \\ ii) \quad \lim_{|x| \rightarrow 0} \|DF(x)\| = 0 \end{array} \right. \quad (9.7)$$

($\|\cdot\|$ denota la sua norma uniforme dell'operatore).

1) *Soluzione del problema lineare.* Risolviamo dapprima il problema lineare:

$$(\mathbb{I} - L)x = g, \quad (9.8)$$

con $g \in E$ assegnato. Poiché $q_i \in \Lambda$, per ogni $i \in \mathbb{Z}$ possiamo decomporre:

$$E = E^+ \oplus E^-, \quad E^\pm := \{y \in E : y_i \in E_{q_i}^\pm \quad \forall i \in \mathbb{Z}\},$$

ed indichiamo con $y = y^+ + y^-$, $y^\pm \in E^\pm$, la decomposizione di un generico elemento $y \in E$. I sottospazi E^\pm sono "quasi invarianti" sotto l'azione dell'operatore lineare L nel senso che ora precisiamo. Poiché la mappa $\alpha \mapsto E_\alpha^\pm$, $\alpha \in \Lambda$,

è continua, possiamo scegliere una base $\{e_j^{(\alpha)}\}$ di $T_\alpha M$ adattata alla decomposizione $E_\alpha^+ \oplus E_\alpha^-$ in modo tale che la matrice $U(\alpha, \beta)$ del cambiamento di base $\{e_j^{(\alpha)}\} \rightarrow \{e_j^{(\beta)}\}$ verifichi la condizione:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\substack{\alpha, \beta \in \Lambda \\ |\alpha - \beta| < \varepsilon}} \|U(\alpha, \beta) - \mathbb{I}\| = 0.$$

Ne segue che, essendo $D\psi(q_{i-1})E_{q_{i-1}}^\pm = E_{\psi(q_{i-1})}^\pm$ e $|q_i - \psi(q_{i-1})| < \varepsilon$, l'operatore L si decompone nella forma:

$$L = A + \Gamma : \quad AE^\pm = E^\pm, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\Gamma\| = 0,$$

dove $(Ay)_i = A_i y_{i-1}$, essendo $A_i : T_{q_{i-1}} M \rightarrow T_{q_i} M$ l'operatore la cui matrice nelle basi $\{e_j^{(q_{i-1})}\}, \{e_j^{(q_i)}\}$, coincide con quella dell'operatore $D\psi(q_{i-1}) : T_{q_{i-1}} M \rightarrow T_{\psi(q_{i-1})} M$ nelle basi $\{e_j^{(q_{i-1})}\}, \{e_j^{(\psi(q_{i-1}))}\}$. In particolare $A_i E_{q_{i-1}}^\pm = E_{q_i}^\pm$ e, per ogni intero $N > 0$,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{i \in \mathbb{Z}} \left(\|A_{i+N} A_{i+N-1} \cdots A_i\| - \|D\psi^N(q_{i-1})\| \right) = 0,$$

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{i \in \mathbb{Z}} \left(\|A_{i-N}^{-1} A_{i-N+1}^{-1} \cdots A_i^{-1}\| - \|D\psi^{-N}(q_{i-1})\| \right) = 0$$

(infatti se q fosse un'orbita allora $\|\prod_{j=i+N}^i A_j\| = \|D\psi^N(q_{i-1})\|$, $\|\prod_{j=i-N}^i A_j^{-1}\| = \|D\psi^{-N}(q_{i-1})\|$, dunque il suddetto limite è conseguenza della regolarità di ψ e della compattezza di Λ). Fissiamo ora N tale che $K\mu^N < 1/4$, con K, μ come in (9.1), e quindi ε_0 in modo tale che, per ogni $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$,

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} \left| \|A_{i+N} A_{i+N-1} \cdots A_i\| - \|D\psi^N(q_{i-1})\| \right| < \frac{1}{4},$$

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} \left| \|A_{i-N}^{-1} A_{i-N+1}^{-1} \cdots A_i^{-1}\| - \|D\psi^{-N}(q_{i-1})\| \right| < \frac{1}{4},$$

cosicché:

$$|A^N y^+| \leq \frac{|y^+|}{2}, \quad |A^{-N} y^-| \leq \frac{|y^-|}{2} \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \quad (9.9)$$

Ne segue che l'operatore $\mathbb{I} - A$ è invertibile per $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. In effetti l'equazione $(\mathbb{I} - A)x = g$ si decompone nella coppia di equazioni:

$$\begin{cases} (\mathbb{I} - A)x^+ = g^+, \\ (\mathbb{I} - A)x^- = g^-. \end{cases} \quad (9.10)$$

La seconda equazione in (9.10) è equivalente a

$$(\mathbb{I} - A^{-1})x^- = -A^{-1}g^-.$$

La soluzione del sistema (9.10) è allora

$$x^+ = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k g^+, \quad x^- = - \sum_{k=1}^{+\infty} A^{-k} g^-. \quad (9.11)$$

Le stime (9.9) implicano la convergenza assoluta delle serie in (9.11), ed è immediato verificare che i vettori x^\pm così definiti sono soluzione del sistema (9.10). La convergenza è inoltre uniforme poiché, posto

$$C = N \sup\{\|D\psi^r(\alpha)\| : \alpha \in \Lambda, |r| \leq N\},$$

si ha

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} |A^k g^+| &= \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{N-1} |A^r (A^N)^j g^+| \leq C \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j |g^+| \leq 2C |g^+|, \\ \sum_{k=0}^{+\infty} |A^{-k} g^-| &= \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{N-1} |A^{-r} (A^{-N})^j g^-| \leq C \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j |g^-| \leq 2C |g^-|. \end{aligned}$$

Quindi l'operatore $\mathbb{I} - A$ è invertibile su E ed inoltre

$$\|(\mathbb{I} - A)^{-1}\| \leq 4C.$$

Consideriamo ora l'Eq. (9.8), che riscriviamo nella forma seguente,

$$(\mathbb{I} - B)x = (\mathbb{I} - A)^{-1}g, \quad B := (\mathbb{I} - A)^{-1}\Gamma.$$

Fissiamo $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$ tale che

$$\|B\| \leq 4C\|\Gamma\| < \frac{1}{2} \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1).$$

Allora l'operatore $\mathbb{I} - B$ è invertibile, essendo

$$(\mathbb{I} - B)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} B^k, \quad \|(\mathbb{I} - B)^{-1}\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2,$$

per cui l'Eq. (9.8) ammette l'unica soluzione $x = (\mathbb{I} - B)^{-1}(\mathbb{I} - A)^{-1}g$. In altri termini, per ogni $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$, l'operatore $\mathbb{I} - L$ è invertibile ed inoltre:

$$\|(\mathbb{I} - L)^{-1}\| \leq 8C. \quad (9.12)$$

2) *Soluzione del problema non lineare.* Per $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ l'equazione non lineare (9.6) può ora essere riscritta come equazione di punto fisso della mappa:

$$T : E \rightarrow E \quad : \quad T(x) = (\mathbb{I} - L)^{-1}F(x).$$

Sia $B_\delta = \{x \in E : |x| \leq \delta\}$. Mostriamo che esiste $\delta_0 > 0$ tale che, ad ogni $\delta \in (0, \delta_0)$ corrisponde una scelta di $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ per la quale:

$$T(B_\delta) \subseteq B_\delta, \quad |T(x) - T(y)| < \frac{1}{2}|x - y| \quad \forall x, y \in B_\delta, \quad (9.13)$$

da cui, per il principio delle contrazioni, esiste un'unica sequenza $x^* \in B_\delta$ tale che $x^* = T(x^*)$, e quindi $p = q + x^*$ è l'unica δ -ombra-orbita della ε -pseudo-orbita q .

Sia

$$J(\delta) := \sup_{\substack{x, y \in B_\delta \\ x \neq y}} \frac{|F(x) - F(y)|}{|x - y|}.$$

Dall'Eq. (9.7) ricaviamo

$$\sup_{x \in B_\delta} |F(x)| \leq \varepsilon + J(\delta)\delta, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} J(\delta) = 0.$$

Utilizzando la stima (9.12) concludiamo che

$$\begin{cases} \sup_{x \in B_\delta} |T(x)| \leq 8C[\varepsilon + \delta J(\delta)], \\ |T(x) - T(y)| \leq 8CJ(\delta)|x - y| \quad \forall x, y \in B_\delta. \end{cases} \quad (9.14)$$

Le stime (9.13) seguono ora dalle (9.14) scegliendo $\delta_0 > 0$ tale che:

$$J(\delta) < \frac{1}{16C} \quad \forall \delta \in (0, \delta_0)$$

e fissando

$$\varepsilon = \varepsilon(\delta) = \min \left\{ \varepsilon_1; \frac{\delta}{16C} \right\}.$$

3) *Conclusion.* Rimane da dimostrare il limite (9.3) sotto l'ipotesi (9.2). A tale scopo è sufficiente cercare il punto fisso nel sottospazio chiuso dello spazio di Banach E :

$$E_\infty := \left\{ y \in E : \lim_{i \rightarrow +\infty} y_i = 0 \right\} \quad \left[\text{risp. } E_{-\infty} := \left\{ y \in E : \lim_{i \rightarrow -\infty} y_i = 0 \right\} \right].$$

Lo svolgimento per esteso della dimostrazione è lasciata al lettore. \square

COROLLARIO 9.5. *Sia $\delta \in (0, \delta_0)$ ed $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ come nel Teorema 9.4. Allora ogni ε -pseudo-orbita periodica contenuta in Λ è ombreggiata da un'orbita periodica.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{q_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \subset \Lambda$ una ε -pseudo-orbita tale che esiste un intero positivo N per il quale $q_{i+N} = q_i$ per ogni $i \in \mathbb{Z}$. Per il Teorema 9.4 esiste un'unica δ -ombra-orbita $\{p_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$. Posto $\hat{p}_i = p_{i+N}$ si ha allora $d(\hat{p}_i, q_i) = d(p_{i+N}, q_{i+N}) < \delta$ per ogni $i \in \mathbb{Z}$, dunque anche $\{\hat{p}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ è una δ -ombra-orbita. Per l'unicità, deve aversi allora $\hat{p}_i = p_i$, ovvero $p_{i+N} = p_i$ per ogni $i \in \mathbb{Z}$, ovvero $\{p_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ è un'orbita periodica di periodo (almeno) N . \square

COROLLARIO 9.6. *Un sistema di Anosov (M, ψ) topologicamente transitivo è caotico.*

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo dimostrare che esiste un insieme denso di punti periodici. Osserviamo preliminarmente che M è uno spazio completo e separabile essendo uno spazio metrico compatto. Pertanto, per il Teorema 8.2, esiste un'orbita densa, diciamo $\gamma(y_0)$ per qualche $y_0 \in M$.

Fissiamo ora un qualsiasi punto $x \in M$ ed $\varepsilon \leq \varepsilon(\delta)$, con $\delta \in (0, \delta_0)$ ed $\varepsilon(\delta)$ come in Teorema 9.4. Per la densità di $\gamma(y_0)$ esistono $k \in \mathbb{Z}$ e $N > 0$ tali che $y_k, y_{k+N} \in B_{\varepsilon/2}(x)$, essendo $y_j = \psi^j(y_0)$. Consideriamo ora la sequenza $\{q_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ tale che

$$\begin{cases} q_i = y_i & \text{se } i = k, k+1, \dots, k+N-1, \\ q_i = q_{i+N} & \text{per ogni } i \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Per costruzione $\{q_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ è una sequenza periodica di periodo N . Inoltre è una ε -pseudo-orbita poiché $q_i = \psi(q_{i-1})$ tranne quando $i = k + jN$ con $j \in \mathbb{Z}$, nel qual caso si ha

$$d(q_{k+jN}, \psi(q_{k+jN-1})) = d(q_k, \psi(q_{k+N-1})) = d(y_k, \psi(y_{k+N-1})) = d(y_k, y_{k+N}) < \varepsilon.$$

Per il Corollario 9.5 esiste una δ -ombra-orbita periodica $\{p_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$. In particolare $d(p_k, x) < d(p_k, q_k) + d(q_k, x) < \delta + \frac{\varepsilon}{2} =: r$, con r che può essere reso piccolo a piacere scegliendo δ e quindi $\varepsilon \leq \varepsilon(\delta)$ sufficientemente piccoli. Abbiamo in tal modo dimostrato che ogni intorno di ogni punto di M contiene un punto periodico, ovvero che l'insieme dei punti periodici di ψ è denso in M . \square

COROLLARIO 9.7. *Un sistema di Anosov (M, ψ) ha dipendenza sensibile dai dati iniziali.*

DIMOSTRAZIONE. Fissato $\delta \in (0, \delta_0)$, due orbite $\gamma(x), \gamma(x')$ tali che per ogni $k \in \mathbb{Z}$ sia $d(\psi^k(x), \psi^k(x')) < \delta$ sono ciascuna una δ -ombra-orbita sia di se stessa che dell'altra sequenza, ed entrambe sono ε -pseudo-orbite (con $\varepsilon = 0$). Per l'unicità dell'ombreggiamento segue allora che $x = x'$. Pertanto, se $x \neq x'$ esiste $n \in \mathbb{Z}$ tale che $d(\psi^n(x), \psi^n(x')) > \delta$, da cui la dipendenza sensibile. \square

Il Corollario 9.7 stabilisce una proprietà più forte della dipendenza sensibile (come in Definizione 8.5). Infatti dimostra che esiste una taglia $\delta > 0$ tale che per ogni coppia di dati iniziali distinti esiste un tempo in cui le relative evoluzioni sono distanti almeno δ . I diffeomorfismi con tale proprietà vengono detti *diffeomorfismi espansivi*.

9.2. Sistemi periodicamente perturbati

Consideriamo un sistema periodico, perturbazione di un sistema autonomo

$$\dot{x} = v(x) + \mu g(t, x), \quad (9.15)$$

con $x = 0$ punto singolare iperbolico di $\dot{x} = v(x)$, cosicché $v(x) = Ax + \hat{v}(x)$ con $\hat{v}(0) = 0$, $D\hat{v}(0) = 0$ e $0 \notin \sigma(A) \cap \mathbb{R}$. Sia T il periodo della perturbazione: $g(t + T, x) = g(t, x)$ per ogni $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Il parametro μ varia in un intorno dello zero. Assumiamo che tutte le soluzioni siano definite sull'intero asse dei tempi \mathbb{R} ed indichiamo $\phi^{t, t_0}(x)$ la soluzione di dati iniziali $\phi^{t_0, t_0}(x) = x$. Ricordando quanto discusso in Sezione 7.3.1, a tale sistema differenziale possiamo associare la mappa stroboscopica $S_{t_0} := \phi^{t_0+T, t_0}$ (che è un diffeomorfismo di \mathbb{R}^n), tale che

$$S_{t_0}^k(x) = \phi^{t_0+kT, t_0}(x) \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Ricordiamo che se x_0 è un punto fisso di S_{t_0} allora la soluzione $t \mapsto \phi^{t, t_0}(x_0)$ dell'Eq. (9.15) è periodica di periodo T e viceversa. In particolare, $x = 0$ è un punto fisso di S_{t_0} per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$ nel caso del sistema non perturbato $\dot{x} = v(x)$. Mostriamo ora che, se $|\mu|$ è sufficientemente piccolo, allora S_{t_0} possiede un punto fisso iperbolico $\bar{x}(\mu, t_0)$ vicino ad $x = 0$.

PROPOSIZIONE 9.8. *Esistono un intorno I di $\mu = 0$, un intorno U di $x = 0$ ed una funzione differenziabile $(\mu, t_0) \rightarrow \bar{x}(\mu, t_0) \in U$, $(\mu, t_0) \in I \times [0, T]$, tale che, per ogni $\mu \in I$, $\bar{x}(\mu, t_0)$ è l'unico punto fisso di S_{t_0} in U . Inoltre $\bar{x}(\mu, t_0)$ è iperbolico e $\bar{x}(0, t_0) = 0$. Infine, tutte le soluzioni periodiche $t \mapsto \phi^{t, t_0}(\bar{x}(\mu, t_0))$ corrispondono ad un'unica orbita contenuta in U .*

DIMOSTRAZIONE. Dalla formula per la variazione delle costanti,

$$\phi^{t, t_0}(x) = e^{A(t-t_0)}x + \int_{t_0}^t ds e^{A(t-s)} [\hat{v}(\phi^{s, t_0}(x)) + \mu g(s, \phi^{s, t_0}(x))],$$

segue che i punti fissi di S_{t_0} coincidono con gli zeri della funzione

$$G(x, \mu, t_0) := (e^{AT} - \mathbb{I})x + \int_{t_0}^{t_0+T} ds e^{A(t_0+T-s)} [\hat{v}(\phi^{s, t_0}(x)) + \mu g(s, \phi^{s, t_0}(x))].$$

Osserviamo ora che $G(0, 0, t_0) = 0$ e $D_x G(0, 0, t_0) = e^{AT} - \mathbb{I}$, matrice invertibile essendo e^{AT} iperbolica (vedi l'Esempio 5.8). Allora, per il teorema della funzione implicita, esistono un intorno U di $x = 0$ ed un intorno I di $\mu = 0$ per cui si ha un'unica esplicitazione $\bar{x}(\mu, t_0)$ dell'equazione $G(x, \mu, t_0) = 0$ in $U \times I \times [0, T]$; inoltre $\bar{x}(0, t_0) = 0$. La regolarità di $\phi^{t, t_0}(x)$ rispetto a μ e t_0 implica la regolarità di $G(x, \cdot, \cdot)$ e quindi di $\bar{x}(\cdot, \cdot)$. Restringendo eventualmente l'intorno I , il punto fisso $\bar{x}(\mu, t_0)$ è iperbolico, essendo $\bar{x}(0, t_0) = 0$ iperbolico e $\mu \mapsto D_x S_{t_0}(\bar{x}(\mu, t_0))$ una funzione continua.

Sia ora $\gamma_{t_0}(\mu) := \{\phi^{t, t_0}(\bar{x}(\mu, t_0)) : t \in [t_0, t_0 + T]\}$ l'orbita della soluzione periodica corrispondente al punto fisso $\bar{x}(\mu, t_0)$. Poiché $\gamma_0(0) = \{0\}$ e $\phi^{t, 0}(x)$ è continua rispetto a μ , restringendo eventualmente l'intorno I , l'orbita $\gamma_0(\mu)$ giace nell'intorno U di $x = 0$. Osserviamo ora che, per ogni $t_0 \in [0, T]$,

$$S_{t_0} \circ \phi^{t_0, 0} = \phi^{t_0, 0} \circ S_0 \quad (9.16)$$

(infatti $\phi^{t_0+T, t_0} \circ \phi^{t_0, 0} = \phi^{t_0+T, 0} = \phi^{t_0+T, T} \circ \phi^{T, 0} = \phi^{t_0, 0} \circ \phi^{T, 0}$). Ma allora $x_0 := \phi^{t_0, 0}(\bar{x}(\mu, 0))$ è un punto fisso di S_{t_0} che è contenuto in U . Pertanto $x_0 = \bar{x}(\mu, t_0)$ necessariamente. Dunque le soluzioni T -periodiche $\phi^{t, 0}(\bar{x}(\mu, 0))$ e $\phi^{t, t_0}(\bar{x}(\mu, t_0))$ coincidono, cosicché $\gamma_{t_0}(\mu) = \gamma_0(\mu)$ per ogni $t_0 \in [0, T]$. \square

In definitiva abbiamo provato che l'orbita corrispondente alla famiglia di soluzioni periodiche di dati iniziali $\bar{x}(\mu, t_0)$, $t_0 \in [0, T]$, è unica, in particolare identificabile dal dato iniziale $\bar{x}(\mu, 0)$, punto fisso della mappa stroboscopica $S_0 = \phi^{T, 0}$. Nel seguito utilizzeremo la notazione abbreviata $\psi = S_0$, $\bar{x}(\mu) = \bar{x}(\mu, 0)$ e

$$\gamma(\mu) = \gamma_0(\mu) = \{\bar{x}(\mu, t_0) : t_0 \in [0, T]\},$$

omettendo la menzione del tempo iniziale.

OSSERVAZIONE 9.1. Se $g(t, 0) \neq 0$ le soluzioni periodiche sono sicuramente distinte dal punto fisso $x = 0$. Nel caso opposto in cui $g(t, 0) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ la funzione $\bar{x}(\mu, t_0)$ è identicamente nulla. Come esempio di quest'ultimo caso si consideri il pendolo matematico con punto di sospensione variabile (cfr. Esercizio 5.1).

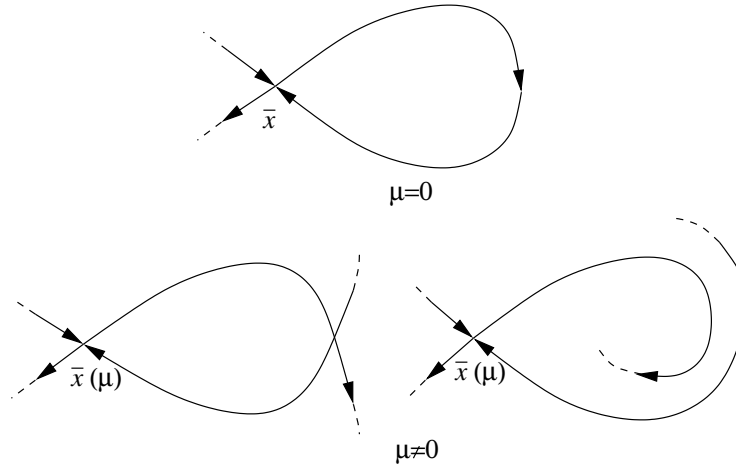


FIGURA 9.2. Se $\mu \neq 0$ le varietà stabile ed instabile possono o meno intersecarsi.

Indichiamo ora con $W^\pm(\mu, t_0)$ le varietà stabile ed instabile del punto fisso $\bar{x}(\mu, t_0)$ di S_{t_0} . Dalla (9.16) segue facilmente che $W^\pm(\mu, t_0) = \phi^{t_0+jT,0}(W^\pm(\mu, 0))$ per ogni $t_0 \in [0, T]$, $j \in \mathbb{Z}$. Definiamo allora *varietà stabile ed instabile dell'orbita iperbolica* $\gamma(\mu)$ gli insiemi invarianti (nello spazio delle fasi ampliato):

$$W^\pm(\mu, \gamma) := \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \{t\} \times \phi^{t,0}(W^\pm(\mu, 0)) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \bigcup_{t_0 \in [0, T]} \{t_0 + jT\} \times W^\pm(\mu, t_0). \quad (9.17)$$

In effetti (analogamente alla definizione di varietà stabile ed instabile di un punto fisso iperbolico) si ha:

$$(t_0, x) \in W^\pm(\mu, \gamma) \iff \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \text{dist}(\phi^{t,t_0}(x), \gamma(\mu)) = 0,$$

la cui dimostrazione è lasciata al lettore.

9.3. Intersezioni omocline trasverse

La struttura delle varietà stabile ed instabile globali può essere molto complicata. In particolare esse possono intersecarsi.

DEFINIZIONE 9.9. Sia \bar{x} un punto fisso iperbolico del diffeomorfismo $\psi: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{D}$. Un punto di intersezione $v \in W^+(\bar{x}) \cap W^-(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\}$ è detto punto omocline non degenero o trasverso di \bar{x} se $T_v W^+(\bar{x}) \oplus T_v W^-(\bar{x}) = T_v \mathbb{R}^n$.

Nel caso particolare $n = 2$ la trasversalità significa che le curve $W^+(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\}$ e $W^-(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\}$ si intersecano trasversalmente. Nel caso dei diffeomorfismi ϕ^t introdotti nell'Esempio 5.8, le varietà stabile ed instabile coincidono con quelle del punto singolare. Pertanto $W^+(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\}$ e $W^-(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\}$ sono curve di fase del flusso e non possono quindi intersecarsi trasversalmente: in un sistema differenziale piano autonomo tutti gli eventuali punti omoclini sono degeneri, ovvero $T_v W^+(\bar{x}) = T_v W^-(\bar{x})$.

La situazione è differente se modifichiamo il sistema con perturbazioni dipendenti dal tempo. In particolare possiamo considerare sistemi meccanici unidimensionali, quali ad esempio

$$\ddot{q} = q - q^3 + \mu f(t, q, \dot{q}), \quad \ddot{q} = -\sin q + \mu f(t, q, \dot{q}), \quad (9.18)$$

dove $f(t, q, \dot{q}) = f(t + T, q, \dot{q})$ per qualche periodo $T > 0$. Indichiamo con $x = (q, v)$ le coordinate nello spazio delle fasi \mathbb{R}^2 e sia $\phi^{t, t_0}(x)$ la mappa soluzione. Se $\mu = 0$ i sistemi hanno un punto singolare iperbolico \bar{x} , uguale a $(0, 0)$ nel primo caso e $(\pi, 0)$ nel secondo caso. Per quanto stabilito nella Proposizione 9.8, per piccoli valori del parametro μ la mappa stroboscopica $\psi = \phi^{T, 0}$ possiede un punto fisso iperbolico $\bar{x}(\mu)$ vicino a \bar{x} . Se $\mu = 0$ sappiamo che $W^+(\bar{x}) = W^-(\bar{x})$ (vedi l'Esempio 5.5). Se $\mu \neq 0$ le curve $W^+(\bar{x}(\mu)) \setminus \{\bar{x}(\mu)\}$ e $W^-(\bar{x}(\mu)) \setminus \{\bar{x}(\mu)\}$ possono o meno intersecarsi (vedi Figura 9.2). Mostriamo più avanti, mediante il metodo di Melnikov, che nel caso di perturbazioni del tipo $f(t, q, v) = \sin(\omega t)$, $\omega > 0$, il punto fisso $\bar{x}(\mu)$ possiede un punto omoclino trasverso.

Supponiamo quindi che esista un punto omoclino trasverso v del punto fisso iperbolico \bar{x} e sia $\gamma(v) = \{\psi^k(v) : k \in \mathbb{Z}\}$ l'orbita associata. Chiaramente

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \psi^{\pm k}(v) = 0. \quad (9.19)$$

Inoltre, essendo $W^\pm(0)$ invarianti e ψ un diffeomorfismo, anche $\psi^k(v)$ è un punto omoclino trasverso per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Infatti,

$$D\psi^k(v) T_v W^\pm(\bar{x}) = T_{\psi^k(v)} W^\pm(\bar{x}),$$

cosicché $T_{\psi^k(v)} W^+(\bar{x}) \oplus T_{\psi^k(v)} W^-(\bar{x}) = T_{\psi^k(v)} \mathbb{R}^n$ essendo $D\psi^k(v)$ un isomorfismo. Per il caso $n = 2$ in cui $\psi = \phi^{T, 0}$ si veda la Figura 9.3.¹

L'esistenza di un punto omoclino trasverso complica molto la struttura delle varietà stabile ed instabile (vedi Figura 9.4, nel caso $n = 2$) e la dinamica in prossimità dell'orbita omoclina è caotica a causa dei fenomeni descritti nella Sezione 9.1. Infatti sussiste il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 9.10. *Sia \bar{x} punto fisso iperbolico del diffeomorfismo $\psi: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{D}$ e sia v un punto omoclino trasverso di \bar{x} . Allora la chiusura dell'orbita per v ,*

$$\Lambda := \gamma(v) \cup \{\bar{x}\},$$

è un insieme iperbolico di ψ .

DIMOSTRAZIONE. Per semplicità consideriamo il caso di un diffeomorfismo del piano \mathbb{R}^2 e fissiamo le coordinate in modo che $\bar{x} = 0$. L'insieme Λ è compatto ed invariante essendo la chiusura di un'orbita limitata. Definiamo $E_x^\pm :=$

¹Poiché $t \mapsto D\phi^{t, 0}(x)$ è una funzione continua di isomorfismi tale $D\phi^{0, 0} = \mathbb{I}$, l'orientamento è preservato. Dunque $D\psi(v)$ preserva l'orientamento cosicché le intersezioni in v e v_1 devono essere separate da almeno un'altra intersezione.

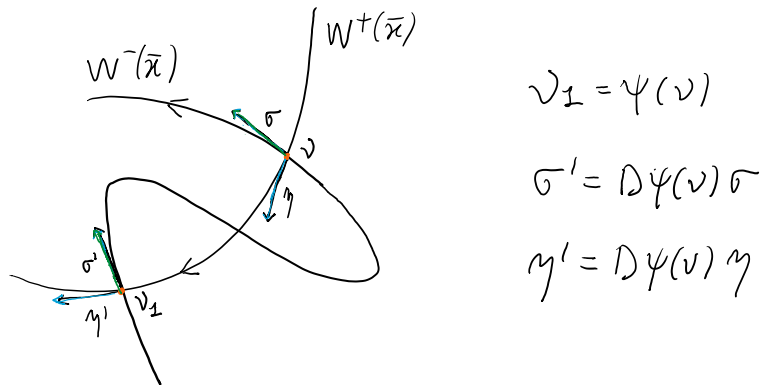


FIGURA 9.3. Successive intersezioni trasverse di varietà stabile ed instabile nel caso $n = 2$ e $\psi = \phi^{T,0}$.

$T_x W^\pm(0)$ per ogni $x \in \Lambda$. In particolare $E_0^\pm = E^\pm$, dove E^\pm sono i sottospazi invarianti per l'operatore $L = D\psi(0)$ di cui al Teorema 5.9. Essendo $W^\pm(0)$ varietà invarianti per il diffeomorfismo ψ è evidente che:

$$D\psi(x)E_x^\pm = D\psi(x)T_x W^\pm(0) = T_{\psi(x)} W^\pm(0) = E_{\psi(x)}^\pm \quad \forall x \in \Lambda.$$

Rimangono da dimostrare la proprietà di continuità e la stima (9.1). Siano $x = (x_+, x_-)$ le coordinate adattate alla matrice $D\psi(0)$. Posto

$$Q_\rho := \{x = (x_+, x_-) \in \mathbb{R}^2 : |x_+| < \rho, |x_-| < \rho\}, \quad v_k := \psi^k(v),$$

per ogni $\rho > 0$ esiste un intero positivo $N_\rho > 0$ tale che $v_k \in Q_\rho$ per ogni $|k| \geq N_\rho$. Inoltre, per il teorema delle varietà stabile ed instabile, esiste $\rho_0 > 0$ tale che, posto $Q_0 = Q_{\rho_0}$,

$$W^\pm(Q_0) = \{x \in Q_0 : x_\mp = h_\pm(x_\pm)\},$$

con h_\pm funzioni differenziabili sull'intervallo $(-\rho_0, \rho_0)$ per le quali $h_\pm(0) = 0$ e $h'_\pm(0) = 0$. Posto ora $y_\pm = x_\pm - h_\mp(x_\mp)$, poiché

$$\frac{\partial(y_+, y_-)}{\partial(x_+, x_-)}(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

diminuendo eventualmente il valore di ρ_0 , questa trasformazione definisce delle nuove coordinate $y = (y_+, y_-)$ nell'aperto Q_0 , rispetto alle quali (vedi Figura 9.5):

$$W^\pm(Q_0) = \{y \in Q_0 : y_\mp = 0\}.$$

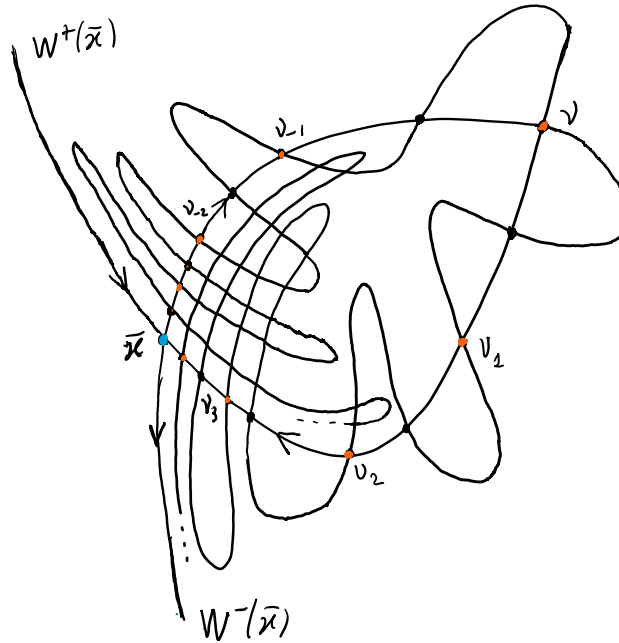


FIGURA 9.4. Struttura delle varietà stabile ed instabile in presenza di una intersezione omoclina trasversa ($v_j := \psi^j(v)$, $j \in \mathbb{Z}$). Tale comportamento qualitativo si deduce dalla continuità rispetto ai dati iniziali dei moti.

Indichiamo ancora con ψ il diffeomorfismo come funzione delle nuove coordinate. Quindi

$$\psi(y) = \psi(y_+, y_-) = \begin{pmatrix} ay_+ + F(y_+, y_-) \\ by_- + G(y_+, y_-) \end{pmatrix},$$

con $|a| < 1$, $|b| > 1$ e le funzioni F, G tali che $F(0, 0) = 0$, $G(0, 0) = 0$, $DF(0, 0) = 0$, $DG(0, 0) = 0$. Inoltre, essendo $W^+(Q_0)$ positivamente invariante, $G(y_+, 0) \equiv 0$ in Q_0 . Analogamente, essendo $W^-(Q_0)$ negativamente invariante e $\psi(0, 0) = 0$, restringendo eventualmente Q_0 in modo tale che $\psi^{-1}(W^-(Q_0)) \subset \{y : y_+ = 0\}$, si ha anche $F(0, y_-) \equiv 0$ in Q_0 . La matrice jacobiana di ψ è quindi

$$D\psi(y) = \begin{pmatrix} a + D_{y_+} F(y_+, y_-) & D_{y_-} F(y_+, y_-) \\ D_{y_+} G(y_+, y_-) & b + D_{y_-} G(y_+, y_-) \end{pmatrix} \quad D_{y_{\pm}} := \frac{\partial}{\partial y_{\pm}}.$$

In particolare, posto $N_0 = N_{\rho_0}$, poiché $v_k \in W^+(Q_0) \cap W^-(0)$ per $k \geq N_0$, si ha

$$D\psi(v_k) = \begin{pmatrix} a + D_{y_+} F(v_k) & D_{y_-} F(v_k) \\ 0 & b + D_{y_-} G(v_k) \end{pmatrix} \quad \forall k \geq N_0. \quad (9.20)$$

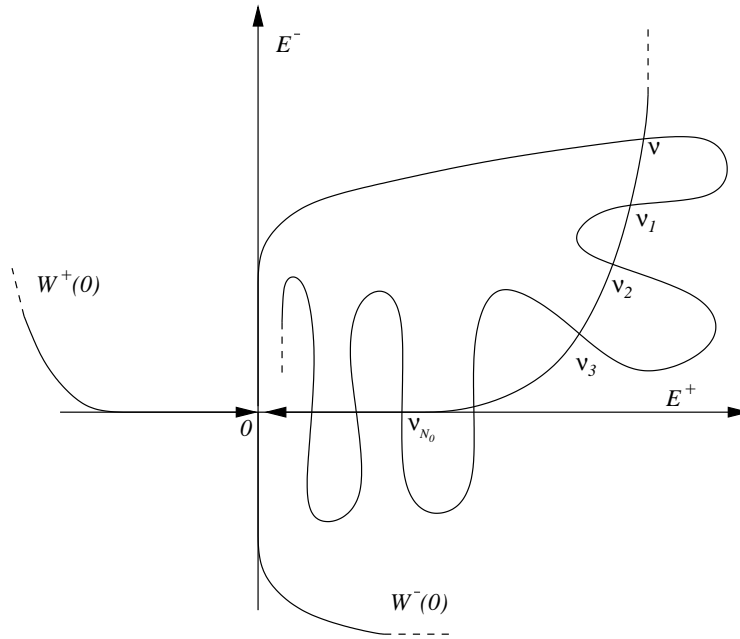


FIGURA 9.5. Struttura delle varietà stabile ed instabile nelle coordinate $y = (y_+, y_-)$.

Analogamente, poiché $v_k \in W^-(Q_0) \cap W^+(0)$ per $k \leq -N_0$,

$$D\psi(v_k) = \begin{pmatrix} a + D_{y_+} F(v_k) & 0 \\ D_{y_+} G(v_k) & b + D_{y_-} G(v_k) \end{pmatrix} \quad \forall k \leq -N_0. \quad (9.21)$$

Si definisca infine la funzione

$$\omega(\rho) := \max_{y \in Q_\rho} \max\{\|DF(y)\|; \|DG(y)\|\}, \quad \rho \in [0, \rho_0]. \quad (9.22)$$

Si osservi che $\omega(\rho) \rightarrow 0$ per $\rho \rightarrow 0$.

Per verificare la continuità di $x \mapsto E_x^\pm$ dobbiamo provare che $E_{v_k}^\pm \rightarrow E^\pm$ se $|k| \rightarrow +\infty$. Consideriamo il caso $k \rightarrow +\infty$, essendo l'altro del tutto simile. Poiché $E_{v_k}^+ = T_{v_k} W^\pm(Q_0)$ se $k \geq N_0$, la convergenza di $E_{v_k}^+$ a $E_0^+ = T_0 W^+(Q_0)$ è immediata. Dimostriamo invece che $E_{v_k}^- \rightarrow E_0^-$. Fissato un vettore non nullo $\xi_{N_0} \in E_{v_{N_0}}^-$ poniamo $\xi_k = D\psi(v_{k-1})\xi_{k-1}$ per $k > N_0$. Indicando con ξ_k^\pm le componenti di ξ_k lungo gli assi y_\pm , la quantità

$$\lambda_k := \frac{|\xi_k^+|}{|\xi_k^-|}$$

non dipende dalla particolare scelta di ξ_{N_0} e rappresenta il modulo della pendenza della direzione $E_{v_k}^-$. Quindi dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k = 0. \quad (9.23)$$

Fissato $\varepsilon > 0$ scegliamo $\rho_\varepsilon \in (0, \rho_0]$ tale che

$$\frac{\omega(\rho_\varepsilon)(|b| - \omega(\rho_\varepsilon))}{|b| - \omega(\rho_\varepsilon) - 1} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |a| + \omega(\rho_\varepsilon) \leq 1, \quad |b| - \omega(\rho_\varepsilon) > 1.$$

Allora, utilizzando la (9.20), per ogni $k > N_\varepsilon := N_{\rho_\varepsilon}$,

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \frac{|(a + D_{y^+} F(v_{k-1}))\xi_{k-1}^+ + D_{y^-} F(v_{k-1})\xi_{k-1}^-|}{|(b + D_{y^-} G(v_{k-1}))\xi_{k-1}^-|} \\ &\leq \frac{(|a| + \omega(\rho_\varepsilon))|\xi_{k-1}^+| + \omega(\rho_\varepsilon)|\xi_{k-1}^-|}{(|b| - \omega(\rho_\varepsilon))|\xi_{k-1}^-|} \\ &\leq \frac{\lambda_{k-1} + \omega(\rho_\varepsilon)}{|b| - \omega(\rho_\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Iterando la stima $k - N_\varepsilon$ volte otteniamo

$$\begin{aligned} \lambda_k &\leq \frac{\lambda_{N_\varepsilon}}{(|b| - \omega(\rho_\varepsilon))^{k - N_\varepsilon}} + \omega(\rho_\varepsilon) \sum_{j=1}^{k - N_\varepsilon} \frac{1}{(|b| - \omega(\rho_\varepsilon))^j} \\ &\leq \frac{\lambda_{N_\varepsilon}}{(|b| - \omega(\rho_\varepsilon))^{k - N_\varepsilon}} + \omega(\rho_\varepsilon) \frac{1}{1 - (|b| - \omega(\rho_\varepsilon))^{-1}} \\ &= \frac{\lambda_{N_\varepsilon}}{(|b| - \omega(\rho_\varepsilon))^{k - N_\varepsilon}} + \frac{\omega(\rho_\varepsilon)(|b| - \omega(\rho_\varepsilon))}{|b| - \omega(\rho_\varepsilon) - 1}. \end{aligned}$$

Quindi, per la scelta di ρ_ε ,

$$\lambda_k \leq \frac{\lambda_{N_\varepsilon}}{(|b| - \omega(\rho_\varepsilon))^{k - N_\varepsilon}} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \geq N_\varepsilon,$$

Fissando ora k_ε tale che $\lambda_{N_\varepsilon}(|b| - \omega(\rho_\varepsilon))^{N_\varepsilon - k_\varepsilon} < \varepsilon/2$ otteniamo che $\lambda_k < \varepsilon$ per ogni $k \geq k_\varepsilon$, il che dimostra il limite (9.23) per l'arbitrarietà nella scelta di ε .

Dimostriamo infine la stima (9.1), restringendoci al caso di E_x^+ , essendo l'altro del tutto simile. Fissiamo un numero $\theta \in (|a|, 1)$ e scegliamo $\rho_1 \in (0, \rho_0]$ tale che $|a| + \omega(\rho_1) \leq (|a| + \theta)/2$ e, posto $N_1 := N_{\rho_1}$,

$$\frac{|\xi^-|}{|\xi^+|} \leq \frac{\theta^2 - (|a| + \theta)^2/4 - 2\omega^2(\rho_1)}{2(|b| + \omega(\rho_1))^2} \quad \forall \xi \in E_{v_k}^+ : \xi \neq 0, \quad \forall k \leq -N_1,$$

(quest'ultima condizione è verificata per ρ_1 piccolo abbastanza poiché $E_{v_k}^+ \rightarrow E_0^+$ se $k \rightarrow -\infty$). Fissiamo un vettore $\xi_0 \in E_v^+$ e poniamo $\xi_k = D\psi(v_{k-1})\xi_{k-1}$, $k \in \mathbb{Z}$. Poiché $\xi_k^- = 0$ se $k \geq N_1$ ed utilizzando la (9.20) stimiamo

$$\begin{aligned} |\xi_k| &= |(a + D_{y^+} F(v_{k-1}))\xi_{k-1}^+| \leq (|a| + \omega(\rho_1))|\xi_{k-1}^+| \\ &\leq \theta |\xi_{k-1}| \leq \theta^{k - N_1} |\xi_{N_1}| \quad \forall k > N_1. \end{aligned}$$

Utilizzando invece la (9.21), per ogni $k < -N_1$ si ha

$$\begin{aligned} |\xi_k| &= \left| \begin{pmatrix} (a + D_{y_+} F(v_{k-1})) \xi_{k-1}^+ \\ D_{y_+} G(v_{k-1}) \xi_{k-1}^+ + (b + D_{y_-} G(v_{k-1})) \xi_{k-1}^- \end{pmatrix} \right| \\ &\leq \sqrt{(|a| + \omega(\rho_1))^2 |\xi_{k-1}^+|^2 + 2\omega^2(\rho_1) |\xi_{k-1}^+|^2 + 2(|b| + \omega(\rho_1))^2 |\xi_{k-1}^-|^2} \\ &\leq \sqrt{\left(\frac{(|a| + \theta)^2}{4} + 2\omega^2(\rho_1)\right) |\xi_{k-1}^+|^2 + \left(\theta^2 - \frac{(|a| + \theta)^2}{4} - 2\omega^2(\rho_1)\right) |\xi_{k-1}^+|^2} \\ &\leq \theta |\xi_{k-1}|, \end{aligned}$$

da cui

$$|\xi_{-N_1}| \leq \theta^{-N_1-k} |\xi_k| \quad \forall k < -N_1.$$

D'altra parte,

$$|\xi_{N_1}| \leq \|D\psi^{N_1-k}(v_k)\| |\xi_k| \quad \forall k = -N_1, \dots, N_1.$$

In definitiva, per una qualsiasi coppia di interi $j \in \mathbb{Z}$ e $k \in \mathbb{N}$,

$$|\xi_{j+k}| \leq C\theta^k |\xi_j|, \quad C = \left[\theta^{-1} \max_{j=-N_1, \dots, N_1} \|D\psi(v_j)\| \right]^{2N_1},$$

il che dimostra (9.1) (il caso $x = 0 \in \tilde{\gamma}(v)$ è banale). \square

COROLLARIO 9.11. *Sia v un punto omoclino trasverso del punto fisso iperbolico $x = 0$ del diffeomorfismo ψ . Sia quindi $\Lambda = \gamma(v) \cup \{0\}$. Per ogni intorno V di v ed U di Λ esistono infiniti punti periodici di ψ in V le cui orbite sono contenute in U .*

DIMOSTRAZIONE. Sia δ_0 come nel Teorema 9.4 e $\delta \in (0, \delta_0)$ tale che

$$B_\delta(v) \subset V, \quad \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} B_\delta(v_k) \subset U, \quad (9.24)$$

dove $v_k = \psi^k(v)$ sono i punti dell'orbita $\gamma(v)$. Sia $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ come nel Teorema 9.4. Per ogni intero N sufficientemente grande esiste una ε -pseudo-orbita $q = \{q_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ contenuta in Λ di periodo N . Infatti, in virtù del limite (9.19), esiste un intero N_ε tale che

$$v_k \in B_{\varepsilon/2}(0) \quad \forall k \in \mathbb{Z} : |k| \geq N_\varepsilon. \quad (9.25)$$

Allora per ogni $N > N_\varepsilon$ la sequenza

$$q = \{q_i\}_{i \in \mathbb{Z}} : q_{j+2Nh} = v_j \quad \forall j, h \in \mathbb{Z} : j = -N+1, \dots, N,$$

è una ε -pseudo-orbita di periodo $2N$, vedi Figura 9.6. Esiste quindi una δ -ombra-orbita p di q , anch'essa periodica di periodo $2N$ in virtù del Corollario 9.5. In particolare, per la condizione (9.24) sul parametro δ , si ha $p_0 \in V$ e $\gamma(p_0) \subset U$.

Ripetendo il ragionamento con una nuova scelta del parametro δ in modo tale che $p_0 \notin \overline{B_\delta(v)}$ possiamo determinare un nuovo punto periodico $p'_0 \in V$ distinto da p_0 . Dunque esistono infiniti punti periodici. \square

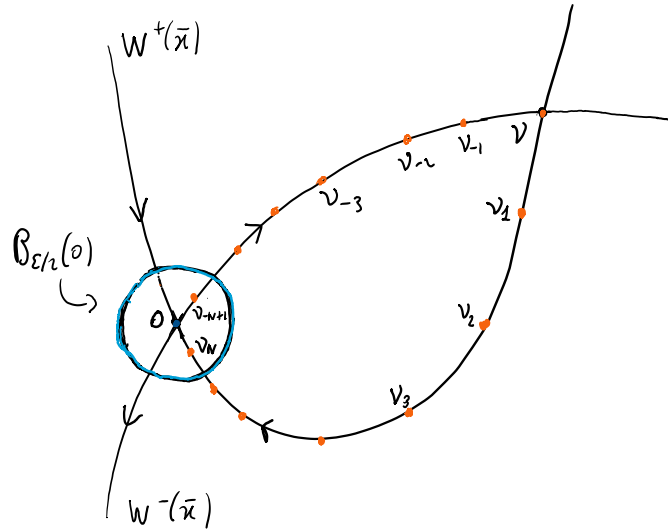


FIGURA 9.6. La ε -pseudo-orbita periodica è ottenuta iterando ripetutamente la sequenza v_{-N+1}, \dots, v_N .

COROLLARIO 9.12. Siano v un punto omoclino trasverso del punto fisso iperbolico $x = 0$ del diffeomorfismo ψ . Sia quindi $\Lambda = \gamma(v) \cup \{0\}$. Per ogni intorno V di v ed U di Λ esistono infiniti punti omoclini di ψ in V le cui orbite sono contenute in U .

DIMOSTRAZIONE. Sia $\delta \in (0, \delta_0)$ tale che le inclusioni (9.24) siano verificate ed $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$. Sia quindi N_ε come in (9.25). La sequenza:

$$q = \{q_i\}_{i \in \mathbb{Z}} : \begin{cases} q_{j+(2N_\varepsilon+1)h} = v_j & \forall j = -N_\varepsilon, \dots, N_\varepsilon, \quad \forall h = 0, 1, \\ q_i = 0 & \forall i : i < -N_\varepsilon \text{ oppure } i > 3N_\varepsilon + 1, \end{cases}$$

è una ε -pseudo-orbita, vedi Figura 9.7. Esiste quindi una δ -ombra-orbita p di q e, per la condizione (9.24) sul parametro δ , si ha $p_0 \in V$ e $\gamma(p_0) \subset U$. Inoltre, valendo banalmente i limiti in (9.3),

$$\lim_{|i| \rightarrow +\infty} p_i = \lim_{|i| \rightarrow +\infty} q_i = 0,$$

ovvero p_0 è un punto omoclino. Tale punto è garantito essere diverso da v per δ sufficientemente piccolo poiché in tal caso $\gamma(v)$ non è una δ -ombra-orbita di q . Ripetendo infine il ragionamento con una nuova scelta del parametro δ

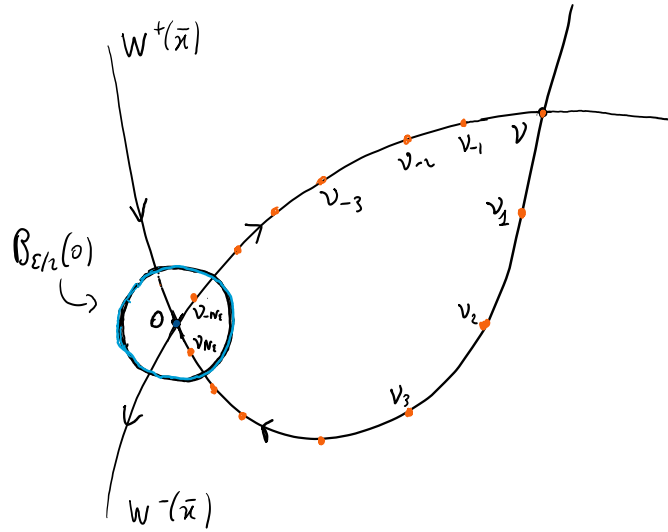


FIGURA 9.7. La ε -pseudo-orbita convergente al punto fisso $x = 0$ è ottenuta iterando due volte la sequenza $v_{-N_\varepsilon}, \dots, v_{N_\varepsilon}$ e quindi completandola ponendo $q_j = 0$ in tutti gli altri tempi j .

in modo tale che $p_0 \notin \overline{B_\delta(v)}$ possiamo determinare un nuovo punto omoclino $p'_0 \in V$ distinto da p_0 . Dunque esistono infiniti punti omoclini. \square

In conclusione ogni punto omoclino trasverso è un punto di accumulazione di punti periodici e di punti omoclini, i cui comportamenti asintotici sono molto differenti.

9.4. Applicazione alla dinamica del pendolo forzato

Consideriamo il sistema meccanico:

$$\ddot{q} = -\sin q + \mu \sin(\omega t). \quad (9.26)$$

Indichiamo con \mathcal{Q} l'insieme delle soluzioni che possiedono infiniti zeri semplici. A ciascuna soluzione $q(\cdot) \in \mathcal{Q}$ corrisponde un'unica sequenza infinita di tempi,

$$\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}} : \lim_{k \rightarrow \pm\infty} t_k = \pm\infty, \quad t_k < t_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

per cui:

$$q(t_k) = 0 \pmod{2\pi}, \quad q(t) \neq 0 \pmod{2\pi} \quad \forall t \notin \{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

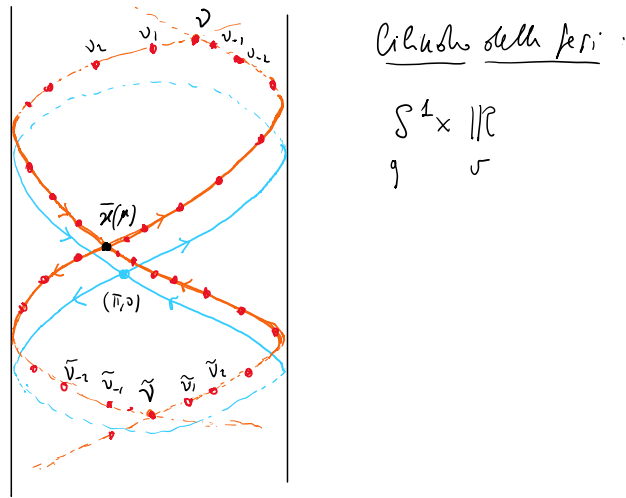


FIGURA 9.8. Punti omoclini trasversi v, \tilde{v} di $\bar{x}(\mu)$ (in azzurro le omocline a $(\pi, 0)$ del pendolo non forzato).

Possiamo associare ad ogni soluzione $q(\cdot) \in \mathcal{Q}$ una sequenza bilatera di variabili di Bernoulli ponendo:

$$\sigma : \mathcal{Q} \rightarrow \{-1; 1\}^{\mathbb{Z}} \quad : \quad \sigma_k(q(\cdot)) = \begin{cases} +1 & \text{se } \dot{q}(t_k) > 0 \\ -1 & \text{se } \dot{q}(t_k) < 0 \end{cases}$$

TEOREMA 9.13. Se $\mu > 0$ è piccolo a sufficienza si verifica quanto segue. Per ogni sequenza $\tau \in \{-1; 1\}^{\mathbb{Z}}$ esiste una soluzione $t \mapsto q(t)$ dell'Eq. (9.26) tale che:

$$\sigma_k(q(\cdot)) = \tau_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Inoltre la curva di fase di tale soluzione rimane vicina alla separatrice per tutti i tempi.

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con $x = (q, v)$ le coordinate nello spazio delle fasi \mathbb{R}^2 e sia $\phi^{t, t_0}(x)$ la mappa soluzione. Sia ψ la mappa stroboscopica:

$$\psi : x(0) \rightarrow x(T), \quad T := \frac{2\pi}{\omega}.$$

Per quanto stabilito nella Proposizione 9.8, per piccoli valori del parametro μ la mappa ψ possiede un punto fisso iperbolico $\bar{x}(\mu)$ vicino a $x = (\pi, 0)$. Mediante il metodo di Melnikov mostreremo nella Sezione 9.5 (Esempio 9.2) che $\bar{x}(\mu)$ possiede punti omoclini trasversi $v(\mu), \tilde{v}(\mu)$ prossimi, assieme alle loro orbite, $\gamma(v(\mu)), \gamma(\tilde{v}(\mu))$, alla separatrice, vedi Figura 9.8. Possiamo ora costruire infinite ε -pseudo-orbite in $\Lambda = \gamma(v(\mu)) \cup \{\bar{x}(\mu)\} \cup \gamma(\tilde{v}(\mu))$, e quindi δ -ombra-orbite vicino Λ , in modo da poter scegliere, ogni volta che arriviamo in prossimità del

punto fisso $\bar{x}(\mu)$, se andare avanti o tornare indietro. Queste δ -ombra-orbite sono contenute in un intorno tubolare della separatrice, di larghezza infinitesima per $\mu \rightarrow 0$. D'altra parte, su ciascun intervallo $[kT, (k+1)T]$, la dinamica a tempo continuo con μ piccolo rimane vicina a quella (sul corrispondente livello di energia) con $\mu = 0$. Dunque la soluzione rimane vicina alla separatrice non solo ai tempi kT , ove $\phi^{kT,0} = \psi^k$, bensì per ogni tempo $t \in \mathbb{R}$. \square

9.5. Esistenza di intersezioni omocline trasverse in \mathbb{R}^2 e formula di Melnikov

Consideriamo un sistema piano periodicamente perturbato:

$$\dot{x} = v(x) + \mu g(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad g(t, x) = g(t + T, x),$$

con $x = 0$ punto singolare iperbolico del campo vettoriale v , μ un parametro reale che varia in un intorno dello zero. Per quanto stabilito nella Proposizione 9.8, per piccoli valori del parametro μ è univocamente determinata l'orbita iperbolica

$$\gamma(\mu) = \{\bar{x}(\mu, t_0) : t_0 \in [0, T]\},$$

tale che $\bar{x}(\mu, t_0)$ è l'unico punto fisso (risultante essere iperbolico), vicino a $x = 0$, della mappa stroboscopica $S_{t_0} = \phi^{t_0+T, t_0}$. Restano definite, vedi l'Eq. (9.17), le varietà stabile ed instabile $W^\pm(\mu, \gamma)$ dell'orbita $\gamma(\mu)$. Supponiamo ora che per $\mu = 0$ sia $W^+(0) = W^-(0)$, ovvero che il sistema non perturbato ammetta un'orbita omoclina di $x = 0$. Nel seguito ci occuperemo di trovare un criterio di intersezione (trasversa) delle varietà $W^+(\mu, \gamma)$ e $W^-(\mu, \gamma)$, ovvero di determinare un'orbita omoclina Γ_μ asintotica nel futuro e nel passato a $\gamma(\mu)$. Poiché $W^\pm(\mu, t_0) = \phi^{t_0, 0}(W^\pm(\mu, 0))$, è sufficiente determinare un'intersezione trasversa $v \in W^+(\mu, t_0) \cap W^-(\mu, t_0)$ per qualche $t_0 \in [0, T]$, essendo allora $\Gamma_\mu = \{\phi^{t, t_0}(v) : t \in \mathbb{R}\}$ l'orbita omoclina cercata.

Indichiamo con $\Gamma_0 = \{\phi(\sigma) : \sigma \in \mathbb{R}\}$ l'orbita omoclina del sistema non perturbato (quindi $\dot{\phi} = v(\phi)$, $\phi(\pm\infty) = 0$).

TEOREMA 9.14 (Formula di Melnikov). *Assumiamo che il campo vettoriale v abbia divergenza nulla (ad esempio il problema non perturbato è hamiltoniano). Definiamo "integrale di Melnikov" la funzione:*

$$M(t_0) := \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \langle Jv(\phi(\tau)), g(\tau + t_0, \phi(\tau)) \rangle,$$

essendo $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Se esiste uno zero semplice dell'integrale di Melnikov, allora per ogni μ sufficientemente piccolo esiste un'intersezione trasversa $v(\mu, t_0) \in W^+(\mu, t_0) \cap W^-(\mu, t_0)$ per ogni $t_0 \in [0, T]$.

Si osservi che l'integrale di Melnikov è una funzione periodica, come è giusto che sia essendo $S_{t_0} = S_{t_0+T}$.

ESEMPIO 9.2. Prima di dimostrare il Teorema 9.14 applichiamo il risultato al caso del pendolo periodicamente forzato (9.26). L'hamiltoniana del sistema

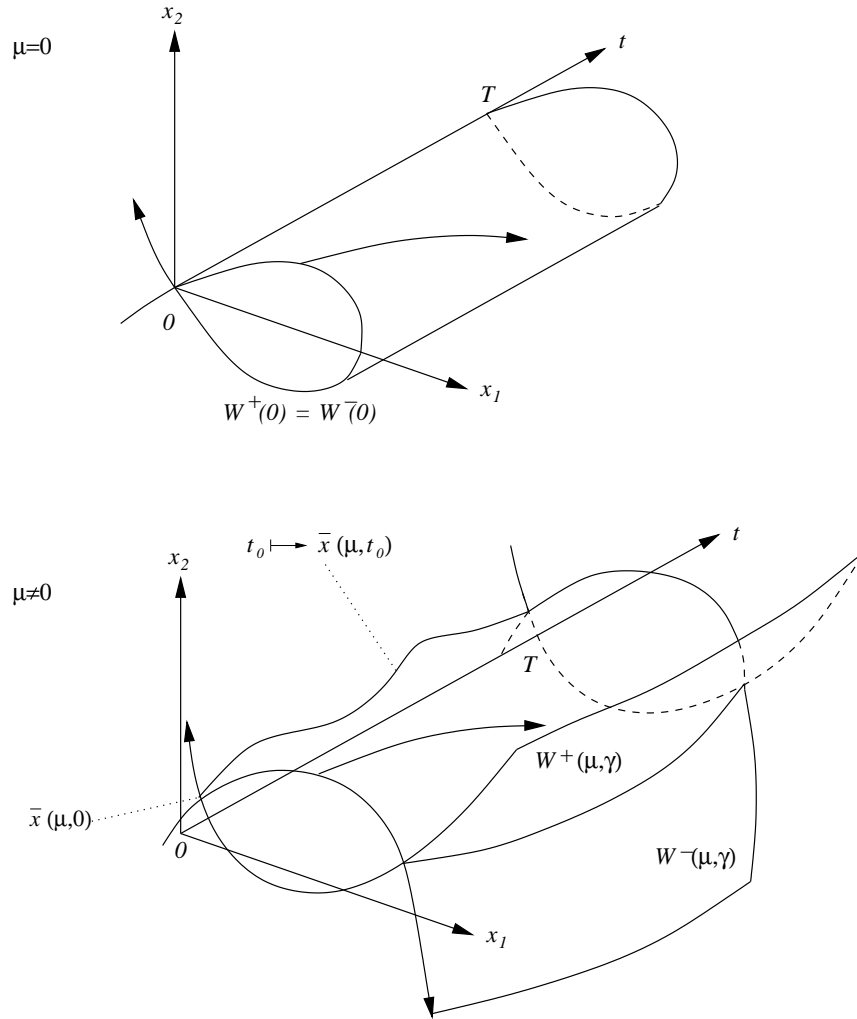


FIGURA 9.9. Varietà stabile ed instabile dell'orbita iperbolica $\gamma(\mu)$ che si intersecano trasversalmente.

non perturbato è $H(q, \dot{q}) = \dot{q}^2/2 + (1 - \cos q)$. L'equazione delle orbite omocline è $H(q, \dot{q}) = 2$, ovvero:

$$\dot{q} = \pm \sqrt{2(1 + \cos q)},$$

che si integra per separazione delle variabili. Scegliendo la determinazione positiva otteniamo l'omoclina $q(t) = 4 \arctan e^t - \pi$. Quindi:

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \arctan e^t - \pi \\ 2 / \cosh t \end{pmatrix},$$

da cui, essendo

$$Jv(x) = \begin{pmatrix} \sin x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad g(t, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix},$$

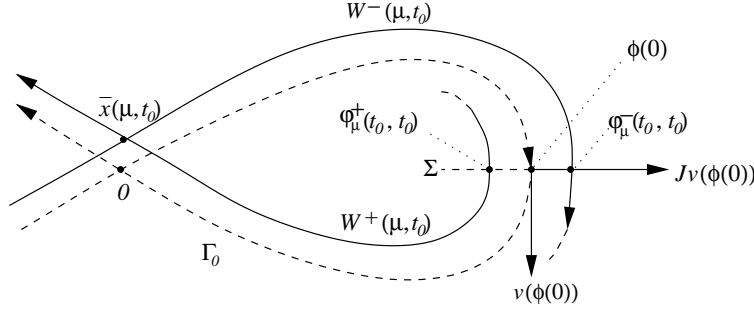


FIGURA 9.10. Per μ piccolo le varietà $W^\pm(\mu, t_0)$ intesecano la sezione normale all'orbita omoclina nel punto $\phi(0)$.

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{2 \sin[\omega(\tau + t_0)]}{\cosh \tau} = 4 \sin(\omega t_0) \int_0^{+\infty} d\tau \frac{\cos(\omega \tau)}{\cosh \tau}.$$

Si verifica facilmente che l'integrale è diverso da zero, cosicché $t_0 = 0$ è uno zero semplice di $M(t_0)$: $M(0) = 0$, $M'(0) \neq 0$. Concludiamo che esiste un'intersezione omoclina trasversa della mappa stroboscopica $\phi^{T,0}$ vicino al punto $\phi(0) = (0, 2)$ sulla separatrice.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 9.14 (CENNI). Essendo la dipendenza dal parametro μ regolare, le varietà locali $W_{\text{loc}}^\pm(\mu, t_0)$ sono C^1 -vicine alle varietà locali $W_{\text{loc}}^\pm(0)$ per μ prossimo a zero. Possiamo quindi fissare un disco $B_r(0)$ all'interno del quale le varietà $W^\pm(\mu, t_0)$ sono $\mathcal{O}(\mu)$ -vicine a Γ_0 . Sia Σ la sezione normale a Γ_0 nel punto $\phi(0)$. La continuità rispetto ai dati iniziali ed alla perturbazione implica che $|\phi^{t, t_1}(x) - \phi(t - t_1)| = \mathcal{O}(\mu)$ se $|x - \phi(0)| = \mathcal{O}(\mu)$ (la stima essendo uniforme su intervalli di tempo finiti). Ne segue che, pur di prendere μ sufficientemente piccolo, le varietà $W^\pm(\mu, t_0)$ rimangono $\mathcal{O}(\mu)$ -vicine a Γ_0 fino ad intersecare Σ . Sia ora $\phi_\mu^+(t, t_0)$ [risp. $\phi_\mu^-(t, t_0)$] la soluzione tale che $\phi_\mu^+(t_0, t_0)$ [risp. $\phi_\mu^-(t_0, t_0)$] è il primo punto di intersezione di $W^+(\mu, t_0)$ [risp. $W^-(\mu, t_0)$] con Σ . Tale soluzione giace sulla varietà invariante $W^+(\mu, \gamma)$ [risp. $W^-(\mu, \gamma)$] che, per quanto sopra detto, rimane C^1 -vicina a $\mathbb{R} \times W^+(0)$ [risp. $\mathbb{R} \times W^-(0)$] per $t > t_0$ [risp. $t < t_0$]. In definitiva si ha:

$$\begin{aligned} \phi_\mu^+(t, t_0) &= \phi(t - t_0) + \mu q^+(t, t_0) + \mathcal{O}(\mu^2), & t \in [t_0, +\infty), \\ \phi_\mu^-(t, t_0) &= \phi(t - t_0) + \mu q^-(t, t_0) + \mathcal{O}(\mu^2), & t \in (-\infty, t_0], \end{aligned}$$

essendo il resto $\mathcal{O}(\mu^2)$ uniforme sugli intervalli indicati. Sostituendo gli sviluppi precedenti nelle equazioni del moto ed identificando i termini del primo ordine nel parametro μ , si ricava facilmente che le funzioni $q^\pm(t, t_0)$ sono soluzioni dell'equazione lineare:

$$\dot{q}^\pm(t, t_0) = Dv(\phi(t - t_0))q^\pm(t, t_0) + g(t, \phi(t - t_0)). \quad (9.27)$$

La separazione tra le varietà $W^\pm(\mu, t_0)$ sulla sezione Σ è definita dalla distanza (con segno) tra i punti di intersezione $\phi_\mu^-(t_0, t_0)$ e $\phi_\mu^+(t_0, t_0)$, ovvero:

$$d_\mu(t_0) := \frac{\langle Jv(\phi(0)), [\phi_\mu^-(t_0, t_0) - \phi_\mu^+(t_0, t_0)] \rangle}{|v(\phi(0))|},$$

essendo

$$\frac{Jv(\phi(0))}{|v(\phi(0))|} = \frac{1}{|v(\phi(0))|} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(\phi(0)) \\ v_2(\phi(0)) \end{pmatrix} = \frac{1}{|v(\phi(0))|} \begin{pmatrix} -v_2(\phi(0)) \\ v_1(\phi(0)) \end{pmatrix}$$

la direzione normale a Γ_0 in $\phi(0)$. Posto

$$\eta^\pm(t, t_0) = \langle Jv(\phi(t - t_0)), q^\pm(t, t_0) \rangle,$$

si ha:

$$d_\mu(t_0) = \mu \frac{\eta^-(t_0, t_0) - \eta^+(t_0, t_0)}{|v(\phi(0))|} + \mathcal{O}(\mu^2).$$

D'altra parte, dall'Eq. (9.27) ed essendo $\dot{\phi} = v(\phi)$,

$$\begin{aligned} \dot{\eta}^\pm(t, t_0) &= \langle Jv(\phi(t - t_0)), [Dv(\phi(t - t_0)) q^\pm(t, t_0) + g(t, \phi(t - t_0))] \rangle \\ &\quad + \langle JDv(\phi(t - t_0)) v(\phi(t - t_0)), q^\pm(t, t_0) \rangle \\ &= \operatorname{div} v(\phi(t - t_0)) \eta^\pm(t, t_0) + \langle Jv(\phi(t - t_0)), g(t, \phi(t - t_0)) \rangle \\ &= \langle Jv(\phi(t - t_0)), g(t, \phi(t - t_0)) \rangle, \end{aligned}$$

avendo utilizzato nella penultima uguaglianza che $(Dv)^t J + J(Dv) = \operatorname{div} v J$ e nell'ultima uguaglianza l'ipotesi di divergenza nulla del campo vettoriale v .

Poiché $q^+(t, t_0)$ [risp. $q^-(t, t_0)$] è uniformemente limitata su $[t_0, +\infty)$ [risp. $(-\infty, t_0]$] e $v(\phi(t - t_0)) \rightarrow v(0) = 0$ per $t \rightarrow \pm\infty$, segue che $\eta^\pm(\pm\infty, t_0) = 0$, cosicché, integrando l'equazione precedente,

$$\begin{aligned} \eta^+(t, t_0) &= - \int_t^{+\infty} ds \langle Jv(\phi(s - t_0)), g(s, \phi(s - t_0)) \rangle, \\ \eta^-(t, t_0) &= \int_{-\infty}^t ds \langle Jv(\phi(s - t_0)), g(s, \phi(s - t_0)) \rangle. \end{aligned}$$

Quindi $\eta^-(t_0, t_0) - \eta^+(t_0, t_0) = M(t_0)$ e

$$d_\mu(t_0) = \mu \frac{M(t_0)}{|v(\phi(0))|} + \mathcal{O}(\mu^2).$$

Poiché $|v(\phi(0))| = \mathcal{O}(1)$, il termine $\mu M(t_0)/|v(\phi(0))|$ domina su $\mathcal{O}(\mu^2)$. Ne segue che se al variare di $t_0 \in [0, T]$ la funzione $M(t_0)$ cambia segno allora anche $d_\mu(t_0)$ deve cambiare segno per μ sufficientemente piccolo. Più precisamente, se τ_0 è uno zero isolato di M , allora esiste un tempo $\tau = \tau_0 + \mathcal{O}(\mu)$ per il quale $\phi_\mu^+(\tau, \tau) = \phi_\mu^-(\tau, \tau)$, ovvero esiste un punto omoclino $v \in W^+(\mu, \tau) \cap W^-(\mu, \tau)$. Un'analisi più accurata mostra inoltre che $\mu M'(t_0)/|v(\phi(0))|$ fornisce (a meno di errori $\mathcal{O}(\mu^2)$) la differenza tra le pendenze delle direzioni tangenti a $W^-(\mu, \tau)$ e $W^+(\mu, \tau)$ nel punto omoclino v . Quindi se $M'(\tau_0) \neq 0$ l'intersezione è trasversa. Infine, come già osservato, $\Gamma_\mu = \{\phi^{t, t_0}(v) : t \in \mathbb{R}\}$ è un'orbita omoclina asintotica

nel futuro e nel passato a $\gamma(\mu)$. In particolare esiste un punto omoclino trasverso $\nu(\mu, t_0) \in W^+(\mu, t_0) \cap W^-(\mu, t_0)$ per ogni $t_0 \in [0, T]$. \square