INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO

Academia de Ciencias Básicas

APUNTES DE ECUACIONES DIFERENCIALES

ELABORADOS POR:

M EN C JORGE JAVIER SILVA MARTÍNEZ

M EN C MIGUEL OLVERA ALDANA

M EN C© MIGUEL ANGEL GONZÁLEZ TRUJILLO

2 DE JUNIO DE 2002

ÍNDICE

UNIDAD IV: TRANSFORMADA DE LAPLACE.

PREFACIO

En el proceso de recopilación de material didáctico para la elaboración de los presentes apuntes fueron considerados tres aspectos fundamentales. Primero, un total apego al programa de estudios de la asignatura de Ecuaciones Diferenciales de la ESCOM-IPN, segundo, la experiencia misma de la imparticion del curso en repetidas veces, así mismo como la observancia de las necesidades del alumno en cuanto a la signatura y tercero la importancia de la aplicación de las Ecuaciones Diferenciales en diversos campos de las ciencias e ingeniería y muy particularmente en la resolución de ciertos problemas relacionados con los circuitos eléctricos, considerando con lo anterior, que este material podrá ser de gran utilidad para el estudio de algunos tópicos en esta asignatura. Estos tres factores en conjunto, dan como resultado un balance teórico-práctico optimo en su contenido, manejando los conceptos, definiciones y teoremas, a nuestro parecer, en sus formas más básicas, sin dejar de lado el formalismo que implica la materia, procurando además, no dar punto final a ningún tema sin antes respaldarlo dentro de un marco práctico debidamente estructurado de problemas resueltos, dando lugar todo lo anterior, a un seguimiento programático por demás completo.

El presente material contempla en su primera unidad de manera introductoria algunas definiciones y conceptos fundamentales relacionados con las Ecuaciones Diferenciales los cuales son de suma importancia para el desarrollo posterior del curso. La unidad II, esta enfocada a la descripción y desarrollo de algunos métodos analíticos para dar solución a Ecuaciones de Diferenciales Lineales Ordinarias de Primer Orden Con Coeficientes Constantes, considerando además en esta sección algunas aplicaciones prácticas muy interesantes. Continuando con el programa, en la unidad III se desarrollan las bases para dar solución a Ecuaciones Diferenciales Lineales Ordinarias De Orden Superior Al Primero Con Coeficientes Constantes, introduciendo aquí, el método de Variación de Parámetros siendo este un método más general que el método de Coeficientes Indeterminados que indica el programa y el cual esta incluido con detalle en el este material. En la unidad IV se introduce lo que se conoce como la Transformada de Laplace, la cual resulta ser una herramienta alternativa, muy versátil y sencilla de manipular, para dar solución a algunas Ecuaciones Diferenciales Lineales, que en muchas ocasiones por los métodos ordinarios resultaría muy complicado. Para concluir, en la unidad V, se presenta de manera muy breve, una técnica para resolver algunas Ecuaciones Diferenciales Lineales Ordinarias de Orden Superior con Coeficientes Variables usando como solución una serie de potencias infinita.

El diseño, formato y presentación fueron pensados de forma tal, que los conceptos relevantes se encuentren debidamente marcados, por una parte, para resaltar su importancia, y por otra, para que el lector no tenga ninguna dificultad para la localización de algún tema en particular. Por tal motivo, consideramos que los apuntes, pueden ser utilizados como material didáctico tanto por el profesor en la imparticion del curso, como por el alumno a manera de guía, esperando así, que el presente trabajo sea un apoyo en el proceso de enseñanza-aprendizaje en la asignatura de Ecuaciones Diferenciales.

M en C Jorge J. Silva Martínez.
M en C Miguel Olvera Aldana.
M en C© Miguel Ángel González T.

INTRODUCCIÓN

En el estudio de las ciencias e ingeniería, así como en otros campos tales como, la economía, medicina, psicología, investigación de operaciones entre otros, se desarrollan modelos matemáticos para ayudar a comprender la fenomenología o el origen de ciertos problemas físicos, biológicos, sociales, etc. Estos modelos a menudo dan lugar a una ecuación que contiene ciertas derivadas de una *función incógnita o función desconocida*. A una ecuación de este tipo se le denomina *ecuación diferencial*.

Cabe destacar, que la manipulación de una ecuación diferencial no dista mucho del trato dado a una ecuación del tipo algebraico en lo que a la determinación de sus raíces se refiere, de hecho, el objetivo que sigue cada uno de estos dos problemas citados es exactamente el mismo, la determinación de un ente matemático desconocido, llámese función ó llámese variable según sea el caso, que reduzca a la ecuación original a *una identidad*, dicho en otras palabras, la determinación de *una solución* que satisfaga a la ecuación dada. Para ilustrar lo anterior analicemos los siguientes ejemplos:

1. Se desea graficar la función $y(x) = -x^2 + 6x - 5$.

Puesto que $y(x)$ es una función cuadrática, de los cursos de geometría sabemos que esta, representa una parábola que se puede dibujar del siguiente modo.

Expresemos primero a $y(x)$ en una forma más apropiada

$$
\begin{aligned}
y(x) &= -x^2 + 6x - 5 = -\left(x^2 - 6x + 5\right) = -\left(x^2 - 6x + 5 + 4 - 4\right) = -\left(x^2 - 6x + 9\right) + 4 = \\
&= -(x-3)^2 + 4,
\end{aligned}
$$

por tanto $y(x)$ se puede expresar de manera equivalente como

$$
y(x) = -(x-3)^2 + 4
$$

o bien

$$
y - 4 = -(x-3)^2 \tag{1}
$$

la expresión anterior nos indica que el vértice de la parábola tiene coordenadas $(3,4)$ y que abre hacia abajo, sin embargo esta información no es suficiente para hacer el trazo de la gráfica, falta todavía determinar los puntos de intersección de la gráfica de la función y el eje de las x' s, es decir, los valores de x para los cuales $y(x) = 0$.

Si $y(x)=0$, entonces la función se reduce a la siguiente ecuación algebraica de segundo grado:

$$-x^2+6x-5=0\ldots(2)$$

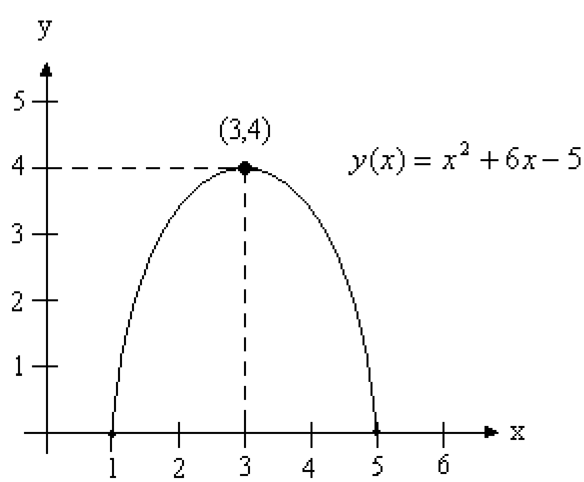
siendo x en este caso, *una incógnita o variable desconocida*, la cual pude tomar los valores aun no determinados x_1 y x_2, tales que

$$-x_1^2+6x_1-5=0$$
$$-x_2^2+6x_2-5=0$$

los valores de x_1 y x_2 se pueden obtener resolviendo (2) con la formula general o bien descomponiendo esta en los términos lineales

$$(x-5)(x-1)=0\ldots(3).$$

Así concluimos que $x_1=5$ y $x_2=1$, son los valores de x en donde la gráfica de la función intersecta al eje de las x's, y la información necesaria para esbozar la gráfica de $y(x)$ esta completa por lo que podemos proceder



Por otro lado, si reemplazamos los valores $x_1=5$ y $x_2=1$ en la ecuación (2) tenemos

$$-(5)^2+6(5)-5=-25+30-5=0$$
$$-(1)^2+6(1)-5=-1+6-5=0$$

entonces decimos que por otro lado $x_1 = 5$ y $x_2 = 1$ reducen a la ecuación (2) a *una identidad* y por tanto concluimos que $x_1 = 5$ y $x_2 = 1$ representan *una solución* a la ecuación algebraica (2).

2. *Caída Libre de un Cuerpo*:

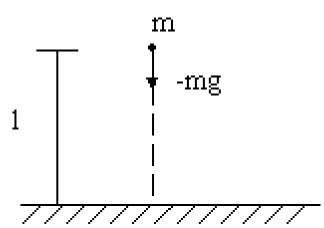
En este ejemplo se puede aplicar la segunda Ley de Newton, la cual establece que la masa del objeto multiplicada por su aceleración es igual a la fuerza total que actúa sobre él. Esto nos conduce a la ecuación diferencial siguiente

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg \ldots (4)$$

Donde "*m*" es la masa del objeto, *la función incógnita o función desconocida* "*y*" es su altura sobre el suelo, "*g*" la constante de gravedad, y "*–mg*" la fuerza debida a la gravedad. Cancelando "*m*" en ambos miembros de (4) esta ecuación diferencial toma la forma:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

o equivalentemente



$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = -g \ .$$

En este caso, por integración inmediata es fácil despejar a "*y*", en la ecuación anterior, esto es:

$$d\int\left(\frac{dy}{dt}\right) = -g\int dt$$

por tanto:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(y) = v(t) = -gt + C_1 \ldots (5),$$

que representa la velocidad del objeto a cualquier instante de tiempo t.

Repitiendo el mismo proceso en la ecuación anterior se tiene:

$$\int d(y) = \int (-gt + C_1)dt$$

así:

$$y(t) = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2 \ldots (6)$$

Las constantes de integración C_1 y C_2, se pueden determinar si se conoce su altura y la velocidad inicial del objeto. Así pues, se tiene por un lado, que la función dada en (6) representa una formula para determinar la altura del objeto a cualquier instante de tiempo *t*, y por otro, *una solución* a al ecuación diferencial (5), ya que al sustituir (6) y sus derivadas hasta segundo orden en (5), esta última se reduce a *una identidad*, esto es

$$\begin{aligned} &\text{Como} \quad y(t) = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2, \\ &\text{entonces}, \; y'(t) = \frac{dy}{dt} = -gt + C_1, \\ &y, \quad y''(t) = \frac{d^2 y}{dt^2} = -g \end{aligned}$$

por tanto sustituyendo $y''(t)$ en (5) tenemos la identidad:

$$m(-g) = -mg$$

CONCLUSIONES

EJEMPLO 1:

- La ecuación (2), representa una *ecuación algebraica de 2º grado* con *variable desconocida* x.

- La ecuación algebraica (2), proporciona información importante acerca de la gráfica de la función, ya que a partir de esta, podemos determinar los puntos de intersección de la gráfica con el eje de las x's.

° Los valores x_1 y x_2, satisfacen a la ecuación algebraica (2) y por tanto son *solución única** de la misma.

EJEMPLO 2:

° La ecuación (3), representa una *ecuación diferencial lineal de 2º* orden con *función desconocida* $y(t)$.

* No existen otros valores de x distintos de x_1 y x_2 que satisfagan a la ecuación algebraica (2).

° La ecuación diferencial (3), describe el movimiento de un cuerpo en caída libre, pues a partir de esta, podemos determinar su velocidad y altura a cualquier instante de tiempo t.

° La función obtenida en (6), satisface a la ecuación diferencial (5) y por tanto es *solución única*** de la misma.

*No existe otra función distinta de (6) que satisfaga a la ecuación diferencial (5). A la función $y(t)$ dada en (6) la llamaremos **solución general** de la ecuación diferencial dada.

UNIDAD I

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

1.1 DEFINICIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Definición:	Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra las derivadas de una función "*desconocida*" (o variable dependiente) con respecto de una o más variables (variables independientes).

1.2 CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES.

Las ecuaciones diferenciales se pueden clasificar de acuerdo con lo siguiente

- Si la función desconocida depende de una sola variable entonces la ecuación se llama *ecuación diferencial ordinaria*.

Sin embargo

- Si la función desconocida depende de más de una variable entonces la ecuación se llama *ecuación diferencial parcial*.

1.2.1 EJEMPLOS

Ecuación	Tipo	Variable Dependiente	Variable Independiente
$\frac{dy}{dx} = 2x + y$	Ordinaria	y	x
$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = v$	Parcial	v	x, y
$y''' + 2(y'')^2 + y' = Cosx$	Ordinaria	y	x
$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$	Parcial	u, v	x, y

Nota: Existen casos *particulares* en los cuales se tiene *más de una* variable dependiente, por ejemplo la ecuación siguiente

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \text{ (Regla de Cauchy)}$$

en la cual tenemos *las variables dependientes u* y *v*.

En consecuencia nos veremos forzados a generalizar la *definición 1.1* , de la siguiente manera

Definición:	Una ecuación que contiene las derivadas de *una o más* variables dependientes, con respecto a una o más variables independientes se llama *ecuación diferencial*.

- Si la ecuación contiene solo derivadas de *una o más variables dependientes* con respecto a una sola variable independiente, entonces esta se llama *ecuación diferencial ordinaria*.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} + \frac{dw}{dx} = 0$$

- Si la ecuación diferencial contiene *una ó más* variables dependientes con respecto a más de una variable independiente esta ecuación se llama *ecuación diferencial parcial*.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = F(x, y)$$

1.3 ORDEN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Definición:	El orden de una ecuación diferencial es el indicado por el índice que aparece en la derivada *más alta*.

1.3.1 Ejemplos

1. $\frac{d^2 y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$ Ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, con variable dependiente *y*, y variable independiente *x*.

2. $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^3 v}{\partial y^3}=v$ Ecuación diferencial parcial de tercer orden, con variable dependiente *v*, y variable independiente *x*, *y*.

1.4 GRADO DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Definición: El grado de una ecuación diferencial (que puede escribirse como un polinomio con respecto a las derivadas), es la potencia que aparece en la derivada más alta en la ecuación.

1.4.1 EJEMPLOS

1) $(y'')^2+(y')^3+3y=x^2$ $\therefore$ Es una ecuación diferencial de segundo grado.

2) $\left(\dfrac{d^2w}{dv^2}\right)^2+\left(\dfrac{dw}{dv}\right)^4+w=v$ $\therefore$ Es una ecuación diferencial de segundo grado.

1.5 ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL ORDINARIA DE ORDEN n

Definición: Una *ecuación diferencial ordinaria lineal* de orden *n*, es una ecuación que se puede escribir en la forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)\ldots(1);\, a_n(x)\neq 0$$

donde $g(x)$ y los coeficientes $a_n(x),a_{n-1}(x),\ldots,a_1(x),a_o(x)$, son funciones dadas de *x*.

En la ecuación (1), observamos las propiedades características de las ecuaciones diferenciales lineales que se enlistan a continuación:

i) La variable dependiente "*y*" y todas sus derivadas son de *primer grado*, i.e., la potencia de todo término en donde aparece "*y*" es *uno*.

ii) Los coeficientes $a_n(x),a_{n-1}(x),\ldots,a_1(x),a_0(x)$ son funciones dadas de la variable independiente *x*, el coeficiente $a_n(x)\neq 0$.

iii) La función $g(x)$ es una función dada de la variable independiente x.

iv) Las funciones de "y" o de las derivadas de "y" tales como $Seny$, $Cosy''$, $\ln y'''$, e^{y} , $e^{y''}$, etc, no pueden aparecer en una ecuación diferencial lineal. Cuando la ecuación diferencial no es lineal, se dice que es *no lineal*.

1.5.1 EJEMPLOS

1. $(y-x)dx+4xdy=0$

   $$(y-x)\frac{dx}{dx}+4x\frac{dy}{dx}=0$$

   $$(y-x)+4x\frac{dy}{dx}=0$$

   $$4x\frac{dy}{dx}+y=x$$

   Ecuación diferencial ordinaria, de orden uno, lineal, variable dependiente "y", variable independiente "x".

2. $y''-2y'+y=0$

   Ecuación diferencial ordinaria, de orden dos, lineal, variable dependiente "y" ,variable independiente "x".

3. $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}-\dfrac{dy}{dx}+6y=e^x$

   Ecuación diferencial ordinaria, de orden tres, lineal, variable dependiente "y", variable independiente "x".

4. $(1+y)\dfrac{dy}{dx}+2y=e^x$

   Ecuación diferencial ordinaria, de orden uno, no lineal, variable dependiente "y", variable independiente "x"

5. $\dfrac{d^2x}{dy^2}+Senx=0$

   Ecuación diferencial ordinaria, de orden dos, no lineal, variable dependiente "x", variable independiente "y".

6. $\left(\dfrac{d^4y}{dx^4}\right)^3+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)+y^4=0$

   Ecuación diferencial ordinaria, de orden cuatro, no lineal, variable dependiente "y" ,variable independiente "x"

Unificando todos los conceptos vistos al momento, podemos clasificar una ecuación diferencial del siguiente modo

Ecuación Diferencial	Tipo	Orden	Grado	Linealidad	Variable Dependiente	Variable Independiente
$x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}-\dfrac{dy}{dx}+6y=e^x$	Ordinaria	Tres	Uno	Lineal	y	x
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2+y^2$	Parcial	Dos	Uno	---------	z	x, y
$y'''+xy''+2y(y')+xy=0$	Ordinaria	Tres	Uno	No lineal	y	x
$xy'+y=3$	Ordinaria	Uno	Uno	Lineal	y	x

1.6 SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Definición: Una *solución* de una ecuación diferencial es cualquier *función ó relación* que satisface la ecuación, dicho en otras palabras, la reduce a una identidad.

1.6.1 SOLUCIONES EXPLÍCITAS

Definición: Una *función o relación* que satisface a una ecuación diferencial y en su estructura la variable dependiente se expresa tan solo en términos de la(s) variable(s) independiente(s) y constante(s) se llama *solución explicita*.

1.6.2 EJEMPLOS

1) Probar que las funciones definas por

$$x(t)=e^{5t}\ldots(1) \quad \text{y} \quad x(t)=e^{-3t}\ldots(2)$$

son dos soluciones explícitas de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 15x = 0\ldots(3)$$

Solución:

Derivando (1)

$$\frac{dx}{dt} = 5e^{5t}$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = 25e^{5t}$$

sustituyendo (1) y sus derivadas en (3)

$$25e^{5t} - 2\left(5e^{5t}\right) - 15\left(e^{5t}\right) = 0$$
$$25e^{5t} - 10e^{5t} - 15e^{5t} = 0$$
$$0 = 0$$

por tanto

$$x(t) = e^{5t}$$

es solución explícita de la ecuación diferencial (3).

Derivando (2)

$$\frac{dt}{dx} = -3e^{-3t}$$
$$\frac{d^2t}{dx^2} = 9e^{-3t}$$

sustituyendo (2) y sus derivadas en (3)

$$9e^{-3t} - 2\left(-3e^{-3t}\right) - 15\left(e^{-3t}\right) = 0$$
$$9e^{-3t} + 6e^{-3t} - 15e^{-3t} = 0$$
$$0 = 0$$

por tanto

$$x(t) = e^{-3t}$$

es solución explicita de la ecuación diferencial (3).

2) Probar que la función definida por

$$v(x,y) = e^{3x} Sen2y \ldots (1)$$

es una solución explícita de

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = v \ldots (2)$$

Solución:

Derivando (1)

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 3e^{3x} Sen2y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2e^{3x} Cos2y$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 9e^{3x} Sen2y \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -4e^{3x} Sen2y$$

sustituyendo (1) y sus derivadas en (2)

$$\begin{aligned} &9e^{3x} Sen2y + 2\left(-4e^{3x} Sen2y\right) = e^{3x} Sen2y \\ &9e^{3x} Sen2y - 8e^{3x} Sen2y = e^{3x} Sen2y \\ &e^{3x} Sen2y = e^{3x} Sen2y \end{aligned}$$

por tanto, $v(x,y)$ es solución explícita de la ecuación diferencial.

3) Probar que la función definida por

$$y = \sqrt{9 - x^2} \ldots (1)$$

es solución explícita de la ecuación diferencial

$$y' = -\frac{x}{y} \ldots (2)$$

Solución:

Derivando (1)

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

sustituyendo (1) y sus derivadas en (2)

$$\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

por tanto, $y = \sqrt{9-x^2}$ es solución explicita de la ecuación diferencial

4) Determine los valores de m tales que

$$y = e^{mx} \ldots (1)$$

sea una solución de la ecuación diferencial

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \ldots (2)$$

Solución:
Derivando (1)

$$y' = me^{mx}$$
$$y'' = m^2 e^{mx}$$

sustituyendo (1) y sus derivadas en (2)

$$m^2 e^{mx} - 5me^{mx} + 6e^{mx} = 0$$

o bien

$$e^{mx}\left(m^2 - 5m + 6\right) = 0 \ldots (3)$$

como en (3) $e^{mx} \neq 0,\ \forall m$ y $\forall x$, entonces (3) se reducirá a una identidad solo si

$$\left(m^2 - 5m + 6\right) = 0 \ldots (4)$$

resolviendo (4)

$$m^2 - 5m + 6 = 0$$
$$(m-2)(m-3) = 0$$

por tanto, $y = e^{mx}$ es solución de (2) si y solo si

$$m = 2 \qquad \text{ó} \qquad m = 3.$$

Comprobación

i) Si $m = 2$, entonces $y = e^{2x}$.

Derivando y

$$y' = 2e^{2x}$$
$$y'' = 4e^{2x}$$

sustituyendo y y sus derivadas en (2)

$$\begin{aligned} 4e^{2x} - 10e^{2x} + 6e^{2x} &= 0 \\ 10e^{2x} - 10e^{2x} &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

por tanto si $m = 2$, entonces $y = e^{2x}$ es solución de (2).

ii) Si $m = 3$, entonces $y = e^{3x}$.

Derivando y

$$y' = 3e^{3x}$$
$$y'' = 9e^{3x}$$

sustituyendo y y sus derivadas en (2)

$$\begin{aligned} 9e^{3x} - 15e^{3x} + 6e^{3x} &= 0 \\ 15e^{3x} - 15e^{3x} &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

por tanto si $m = 3$, entonces $y = e^{3x}$ es solución de (2).

En todos los ejemplos anteriores hemos tratado soluciones en las cuales la *variable dependiente* es expresada en función de la(s) variable(s) independiente(s), refiriéndonos a éstas como *soluciones explicitas* de la ecuación diferencial dada, sin embargo, podemos tener soluciones definidas *implícitamente.*

1.6.3 SOLUCIONES IMPLÍCITAS

Definición:	Una *función ó relación* que satisface a una ecuación diferencial y que involucra en su estructura tanto *variables dependientes como independientes* decimos que es una *solución implícita* de la ecuación diferencial dada.

1.6.4 EJEMPLOS

1) La expresión

$$y^3 - 3x + 3y = 0 \ldots (1)$$

define a y *implícitamente* como una función de x. Demostrar que esta función es *solución implícita* de la ecuación diferencial

$$y'' = -2y(y')^3 \ldots (2)$$

Solución:

Derivando implícitamente (1)

$$\frac{d}{dx}(y^3 - 3x + 3y = 5)$$
$$3y^2 y' - \frac{3dx}{dx} + 3y' = 0$$
$$y^2 y' - 1 + y' = 0$$
$$y'(y^2 + 1) = 1$$
$$y' = \frac{1}{y^2 + 1}$$

derivando nuevamente

$$\frac{d}{dx}\left(y' = \frac{1}{(y^2+1)}\right)$$
$$y'' = -1(y^2 + 1)^{-2}(2yy')$$
$$y'' = -\frac{2yy'}{(y^2+1)^2} = -\frac{2y}{(y^2+1)^3}$$

sustituyendo (1) y sus derivadas en (2)

$$-\frac{2y}{(y^2+1)^3} = -2y\left(\frac{1}{y^2+1}\right)^3$$

$\therefore\ y^3 - 3x + 3y = 5$ es solución implícita de (2).

1.7 PROBLEMA DE VALOR INICIAL Y DE FRONTERA

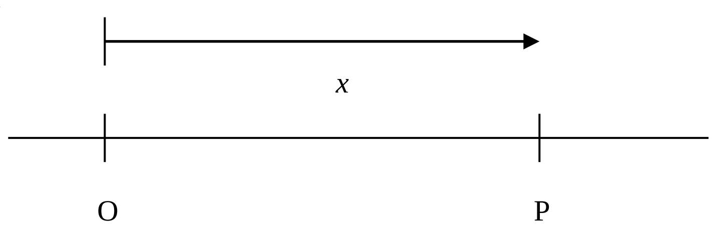
Analicemos estos dos conceptos mediante el siguiente ejemplo.

Una partícula P se mueve a lo largo del eje x (*figura 1.1*) de tal menara que su aceleración en cualquier tiempo $t \geq 0$ esta dada por $a = 16 - 24t$.

a) Encuentre la posición x de la partícula medida del origen O a cualquier tiempo $t > 0$, asumiendo que inicialmente $t = 0$ esta localizada en $x = 2$ y esta viajando a una velocidad $v = -5$.

b) Trabaje con la parte a) si solamente se sabe que la partícula esta localizada inicialmente en $x = 2$ cuando $t = 0$ y en $x = 7$ cuando $t = 1$.

Figura 1.1



a) Sabemos que la aceleración en O de la partícula es

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = 16 - 24t$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = 16 - 24t$$
$$\int d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \int (16 - 24t)dt = 16t - 12t^2 + C_1$$
$$v(t) = 16t - 12t^2 + C_1$$

Como v = -5, cuando t = 0, esto es $v(0)$ = -5

$$-5 = 16(0) - 12(0)^2 + C_1$$
$$\therefore\ C_1 = -5$$

así

$$v(t) = 16t - 12t^2 - 5\ldots(1)$$

integrando

$$v = \frac{dx}{dt} = 16t - 12t^2 - 5$$
$$\int dx = \int (16t - 12t^2 - 5)dt$$
$$x(t) = 8t^2 - 4t^3 - 5t + C_2$$

Como x = 2, t = 0, esto es $x(0)$ = 2

$$2 = 8(0)^2 - 4(0)^3 - 5(0) + C_2$$
$$\therefore\ C_2 = 2$$

en consecuencia

$$x(t) = 8t^2 - 4t^3 - 5t + 2\ldots(2)$$

de donde (2), define la posición de la partícula en cualquier instante de tiempo t>0.

b) Considerando nuevamente la aceleración en O de la partícula como

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = 16 - 24t$$

Procediendo como en a) tenemos que la velocidad de la partícula viene dada por

$$v(t) = 16t - 12t^2 + C_1 \ldots (3)$$

en este caso no existe condición para *v(t)*, entonces integrando nuevamente

$$x(t) = 8t^2 - 4t^3 + C_1 t + C_2 \ldots (4)$$

determinemos C_2 en (4), usando la condición $x(0) = 2$, esto es

$$2 = 8(0)^2 - 4(0)^3 - C_1(0) + C_2$$
$$\therefore\ C_2 = 2$$

así

$$x(t) = 8t^2 - 4t^3 + C_1 t + 2 \ldots (5)$$

por otro lado, cuando $t = 1;\quad x = 7$, esto es $x(1) = 7$, entonces de (5)

$$7 = 8(1)^2 - 4(1)^3 - C_1(1) + 2$$
$$\therefore\ C_1 = 1$$

en consecuencia

$$x(t) = 8t^2 - 4t^3 + t + 2 \ldots (6)$$

de donde (6), define la posición de la partícula en cualquier instante de tiempo del intervalo $0 \le t \le 1$.

El problema anterior se reduce a resolver las formulaciones matemáticas siguientes

a) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 16 - 24t$

$x(0) = 2$

$x'(0) = -5$

b) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 16 - 24t$

$x(0) = 2$

$x'(1) = 7$

Una diferencia importante entre ellas es que en a) las condiciones sobre la función desconocida x y su derivada x' están especificadas en *un solo valor de variable independiente* (en este caso $t = 0$). Mientras que en b) las condiciones sobre la función desconocida x se especifican en *dos valores* (distintos) *de la variable independiente* (en este caso $t = 0$ y $t = 1$).

Los dos tipos de problemas presentados en a) y b) se llaman problemas de *valor inicial* y de *frontera* respectivamente.

Definición:	Un problema de *valor inicial*, es un problema que busca determinar una solución a una ecuación diferencial sujeta a condiciones sobre la *función desconocida* y sus *derivadas* especificadas en *un valor* de la *variable independiente*. Tales condiciones se llaman *condiciones iniciales*.

Definición:	Un problema de *valor de frontera*, es un problema que busca determinar una solución a una ecuación diferencial sujeta a condiciones sobre la *función desconocida* especificadas en *dos o más valores* de la *variable independiente*. Tales condiciones se llaman *condiciones de frontera*.

Nota: En general el problema de valor inicial para determinar la solución a una ecuación diferencial de orden n deberá estar sujeto a las condiciones iniciales.

1.8 SOLUCIONES GENERALES Y PARTICULARES

Para comprender estos conceptos, resolvamos los siguientes problemas de valor inicial.

Consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \ldots (1)$$

sujeta a las siguientes condiciones iniciales

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = 3 \\ y'(0) = -4 \end{array}\right\} \ldots (2)$$

Supongamos que por algún medio la resolvemos y obtenemos que

$$y = ACosx + BSenx \ldots (3)$$

es solución de la ecuación diferencial (1). Usando en (3) la condición $y(0) = 3$, se tiene

$$3 = A\underbrace{Cos(0)}_{1} + B\underbrace{Sen(0)}_{0}$$
$$\therefore \ A = 3$$

en consecuencia

$$y = 3Cosx + BSenx \ldots (4)$$

derivando (4)usando en (4) la condición $y'(0) = -4$, se tiene

$$-4 = -3\underbrace{Sen(0)}_{0} + B\underbrace{Cos(0)}_{1}$$
$$\therefore \ B = -4$$

y por tanto, la solución (3) toma la forma

$$y = 3Cosx - 4Senx \ldots (4)$$

en el ejemplo

$$y = ACosx + BSenx$$

representa la *Solución General* de la ecuación diferencial (1), mientras que

$$y = 3Cosx - 4Senx$$

representa una *Solución Particular* de (1).

De acuerdo con lo anterior podríamos entonces establecer las siguientes definiciones.

Definición:	Una *función ó relación* que satisface a una ecuación diferencial y que involucra en su estructura *constantes arbitrarias* recibe el nombre de *solución general*. Así, una ecuación diferencial de *orden n* tendrá una solución general que involucra *n constantes arbitrarias*.

Definición:	A la *solución* obtenida de una solución general al seleccionar los valores particulares de las constantes arbitrarias (por ejemplo; para satisfacer condiciones dadas), se le llama *solución particular*.

1.8.1 EJEMPLOS

1) Sea

$$y = x^2 + C \ldots (1)$$

solución general de

$$\frac{dy}{dx} = 2x \ldots (2)$$

.

a partir de (1) y de la condición inicial $y(2) = 5$ obtenga una solución particular para (2).

Solución:

Usando la condición inicial dada en (1)

$$5 = 4 + C$$
$$\therefore\ C = 1$$

por tanto la solución particular de (2) es

$$y = x^2 + 1 \ldots (3)$$

Comprobación

Derivando (3)

$$y' = 2x$$

sustituyendo (3) y su derivada en (1)

$$2x = 2x$$

2) Sea

$$y^2 - xy = C \ldots (1)$$

solución general de

$$\frac{dx}{dt} = \frac{y}{2y - x} \ldots (2)$$

.

a partir de (1) y de la condición inicial $y(1) = 2$ obtenga una solución particular para (2).

Solución:

Usando la condición inicial dada en (1)

$$4 - (1)(2) = C$$
$$\therefore\ 2 = C$$

por tanto la solución particular implícita de (2) es

$$y^2 - xy = 2 \ldots (3)$$

Comprobación

Derivando (3)

$$2yy' - (xy' + y) = 0$$
$$y'(2y - x) = y$$

o bien

$$y' = \frac{y}{2y - x}$$

sustituyendo (3) y su derivada en (1)

$$\frac{y}{2y-x}=\frac{y}{2y-x}$$

Por otra parte, partiendo de (3) determinemos ahora la forma explícita de la solución particular de (2).

Resolvamos (3) para la variable y

$$y^2-xy-2=0$$
$$y=\frac{x\pm\sqrt{x^2+8}}{2}$$

entonces

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{x+\sqrt{x^2+8}}{2} \\ y_2 &= \frac{x-\sqrt{x^2+8}}{2} \end{aligned}\right\}\ldots(4)$$

usando la condición inicial $y(1)=2$ en (4), observamos que y_1 se reduce a una identidad, esto es

$$2=\frac{1+3}{2}$$
$$2=2$$

por tanto

$$y_1=\frac{x+\sqrt{x^2+8}}{2}$$

es solución particular explícita de (2), pues satisface la condición inicial dada.

El problema de hallar soluciones generales de ecuaciones diferenciales será tratado más adelante. Un problema más simple es el problema inverso, i-e; *hallar la ecuación diferencial a partir del conocimiento de su solución general*, esto es, dada la respuesta, encontrar el problema.

Para motivar el procedimiento, consideremos los siguientes ejemplos:

1.8.2 EJEMPLOS

1. Encuentre la ecuación diferencial cuya solución general es

$$y = Ce^{-2x} + 3x - 4 \ldots (1)$$

Solución:

Derivando (1)

$$y' = -2Ce^{-2x} + 3$$

despejando C

$$y' - 3 = -2Ce^{-2x}$$
$$\frac{y' - 3}{-2e^{-2x}} = C \ldots (2)$$

sustituyendo (2) en (1)

$$y = \left(\frac{y' - 3}{-2e^{-2x}}\right)e^{-2x} + 3x - 4$$
$$-2y = y' - 3 - 6x + 8$$

por tanto

$$y' + 2y = 6x - 5$$

es la ecuación diferencial cuya solución general es (1).

Comprobación

$$-2Ce^{-2x} + 3 + 2\left(Ce^{-2x} + 3x - 4\right) = 6x - 5$$
$$3 + 6x - 8 = 6x - 5$$
$$6x - 5 = 6x - 5$$

2. Encuentre la ecuación diferencial cuya solución general es

$$y = C_1 x + C_2 x^3 \ldots(1)$$

Solución:

Derivando (1)

$$y' = C_1 + 3C_2 x^2 \ldots(2)$$
$$y'' = 6C_2 x$$
$$C_2 = \frac{y''}{6x}\ldots(3)$$

sustituyendo (3) en (2)

$$y' = C_1 + 3\left(\frac{y''}{6x}\right)x^2$$
$$y' = C_1 + 3\left(\frac{y''}{6}\right)x$$

despejando C_1

$$y' - \frac{y''x}{2} = C_1 \ldots(4)$$

sustituyendo(3) y (4) en (1)

$$y = y'x - \frac{y''x^2}{2} + \frac{y''x^2}{6}$$
$$6y = 6y'x - 3y''x^2 + y''x^2$$
$$0 = 6y'x - 6y - 2y''x^2$$

por tanto

$$y''x^2 - 3y'x + 3y = 0$$

es la ecuación diferencial cuya solución general es (1).

1.9 TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

Sea dada una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, donde la función $f(x, y)$ está definida en un recinto D del plano *XOY* que contiene el punto (x_0, y_0). Si la función $f(x, y)$ satisface a las condiciones:

a. $f(x, y)$ es una función continua de dos variables x e y, en el recinto D;

b. $f(x, y)$ admite derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$, continua con respecto de x e y en el recinto D, entonces, existe una, y sólo una, solución $y = \varphi(x)$ de la ecuación dada que satisface a la condición $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

La condición $y\big|_{x=x_0} = y_0$ se llama *condición inicial*.

El problema de la búsqueda de la solución de la ecuación $f'(x, y)$ que satisface la condición inicial $y\big|_{x=x_0} = y_0$, lleva el nombre de *Cauchy*.

Geométricamente esto significa que se busca la curva integral que pasa por el punto dado $M_0(x_0, y_0)$ del plano *XOY* (fig. 1.2).

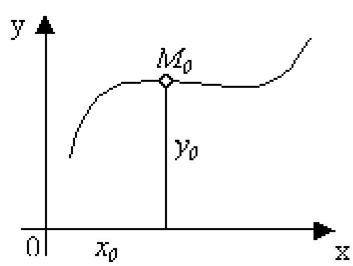


Fig. 1.2

El teorema expresa las condiciones suficientes para la existencia de solución única del problema de Cauchy para la ecuación $y' = f(x, y)$, pero estas condiciones no son necesarias. Precisamente, puede existir una solución única de la ecuación $y' = f(x, y)$ que satisface a la condición $y\big|_{x=x_0} = y_0$, a pesar de que en el punto (x_0, y_0) no se cumpla la condición a) o la condición b), o estas condiciones simultáneamente.

1.9.1 EJEMPLOS

1. Considere la ecuación diferencial

$$y' = \frac{1}{y^2}$$

Aquí

$$f(x,y) = \frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2}{y^3}$$

En los puntos $(x_0,0)$ del eje OX no se cumplen las condiciones a) y b) (la función $f(x,y)$ y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ son discontinuas en el eje OX), mas, por cada punto del eje OX pasa por una sola curva integral $y = \sqrt[3]{3(x-x_0)}$, (fig. 1.3).

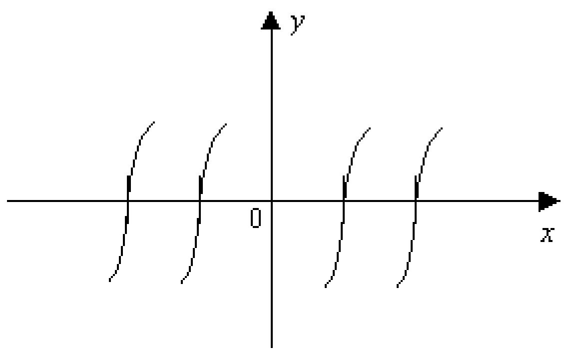


Fig. 1.3

2. Considere la ecuación diferencial

$$y' = xy + e^{-y}$$

El segundo miembro de la ecuación $f(x,y) = xy + e^{-y}$ y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y} = x - e^{-y}$ son continuas con respecto a x e y en todos los puntos del plano XOY. En virtud del teorema de existencia y unicidad, el recinto en el que la ecuación dada tiene solución única es todo el plano XOY.

3. Considere la ecuación diferencial

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$$

El segundo miembro de la ecuación $f(x,y) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$ es una función definida y continua en todos los puntos del plano *XOY*. La derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$ se hace infinita para $y = 0$ se infringe la condición b) del teorema de existencia y unicidad. Por consiguiente, es posible que no haya unicidad en los puntos del eje *OX*. Fácilmente se comprueba que la función $y = \frac{(x+c)^3}{8}$ es solución de la ecuación considerada. Además, la ecuación tiene la solución evidente $y \equiv 0$. Así, pues, por cada punto del eje *OX* pasan por lo menos dos curvas integrales y, por consiguiente, en los puntos de este eje, verdaderamente, queda infringida la unicidad (fig. 1.4).

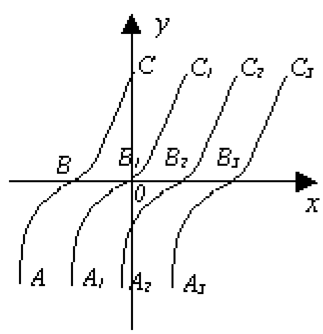


Fig. 1.4

Son también líneas integrales las formadas por trozos de las parábolas cúbicas $y = \frac{(x+c)^3}{8}$ y los segmentos del eje *OX*; por ejemplo, las líneas $ABOC_1$, ABB_2C_2, A_2B_2x, etc. De este modo, por cada punto del eje *OX* pasan infinitas líneas integrales.

UNIDAD II

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

2.1 MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

Supongamos que tenemos una ecuación diferencial de primer orden de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \ldots (1)$$

Un tipo especialmente simple de ecuación que ocurre a menudo en la práctica, es cuando (1) puede ser escrita en la forma

$$f(x)dx + g(y)dy = 0 \ldots (2)$$

donde un termino *involucra solo a x*, mientras que el otro *involucra solo a y*. Esta ecuación puede ser resuelta inmediatamente por integración. Así, la solución general de (2) es

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C \ldots (3)$$

donde C es la constante de integración. Nosotros podemos regresar a la ecuación (2), tomando la diferencial en ambos miembros de (3), y así eliminar a C, esto es

$$d\int f(x)dx + d\int g(y)dy = dC$$
$$\therefore\ f(x)dx + g(y)dy = 0$$

Puesto que el método de solución depende de la posibilidad de llevar (1) a una ecuación de la forma (2), donde las variables son *separadas* en dos términos, este método es llamado *Método de Separación de Variables*, y las variables se dice que son separables.

Esta situación afortunadamente en la cual las variables son separables, para nuestro pesar no ocurre todas las veces.

Por ejemplo, no hay manera de que la ecuación

$$M(x, y)dx + N(x, y)dx = 0$$

pueda ser escrita en la forma (2). En tales casos estaremos forzados a buscar otros métodos de solución.

2.1.1 EJEMPLOS

1)

a) Encuentre la solución general de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+1}{2-y} \ldots (1)$$

b) Determine una solución particular para la cual y(-3) = 4

Solución:

a) La ecuación (1) esta escrita en la forma

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y)$$

y se desea llevarla a la forma

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

en este caso resulta sencilla la separación de variables, esto es

$$(2-y)dy = (x^2+1)dx$$
$$\Rightarrow (x^2+1)dx - (2-y)dy = 0$$
$$(x^2+1)dx + (y-2)dy = 0 \ldots (2)$$

integrando (2) tenemos

$$\int (\mathrm{x}^2+1)\mathrm{dx} + \int (\mathrm{y} - 2)\mathrm{dy} = 0$$

así pues

$$\frac{x^3}{3} + x + \frac{y^2}{2} - 2y = \mathrm{C}$$

es solución general implícita de (1).

b) Si $y(-3)=4$

$$\frac{(-3)^3}{3}+(-3)+\frac{(4)^2}{2}-2(4)=C$$
$$\therefore\ C=-12$$

por tanto

$$\frac{x^3}{3}+x+\frac{y^2}{2}-2y=-12$$

es solución particular implícita de (1).

Si desarrollamos esta última expresión tenemos lo siguiente

$$\frac{x^3}{3}+x+\frac{y^2}{2}-2y-12=0$$
$$\frac{2}{3}x^3+2x+y^2-4y+24=0$$
$$y^2-4y+\left(\frac{2}{3}x^3+2x+24\right)=0$$
$$\overbrace{3y^2}^{a}\overbrace{-12y}^{b}+\overbrace{6\left(\frac{x^3}{3}+x+12\right)}^{c}=0$$
$$y=\frac{12\pm\sqrt{-24x^3-72x-720}}{6}$$

de donde

$$y=\frac{12+\sqrt{-24x^3-72x-720}}{6}$$

es la solución particular explícita, pues, satisface a la condición inicial dada.

2) Ocasionalmente el hecho de que una ecuación diferencial pueda ser separable no es tan obvio, como se muestra a continuación

Resolver

$$x\frac{dy}{dx}-y=2x^2y\ldots(1)$$

Solución:

Intentemos separar variables

$$x\frac{dy}{dx} = 2x^2y + y$$
$$xdy = (2x^2y + y)dx$$
$$(2x^2y + y)dx - xdy = 0\ldots(2)$$

multiplicando a (2) por $\frac{1}{xy}$ esta se reduce a

$$\left(2x + \frac{1}{x}\right)dx - \frac{dy}{y} = 0\ldots(3)$$

integrando (3) tenemos

$$\int\left(2x + \frac{1}{x}\right)dx - \int\frac{dy}{y} = 0$$

así pues

$$x^2 + \ln|x| - \ln|y| = C\ldots(4)$$

es solución general implícita de la ecuación diferencial dada.

Por otro lado, sabemos que

$$\ln|a| - \ln|b| = \ln\left|\frac{a}{b}\right|$$

usando este resultado en (4) se tiene

$$\ln\left|\frac{x}{y}\right| = C - x^2\ldots(5)$$

es solución general implícita de la ecuación diferencial (1). Aplicando exponenciales en ambos miembros de (5)

$$\left|\frac{x}{y}\right| = e^{C-x^2}$$

$$\pm\frac{x}{y} = e^{C-x^2}$$
$$\frac{x}{y} = \mp e^{C-x^2}$$
$$\frac{x}{y} = \mp e^{C} e^{-x^2}$$

o bien

$$y = \mp e^{-C} x e^{x^2}$$

haciendo $\mp e^{-C} = A = cte$, tenemos por tanto que

$$y = Axe^{x^2} \ldots (6)$$

es solución general explícita de la ecuación diferencial dada.

Comprobación

Derivando (6)

$$\frac{dy}{dx} = Ae^{x^2} + Axe^{x^2}(2x) = Ae^{x^2} + 2Ax^2e^{x^2}$$

sustituyendo (6) y su derivada en (1)

$$x\left(Ae^{x^2} + 2Ax^2e^{x^2}\right) = 2x^2\left(Axe^{x^2}\right) + \left(Axe^{x^2}\right)$$
$$Axe^{x^2} + 2Ax^3e^{x^2} = 2x^3Ae^{x^2} + Axe^{x^2}$$

3) Resolver

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{Sen\phi + e^{2r}Sen\phi}{3e^{r} + e^{r}Cos2\phi} \ldots (1)\,; \qquad r\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Solución:

La ecuación diferencial (1) esta escrita en la forma general

$$\frac{dr}{d\phi} = F(r,\phi)$$

y deseamos llevarla a la forma

$$f(r)dr + g(\phi)d\phi = 0\,.$$

De (1)

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{Sen\phi\left(1+e^{2r}\right)}{e^{r}\left(3+Cos2\phi\right)}$$

separando variables

$$\frac{e^{r}}{1+e^{2r}}dr = \frac{Sen\phi}{3+Cos2\phi}d\phi$$

o bien

$$\frac{e^{r}}{1+e^{2r}}dr - \frac{Sen\phi}{3+Cos2\phi}d\phi = 0\ldots(2)$$

integrando (2)

$$\underbrace{\int\frac{e^{r}}{1+e^{2r}}dr}_{I} - \underbrace{\int\frac{Sen\phi}{3+Cos2\phi}d\phi}_{II} = 0\ldots(3)$$

Para la parte *I* de la integral(3), hacemos $u=e^{r}$, con lo que, $du=e^{r}dr$, entonces

$$\int\frac{e^{r}}{1+e^{2r}}dr = \int\frac{du}{1+u^{2}} = Tan^{-1}u$$

o bien

$$\int\frac{e^{r}}{1+e^{2r}}dr = Tan^{-1}\left(e^{r}\right)\ldots(4)$$

Para la parte *II* de la integral (3), manipulemos primero el denominador para escribirlo en una forma mas adecuada. Sabemos que

$$\begin{aligned} Cos2\phi &= Cos^{2}\phi - Sen^{2}\phi = \\ &= Cos^{2}\phi-(1-Cos^{2}\phi) \\ &= 2Cos^{2}\phi-1 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} 3+Cos2\phi &= 3+2Cos^{2}\phi-1= \\ &= 2+2Cos^{2}\phi \\ &= 2(1+Cos^{2}\phi) \end{aligned}$$

así, la parte *II* de la integral (3) toma la forma

$$\int\frac{Sen\phi}{3+Cos2\phi}d\phi = \frac{1}{2}\int\frac{Sen\phi}{1+Cos^{2}\phi}d\phi$$

haciendo ahora $w = \cos\phi$, con lo que $dw = -Sen\phi d\phi$, entonces

$$\int \frac{Sen\phi}{3+Cos2\phi}d\phi = -\frac{1}{2}\int \frac{dw}{1+w^2} = -\frac{1}{2}Tan^{-1}w$$

o bien

$$\int \frac{Sen\phi}{3+Cos2\phi}d\phi = -\frac{1}{2}Tan^{-1}(Cos\phi)\ldots(5)$$

sustituyendo (4) y (5) en (3)

$$Tan^{-1}\left(e^r\right) - \left[-\frac{1}{2}Tan^{-1}\left(Cos\phi\right)\right] = C$$

simplificando tenemos por tanto que

$$Tan^{-1}\left(e^r\right) + \frac{1}{2}Tan^{-1}\left(Cos\phi\right) = C$$

o equivalentemente

$$2Tan^{-1}\left(e^r\right) + Tan^{-1}\left(Cos\phi\right) = C\ldots(6)$$

es solución general implícita de (1).

Usando la condición inicial $r\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ en (6), tenemos entonces que

$$Tan^{-1}\left(e^0\right) + \frac{1}{2}Tan^{-1}\left[Cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = C$$

$$\frac{\pi}{4} + 0 = C$$

$$\therefore C = \frac{\pi}{4}$$

así

$$2Tan^{-1}\left(e^r\right) + Tan^{-1}\left(Cos\phi\right) = \frac{\pi}{4}$$

es solución particular implícita de la ecuación diferencial dada.

4) Resolver

$$\frac{dy}{dx}+1=\frac{(x+y)^m}{(x+y)^n+(x+y)^p}\ldots(1)$$

Solución:

Sea $t=x+y$, entonces

$$\frac{dt}{dx}=1+\frac{dy}{dx}$$

o bien

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}-1$$

sustituyendo los cambios propuestos en (1), la ecuación diferencial toma la forma

$$\frac{dt}{dx}=\frac{t^m}{t^n+t^p}\ldots(2)$$

separando variables en (2)

$$\frac{t^n+t^p}{t^m}dt=dx$$

$$\left(\frac{t^n}{t^m}+\frac{t^p}{t^m}\right)dt=dx$$

$$\left(t^{n-m}+t^{p-m}\right)dt=dx$$

o bien

$$dx-(t^{n-m}+t^{p-m})dt=0\ldots(3)$$

integrando (3)

$$\int dx-\int(t^{n-m}+t^{p-m})dt=0$$

$$x-\frac{t^{n-m+1}}{n-m+1}-\frac{t^{p-m+1}}{p-m+1}=C\ldots(4)$$

pero $t=x+y$, entonces de (4) tenemos por tanto que

$$x-\frac{(x+y)^{n-m+1}}{n-m+1}-\frac{(x+y)^{p-m+1}}{p-m+1}=C$$

es solución general implícita de la ecuación diferencial dada.

5) Resolver

$$\frac{dy}{dx} + Sen\left(\frac{x+y}{2}\right) = Sen\left(\frac{x-y}{2}\right) \ldots (1)$$

Solución:

Sabemos que

$$Sen(\alpha \pm \beta) = Sen\alpha Cos\beta \pm Sen\beta Cos\alpha$$

entonces en (1)

$$Sen\left(\frac{x \pm y}{2}\right) = Sen\left(\frac{x}{2}\right)Cos\left(\frac{y}{2}\right) \pm Sen\left(\frac{y}{2}\right)Cos\left(\frac{x}{2}\right) \ldots (2)$$

sustituyendo (2) en (1)

$$\frac{dy}{dx} + \left[Sen\left(\frac{x}{2}\right)Cos\left(\frac{y}{2}\right) + Sen\left(\frac{y}{2}\right)Cos\left(\frac{x}{2}\right)\right] = Sen\left(\frac{x}{2}\right)Cos\left(\frac{y}{2}\right) - Sen\left(\frac{y}{2}\right)Cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

simplificando la ecuación diferencial (1) se reduce a

$$\frac{dy}{dx} = -2Sen\left(\frac{y}{2}\right)Cos\left(\frac{x}{2}\right) \ldots (3)$$

separando variables

$$\frac{dy}{Sen\left(\frac{y}{2}\right)} = -2Cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

o bien

$$2Cos\left(\frac{x}{2}\right)dx + Csc\left(\frac{y}{2}\right)dy = 0 \ldots (4)$$

integrando (4)

$$2\int Cos\left(\frac{x}{2}\right)dx + \int Csc\left(\frac{y}{2}\right)dy = 0$$

por tanto

$$4Sen\left(\frac{x}{2}\right)+2\ln\left|Tan\left(\frac{y}{4}\right)\right|=C\ldots(5)$$

es solución general implícita de la ecuación diferencial.

Simplificando (5)

$$2Sen\left(\frac{x}{2}\right)+\ln\left|Tan\left(\frac{y}{4}\right)\right|=C$$

$$\ln\left|Tan\left(\frac{y}{4}\right)\right|=C-2Sen\left(\frac{x}{2}\right)\ldots(6)$$

aplicando exponenciales en ambos miembros de (6)

$$\left|Tan\left(\frac{y}{4}\right)\right|=e^{C-2Sen\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\pm Tan\left(\frac{y}{4}\right)=e^{C-2Sen\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$Tan\left(\frac{y}{4}\right)=\mp e^{C-2Sen\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$Tan\left(\frac{y}{4}\right)=\mp e^{C}e^{-2Sen\left(\frac{x}{2}\right)}\ldots(5)$$

haciendo $\mp e^{C} = A = cte$, en la ecuación (5)

$$Tan\left(\frac{y}{4}\right)=Ae^{-2Sen\left(\frac{x}{2}\right)}$$

o bien

$$\frac{y}{4}=Tan^{-1}\left(Ae^{-2Sen\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$

por tanto

$$y=4Tan^{-1}\left(Ae^{-2Sen\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$

es solución general explícita de la ecuación diferencial dada.

2.2 ECUACIONES DE GRADO HOMOGÉNEO

Para establecer si una ecuación es homogénea o no, hay que tener pleno conocimiento de lo que significa el *grado* de una ecuación. Si se tiene la ecuación general $ax^2+bx+c=0$, sabemos que es de segundo grado, puesto que así lo indica el exponente mayor de la variable involucrada.

El problema se presenta cuando tenemos ecuaciones cuyos términos presentan el producto de más de dos variables con diferentes exponentes, de aquí la pregunta

¿Qué grado tiene una ecuación de esta forma?.

El *grado* un producto se obtiene sumando los exponentes las variables que intervienen en tal producto, como se puede ver en los siguientes ejemplos.

2.2.1 EJEMPLOS

1) Sea el producto

$$x^2y$$

   i. Es una expresión de 2° grado respecto a x.
   ii. Es una expresión de 1° grado respecto a y.
   iii. Es una expresión de 3° grado con respecto a x e y.

2) Sea el polinomio

$$x^2-4xy+8y^2$$

   es una expresión de 2° grado.

3) El polinomio

$$x^4y+7y^5$$

   es una expresión de 5° grado.

Para nuestro pesar, no siempre es fácil determinar el grado de una ecuación a simple vista, por ejemplo

$$F(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}+xSen\left(\frac{x}{y}\right)$$

Afortunadamente existe un criterio matemático de gran utilidad para determinar el grado de una ecuación; que establece que una ecuación tiene el mismo grado en cada uno de sus términos, se dice que es una ecuación homogénea.

2.2.2 CRITERIO DE FUNCIONES HOMOGÉNEAS

Criterio: Se dice que si $F(x,y)$ es una *función homogénea* de grado n en x e y se verifica la igualdad

$$F(tx,ty)=t^nF(x,y)$$

para todos los valores de t, x e y.

El método consiste en lo siguiente

1) Dada la expresión que involucre a las variables x e y, reemplazarlas por

$$x=tx; \qquad y=ty$$

2) Factorizar a t. El exponente que aparezca en t, nos indicará el grado.

2.2.3 EJEMPLOS

Demostrar que las expresiones siguientes son homogéneas y determinar su grado.

1) $F(x,y)=x^2-3xy+4y^2$

$$F(tx,ty)=(tx)^2-3(tx)(ty)+4(ty)^2$$
$$F(tx,ty)=t^2x^2-3t^2xy+4t^2y^2$$
$$F(tx,ty)=t^2(x^2-3xy+4y^2)$$
$$F(tx,ty)=t^2F(x,y)$$

$\therefore$ $F(x,y)$ es homogénea y de grado 2.

2) $F(x,y)=x^4y+7y^5$

$$F(tx,ty)=(tx)^4(ty)+7(ty)^5$$
$$F(tx,ty)=(t^4x^4)(ty)+7t^5y^5$$
$$F(tx,ty)=t^5x^4y+7t^5y^5$$
$$F(tx,ty)=t^5(x^4y+7y^5)$$
$$F(tx,ty)=t^5F(x,y)$$

$\therefore$ $F(x,y)$ es homogénea y de grado 5.

3) $F(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2} + xSen\left(\frac{x}{y}\right)$

$$F(tx,ty) = \sqrt{(tx)^2 - (ty)^2} + (tx)Sen\left(\frac{(tx)}{(ty)}\right)$$

$$F(tx,ty) = \sqrt{t^2x^2 - t^2y^2} + txSen\left(\frac{tx}{ty}\right)$$

$$F(tx,ty) = \sqrt{t^2}\sqrt{x^2 - y^2} + txSen\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$F(tx,ty) = t\sqrt{x^2 - y^2} + txSen\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$F(tx,yt) = t\left(\sqrt{x^2 - y^2} + xSen\left(\frac{x}{y}\right)\right)$$

$$F(tx,ty) = tF(x,y)$$

$\therefore F(x,y)$ es homogénea y de primer grado.

2.3 ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS

Teorema:	La ecuación diferencial $$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0\ldots(1)$$ es homogénea en x e y, si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado en sus variables x e y .

Demostración:

Supongamos que en la ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0\ldots(1)$$

$M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas en x e y de grado n. Entonces de acuerdo con el criterio

$$M(tx,ty) = t^n M(x,y)\ldots(2)$$
$$N(tx,ty) = t^n N(x,y)\ldots(3)$$

de (2) y (3)

$$M(x,y)=\frac{M(tx,ty)}{t^n}\ldots(4)$$
$$N(x,y)=\frac{N(tx,ty)}{t^n}\ldots(5)$$

por otro lado de (1)

$$M(x,y)dx=-N(x,y)dy$$
$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}\ldots(6)$$

sustituyendo (4) y (5) en (6)

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{M(tx,ty)}{t^n}}{\frac{N(tx,ty)}{t^n}}=-\frac{M(tx,ty)}{N(tx,ty)}$$

para todo t. En el caso particular de $t=\frac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M\left(1,\frac{y}{x}\right)}{N\left(1,\frac{y}{x}\right)}=F\left(\frac{y}{x}\right)$$

por tanto, toda ecuación diferencial que se pueda escribir en la forma

$$\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{y}{x}\right)\ldots(7)$$

es una *ecuación diferencial homogénea*.

Para resolver ecuaciones diferenciales del tipo (7) se requiere hacer la sustitución

$$y=vx\ldots(8)$$

donde $v=v(x)$, o bien

$$v=\frac{y}{x}\ldots(9)$$

Esto nos conducirá a una ecuación de variables separables. En efecto, como se mostró en el teorema anterior toda ecuación diferencial homogénea puede ser escrita en la forma (7), haciendo el cambio propuesto en (8), esto es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(v,x) = v\frac{dx}{dx} + x\frac{dv}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \ldots (10)$$

sustituyendo (9) y (10) en (7), entonces

$$x\frac{dv}{dx} = F(v) - v$$

es una ecuación diferencial de variables separables. Separando variables

$$\frac{dv}{F(v)-v} = \frac{dx}{x}$$

o bien

$$\frac{dx}{x} - \frac{dv}{F(v)-v} = 0$$

Ahora tenemos las variables separadas, en consecuencia podemos aplicar el método descrito en la *sección 2.1* para ecuaciones diferenciales de variables separables. Después de aplicarlo, hay que cambiar a v por su valor expresado en términos de x e y, esto es fácil puesto que sabemos que $v = \left(\frac{x}{y}\right)$.

2.3.1 EJEMPLOS

1) Resuelva

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y} \ldots (1)$$

Solución:

La ecuación (1) esta escrita en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

donde

$$\left.\begin{aligned} M(x,y) &= x-y \\ N(x,y) &= x+y \end{aligned}\right\}$$

son funciones homogéneas de grado 1, esto es

$$\begin{aligned} M(tx,ty) &= tx-ty \\ &= t(x-y) \\ &= tM(x,y) \end{aligned}$$

análogamente, la función $N(x,y)$. Por tanto, la ecuación diferencial (1) es homogénea y puede ser llevada a la forma

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

al multiplicar por $\frac{1}{x}$ el numerador y denominador de (1), esto es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}} = F\left(\frac{y}{x}\right) \ldots (2)$$

usando la transformación

$$y = vx \ldots (3)$$

o bien

$$v = \frac{y}{x} \ldots (4)$$

donde de (3)

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \ldots (5)$$

sustituyendo (4) y (5) en (2)

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v}{1+v}$$

separando variables

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v}{1+v}-v$$
$$=\frac{1-v-v(1+v)}{1+v}=$$
$$=\frac{1-2v-v^2}{1+v}$$
$$\frac{1+v}{1-2v-v^2}dv=\frac{dx}{x}$$

o bien

$$\frac{dx}{x}-\frac{1+v}{1-2v-v^2}dv=0\ldots(6)$$

integrando (6)

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{1+v}{v^2+2v-1}dv=0\ldots(7)$$

haciendo $u=v^2+2v-1$, con lo que $du=(2v+2)dv=2(v+1)dv$, entonces la ecuación (7) toma la forma

$$\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=0$$

del proceso de integración resulta que

$$\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|u|=\ln|C|$$

pero $u=v^2+2v-1$, entonces

$$2\ln|x|+\ln\left|v^2+2v-1\right|=\ln|C|$$

por otro lado, sabemos que

$$a\ln|b|=\ln|b|^a$$

entonces

$$\ln|x|^2 + \ln|v^2 + 2v - 1| = \ln|C|$$

además

$$\ln|a| + \ln|b| = \ln|ab|$$

luego

$$\ln|x^2(v^2 + 2v - 1)| = \ln|C| \ldots (8)$$

aplicando exponenciales en ambos miembros de (8)

$$x^2(v^2 + 2v - 1) = C$$

Como $v = \left(\frac{y}{x}\right)$, entonces

$$x^2\left(\frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x} - 1\right) = C$$

o bien

$$y^2 + 2yx - x^2 = C$$

es solución general de (1).

2) Resuelva

$$x\frac{dy}{dx} = y - \sqrt{x^2 + y^2} \ldots (1)$$

Solución:

Llevando (1) a la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

se tiene

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x}\ldots(2)$$

donde

$$M(x,y)=y-\sqrt{x^2+y^2}$$
$$N(x,y)=x$$

son funciones homogéneas de grado 1. Manipulando un poco la ecuación (2)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}$$

o bien

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\ldots(3)$$

donde la ecuación (3) tiene la forma

$$\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{y}{x}\right)$$

usando la transformación

$$y=vx\ldots(4)$$

o bien

$$v=\frac{y}{x}\ldots(5)$$

donde de (4)

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}\ldots(6)$$

sustituyendo (5) y (6) en (3) se tiene

$$v + x\frac{dv}{dx} = v - \sqrt{1+v^2}$$

separando variables

$$-\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \frac{dx}{x}$$

o bien

$$\frac{dx}{x} + \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = 0\ldots(7)$$

integrando (7)

$$\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}dv = 0$$

$$\ln|x| + \ln\left|v + \sqrt{1+v^2}\right| = \ln|C|$$

simplificando

$$\ln\left|x\left(v + \sqrt{1+v^2}\right)\right| = \ln|C|$$

o equivalentemente, aplicando exponenciales en ambos miembros de la expresión anterior

$$x\left(v + \sqrt{1+v^2}\right) = C\ldots(8)$$

sustituyendo (5) en (8)

$$x\left(\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\right) = C$$

$$y + \frac{x\sqrt{x^2+y^2}}{x} = C$$

por tanto

$$y + \sqrt{x^2+y^2} = C$$

es solución general de la ecuación diferencial dada.

3) Resuelva

$$y^3dy + 3y^2xdx + 2x^3dx = 0 \ldots (1)$$

Solución:

Llevando la ecuación diferencial a la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

se tiene

$$y^3dy + (3y^2x + 2x^3)dx = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(3y^2x + 2x^3)}{y^3} \ldots (2)$$

donde

$$M(x,y) = (3y^2x + 2x^3)$$
$$N(x,y) = y^3$$

son funciones homogéneas de grado 3. Multiplicando por $\frac{1}{x^3}$ en el numerador y denominador de (2) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(3\frac{y^2}{x^2} + 2)}{\frac{y^3}{x^3}} = F\left[\frac{y}{x}\right] \ldots (3)$$

Usando la transformación

$$y = vx \ldots (4)$$

o bien

$$v = \frac{y}{x} \ldots (5)$$

donde de (4)

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \ldots (6)$$

sustituyendo (5) y (6) en (3)

$$v + x\frac{dv}{dx} = -\frac{\left(3v^2+2\right)}{\left(v\right)^3}$$

separando variables

$$x\frac{dv}{dx} = -\frac{\left(3v^2+2\right)}{v^3} - v$$
$$x\frac{dv}{dx} = -\frac{\left(3v^2+2\right) - v^4}{v^3}$$
$$-\frac{v^3 dv}{\left(3v^2+2\right)+v^4} = \frac{dx}{x}$$

o bien

$$\frac{dx}{x} + \frac{v^3 du}{v^4+3v^2+2} = 0 \ldots (7)$$

integrando (7)

$$\int\frac{dx}{x} + \int\frac{v^3 dv}{v^4+3v^2+2} = 0 \ldots (8)$$

de (8)

$$\int\frac{v^3 dv}{v^4+3v^2+2} = \int\frac{v^3 dv}{(v^2+1)(v^2+2)} \ldots (9)$$

donde la descomposición en fracciones parciales del integrando de (9) es

$$\frac{v^3}{(v^2+1)(v^2+2)} = \frac{Av+B}{v^2+1} + \frac{Cv+D}{v^2+2}$$
$$= \frac{(v^2+2)(Av+B)+(v^2+1)(Cv+D)}{(v^2+1)(v^2+2)}$$
$$= \frac{v^3(A+C)+v^2(B+D)+v(2A+C)+2B+D}{(v^2+1)(v^2+2)}$$

de lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
&A + C = 1\\
&2A + C = 0\\
&B + D = 0\\
&2B + D = 0
\end{aligned}$$

resolviendo el sistema obtenemos

$$\begin{aligned}
&A = -1 \qquad &C = 2\\
&B = 0 \qquad &D = 0
\end{aligned}$$

por tanto (8) se puede escribir en la forma equivalente

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{v}{v^2 + 1} dv + 2\int \frac{v}{v^2 + 2} dv = 0 \ldots (10)$$

haciendo los cambios

$$\begin{aligned}
&u = v^2 + 1 \qquad &w = v^2 + 2\\
&du = 2vdv \qquad &dw = 2wdw
\end{aligned}$$

entonces (10) se reduce a

$$\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + \int \frac{dw}{w} = 0$$

y por integración inmediata se tiene que

$$\ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left|v^2 + 1\right| + \ln\left|v^2 + 2\right| = \ln|C|$$

simplificando

$$\ln|x|^2 - \ln|v^2+1| + \ln|v^2+2|^2 = \ln|C|$$

$$\ln\left|\frac{x^2}{v^2+1}\right| + \ln|v^2+2|^2 = \ln|C|$$

$$\ln\left|\frac{x^2\left(v^2+2\right)^2}{v^2+1}\right| = \ln|C|$$

o bien

$$\frac{x^2\left(v^2+2\right)^2}{v^2+1} = C$$

luego de (5) se tiene por tanto que

$$\frac{x^2\left(\dfrac{y^2}{x^2}+2\right)^2}{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+1} = C$$

es solución general de la ecuación diferencial dada.

2.4 ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

2.4.1 UNA IDEA INTUITIVA DE EXACTITUD

Para establecer si una ecuación diferencial es exacta es necesario tener pleno conocimiento del concepto del diferencial de una función.

***Definición*:**	Sea $F = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una función de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si F tiene derivadas parciales de primer orden en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en alguna región abierta *R*, entonces el diferencial de F (denotado por dF) es $$dF(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n}dx_n$$

En el siguiente ejemplo, y con la ayuda de la definición anterior, daremos una idea intuitiva de la implicación que tiene la palabra exactitud en una ecuación diferencial.

Sea $F(x, y) = \frac{x^2 y^2}{2} - x - y$. Es claro que la función es derivable en todo el plano x-y, entonces el diferencial dF de F es

$$dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy \ldots (1)$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= xy^2 - 1 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= x^2 y - 1 \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

sustituyendo (2) en (1) resulta que

$$dF(x, y) = \left(xy^2 - 1\right)dx + \left(x^2 y - 1\right)dy \ldots (3)$$

representa el diferencial de la función

$$F(x, y) = \frac{x^2 y^2}{2} - x - y \ldots (4)$$

Hagamos la siguiente hipótesis; si en (3) $dF(x, y) = 0$, entonces

$$\left(xy^2 - 1\right)dx + \left(x^2 y - 1\right)dy = 0$$

ó bien

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(xy^2 - 1\right)}{\left(x^2 y - 1\right)} \ldots (5)$$

la cual representa una ecuación diferencial de primer orden con variable dependiente y y variable independiente x.

Por otro lado, como por hipótesis $dF(x,y) = 0$, esto implica que, $\int dF(x,y) = 0$ ó bien, $F(x,y) = C$; siendo C una constante por determinar. Luego, la expresión (4) es una función constante dada por

$$C = \frac{x^2 y^2}{2} - x - y \ldots (6)$$

derivando (6) implícitamente con respecto de x esta, obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left(C = \frac{x^2 y^2}{2} - x - y \right)$$

$$0 = \frac{2xy^2 + 2x^2 y\left(\frac{dy}{dx}\right)}{2} - 1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)$$

simplificando y despejando a $\frac{dy}{dx}$ resulta que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(xy^2 - 1\right)}{\left(x^2 y - 1\right)}$$

que es exactamente lo mismo que (5), con lo que concluimos que (6) es solución general de (5).

Del ejemplo anterior podemos observar lo siguiente

Si el diferencial de la función $F(x,y)$ es cero, es decir $\left(xy^2 - 1\right)dx + \left(x^2 y - 1\right)dy = dF(x,y) = 0$, entonces como implicación inmediata se tiene el hecho de que, $\int dF(x,y) = 0$ ó bien, $F(x,y) = C$, siendo esta ultima la solución general de la ecuación diferencial $\left(xy^2 - 1\right)dx + \left(x^2 y - 1\right)dy = 0$. En otras palabras, tendrá sentido hablar de existencia de la función $F(x,y)$ como solución de la ecuación diferencial (5) si y solo si $\left(xy^2 - 1\right)dx + \left(x^2 y - 1\right)dy = dF(x,y) = 0$, siendo $\left(xy^2 - 1\right)dx + \left(x^2 y - 1\right)dy$ precisamente el diferencial de la función $F(x,y)$. En tales circunstancias diremos que la ecuación diferencial $\left(xy^2 - 1\right)dx + \left(x^2 y - 1\right)dy = 0$ *es exacta*.

El problema inverso que es el que nos interesa estudiar, no es tan obvio a simple vista como podría parecer, es decir, dada la ecuación diferencial, en este caso, $\left(xy^2-1\right)dx+\left(x^2y-1\right)dy=0$, determinar la forma de la función $F(x,y)=C$, tales que, $\left(xy^2-1\right)dx+\left(x^2y-1\right)dy=dF(x,y)=0$. El proceso que se sigue para este fin es casi inmediato y se apoya en un criterio matemático bastante simple que establece la exactitud de una ecuación diferencial. Dicho criterio matemático surge de manera natural con la prueba del siguiente teorema, el cual, se construye considerando la siguiente definición.

2.4.2 DEFINICIÓN DE ECUACIÓN DIFERENCIAL EXACTA

***Definición*:** Una ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0\ldots(1)$$

es *exacta* si existe una función $U(x,y)$ tal que

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=dU(x,y)=0\ldots(2)$$

donde $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ es el diferencial de $U(x,y)$ en tal caso (2) puede escribirse como

$$dU(x,y)=0\ldots(3)$$

por integración simple se tiene

$$\int dU(x,y)=0$$

o bien

$$U(x,y)=C\ldots(4)$$

la cual es solución general de la ecuación diferencial (1).

2.4.3 TEOREMA DE EXACTITUD

Teorema: Una condición necesaria para la exactitud de la ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

es

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

esto significa que

1) Si $M(x,y)dx + N(x,y)dy = dU(x,y) = 0$ (i.e. la ecuación es exacta) entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ (Necesidad)}$$

2) Si $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, entonces existe $U(x,y)$ tal que $M(x,y)dx + N(x,y)dy = dU(x,y)$ o lo que es equivalente, $U(x,y)$ existe tal que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x,y); \; \frac{\partial U}{\partial x} = N(x,y) \text{ (Suficiencia)}$$

DEMOSTRACIÓN PARTE I:

Si la ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \ldots (1)$$

es exacta, entonces por definición existe una función $U(x,y)$ tal que

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = dU(x,y) = 0 \ldots (2)$$

por otro lado, el diferencial de $U(x,y)$ es

$$dU(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy \ldots (3)$$

comparando (2) y (3)

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x,y); \quad \frac{\partial U}{\partial x} = N(x,y) \ldots (4)$$

derivando la primera de las ecuaciones de (4) con respecto a y y la segunda con respecto a x, tenemos

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} \quad ; \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} \ldots (5)$$

Bajo condiciones apropiadas el orden de diferenciación es indiferente, ya que una condición *suficiente* para la cual el orden de diferenciación es indistinto es que $U(x, y)$ y sus derivadas parciales (al menos de segundo orden) sean *continuas* en una región del plano xy.

Supongamos pues, que $U(x, y)$ y sus derivadas parciales (al menos a segundo orden) son continuas en el plano xy. Entonces de (5) tenemos

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \ldots (6)$$

por tanto

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \ldots (7)$$

representa una condición necesaria para la *exactitud*. Luego, si la ecuación es exacta, entonces se debe cumplir (7), esto es, podemos encontrar una función $U(x, y)$ tales que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y); \quad \frac{\partial U}{\partial x} = N(x, y) \ldots (8)$$

DEMOSTRACIÓN PARTE II:

Para probar esta parte del teorema basta mostrar que si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

entonces la ecuación diferencial es exacta y existe $U(x, y)$ tales que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y); \quad \frac{\partial U}{\partial x} = N(x, y)$$

despejando $U(x, y)$ de la primera de estas las ecuaciones

$$dU(x, y) = M(x, y)dx \ldots (11)$$

integrando (11) tenemos

$$U(x, y) = \int dU(x, y) = \int M(x, y)dx + C \ldots (12)$$

donde la constantes de integración de (12) no puede ser función de x, sin embargo podría ser una función de y, esto es, supongamos que

$$C = f(y)$$

entonces (12)

$$U(x, y) = \int M(x, y)dx + f(y) \ldots (13)$$

sustituyendo (13) en la segunda de las ecuaciones de (8)

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x, y)dx + f(y)\right] = N(x, y) \ldots (14)$$

derivando el segundo miembro de (14) con respecto de y tenemos

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx + f'(y) = N(x, y) \ldots (15)$$

o bien

$$f'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx \ldots (16)$$

de donde en (16) nos falta probar que

$$N - \frac{\partial}{\partial y}\int Mdx \ldots (17)$$

es una función de la variable y, para ello derivemos a (17) con respecto de x, esto es

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx\right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\int M(x, y)dx = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

ya que por hipótesis $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, en consecuencia

$$N - \frac{\partial}{\partial y}\int Mdx = f(y)$$

y por tanto de (16) podemos obtener el complemento de (13), y con ello la forma completa de la función $U(x, y)$, así la condición de suficiencia queda por tanto probada, ya que existe una función $U(x, y)$ que satisface a las ecuaciones (4).

2.4.4 EJEMPLOS

1) Resuelva

$$2xydx + (x^2 + Cosy)dy = 0 \ldots (1)$$

Solución:

En (1)

$$\left.\begin{aligned} M(x,y) &= 2xy \\ N(x,y) &= x^2 + Cosy \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

dadas las ecuaciones (2), si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \ldots (3)$$

entonces (1) es exacta. Sustituyendo (2) en (3)

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

como $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$, por tanto, la ecuación diferencial es exacta, lo que implica que existe una función $U(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x,y); \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x,y) \ldots (4)$$

despejando $U(x,y)$ de la primera ecuación de (4)

$$dU(x,y) = M(x,y)dx \ldots (5)$$

sustituyendo $M(x,y)$ en (5) e integrando

$$\int dU(x,y) = \int 2xydx$$

entonces

$$U(x,y)=x^2y+f(y)\ldots(6)$$

para determinar la forma explícita de $f(y)$, sustituyamos $N(x,y)$ y la ecuación (6) en la segunda ecuación de (4), esto es

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[x^2y+f(y)\right]=x^2+Cosy\ldots(7)$$

de (7)

$$x^2+f'(y)=x^2+Cosy$$

o bien

$$f'(y)=\frac{df(y)}{dy}=Cosy\ldots(8)$$

integrando (8)

$$\int df(y)=\int Cosydy$$

así, la forma explícita de $f(y)$ es

$$f(y)=Seny\ldots(9)$$

por tanto, sustituyendo (9) en (6), se tiene que

$$U(x,y)=x^2y+Seny$$

o bien

$$x^2y+Seny=C\ldots(10)$$

es la solución general de la ecuación diferencial dada.

Si se hubiera despejando la función $U(x,y)$ de la segunda ecuación de (4), esto es

$$dU(x,y)=N(x,y)dy\ldots(11)$$

entonces, de integrar (11) se tiene que

$$\int dU(x,y) = \int \left(x^2 + Cosy\right)dy$$

de donde

$$U(x,y) = x^2 y + Seny + f(x) \ldots (12)$$

ahora, para determinar la forma explícita de $f(x)$, sustituyamos $M(x,y)$ y la ecuación (12) en la segunda ecuación de (4), esto es

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[x^2 y + Seny + f(x)\right] = 2xy$$
$$2xy + f'(x) = 2xy$$
$$f'(x) = 0$$
$$f(x) = D$$

por tanto

$$U(x,y) = x^2 y + Seny + D$$

o bien

$$x^2 y + Seny = C$$

que es lo mismo que (10)

2) Resuelva

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 - 1}{1 - x^2 y} \ldots (1) \; ; \qquad y(0) = 1$$

Solución:

Llevemos la ecuación (1) a la forma general

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

esto es

$$(1 - x^2 y)dy = (xy^2 - 1)dx$$

$$(xy^2-1)dx-(1-x^2y)dy=0$$

o bien

$$(xy^2-1)dx+(x^2y-1)dy=0\ldots(2)$$

donde, de (2)

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y)=xy^2-1 \\ N(x,y)=x^2y-1 \end{array}\right\}\ldots(3)$$

dadas las ecuaciones (3), si

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\ldots(4)$$

entonces (1) es exacta. Sustituyendo (3) en (4)

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2xy$$
$$\frac{\partial N}{\partial x}=2xy$$

como, $\frac{\partial M}{\partial y}=2xy=\frac{\partial N}{\partial x}$ por tanto, la ecuación diferencial es exacta, lo que implica que existe una función $U(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial U}{\partial x}=M(x,y); \quad \frac{\partial U}{\partial y}=N(x,y)\ldots(5)$$

despejando $U(x,y)$ de la primera ecuación de (5)

$$dU(x,y)=M(x,y)dx\ldots(6)$$

sustituyendo $M(x,y)$ en (6) e integrando

$$\int dU(x,y)=\int(xy^2-1)dx$$

entonces

$$U(x,y)=\frac{x^2y^2}{2}-x+f(y)\ldots(7)$$

para determinar la forma explícita de $f(y)$, sustituyamos $N(x,y)$ y la ecuación (7) en la segunda ecuación de (5), esto es

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x^2y^2}{2}-x+f(y)\right]=x^2y-1\ldots(8)$$

de (8)

$$x^2y+f'(y)=x^2y-1$$

o bien

$$f'(y)=\frac{df(y)}{dy}=-1\ldots(9)$$

integrando (9)

$$\int df(y)=-\int dy$$

así, la forma explícita de $f(y)$ es

$$f(y)=-y\ldots(10)$$

por tanto, sustituyendo (10) en (7), se tiene que

$$U(x,y)=\frac{x^2y^2}{2}-x-y$$

o bien

$$\frac{x^2y^2}{2}-x-y=C\ldots(11)$$

es la solución general de la ecuación diferencial dada.

Si en (11), $y(0)=1$

$$\frac{(0)^2(1)^2}{2}-(0)-(1)=C$$

entonces

$$C=-1$$

por tanto

$$\frac{x^2y^2}{2}-x-y=-1$$

es solución particular de (1).

2.5 MÉTODO DE AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS

Es más fácil resolver ecuaciones diferenciales exactas por un método de inspección conocido como el Método de Agrupación de Términos, el cual esta basado en la habilidad de reconocer de manera intuitiva el diferencial de ciertas ecuaciones diferenciales exactas. Para ilustrar el método consideremos los siguientes ejemplos

2.5.1 EJEMPLOS

1) Resolver

$$2xydx + (x^2 + Cosy)dy = 0 \ldots (1)$$

Solución:

Reagrupando los términos de (1)

$$(2xydx + x^2 dy) + Cosydy = 0 \ldots (2)$$

de donde, el diferencial de (2) es

$$d(x^2 y) + d(Seny) = 0$$

o bien

$$d\left(x^2 y - Seny\right) = 0 \ldots (3)$$

integrando (3)

$$\int d(x^2 y + Seny) = 0$$

por tanto

$$x^2 y + Seny = C$$

es solución general de la ecuación diferencial dada.

2) Resolver

$$y' = \frac{\left(xy^2 - 1\right)}{\left(1 - x^2 y\right)} \ldots (1)$$

Solución:

Reagrupando los términos de (1)

$$(1-x^2y)dy=(xy^2-1)dx$$
$$(xy^2-1)dx+(x^2y-1)dy=0$$
$$(xy^2dx+x^2ydy)-dx-dy=0\ldots(2)$$

de donde, el diferencial de (2) es

$$d\left(\frac{x^2y^2}{2}\right)-dx-dy=0$$

o bien

$$d\left(\frac{x^2y^2}{2}-x-y\right)=0\ldots(3)$$

integrando (3)

$$\int d\left(\frac{x^2y^2}{2}-x-y\right)=0$$

por tanto

$$\frac{x^2y^2}{2}-x-y=C$$

es solución general de la ecuación diferencial dada.

3) Determine el valor de k para que la siguiente ecuación diferencial sea exacta y resuélvala.

$$(y^3+kxy^4-2x)dx+(3xy^2+20x^2y^3)dy=0\ldots(1)$$

Solución:

De (1)

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y)=y^3+kxy^4-2x \\ N(x,y)=3xy^2+20x^2y^3 \end{array}\right\}\ldots(2)$$

entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2 + 4kxy^3$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = 3y^2 + 40xy^3$$

para que la ecuación diferencial (1) sea exacta debe ocurrir que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

esto es

$$\begin{aligned} 3y^2 + 4kxy^3 &= 3y^2 + 40xy^3 \\ 4Kxy^3 &= 40xy^3 \\ kxy^3 &= 10xy^3 \\ k &= 10 \end{aligned}$$

por tanto, la ecuación diferencial es exacta si $k = 10$.

Comprobación

Sustituyendo el valor de k en (2)

$$\left.\begin{aligned} M(x,y) &= y^3 + 10xy^4 - 2x \\ N(x,y) &= 3xy^2 + 20x^2y^3 \end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2 + 40xy^3$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = 3y^2 + 40xy^3$$

como $\frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2 + 40xy^3 = \frac{\partial N}{\partial x}$, entonces la ecuación diferencial es exacta cuando $k = 10$. Reagrupando los términos de (1), para $k = 10$.

$$(y^3 + 10xy^4 - 2x)dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)dy = 0$$
$$(10xy^4dx + 20x^2y^3dy) + (y^3dx + 3xy^2dy) - 2xdx = 0 \ldots (4)$$

donde el diferencial de (4) es

$$d(5x^2y^4)+d(xy^3)-d(x^2)=0$$

o bien

$$d(5x^2y^4+xy^3-x^2)=0\ldots(5)$$

integrando (5)

$$\int d(5x^2y^4+xy^3-x^2)=0$$

por tanto

$$5x^2y^4+xy^3-x^2=C$$

es solución general de (1), siempre y cuando $k=10$.

4) Deduzca una función $M(x,y)$ tal que la siguiente ecuación diferencial sea exacta.

$$M(x,y)dx+\left(xe^{xy}+2xy+\frac{1}{x}\right)dy=0\ldots(1)$$

Solución:

De (1)

$$N(x,y)=xe^{xy}+2xy+\frac{1}{x}\ldots(2)$$

entonces

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(xe^{xy}+2xy+\frac{1}{x}\right)=xye^{xy}+2y+e^{xy}-\frac{1}{x^2}\ldots(3)$$

para que (1) sea exacta debe ocurrir que

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\ldots(4)$$

donde, en este caso $M(x,y)$, es una función desconocida. Para encontrar la forma explícita de $M(x,y)$ sustituyamos (3) en (4)

$$\frac{\partial M}{\partial y}=xye^{xy}+2y+e^{xy}-\frac{1}{x^2}\ldots(5)$$

y despejemos de (5) $M(x,y)$, esto es

$$dM(x,y) = \left[xye^{xy} + e^{xy} + 2y - \frac{1}{x^2}\right]dy \ldots (6)$$

integrando ambos miembros de (6)

$$\int dM(x,y) = \int\left(xye^{xy} + e^{xy} + 2y - \frac{1}{x^2}\right)dy$$

$$= x\int ye^{xy}dy + \frac{1}{x}e^{xy} + y^2 - \frac{y}{x^2} \ldots (7)$$

donde en (7)

$$\int ye^{xy}dy = \frac{ye^{xy}}{x} - \frac{1}{x}\int e^{xy}dy$$

$$= \frac{ye^{xy}}{x} - \frac{1}{x^2}e^{xy} \ldots (8)$$

sustituyendo (8) en (7)

$$M(x,y) = x\left(\frac{ye^{xy}}{x} - \frac{e^{xy}}{x^2}\right) + \frac{e^{xy}}{x} + y^2 - \frac{y}{x^2} + C = ye^{xy} - \frac{e^{xy}}{x} + \frac{e^{xy}}{x} + y^2 - \frac{y}{x^2} + C$$

donde la constante de integración C no es función de la variable y, sin embargo si puede ser función de la variable x. Luego haciendo $C = f(x)$, se tiene que si

$$M(x,y) = ye^{xy} + y^2 - \frac{y}{x^2} + f(x)$$

entonces la ecuación diferencial (1) es exacta.

2.6 FACTOR INTEGRANTE

A veces es posible transformar una ecuación diferencial *no exacta*, $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, en una ecuación diferencial exacta multiplicándola por una función $\mu(x,y)$. Ilustremos este argumento mediante el siguiente ejemplo.

La ecuación diferencial

$$6xydx+(4y+9x^2)dy=0\ldots(1)$$

no es exacta. Multiplíquela por la función $\mu(x,y)=y^2$ y verifique nuevamente la condición de exactitud. En efecto, de (1)

$$\left.\begin{aligned}M(x,y)&=6xy\\N(x,y)&=4y+9x^2\end{aligned}\right\}\ldots(2)$$

entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y}=6x$$
$$\frac{\partial N}{\partial x}=18x$$

como $\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$, por tanto la ecuación diferencial dada no es exacta. Multipliquemos ahora (1) por la función $\mu(x,y)=y^2$, esto es

$$y^2\left[6xydx+(4y+9x^2)dy\right]=0$$

o bien

$$6xy^3dx+(4y^3+9x^2y^2)dy=0\ldots(3)^*$$

donde de (3)

$$\left.\begin{aligned}M_1(x,y)&=\mu M=6xy^3\\N_1(x,y)&=\mu N=4y^3+9x^2y^2\end{aligned}\right\}\ldots(4)$$

entonces, $\dfrac{\partial M_1}{\partial y}=18xy^2=\dfrac{\partial N_1}{\partial x}$, y por tanto la ecuación diferencial dada ya es exacta.

* Nótese que la ecuación diferencial (3), es la misma que (1) y difieren en forma únicamente por un factor, el cual no altera la ecuación original por estar igualada a cero.

Reagrupando los términos de (6)

$$(6xy^3dx + 9x^2y^2dy) + 4y^3dy = 0 \ldots (7)$$

donde el diferencial de (7) es

$$d(3x^2y^3) + d(y^4) = 0$$

o bien

$$d(3x^2y^3 + y^4) = 0 \ldots (8)$$

integrando (8)

$$\int d(3x^2y^3 + y^4) = 0$$

por tanto

$$3x^2y^3 + y^4 = C$$

es solución general de la ecuación diferencial dada.

La función multiplicadora $\mu(x, y)$ que hace exacta a una ecuación diferencial recibe el nombre de *factor integrante*.

Definición: Si la ecuación diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \ldots (1)$$

no es exacta y multiplicamos a esta por $\mu(x, y) \neq 0$ de tal suerte que

$$\mu Mdx + \mu Ndy = 0$$

es exacta, entonces decimos que hemos hecho exacta a la ecuación diferencial**.** La función multiplicadora $\mu(x, y)$ se llama el *factor integrante* de la ecuación diferencial (1).

2.6.1 ECUACIONES DIFERENCIALES HECHAS EXACTAS POR UN FACTOR DE INTEGRANTE APROPIADO.

Para la obtención de un factor integrante apropiado, consideremos primero que la ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \ldots (1)$$

no es separable y tampoco es exacta.

Multipliquemos ahora la ecuación (1) por el factor integrante $\mu(x,y)$ (aún desconocido), entonces de acuerdo con la definición de la *sección 2.3.7,* la ecuación diferencial

$$(\mu M)dx + (\mu N)dy = 0$$

ya es exacta, tal que

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \ldots (2)$$

Para simplificar nuestro trabajo analicemos los siguientes dos casos.

CASO I: Si $\mu = \mu(x)$, es decir μ es solo función de x, entonces de (2) se tiene

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{d\mu}{dx}$$
$$\mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = N \frac{d\mu}{dx}$$

de donde

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) d(x) \ldots (3)$$

si en (3)

$$\frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = f(x)$$

entonces por integración inmediata, (3) se reduce a

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int f(x)dx$$

con lo que

$$\ln \mu = \int f(x)dx$$

o bien

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$$

por tanto

Teorema:	Si $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x)$, entonces $\mu = e^{\int f(x)dx}$ es el factor integrante.

CASO II: Si $\mu = \mu(y)$, es decir μ es solo función de y, entonces de (2) se tiene

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{d\mu}{dy} = \mu \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$M\frac{d\mu}{dy} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

de donde

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dy \ldots (4)$$

si en (4)

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = g(y)$$

entonces por integración inmediata, (4) se reduce a

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int g(y)dy$$

con lo que

$$\ln \mu = \int g(y)dy$$

o bien

$$\mu = e^{\int g(y)dy}$$

por tanto

Teorema:	Si $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = g(y)$ entonces $\mu = e^{\int g(y)dy}$ es el factor integrante.

2.6.2 EJEMPLOS

1) Resuelva

$$y dx + (3 + 3x - y) dy = 0 \ldots (1)$$

Solución:

De (1)

$$\left.\begin{aligned} M(x,y) &= y \\ N(x,y) &= 3 + 3x - y \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

entonces

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= 1 \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 3 \end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, concluimos que la ecuación diferencial (1) no es exacta.

Busquemos un factor integrante apropiado.

i) Si

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x) \ldots (4)$$

entonces el factor integrante es

$$\mu = e^{\int f(x)dx} \ldots (5)$$

sustituyendo (3) en (4)

$$\frac{1}{3 + 3x - y}(3 - 1) = f(x)$$

$$-\frac{2}{3 + 3x - y} \neq f(x)$$

y por tanto (5) no es un factor integrante apropiado.

ii) Si

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=g(y)\ldots(6)$$

entonces el factor integrante es

$$\mu=e^{\int g(y)dy}\ldots(7)$$

sustituyendo (3) en (6)

$$\frac{1}{y}(3-1)=g(y)$$

es decir

$$g(y)=\frac{2}{y}\ldots(8)$$

sustituyendo (8) en (7)

$$\mu=e^{\int g(y)dy}=e^{\int\frac{2}{y}dy}=e^{2\ln y}=e^{\ln y^2}=y^2$$

por tanto el factor integrante buscado es

$$\mu=y^2\ldots(9)$$

Multiplicando a (1) por (9)

$$y^2\left(ydx+(3+3x-y)dy=0\right)$$

o bien

$$y^3dx+(3y^2+3xy^2-y^3)dy=0\ldots(9)$$

donde de (9)

$$\left.\begin{aligned}M_1(x,y)&=\mu M=y^3\\N_1(x,y)&=\mu N=3y^2+3xy^2-y^3\end{aligned}\right\}\ldots(10)$$

entonces

$$\frac{\partial M_1}{\partial y}=3y^2$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x}=3y^2$$

como $\frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial x}$, tenemos por tanto que la ecuación diferencial dada ya es exacta y se puede resolver. Dado que (1) ya es exacta, entonces existe una función $U(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M_1 \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = N_1 \ldots (11)$$

donde $M_1(x, y)$ y $N_1(x, y)$, vienen dadas por (10). Despejando $U(x, y)$ de la primera ecuación de (11)

$$dU(x, y) = M_1(x, y)dx \ldots (12)$$

sustituyendo $M_1(x, y)$ en (12) e integrando

$$\int dU(x, y) = \int y^3 dx$$

entonces

$$U(x, y) = xy^3 + f(y) \ldots (13)$$

para determinar la forma explícita de $f(y)$, sustituyamos $N_1(x, y)$ y la ecuación (13) en la segunda ecuación de (11), esto es

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[xy^3 + f(y)\right] = 3y^2 + 3xy^2 - y^3 \ldots (14)$$

de (14)

$$3xy^2 + f'(y) = 3y^2 + 3xy^2 - y^3$$

o bien

$$f'(y) = \frac{df(y)}{dy} = 3y^2 - y^3 \ldots (15)$$

integrando (15)

$$\int df(y) = \int \left(3y^2 - y^3\right) dy$$

así, la forma explícita de $f(y)$ es

$$f(y) = y^3 - \frac{y^4}{4} \ldots (16)$$

por tanto, sustituyendo (16) en (13), se tiene que

$$U(x,y) = xy^3 + y^3 - \frac{y^4}{4}$$

o bien

$$xy^3 + y^3 - \frac{y^4}{4} = C$$

es la solución general de la ecuación diferencial dada.

2) Una curva tiene una pendiente dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \ldots (1)$$

pasa por el punto (2,1). Encuentre su ecuación.

Solución:

Llevemos la ecuación (1) a la forma general

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

esto es

$$(x^2 + y^2)dy = 2xydx$$

o bien

$$2xydx + (y^2 - x^2)dy = 0 ... (2)$$

donde, de (2)

$$\left.\begin{aligned} M(x,y) &= 2xy \\ N(x,y) &= y^2 - x^2 \end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -2x$$

como $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$, concluimos que la ecuación diferencial (1) no es exacta.

Busquemos un factor integrante apropiado.

i) Si

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x) \ldots (4)$$

entonces el factor integrante es

$$\mu = e^{\int f(x)dx} \ldots (5)$$

sustituyendo (3) en (4)

$$\frac{1}{y^2 - x^2}(2x + 2x) = f(x)$$

$$\frac{4x}{y^2 - x^2} \neq f(x)$$

ii) Si

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = g(y) \ldots (6)$$

entonces el factor integrante es

$$\mu = e^{\int g(y)dy} \ldots (7)$$

sustituyendo (3) en (6)

$$\frac{1}{2xy}(-2x - 2x) = g(y)$$

es decir

$$g(y) = -\frac{2}{y} \ldots (8)$$

sustituyendo (8) en (7)

$$\mu = e^{\int g(y)dy} = e^{-\int \frac{2}{y}dy} = e^{-2\ln y} = e^{\ln y^{-2}} = \frac{1}{y^2}$$

por tanto el factor integrante buscado es

$$\mu = \frac{1}{y^2} \ldots (9)$$

multiplicando a (2) por (9)

$$2xydx + (y^2 - x^2)dy = 0$$

o bien

$$\frac{2x}{y}dx + \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right)dy = 0 \ldots (10)$$

donde de (10)

$$\left.\begin{aligned} M_1(x,y) &= \mu M = \frac{2x}{y} \\ N_1(x,y) &= \mu N = 1 - \frac{x^2}{y^2} \end{aligned}\right\} \ldots (11)$$

entonces

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} = -\frac{2x}{y^2}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = -\frac{2x}{y^2}$$

como $\frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial x}$, tenemos por tanto que la ecuación diferencial dada ya es exacta y se puede resolver.

Resolviendo por agrupación de términos

$$\left(-\frac{2y}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy\right) + dy = 0 \ldots (12)$$

donde el diferencial de (11) es

$$d\left(\frac{x^2}{y} + y\right) = 0 \ldots (13)$$

donde por integración inmediata de (12)

$$\int d\left(\frac{x^2}{y}+y\right)=0$$

se tiene por tanto que

$$\frac{x^2}{y}+y=C\ldots(14)$$

es solución general de (1).

En el punto (1,2), (14) se reduce a

$$\frac{(2)^2}{1}+1=C$$
$$4+1=C$$

así

$$C=5$$

y por tanto

$$\frac{x^2}{y}+y=5$$

es solución particular de la ecuación diferencial dada.

2.7 LA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE PRIMER ORDEN

Como sabemos toda ecuación diferencial ordinaria lineal de orden n tiene la forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)\ldots(1)$$

Si en (1) n = 1, entonces esta se reduce a

$$a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)\ldots(2)$$

la cual es una ecuación *diferencial ordinaria lineal de primer orden*. Multipliquemos (2) por $\frac{1}{a_1(x)}$, esto es

$$\frac{dy}{dx}+\frac{a_0(x)}{a_1(x)}=\frac{g(x)}{a_1(x)}\ldots(3)$$

haciendo

$$P(x)=\frac{a_0(x)}{a_1(x)}$$
$$Q(x)=\frac{g(x)}{a_1(x)}$$

entonces (3) se reduce a

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)\ldots(4)$$

la cual será la forma general que adoptaremos para representar a una ecuación diferencial de primer orden.

Para resolver (4) utilizaremos el método de exactitud descrito en la *sección 2.3*. Llevando (4) a la forma general

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0\ldots(5)$$

esto es

$$\frac{dy}{dx}=Q(x)-P(x)y$$
$$dy=\left[Q(x)-P(x)y\right]dx$$

o bien

$$\left[Q(x) - P(x)y\right]dx - dy = 0 \ldots (6)$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} M(x,y) &= \left[Q(x)\text{-}P(x)y\right] \\ N(x,y) &= -1 \end{aligned}\right\} \ldots (7)$$

entonces

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= -P(x) \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (8)$$

como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, concluimos que la ecuación diferencial (4) no es exacta.

Busquemos un factor integrante apropiado.

i) Si

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x) \ldots (9)$$

entonces el factor integrante es

$$\mu = e^{\int f(x)dx} \ldots (5)$$

sustituyendo (7) en (8)

$$\frac{1}{(-1)}\left[-P(x) - 0\right] = P(x) = f(x)$$

por tanto, el factor integrante de (4) es

$$\mu = e^{\int P(x)dx} \ldots (6)$$

multiplicando (4) por (6)

$$e^{\int P(x)dx}\left[\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)\right]$$
$$e^{\int P(x)dx}\,\frac{dy}{dx}+e^{\int P(x)dx}P(x)y=Q(x)e^{\int P(x)dx}$$
$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right]=Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

o bien

$$d\left[e^{\int P(x)dx}y\right]=Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\ldots(7)$$

integrando ambos miembros de (7), tenemos por tanto que

$$e^{\int P(x)dx}y=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\ldots(8)$$

es solución general de (4).

Como conclusión podemos establecer que toda ecuación diferencial lineal de primer orden como la descrita en (4), es un caso particular de las ecuaciones diferenciales exactas.

Nota: No hay necesidad de memorizar la última expresión. Es mucho mejor usar el factor integrante

$$\mu=e^{\int P(x)dx}$$

multiplicar la ecuación (4) por este factor. Luego, escribir el lado izquierdo de la ecuación como la derivada con respecto a x del producto de μ por y. En efecto

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right]=e^{\int P(x)dx}\,\frac{dy}{dx}+\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}\right]=$$
$$=e^{\int P(x)dx}\,\frac{dy}{dx}+e^{\int P(x)dx}\,\frac{d}{dx}\left[\int P(x)dx\right]=$$
$$=e^{\int P(x)dx}\,\frac{dy}{dx}+e^{\int P(x)dx}P(x)$$

2.7.1 EJEMPLOS

1) Resuelva

$$\frac{1}{5}\frac{dy}{dx}+y=10\ldots(1)$$

Solución:

Llevando (1) a la forma general adoptada para una ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

se tiene

$$\frac{dy}{dx}+5y=50\ldots(2)$$

de donde

$$P(x)=5$$

$$Q(x)=50$$

entonces

$$\mu=e^{\int P(x)dx}=e^{\int 5dx}=e^{5x}$$

luego

$$\mu=e^{5x}\ldots(3)$$

es el factor integrante de la ecuación diferencial. Multiplicando (2) por (3)

$$e^{5x}\frac{dy}{dx}+5e^{5x}y=50e^{5x}$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{5x}y\right]=50e^{5x}$$

$$\int d\left[e^{5x}y\right]=\int 50e^{5x}dx$$

$$e^{5x}y=\frac{50}{5}e^{5x}+C$$

$$y=\frac{10e^{5x}+C}{e^{5x}}$$

por tanto

$$y=10+e^{-5x}C$$

es solución general de (1).

2) Resuelva:

$$\frac{dI}{dt}+\frac{10}{2t+5}I=10\ldots(1);\qquad \mathrm{I}(0)=0$$

Solución:

Como (1) es de la forma

$$\frac{dI}{dt}+P(t)I=Q(t)$$

de donde

$$P(t)=\frac{10}{2t+5}$$
$$Q(t)=10$$

entonces

$$\mu=e^{\int P(t)dt}=e^{\int\frac{10}{2t+5}dt}=e^{\frac{10}{2}\ln(2t+5)}=(2t+5)^5$$

luego

$$\mu=\left(2t+5\right)^5\ldots(2)$$

es el factor integrante de la ecuación diferencial. Multiplicando (1) por (2)

$$(2t+5)^5\frac{dI}{dt}+(2t+5)^5 I\frac{10}{2t+5}=10(2t+5)^5$$
$$\frac{d}{dt}\left[(2t+5)^5 I\right]=10(2t+5)^5$$
$$\int d\left[(2t+5)^5 I\right]=\int 10(2t+5)^5\,dt$$
$$(2t+5)^5 I=\frac{10}{12}(2t+5)^6+C$$

por tanto

$$I=\frac{5}{6}(2t+5)+\frac{C}{(2t+5)^5}\ldots(3)$$

es solución general de (1).

Si en (3) $I(0)=0$, entonces

$$C=-\frac{78.125}{6}$$

así

$$I=\frac{5}{6}(2t+5)+\frac{\left(-\frac{78.125}{6}\right)}{(2t+5)^5}$$

es solución particular de la ecuación diferencial dada.

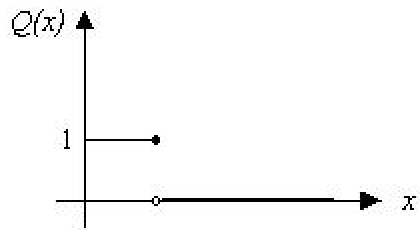
3) Determine una función continua que satisfaga

$$\frac{dy}{dx}+y=Q(x)\ldots(1)$$

donde
$$Q(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & x>1\end{cases}\ldots(2)$$

y la condición inicial $y(0)=0$.

Solución:



En la figura anterior se observa que la función $Q(x)$ es continua por intervalos, y tiene una discontinuidad en $x=1$, por lo que será necesario resolver el problema en dos partes, esto es

PARTE I: Para el intervalo $0\le x\le 1$, se tiene que (1) toma la forma

$$\frac{dy}{dx}+y=1\ldots(3)$$

de donde

$$P(x)=1$$
$$Q(x)=1$$

entonces

$$\mu=e^{\int P(x)dx}=e^{\int dx}=e^{x}$$

luego

$$\mu=e^{x}\ldots(4)$$

es el factor integrante de la ecuación diferencial (3). Multiplicando (4) por (3)

$$e^{x}\frac{dy}{dx}+e^{x}y=e^{x}$$
$$\frac{d}{dt}\left[e^{x}y\right]=e^{x}$$
$$\int d\left[e^{x}y\right]=\int e^{x}dx$$

$$e^{x} y = e^{x} + C_1$$
$$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = -1$$

por tanto

$$y(x) = 1 + e^{-x} C_1 \ldots (5)$$

es solución general de (1) en $0 \le x \le 1$. Si en (3) $y(0) = 0$, entonces

$$C_1 = -1$$

así

$$y(x) = 1 - e^{-x} \ldots (6)$$

es solución particular de (1) en $0 \le x \le 1$.

PARTE II: Para el intervalo $x > 1$, se tiene que (1) toma la forma

$$\frac{dy}{dx} + y = 0 \ldots (7)$$

donde (4) es el factor integrante de la ecuación diferencial (7). Multiplicando (4) por (7)

$$e^{x} \frac{dy}{dx} + e^{x} y = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left[e^{x} y\right] = 0$$
$$\int d\left[e^{x} y\right] = 0$$
$$e^{x} y = C_2$$

por tanto

$$y(x) = e^{-x} C_2 \ldots (8)$$

es solución general de (1) en $x > 1$. Dado lo anterior, a partir de (6) y (8) podemos establecer que

$$y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & ; 0 \le x \le 1 \\ C_2 e^{-x} & ; \quad x > 1 \end{cases} \ldots (9)$$

es solución general (discontinua en $x = 1$) de la ecuación diferencial dada. Para que la solución (9) sea continua debe ocurrir lo siguiente

$$\lim_{x \to 1^-} y(x) = \lim_{x \to 1^+} y(x)$$

esto es

$$\lim_{x\to 1^-} 1 - e^{-x} = \lim_{x\to 1^+} C_2 e^{-x}$$

$$1 - e^{-1} = C_2 e^{-1}$$

por tanto la solución general (9) es continua en $x = 1$ si y solo si

$$C_2 = e - 1$$

y la solución (9) toma la forma

$$y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & ; 0 \le x \le 1 \\ (e-1)e^{-x}; & x > 1 \end{cases}$$

2.7.2 APLICACIONES DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE PRIMER ORDEN

En la practica, muchos modelos matemáticos, como por ejemplo el crecimiento demográfico, la desintegración radioactiva, algunos problemas de enfriamiento de ciertos materiales, el análisis de algunas mezclas químicas etc, son ecuaciones diferenciales de primer orden como las estudiadas en la *sección 2.4*. En la presente sección analizaremos y resolveremos algunos de los modelos matemáticos especificados en los párrafos anteriores apoyándonos de la herramienta desarrollada en la sección precedente.

2.7.3 PROBLEMAS DE CRECIMIENTO Y DECAIMIENTO

El problema de valor inicial:

$$\frac{dx}{dt} = Kx \ldots (1); \qquad x(t_0) = x_0$$

En donde K es una constante de proporcionalidad, se emplea como modelo de distintos fenómenos donde intervienen *crecimiento o decrecimiento* (desintegración). La constante de proporcionalidad K, en (1) se puede hallar resolviendo problemas de valor inicial, con una determinación de x en un momento $t > t_0$.

2.7.4 EJEMPLOS

1) *Crecimiento bacteriano*

Un cultivo tiene una cantidad inicial N_0 de bacterias. Cuando $t = 1hr.$, la cantidad media de bacterias es 3/2 del número inicial. Sí la razón de producción es proporcional a la cantidad de bacterias presentes, calcule el tiempo necesario para triplicar la cantidad inicial de los microorganismos.

Solución:

El problema de valor inicial es

$$\frac{dN}{dt} = KN \ldots (1); \quad N(0) = N_0$$

donde de (1)

$$\frac{dN}{dt} - KN = 0 \ldots (2)$$

y N_0 es la cantidad inicial de bacterias. De (2)

$$P(t) = -K$$
$$Q(t) = 0$$

entonces

$$\mu = e^{\int P(t)dt} = e^{-K\int dt} = e^{-Kt}$$

luego el factor integrante de (1) es

$$\mu = e^{-Kt} \ldots (3)$$

multiplicando a (2) por (3)

$$e^{-Kt}\frac{dN}{dt} - e^{-Kt}KN = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-Kt}N\right] = 0$$

$$\int d\left[e^{-Kt}N\right] = 0$$

$$e^{-Kt}N = C$$

por tanto

$$N(t) = Ce^{Kt} \ldots (4)$$

es solución general de (1). Si en (4) $N(0) = N_0$, entonces

$$C = N_0$$

así

$$N(t) = N_0 e^{Kt} \ldots (5)$$

es solución particular de (1). Como dato del problema se tiene que, cuando $t = 1hr.$, la cantidad media de bacterias es 3/2 del número inicial, esto es

$$N(1) = \frac{3}{2}N_0 \ldots (6)$$

usando la condición (6) en (5) determinemos la constante de proporcionalidad K, procedamos

$$\frac{3}{2}N_0 = N_0 e^{K(1)}$$

$$\frac{3}{2} = e^{K}$$

$$\ln\left|\frac{3}{2}\right| = K$$

por tanto

$$K = 0.4054$$

y (5) se rescribe

$$N(t) = N_0 e^{(0.4054)t} \ldots (7).$$

Finalmente ¿ Cuando en cuanto tiempo se triplica la población de bacterias? , esto es

$$\begin{aligned} 3N_0 &= N_0 e^{(0.4054)t} \\ \ln|3| &= (0.4054)t \end{aligned}$$

por tanto, si

$$t = \frac{\ln|3|}{0.4054} \cong 2.7hr.$$

el número de bacterias se triplicara.

2) *Periodo medio del Plutonio*

Un reactor de cría convierte el uranio 238, relativamente estable, en plutonio 239, un isótopo radioactivo. Al cabo de 15 años, se ha desintegrado el 0.043% de la cantidad inicial A_0, de una muestra de plutonio. Calcule el periodo medio de este isótopo si la razón de desintegración es proporcional a la cantidad presente.

Solución:

El problema de valor inicial es

$$\frac{dA}{dt} = KA \ldots (1); \qquad A(0) = A_0$$

de (1)

$$\frac{dA}{dt} - KA = 0 \ldots (2)$$

de donde

$$\begin{aligned} P(t) &= -K \\ Q(t) &= 0 \end{aligned}$$

entonces

$$\mu = e^{\int P(t)dt} = e^{\int -Kdt} = e^{-Kt}$$

luego el factor integrante de (1) es

$$\mu = e^{-Kt} \ldots (3)$$

multiplicando (2) por (3)

$$e^{-Kt}\frac{dA}{dt} - KAe^{-Kt} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left[e^{-Kt}A\right] = 0$$
$$\int d\left[e^{-Kt}A\right] = 0$$
$$e^{-Kt}A = C$$

por tanto

$$A(t) = Ce^{Kt} \ldots (4)$$

es solución general de (1). Si en (4) $A(0) = A_0$, entonces

$$C = A_0$$

así

$$A(t) = A_0 e^{Kt} \ldots (5)$$

es solución particular de (1). Como dato del problema, tenemos que al cabo de 15 años, se ha desintegrado el 0.043% de la cantidad inicial A_0, dicho en otras palabras, al cabo de 15 años queda el 99.957% de isótopos, esto es

$$A(15) = 0.99957A_0 \ldots (6)$$

usando la condición (6) en (5) determinemos la constante de proporcionalidad *K*, procedamos

$$0.99957A_0 = A_0 e^{15Kt}$$
$$\ln|0.99957| = 15K$$

por tanto

$$K = -2.867x10^{-5}$$

y (5) se escribe como

$$A(t) = A_0 e^{-\left(2.87\times 15^{-5}\right)t} \ldots (7)$$

finalmente. ¿ Cuál deberá ser el periodo medio de este isótopo si la razón de desintegración es proporcional a la cantidad presente ?, esto es

$$\frac{1}{2}A_0 = A_0 e^{-\left(2.87x10^{-5}\right)t}$$

$$\ln\left|\frac{1}{2}\right| = -2.867x10^{-5}t$$

por tanto, el periodo medio de este isótopo es de

$$t = 24176.74151 \text{ años.}$$

2.7.5 LEY DE NEWTON DE ENFRIAMIENTO

La formulación matemática de la ley empírica de Newton, relativa al enfriamiento de un objeto, se expresa con la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\frac{dT}{dt} = K(T - Ta)$$

en donde *K* es la constante de proporcionalidad, *T(t)* es la temperatura del objeto cuando $T > 0$ y Ta es la temperatura ambiente del medio que rodea al objeto. Consideremos el siguiente ejemplo.

1) *Enfriamiento de un pastel*

Al sacar un pastel del horno, su temperatura es de 300º F. Después de 3 minutos, 200º F ¿En que tiempo se enfriara hasta alcanzar la temperatura ambiente de 70º F?

Solución:

El problema de valor inicial es

$$\frac{dT}{dt} = K\left(T - 70\right)\ldots(1); \quad T(0) = 300^o F$$

por separación de variables se tiene que

$$\frac{dT}{(t-70)} = Kdt$$
$$\int \frac{dT}{(t-70)} = \int Kdt$$
$$In|T-70| = Kt + C$$
$$T - 70 = e^{Kt+C}$$

por tanto

$$T(t) = 70 + e^{Kt}C \ldots (2)$$

es solución general de (1). Si en (2) $T(0) = 300^o F$, entonces

$$300 = 70e^{K(0)}C$$
$$300 = 70 + C$$
$$300 - 70 = C$$

luego

$$C = 230$$

así

$$T(t) = 70 + 230e^{Kt} \ldots (3)$$

es solución particular de (1). Ahora, calculemos la constante de proporcionalidad K, usando el hecho que, al sacar un pastel del horno, su temperatura era de 300º F y después de 3 minutos es de 200º F , esto es

$$T(3) = 200 \ldots (4)$$

aplicando la condición (4) en (3), se tiene

$$200 = 70 + 230e^{3K}$$
$$130 = 230e^{3K}$$
$$\frac{13}{23} = e^{3K}$$
$$\ln\left|\frac{13}{23}\right| = 3K$$

por tanto

$$K = -0.19018$$

y (3) toma la forma

$$T(t) = 70 + 230e^{-0.19018t} \ldots (5)$$

entonces, el tiempo que tardará en enfriarse el pastel hasta alcanzar la temperatura ambiente de 70º F, es tal que, el segundo termino de (5) tienda a cero y esto ocurre en términos analíticos cuando *t* es lo suficientemente grande. Sin embargo en la practica sabemos que esto no es así. Consideremos, entonces como temperatura ambiente un valor muy cercano a 70º F, por ejemplo

$$Ta = 70.01$$

entonces de (5)

$$\begin{aligned} 70.01 &= 70 + 230e^{-0.19018t} \\ 0.01 &= 230e^{-0.19018t} \end{aligned}$$

y por tanto

$$t = \frac{\ln\left|\dfrac{0.01}{230}\right|}{-0.19018} = 52.809\,\text{min}.$$

que corresponde en términos prácticos, a un valor de tiempo considerable.

2.8 ECUACIÓN DE BERNOULLI

El caso más común de ecuaciones diferenciales no lineales que se pueden presentar en la practica es la siguiente

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{n}$$

siendo n es cualquier número real. Esta ecuación diferencial recibe el nombre de *Ecuación de Bernoulli*.

2.8.1 MÉTODO DE BERNOULLI.

Observemos que si en la Ecuación de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{n}\ldots(1)$$

$n=0$ ó $n=1$ entonces

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)\ldots(2)$$

ó

$$\frac{dy}{dx}+\left[P(x)-Q(x)\right]y=0\ldots(3)$$

respectivamente, (1) se reduce a una ecuación diferencial lineal que se puede resolver empleando el método desarrollado en la *sección 2.4*. Sin embargo, si en (1) $n\neq 0$, $n\neq 1$ la ecuación diferencial ya no es lineal.

A continuación probaremos que toda ecuación diferencial de Bernoulli puede reducirse a una ecuación diferencial lineal mediante el cambio de variable

$$u(x)=y^{1-n}\ldots(4)$$

o bien

$$y=u^{\frac{1}{1-n}}\ldots(5)$$

derivando (4) con respecto de *x*.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n} u^{\frac{1}{1-n}-1} \frac{du}{dx}$$

simplificando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n} u^{\frac{n}{1-n}} \frac{du}{dx} \ldots (6)$$

sustituyendo (5) y (6) en (1)

$$\frac{1}{1-n} u^{\frac{n}{1-n}} \frac{du}{dx} + P(x) u^{\frac{n}{1-n}} = Q(x) u^{\frac{n}{1-n}} \ldots (7)$$

multiplicando a (7) por el inverso de $\frac{1}{1-n} u^{\frac{n}{1-n}}$

$$\left(\frac{1-n}{u^{\frac{n}{1-n}}} \right) \frac{n}{1-n} u^{\frac{n}{1-n}} \frac{du}{dx} + P(x) \left(\frac{1-n}{u^{\frac{n}{1-n}}} \right) u^{\frac{1}{1-n}} = Q(x) \left(\frac{1-n}{u^{\frac{n}{1-n}}} \right) u^{\frac{n}{1-n}}$$

$$\frac{du}{dx} + (1-n) P(x) \left(\frac{1-n}{u^{\frac{n}{1-n}}} \right) u^{\frac{1}{1-n}} = (1-n) Q(x)$$

$$\frac{du}{dx} + (1-n) P(x) u^{-\frac{n}{1-n}} u^{\frac{1}{1-n}} = (1-n) Q(x)$$

$$\frac{du}{dx} + (1-n) P(x) u^{\frac{1}{1-n} - \frac{n}{1-n}} = (1-n) Q(x)$$

$$\frac{du}{dx} + (1-n) P(x) u^{\frac{1-n}{1-n}} = (1-n) Q(x)$$

o bien

$$\frac{du(x)}{dx} + (1-n) P(x) u(x) = (1-n) Q(x)$$

la cual es una ecuación lineal de primer orden fácil de resolver.

2.8.2 EJEMPLOS

1) Resuelva

$$x\frac{dy}{dx}+y=x^2y^2\ldots(1)$$

Solución:

Llevando (1) a la forma de la ecuación de Bernoulli, esto es

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=xy^2\ldots(2)$$

usando en (2) el cambio de variable $u(x)=y^{1-n}$ con $n=2$ se tiene

$$u(x)=y^{-1}\ldots(3)$$

o bien

$$y=u^{-1}\ldots(4)$$

derivando (4) respecto de x

$$\frac{dy}{dx}=-u^{-2}\frac{du}{dx}\ldots(5)$$

sustituyendo (4) y (5) en (2)

$$-u^{-2}\frac{du}{dx}+\frac{u^{-1}}{x}=xu^{-2}\ldots(6)$$

multiplicando a (6) por el inverso de $-u^{-2}$

$$\left(\frac{1}{-u^{-2}}\right)\left(-u^{-2}\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{1}{-u^{-2}}\right)\frac{u^{-1}}{x}=x\left(\frac{1}{-u^{-2}}\right)u^{-2}$$

simplificando

$$\frac{du}{dx}-\frac{u}{x}=-x\ldots(7)$$

la cual es una ecuación diferencial lineal de primer orden, en donde

$$P(x) = -\frac{1}{x}$$
$$Q(x) = -x$$

entonces

$$\mu = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

luego

$$\mu = \frac{1}{x} \ldots (8)$$

es el factor integrante de (7). Multiplicando (7) por (8)

$$\frac{1}{x}\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}\frac{u}{x} = -\frac{x}{x}$$
$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}u\right] = -1$$
$$\int d\left[\frac{1}{x}u\right] = \int -\,dx$$
$$\frac{1}{x}u = -x + C$$
$$\frac{u}{x} = -x + C$$

esto es

$$u(x) = x(-x + C) \ldots (9)$$

sustituyendo (3) en (9) tenemos por tanto que

$$y^{-1} = x(-x + C)$$

es solución general de (1).

2) Resuelva

$$x\frac{dy}{dx}+y=y^{-2}\ldots(1)$$

Solución:

Llevando (1) a la forma de la ecuación de Bernoulli, esto es

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{y^{-2}}{x}\ldots(2)$$

usando en (2) el cambio de variable $u(x)=y^{1-n}$ con $n=-2$ se tiene

$$u(x)=y^{3}\ldots(3)$$

o bien

$$y=u^{\frac{1}{3}}\ldots(4)$$

derivando (4) respecto de x

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}\frac{du}{dx}\ldots(5)$$

sustituyendo (4) y (5) en (2)

$$\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}\frac{du}{dx}+\frac{u^{\frac{1}{3}}}{x}=\frac{u^{-\frac{2}{3}}}{x}\ldots(6)$$

multiplicando a (6) por $\left(\frac{3}{u^{-\frac{2}{3}}}\right)$

$$\left(\frac{3}{u^{-\frac{2}{3}}}\right)\left(\frac{u^{-\frac{2}{3}}}{3}\frac{dU}{dx}\right)+\left(\frac{3}{u^{-\frac{2}{3}}}\right)\frac{u^{\frac{1}{3}}}{x}=\left(\frac{u^{-\frac{2}{3}}}{x}\right)\left(\frac{3}{u^{-\frac{2}{3}}}\right)$$

simplificando

$$\frac{du}{dx}-\frac{3}{x}u=\frac{3}{x}\ldots(7)$$

la cual es una ecuación diferencial lineal de primer orden, en donde

$$P(x)=\frac{3}{x}$$
$$Q(x)=\frac{3}{x}$$

entonces

$$\mu=e^{\int\frac{3}{x}dx}=e^{3\ln x}=e^{\ln x^3}=x^3$$

luego

$$\mu=x^3\ldots(8)$$

es el factor integrante de (7). Multiplicando (7) por (8)

$$x^3\frac{du}{dx}+\frac{3}{x}x^3u=\frac{3}{x}x^3$$
$$\frac{d}{dx}\left[x^3u\right]=3x^2$$
$$\int d\left[x^3u\right]=\int 3x^2dx$$
$$x^3u=x^3+C$$

esto es

$$u(x)=1+\frac{C}{x^3}\ldots(9)$$

sustituyendo (3) en (9) tenemos por tanto que

$$y^3=1+x^{-3}C$$

es solución general de (1).

3) Resuelva:

$$\frac{dy}{dx} = y(xy^3 - 1)\ldots(1)$$

Solución:

Llevando (1) a la forma de la ecuación de Bernoulli, esto es

$$\frac{dy}{dx} + y = xy^4 \ldots(2)$$

usando en (2) el cambio de variable $u(x) = y^{1-n}$ con $n = 4$ se tiene

$$u(x) = y^{-3} \ldots(3)$$

o bien

$$y = u^{-\frac{1}{3}} \ldots(4)$$

derivando (4) respecto de x

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}\frac{du}{dx} \ldots(5)$$

sustituyendo en (4) y (5) en (2)

$$-\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}\frac{du}{dx} + u^{-\frac{1}{3}} = xu^{-\frac{4}{3}} \ldots(6)$$

multiplicando a (6) por $\left(-\frac{3}{u^{-\frac{4}{3}}}\right)$

$$\left(-\frac{3}{u^{-\frac{4}{3}}}\right)\left(-\frac{u^{-\frac{4}{3}}}{3}\frac{du}{dx} + u^{-\frac{1}{3}}\right) = xu^{-\frac{4}{3}}\left(-\frac{3}{u^{-\frac{4}{3}}}\right)$$

simplificando

$$\frac{du}{dx} - 3u = -3x \ldots (7)$$

la cual es una ecuación diferencial lineal de primer orden, en donde

$$P(x) = -3$$
$$Q(x) = -3x$$

entonces

$$\mu = e^{\int -3dx} = e^{-3x}$$

luego

$$\mu = e^{-3x} \ldots (8)$$

es el factor integrante de (7). Multiplicando (7) por (8)

$$e^{-3x}\frac{du}{dx} - 3u\left(e^{-3x}\right) = -3xe^{-3x}$$
$$\frac{d}{dx}\left[e^{-3x}u\right] = -3xe^{-3x}$$
$$\int d\left[e^{-3x}u\right] = \int -3xe^{-3x}dx \ldots (9)$$

donde la integral del lado derecho de (9) es por partes. Haciendo

$$w = x \qquad dv = \int e^{-3x}$$
$$dw = dx \qquad v = \frac{e^{-3x}}{-3}$$

entonces

$$e^{-3x}u = -3\left[-\frac{xe^{-3x}}{3} + \frac{1}{3}\int e^{-3x}dx\right]$$
$$e^{-3x}u = xe^{-3x} + \frac{e^{-3x}}{3} + C$$

esto es

$$u(x) = x + \frac{1}{3} + e^{3x}C \ldots (10)$$

sustituyendo (3) en (10) tenemos por tanto que

$$y^{-3} = x + \frac{1}{3} + e^{3x}C$$

es solución general de (1).

4) Resuelva

$$x^2 \frac{dy}{dx} + y = xy^2 \ldots (1)$$

Solución:

Llevando (1) a la forma de la ecuación de Bernoulli, esto es

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x^2} = \frac{y^2}{x} \ldots (2)$$

usando en (2) el cambio de variable $u(x) = y^{1-n}$ con $n = 2$ se tiene

$$u(x) = y^{-1} \ldots (3)$$

o bien

$$y = u^{-1} \ldots (4)$$

derivando (4) respecto de x

$$\frac{dy}{dx} = -u^{-2} \frac{du}{dx} \ldots (5)$$

sustituyendo (4) y (5) en (2)

$$-u^{-2}\frac{du}{dx}-\frac{u^{-1}}{x}=-\frac{(u^{-1})^2}{x^2}\ldots(6)$$

multiplicando a (6) por $\left(-\dfrac{1}{u^{-2}}\right)$

$$\left(-\frac{1}{u^{-2}}\right)\left(-u^{-2}\frac{du}{dx}-\frac{u^{-1}}{x}\right)=-\frac{1}{u^{-2}}\left(-\frac{u^{-2}}{x^2}\right)$$

simplificando

$$\frac{du}{dx}+\frac{1}{x}u=\frac{1}{x^2}\ldots(7)$$

la cual es una ecuación diferencial lineal de primer orden, en donde

$$P(x)=\frac{1}{x}$$
$$Q(x)=\frac{1}{x^2}$$

entonces

$$\mu=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$$

luego

$$\mu=x\ldots(8)$$

es el factor integrante de (7). Multiplicando (7) por (8)

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{1}{x}$$
$$\frac{d}{dx}\left[xu\right]=\frac{1}{x}$$
$$\int d\left[xu\right]=\int\frac{dx}{x}$$
$$xu=\ln|x|+C$$

esto es

$$u(x)=\frac{\ln|x|}{x}+\frac{C}{x}\ldots(9)$$

sustituyendo (3) en (9) tenemos por tanto que

$$y^{-1} = \frac{\ln|x|}{x} + \frac{C}{x}$$

es solución general de (1).

5) Resuelva

$$x\frac{dy}{dx} - (1+x)y = xy^2 \ldots(1)$$

Solución:

Llevando (1) a la forma de la ecuación de Bernoulli, esto es

$$\frac{dy}{dx} - \frac{(1+x)y}{x} = y^2 \ldots(2)$$

usando en (2) el cambio de variable $u(x) = y^{1-n}$ con $n = 2$ se tiene

$$u(x) = y^{-1} \ldots(3)$$

o bien

$$y = u^{-1} \ldots(4)$$

derivando (4) respecto de x

$$\frac{dy}{dx} = -u^{-2}\frac{du}{dx} \ldots(5)$$

sustituyendo (4) y (5) en (2)

$$-u^{-2}\frac{du}{dx} - \frac{(1+x)(u^{-1})}{x} = u^{-2} \ldots(6)$$

multiplicando a (6) por $\left(-\frac{1}{u^{-2}}\right)$

$$\left(-\frac{1}{u^{-2}}\right)\left(-u^{-2}\frac{du}{dx}-\frac{(1+x)(u^{-1})}{x}\right)=u^{-2}\left(-\frac{1}{u^{-2}}\right)$$

simplificando

$$\frac{du}{dx}+\frac{(1+x)}{x}u=-1\ldots(7)$$

la cual es una ecuación diferencial lineal de primer orden, en donde

$$P(x)=\frac{1+x}{x}$$
$$Q(x)=-1$$

entonces

$$\mu=e^{\int P(x)dx}=e^{\int\frac{1+x}{x}dx}=e^{\int\frac{dx}{x}+\int dx}=e^{\ln|x|+x}=e^{\ln|x|}e^{x}$$

luego

$$\mu=xe^{x}\ldots(8)$$

es el factor integrante de (7). Multiplicando (7) por (8)

$$xe^{x}\frac{du}{dx}+e^{x}(1+x)u=-xe^{x}$$
$$\frac{d}{dx}\left[xe^{x}u\right]=-xe^{x}$$
$$\int d\left[xe^{x}u\right]=\int-xe^{x}dx\ldots(9)$$

donde la integral del lado derecho de (9) es por partes. Haciendo

$$u=x \qquad dv=e^{x}dx$$
$$du=dx \qquad v=e^{x}$$

entonces

$$xe^{x}u=-xe^{x}+\int e^{x}dx$$
$$xe^{x}u=-xe^{x}+e^{x}+C$$

esto es

$$u(x) = -1 + \frac{1}{x} + \frac{C}{xe^x} \ldots (10)$$

sustituyendo (3) en (10) tenemos por tanto que

$$y^{-1} = -1 + \frac{1}{x} + \frac{C}{xe^x}$$

es solución general de (1).

UNIDAD III

3.1 ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

3.1.1 ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE ORDEN N

Definición :

Una ecuación diferencial de n-ésimo orden se dice que es *lineal*, si es de *primer grado* respecto a la función desconocida y y a sus derivadas $y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y'$; esto es, una ecuación diferencial es lineal si tiene la forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = F(x) \ldots (1)$$

donde $a_n(x), \ldots, a_0(x)$ son funciones dadas de x (con $a_n(x) \neq 0$ siempre) y $F(x)$ función de x.

Si todos los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ en (1) son constantes, esto es no dependen de x, la ecuación se llama; *ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes.*

Sin embargo, si no todos los coeficientes son constantes, la ecuación se llama; *ecuación diferencial lineal con coeficientes variables.*

Por otro lado, si en (1) $F(x) \neq 0$, la ecuación se llama; *ecuación diferencial lineal no homogénea*, o ecuación con segundo miembro. Pero si en (1) $F(x) = 0$, la ecuación toma la forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

y se llama *ecuación diferencial lineal homogénea*, ó ecuación sin segundo miembro; esta ecuación también se identifica como la ecuación complementaria de (1).

3.1.2 OPERADOR DIFERENCIAL LINEAL

Es conveniente introducir el siguiente símbolo para indicar las operaciones que involucren derivadas.

$$D \equiv \frac{d}{dx}$$

Entonces,

$$Dy = \frac{dy}{dx} \quad ; \quad D^2 y = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad ; \ldots ; \quad D^n y = \frac{d^n y}{dx^n}$$

Este símbolo recibe el nombre de *operador diferencial lineal* y es lineal porque cumple las siguientes propiedades:

i) $D^n[u+v]=D^n u+D^n v$

ii) $D^n[au]=aD^n u,$ donde a =*constante* y *u,v* son funciones diferenciables.

Usando esta notación, la ecuación de la *definición 3.1.1* se puede escribir como

$$a_n D^n y+a_{n-1}D^{n-1}y+\ldots+a_1 Dy+a_0 y=F(x)\ldots(1)$$

por i) la ecuación (1) toma la forma

$$[a_n D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\ldots+a_1 D+a_0]y=F(x)\ldots(2)$$

haciendo

$$\phi(D)=\left[a_n D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\ldots+a_1 D+a_0\right]$$

entonces la ecuación (2) queda como

$$\phi(D)y=F(x)\ldots(3)$$

que es una forma compacta de escribir la ecuación diferencial de la definición 3.1.1.

El símbolo ϕ(D) definido en (3) recibe el nombre de *operador diferencial lineal de orden n* y es lineal porque

$$\begin{aligned}&\phi(D)\{\alpha f(x)+\beta g(x)\}\\&=\phi(D)[\alpha f(x)]+\phi(D)[\beta g(x)]\\&=\alpha\phi(D)[f(x)]+\beta\phi(D)[g(x)]_{\#}\end{aligned}$$

3.1.3 SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE ORDEN SUPERIOR

Teorema: La solución general de la ecuación diferencial $\phi(D)y=f(x)$ [*Ecuación de la definición 3.1.1*] se puede obtener al encontrar una solución particular y_P de esta ecuación y añadirle (o sumarle) la solución complementaria y_c la cual, es solución general del complemento de (1), esto es, de $\phi(D)y=0$.

Demostración:

Sea y_p solución particular de

$$\phi(D)y = F(x)$$

entonces

$$\phi(D)y_p = F(x)\ldots(1)$$

Por otro lado, sea y_c solución general de complemento de $\phi(D)y = F(x)$, es decir de

$$\phi(D)y = 0$$

entonces

$$\phi(D)y_c = 0\ldots(2)$$

sumando (1) y (2) miembro a miembro tenemos:

$$\phi(D)y_c + \phi(D)y_p = 0 + F(x)$$
$$\phi(D)\lfloor y_c + y_p \rfloor = F(x)$$
$$\phi(D)y = F(x)$$

$\therefore\ y = y_c + y_p$ es solución general de la ecuación diferencial $\phi(D)y = F(x)$

3.1.4 EJEMPLOS

1. Encontrar la solución general de

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 3x\ldots(1)$$

sabiendo que $y_c = C_1e^{3x} + C_2e^{2x}$ es solución general de la parte homogénea de (1) y $y_p = \frac{1}{2}x + \frac{5}{12}$ la solución particular de (1).

Solución:

Probemos primero que $y_c = C_1e^{3x} + C_2e^{2x}$ es solución general de

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0\ldots(2)$$

derivando y_c

$$y_c{}' = 3C_1e^{3x} + 2C_2e^{2x}$$
$$y_c{}'' = 9C_1e^{3x} + 4C_2e^{2x}$$

sustituyendo y_c y sus derivadas en (2) tenemos

$$9C_1e^{3x} + 4C_2e^{2x} - 5(3C_1e^{3x} + 2C_2e^{2x}) + 6(C_1e^{3x} + C_2e^{2x}) = 0$$
$$9C_1e^{3x} + 4C_2e^{2x} - 15C_1e^{3x} - 10C_2e^{2x} + 6C_1e^{3x} + 6C_2e^{2x} = 0$$
$$0 = 0$$

$$\therefore\ y_c = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} \qquad \text{es solución general de} \quad (2)$$

Probemos ahora que y_p es solución particular de (1). Derivando y_p

$$y_p{}' = \frac{1}{2}$$
$$y_p{}'' = 0$$

sustituyendo y_p y sus derivadas en (1) tenemos

$$0 - 5\left(\frac{1}{2}\right) + 6\left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{12}\right) = 3x$$

$$-\frac{5}{2} + 3x + \frac{5}{2} = 3x$$
$$3x = 3x$$

$\therefore\ y_p = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}$ es solución particular de (1).

De acuerdo al teorema $y = y_c + y_p$ es solución general de (1), esto es

$$y = y_c + y_p = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{5}{12}$$

derivando y

$$y' = 3C_1e^{3x} + 2C_2e^{2x} + \frac{1}{2}$$
$$y'' = 9C_1e^{3x} + 4C_2e^{2x}$$

sustituyendo y y sus derivadas en (1) tenemos

$$9C_1e^{3x}+4C_2e^{2x}-5\left(3C_1e^{3x}+2C_2e^{2x}+\frac{1}{2}\right)+6\left(C_1e^{3x}+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}x+\frac{5}{12}\right)=3x$$
$$9C_1e^{3x}+4C_2e^{2x}-15C_1e^{3x}-10C_2e^{2x}-\frac{5}{2}+6C_1e^{3x}+6C_2e^{2x}+3x+\frac{5}{2}=3x$$
$$3x=3x$$

$\therefore y=y_c+y_p$ es solución general de (1).

2. Encontrar la solución general de

$$x^2y''-2xy'+2y=\log x\ldots(1)$$

sabiendo que $y_c=C_1x^2+C_2x$ es solución general de la parte homogénea de (1) y $y_p=\frac{1}{2}\log x+\frac{3}{4}$ la solución particular de (1).

Solución:

Probemos primero que $y_c=C_1x^2+C_2x$ es solución general de

$$xy''-2xy'+2y=0\ldots(2)$$

derivando y_c

$$y_c'=2C_1x+C_2$$
$$y''_c=2C_1$$

sustituyendo y_c y sus derivadas en (2) tenemos

$$x^2(2C_1)-2x(2C_1x+C_2)+2(C_1x^2+C_2x)=0$$
$$2C_1x^2-4C_1x^2-2C_2x+2C_1x^2+2C_2x=0$$
$$0=0$$

$\therefore y_c=C_1x^2+C_2x$ es solución general de (2).

Probemos ahora que y_p es solución particular de (1). Derivando y_p

$$y_p'=\frac{1}{2x}$$

$$y_p{}'' = -\frac{1}{2x^2}$$

sustituyendo y_p y sus derivadas en (1) tenemos

$$x^2\left(-\frac{1}{2x^2}\right) - 2x\left(\frac{1}{2x}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\log\ x + \frac{3}{4}\right) = \log\ x$$
$$-\frac{1}{2} - 1 + \log\ x + \frac{3}{2} = \log\ x$$
$$\log\ x = \log\ x$$

$\therefore\ y_p = \dfrac{1}{2}\log x + \dfrac{3}{4}$ es solución particular de (1).

De acuerdo al teorema $y = y_c + y_p$ es solución general de (1), esto es

$$y = C_1x^2 + C_2x + \frac{1}{2}\log x + \frac{3}{4}$$

derivando y

$$y' = 2C_1x + C_2 + \frac{1}{2x}$$
$$y'' = 2C_1 - \frac{1}{2x^2}$$

sustituyendo y y sus derivadas en (1) tenemos

$$x^2\left(2C_1 - \frac{1}{2x^2}\right) - 2x\left(2C_1x + C_2 + \frac{1}{2x}\right) + 2\left(C_1x^2 + C_2x + \frac{1}{2}\log x + \frac{3}{4}\right) = \log x$$
$$2C_1x^2 - \frac{1}{2} - 4C_1x^2 - 2C_2x - 1 + 2C_1x^2 + 2C_2x + \log x + \frac{3}{2} = \log x$$
$$\log x = \log x$$

$\therefore\ y = y_c + y_p$ es solución general de (1)

Para la construcción de la solución general y_c, de la ecuación complementaria o ecuación homogénea es necesario comprender antes los siguientes conceptos y definiciones.

3.2 ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGÉNEAS DE ORDEN n CON COEFICIENTES CONSTANTES.

Definición:

Si todos los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ de la ecuación diferencial

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

son constantes, esto es; no dependen de x, la ecuación se llama *ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes*

Nota: Usando el operador diferencial D, la ecuación anterior se puede expresar en la forma compacta $\phi(D)y = 0$.

3.2.1 PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Teorema:

Sean $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_k(x)$, k soluciones de la ecuación diferencial homogénea de orden n $\phi(D)y = 0$, (por simplicidad denotaremos estas k soluciones por $y_1, y_2, \ldots, y_k$), donde *x* está definida en un intervalo *I*, entonces la combinación lineal

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_k y_k(x)$$

es también una solución cuando *x* está en *I*.

Las constantes C_i ; $i = 1, 2, \ldots, k$ son constantes arbitrarias.

Demostración:

Puesto que $y_1, y_2, \ldots, y_k$ son soluciones de

$$\phi(D)y = 0$$

entonces

$$\phi(D)y_1 = 0;\ \ \phi(D)y_2 = 0; \ldots;\ \phi(D)y_k = 0$$

si multiplicamos estas ecuaciones por $C_1, C_2, \ldots, C_k$ respectivamente tenemos

$$C_1\phi(D)y_1 = 0\ ;\ C_2\phi(D)y_2 = 0\ ; \ldots;\ C_k\phi(D)y_k = 0$$

como $\phi(D)$ es operador lineal entonces

$$\phi(D)(C_1 y_1) = 0\ ;\ \phi(D)(C_2 y_2) = 0\ ; \ldots;\ \phi(D)(C_k y_k) = 0$$

nuevamente por la linealidad del operador $\phi(D)$

$$\phi(D)\left[C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots C_ky_k\right] = 0$$

lo cual muestra que

$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ky_k$ es también solución de $\phi(D)y = 0_{\#}$

NOTAS:

a) Es claro que la demostración que si $y_i;\ i = 1,2,\ldots,k$ es solución de $\phi(D)y = 0$ un múltiplo escalar de ella C_iy_i también lo es.

b) La ecuación $\phi(D)y = 0$ siempre tiene la solución trivial $y = 0$.

3.2.2 EJEMPLOS

1. Probar que si $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^2 \ln x$ son soluciones de

$$x^3y''' - 2xy' + 4y = 0 \ldots (1)$$

$\forall x \in (0,\infty)$, entonces la combinación lineal

$$y = C_1x^2 + C_2x^2 \ln x \ldots (2)$$

también lo es.

Solución:

Derivando y_1

$$y_1' = 2x$$
$$y_1'' = 2$$
$$y_1''' = 0$$

sustituyendo y_1 y sus derivadas en (1)

$$x^3(0) - 2x(2x) + 4(x^2) = 0$$
$$-4x^2 + 4x^2 = 0$$
$$0 = 0$$

$\therefore y_1 = x^2$ es solución de (1).

Derivando ahora y_2

$$y_2' = 2x\ln x + x$$
$$y_2'' = 2\ln x + 2 + 1$$
$$y_2''' = \frac{2}{x}$$

sustituyendo y_2 y sus derivadas en (1)

$$x^3\left(\frac{2}{x}\right) - 2x(2x\ln x + x) + 4(x^2 \ln x) = 0$$
$$2x^2 - 4x^2 \ln x - 2x^2 + 4x^2 \ln x = 0$$
$$0 = 0$$

$\therefore y_2 = x^2 \ln x$ es solución de (1)

por tanto, de acuerdo con el principio de superposición

$$y = C_1x^2 + C_2x^2 \ln x$$

también es solución. Derivando (2)

$$y' = 2C_1x + 2C_2x\ln x + C_2x$$
$$y'' = 2C_1 + 2C_2 \ln x + 2C_2 + C_2$$
$$y''' = \frac{2C_2}{x}$$

sustituyendo y y sus derivadas en (1)

$$x^3\left(\frac{2C_2}{x}\right) - 2x\left[2C_1x + (2C_2 \ln x)x + C_2x\right] + 4(C_1x^2 + C_2x^2 \ln x) = 0$$
$$2C_2x^2 - 4x^2C_1 - 4C_2x^2 \ln x - 2x^2C_2 + 4C_1x^2 + 4C_2x^2 \ln x = 0$$
$$0 = 0$$

$\therefore y = C_1x^2 + C_2x^2 \ln x$ también es solución de (1), y es además su solución general.

2. Probar que si $y = e^{7x}$ es una solución de

$$y'' - 9y' - +14y = 0 \ldots (*)$$

entonces es un múltiplo escalar de esta $y = Ce^{7x}$ es también una solución.

Solución:

Derivando $y = e^{7x}$

$$y' = 7e^{7x}$$
$$y'' = 49e^{7x}$$

sustituyendo estos resultados en (1)

$$49e^{7x} - 9(7e^{7x}) + 14e^{7x} = 0$$
$$49e^{7x} - 63e^{7x} + 14e^{7x} = 0$$
$$0 = 0$$

$\therefore y = e^{7x}$ es solución de (1).

Derivando ahora $y = Ce^{7x}$

$$y' = 7Ce^{7x}$$
$$y'' = 49Ce^{7x}$$

sustituyendo estos resultados en (1)

$$49Ce^{7x} - 9(7Ce^{7x}) + 14Ce^{7x} = 0$$
$$49Ce^{7x} - 63Ce^{7x} + 14Ce^{7x} = 0$$
$$0 = 0$$

$\therefore y = Ce^{7x}$ también es solución para todo *C*.

3.2.3 DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Definición:

Se dice que un conjunto de funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ es linealmente dependiente [esto es *l.d*] en un intervalo *I*, si existen constantes arbitrarias $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *no todas cero* tales que

$$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \ldots + C_n f_n(x) = 0 \ldots (1)$$

para todo $x \in I$.

Si el conjunto de funciones no es linealmente dependiente en el intervalo, se dice entonces, que es linealmente independiente [esto es *l.i.*]. En otras palabras, un conjunto de funciones es *l.i.* en un intervalo si las únicas constantes que satisfacen (1) son $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0 \quad \forall x \in I$.

3.2.4 EJEMPLOS

1. sean $f_1(x)$ y $f_2(x)$ funciones *l.d.* $\forall x \in I$, entonces por la definición 3.2.3, existen constantes arbitrarias C_1 y C_2 no ambas cero tales que

$$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) = 0 .$$

Supongamos que $C_1 \neq 0$, entonces

$$C_1 f_1(x) = -C_2 f_2(x)$$

de lo que resulta

$$f_1(x) = -\frac{C_2}{C_1} f_2(x) \qquad \text{ó} \qquad f_1(x) = k f_2(x)$$

siendo $k = -\dfrac{C_2}{C_1} = cte.$

De lo anterior podemos concluir que si dos funciones dadas son *l.d.* entonces podemos siempre escribir a una de ellas como un múltiplo escalar de la otra.

En general si el conjunto de funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ es *l.d.* $\forall x \in I$, entonces existen constantes arbitrarias $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *no todas cero* tales que

$$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \ldots + C_n f_n(x) = 0 .$$

Supongamos que $C_n \neq 0$, entonces

$$f_n(x) = -\frac{C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \ldots + C_{n-1} f_{n-1}(x)}{C_n}$$

es decir, si el conjunto de funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ es *l.d.* $\forall x \in I$, siempre será posible escribir a una de ellas como combinación lineal de las restantes. En otras palabras, si el conjunto de funciones es *l.d*, será posible siempre despejar al menos una de ellas de la ecuación (1) de la definición 3.2.3.

De lo anterior, podemos entonces concluir que dos funciones son *l.i.* cuando ninguna de ellas puede ser escrita como un múltiplo escalar de la otra, y en general *n* funciones son *l.i* sin ninguna de ellas se puede expresar como combinación lineal de las restantes.

2. Probar que las funciones

$$f_1(x) = Sen2x \quad \text{y} \quad f_2(x) = SenxCosx$$

son *l.d.* $\forall x \in (-\infty, \infty)$.

Solución:

Usando la identidad para la suma de ángulos de la función seno

$$\begin{aligned} f_1(x) = Sen2x = Sen(x+x) &= SenxCosx + SenxCosx \\ &= 2SenxCosx \end{aligned}$$

de lo que resulta

$$f_1(x) = 2 f_2(x)$$

es decir, la función $f_2(x)$ es un múltiplo escalar de la función $f_1(x)$. Por tanto concluimos que las funciones $f_1(x) = sen2x$ y $f_2(x) = SenxCosx$ son *l.d.* $\forall x \in (-\infty, \infty)$.

Para el caso de dos funciones la determinación de la dependencia o independencia lineal es relativamente sencilla, el problema surge cuando hacemos el análisis de un conjunto de más dos funciones en donde tenemos que recurrir al engorroso cálculo de las constantes de la ecuación (1) de la *definición3.2.3*

En las siguientes subsecciones desarrollaremos un criterio matemático muy sencillo para este fin, el cual excenta nuestro trabajo del cálculo de dichas constantes.

3.2.5 EL WRONSKIANO

Definición:

Supóngase que cada una de las funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ poseen $n-1$ derivadas al menos, entonces el determinante

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ f_1'' & f_2'' & \cdots & f_n'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

en donde las primas representan las derivadas, es el *wronskiano* de las funciones.

3.2.6 CRITERIOS PARA SOLUCIONES L.I.

Teorema:

Sean n soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de la ecuación diferencial homogénea de orden n, en el intervalo *I*, entonces el conjunto de soluciones es *l.i.* en *I*, si y solo si

$$w(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$$

$\forall x \in I$.

En caso contrario, esto es si

$$w(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$$

entonces se dice que el conjunto de soluciones es *l.d.*

3.2.7 CONJUNTO FUNDAMENTAL DE SOLUCIONES

Definición:

Todo conjunto $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de n soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n en un intervalo *I*, se llama *conjunto fundamental de soluciones.*

3.2.8 SOLUCIÓN GENERAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS DE ORDEN n.

Teorema:

Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea de orden n en un intervalo *I*. La solución general de la ecuación diferencial en el intervalo es

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

donde

$C_i;\ \ i = 1,2,\ldots,n$, son constantes arbitrarias.

Dado el teorema anterior cabe hacernos las siguientes preguntas:

¿Por qué el conjunto de soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ debe ser *l.i.* para poder construir la solución general de la ecuación diferencial homogénea de orden n?

¿Qué ocurre si dicho conjunto es *l.d.*?

Estos cuestionamientos los vamos a responder con la demostración del teorema.

Demostración:

Sea

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) \ldots (1)$$

solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \ldots + a_1 y^1 + a_0 y = 0 \ldots (2)$$

la cual esta sujeta a las siguientes condiciones iniciales

$$y(t) = k_0;\ y^{'}(t) = k_1;\ y^{''}(t) = k_2; \ldots;\ y^{(n-1)}(t) = k_{n-1}$$

derivando (1) $n-1$ veces y usando (3)

$$\left.\begin{array}{l} C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \ldots + C_n y_n(t) = k_0 \\ C_1 y^{'}_1(t) + C_2 y^{'}_2(t) + \ldots + C_n y^{'}_n(t) = k_1 \\ C_1 y^{''}_1(t) + C_2 y^{''}_2(t) + \ldots + C_n y^{''}_n(t) = k_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(t) + C_2 y_2^{(n-1)}(t) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(t) = k_{n-1} \end{array}\right\} \ldots (4)$$

Resolvamos el sistema de ecuaciones (4) para las constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ utilizando la regla de Cramer, la cual establece que

$$C_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}; \quad i = 1,2,\ldots,n$$

donde

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = w(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

es el *Wronskiano* del conjunto de soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$, y

$$\Delta_i = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & k_0 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & k_1 & \ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & k_{n-1} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \\ k-\acute{e}sima \\ columna \end{array}$$

es el determinante obtenido de reemplazar la *k-ésima* columna del *Wronskiano* por la columna

$$\begin{matrix} k_0 \\ k_1 \\ \vdots \\ k_{n-1} \end{matrix}$$

así las constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ del sistema de ecuaciones (4) quedarán determinadas por

$$C_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & k_0 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & k_1 & \ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & k_{n-1} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & k_0 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & k_1 & \ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & k_{n-1} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}{w(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$$

con $i = 1,2,\ldots,n$ si y solo si $w(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$. En otras palabras, para que las constantes

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ tengan *solución única* es requisito indispensable que el *wronskiano* $w(y_1, y_2, \ldots y_n)$ sea distinto de cero, es decir, que el conjunto de funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sea *l.i.* y por tanto forme un *conjunto fundamental de soluciones*.#

3.2.9 EJEMPLOS

1. Verifique si las funciones

$$y_1 = x\,; \quad y_2 = x^2\,; \; y_3 = 4x - 3x^2$$

forman un conjunto fundamental de soluciones.

Solución:

Resolviendo el *wronskiano* de las funciones y_1, y_2 y y_3

$$w(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 & 4x - 3x^2 \\ 1 & 2x & 4 - 6x \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= x[(2x)(-6) - (4 - 6x)(2)] - x^2[(1)(-6) - (4 - 6x)(0)] +$$
$$+ (4x - 3x^2)[(1)(2) - (2x)(0)] = -8x + 6x^2 + 8x - 6x^2 = 0$$

como $w(y_1, y_2, y_3) = 0$, concluimos que y_1, y_2 y y_3 son *l.d.* y por tanto no forman un conjunto fundamental de soluciones.

2. Las funciones

$$y_1 = e^{3x} \;\text{ y }\; y_2 = e^{-3x}$$

son soluciones de la ecuación diferencial homogénea

$$y'' - 9y = 0 \ldots (1)$$

en el intervalo $(\infty, -\infty)$. Verifique si con estas soluciones se puede construir la solución general de la ecuación diferencial.

Solución:

Resolviendo el *wronskiano* de las funciones y_1 y y_2

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = (e^{3x})(-3e^{-3x}) - (3e^{3x})(e^{-3x}) = -3 - 3 = -6$$

como $w(y_1, y_2) \neq 0$, concluimos que y_1 y y_2 son *l.i.* y forman un conjunto fundamental de soluciones.

Por tanto, de acuerdo con el *teorema 3.2.7* $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$ es solución general de la ecuación diferencial dada.

Comprobación

Derivando $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$ tenemos

$$y' = 3C_1e^{3x} - 3C_2e^{-3x}$$
$$y'' = 9C_1e^{3x} + 9C_2e^{-3x}$$

reemplazando y y sus derivadas en (1) tenemos por tanto que

$$9C_1e^{3x} + 9C_2e^{-3x} - 9(C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}) = 0$$
$$9C_1e^{3x} + 9C_2e^{-3x} - 9C_1e^{3x} - 9C_2e^{-3x} = 0$$
$$0 = 0$$

3. Las funciones

$$y_1 = e^x,\ y_2 = e^{2x} \text{ y } y_3 = e^{3x}$$

son soluciones de la ecuación diferencial homogénea

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0 \ldots (1)$$

en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Verifique si con estas soluciones se puede construir la solución general de la ecuación diferencial.

Solución:

Resolviendo el *wronskiano* de las funciones y_1, y_2 y y_3

$$w(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^x\left[\left(2e^{2x}\right)\left(9e^{3x}\right) - \left(4e^{2x}\right)\left(3e^{3x}\right)\right] - e^{2x}\left[\left(e^x\right)\left(9e^{3x}\right) - \left(3e^{3x}\right)\left(e^x\right)\right] +$$

$$+ e^{3x}\left[\left(e^x\right)\left(4e^{2x}\right) - \left(2e^{2x}\right)\left(e^x\right)\right] = 6e^{6x} - 6e^{6x} + 2e^{6x} = 2e^{6x}$$

como $w(y_1, y_2, y_3) \neq 0$, concluimos que y_1, y_2 y y_3 son *l.i.* y forman un conjunto fundamental de soluciones.

Por tanto, de acuerdo con el *teorema 3.2.7* $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$ es solución general de la ecuación diferencial dada.

Comprobación

Derivando $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$ tenemos

$$\begin{aligned} y' &= C_1e^x + 2C_2e^{2x} + 3C_3e^{3x} \\ y'' &= C_1e^x + 4C_2e^{2x} + 9C_3e^{3x} \\ y''' &= C_1e^x + 8C_2e^{2x} + 27C_3e^{3x} \end{aligned}$$

sustituyendo y y sus derivadas en (1) tenemos por tanto que

$$\begin{gathered} C_1e^x + 8C_2e^{2x} + 27C_3e^{3x} - 6(C_1e^x + 4C_2e^{2x} + 9C_3e^{3x}) + \\ + 11(C_1e^x + 2C_2e^{2x} + 3C_3e^{3x}) - 6(C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}) = 0 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} C_1e^x + 8C_2e^{2x} + 27C_3e^{3x} - 6C_1e^x - 24C_2e^{2x} - 54C_3e^{3x} + \\ + 11C_1e^x + 22C_2e^{2x} + 33C_3e^{3x} - 6C_1e^x - 6C_2e^{2x} - 6C_3e^{3x} = 0 \\ 0 = 0 \end{gathered}$$

Hasta el momento hemos tan solo analizado las propiedades que debe cumplir el conjunto de soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ para formar parte de la solución general y_c de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n o ecuación complementaria de la ecuación no homogénea.

Pero, ¿Cómo determinamos a dicho conjunto de soluciones?

3.2.10 MÉTODO DE LA SOLUCIÓN PARA ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGÉNEAS DE ORDEN n CON COEFICIENTES CONSTANTES.

A continuación se presenta un método sencillo para la determinación la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n con coeficientes constantes.

Si los coeficientes de la ecuación diferencial *lineal* homogénea de orden n son *constantes*, la solución general se halla del siguiente modo:

i) Por simplicidad hacer $a_n = 1$

ii) Formemos una ecuación característica (o polinomio característico) de la ecuación diferencial

$$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \ldots + a_1 k + a_0 = 0$$

iii) Encontremos las raíces de la ecuación característica: $k_1, k_2, \ldots, k_n$

iv) Según el carácter de las raíces, escribamos las soluciones y_i; $i = 1,2,\ldots,n$ partiendo de lo siguiente:

1) A toda raíz real simple *k* corresponde una solución de la forma: e^{kx}

2) A toda raíz real *k* de multiplicidad *r*, corresponden *r* soluciones de la forma:

$$e^{kx}, xe^{kx}, x^2 e^{kx}, \ldots, x^{r-1} e^{kx}$$

3) A todo par de raíces complejas conjugadas de la forma $k = \alpha \pm i\beta$, corresponden dos soluciones de la forma:

$$e^{\alpha x} Cos\beta x, \quad e^{\alpha x} Sen\beta x$$

4) A todo par de raíces complejas conjugadas de multiplicidad μ ; $k = \alpha \pm i\beta$ corresponden 2μ soluciones de la forma:

$$e^{\alpha x} Cos\beta x, \quad xe^{\alpha x} Cosx, \quad x^2 e^{\alpha x} Cos\beta x, \ldots, \; x^{\mu-1} e^{\alpha x} Cos\beta x$$
$$e^{\alpha x} Sen\beta x, \quad xe^{\alpha x} Senx, \quad x^2 e^{\alpha x} Sen\beta x, \ldots, \; x^{\mu-1} e^{\alpha x} Sen\beta x$$

v) Al encontrar el conjunto de n soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *l.i.* formamos la solución general

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

donde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son las constantes arbitrarias.

NOTA 1: El número de soluciones y_i es igual al grado de la ecuación característica es decir, al orden de la ecuación diferencial.

NOTA 2: Las soluciones definidas en iv) son *l.i.*

3.2.11 EJEMPLOS

1. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \ldots (1)$$

Solución:

Siguiendo los pasos descritos la *sección 3.2.9*

i) En (1), $a_2 = 1$

ii) La ecuación característica asociada a (1) es: $k^2 - 3k + 2 = 0$

iii) Determinación de las raíces

$$(k-2) \quad (k+1) = 0$$

por tanto

$$k_1 = 2 \text{ y } k_2 = 1$$

iv) Puesto que las raíces obtenidas son reales simples, entonces

$$y_1 = e^{2x} \quad , \; y_2 = e^x$$

aunque no es necesario, a manera de ejercicio, verifiquemos con ayuda del *wronskiano* la independencia lineal de las funciones y_1 y y_2

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^x \\ 2e^{2x} & e^x \end{vmatrix} = \left(e^{2x}\right)\left(e^x\right) - \left(2e^{2x}\right)\left(e^x\right) = -e^{3x}$$

como $w(y_1 . y_2) \neq 0$, concluimos que y_1 y y_2 son *l.i.* y forman un conjunto fundamental de soluciones

v) Así, la solución general de la ecuación diferencial dada es por tanto

$$y_c = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$$

Comprobación

Derivando y_c

$$y'_c = 2C_1 e^{2x} + C_2 e^x$$
$$y''_c = 4C_1 e^{2x} + C_2 e^x$$

sustituyendo y_c y sus derivadas en (1) tenemos por tanto

$$4C_1e^{2x}+C_2e^{x}-3\left(2C_1e^{2x}+C_2e^{x}\right)+2\left(C_1e^{2x}+C_2e^{x}\right)=0$$
$$4C_1e^{2x}+C_2e^{x}-6C_1e^{2x}-3C_2e^{x}+2C_1e^{2x}+2C_2e^{x}=0$$
$$0=0$$

2. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$2y''' - 5y'' - y' + 6y = 0 \ldots (1)$$

Solución:

Siguiendo los pasos descritos la *sección 3.2.9*

i) En (1), $a_3=2$, observamos que $a_3\neq 1$, lo cual, no dificulta el problema.

ii) La ecuación característica asociada a (1) es: $2k^3-5k^2-k+6=0$

iii) Determinación de las raíces

Utilizando división sintética, tenemos que los divisores del término independiente son: $\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3, \quad \pm 6$

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -5 & -1 & 6 & 1 \\ & 2 & -3 & -4 & \\ \hline 2 & -3 & -4 & 2 & \end{array}$$

$\therefore$ 1 No es raíz

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -5 & -1 & 6 & -1 \\ & -2 & 7 & -6 & \\ \hline 2 & -7 & 6 & 0 & \end{array}$$

$\therefore k_1=-1$ es raíz. Resolviendo la ecuación cuadrática reducida

$$2k^2-7k+6=0$$

$$k_{2,3}=\frac{7\pm\sqrt{49-4(2)(6)}}{4}=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{4}=\frac{7\pm 1}{4}$$

por tanto

$$k_1=-1 \quad k_2=2 \quad k_3=3/2$$

iv) Puesto que las raíces obtenidas son reales simples, entonces

$$y_1=e^{-x} \qquad y_2=e^{2x} \qquad y_3=e^{\frac{3}{2}x}$$

v) Así, la solución general de la ecuación diferencial dada es por tanto

$$y_c = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3/2 x}$$

3. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - 6y' + 9y = 0 \ldots (1)$$

Solución:

Siguiendo los pasos descritos la *sección 3.2.9*

i) En (1), $a_2 = 1$

ii) La ecuación característica asociada a (1) es: $k^2 - 6k + 9 = 0$

iii) Determinación de las raíces

$$(k-3) \quad (k-3) = 0$$

por tanto

$$k_1 = 3 \text{ y } k_2 = 3$$

iv) Puesto que las raíces obtenidas son reales con multiplicidad dos, entonces

$$y_1 = e^{3x} \qquad y_2 = xe^{3x}$$

v) Así, la solución general de la ecuación diferencial dada es por tanto

$$y_c = C_1 e^{3x} + C_2 xe^{3x}$$

4. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$y^{(vi)} - 6y^{(v)} + 12y^{(iv)} - 6y''' - 9y'' + 12y' - 4y = 0 \ldots (1)$$

Solución:

Siguiendo los pasos descritos la *sección 3.2.9*

i) En (1), $a_6 = 1$

ii) La ecuación característica asociada a (1) es:

$$k^6 - 6k^5 + 12k^4 - 6k^3 - 9k^2 + 12k - 4 = 0$$

iii) Determinación de las raíces

Utilizando división sintética, tenemos que los divisores del término independiente son: $\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 4$

$$\begin{array}{ccccccc|c} 1 & -6 & 12 & -6 & -9 & 12 & -4 & 1 \\ & 1 & -5 & 7 & 1 & -8 & 4 & \\ \hline 1 & -5 & 7 & 1 & -8 & 4 & 0 & \end{array}$$

$$k_1 = 1$$

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & -5 & 7 & 1 & -8 & 4 & 1 \\ & 1 & -4 & 3 & 4 & -4 & \\ \hline 1 & -4 & 3 & 4 & -4 & 0 & \end{array}$$

$$k_2 = 1$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 3 & 4 & -4 & 1 \\ & 1 & -3 & 0 & 4 & \\ \hline 1 & -3 & 0 & 4 & 0 & \end{array}$$

$$K_3 = 1$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & 4 & -1 \\ & -1 & 4 & -4 & \\ \hline 1 & -4 & 4 & 0 & \end{array}$$

$$k_4 = -1$$

Resolviendo la ecuación cuadrática reducida

$$k^2 - 4k + 4 = 0$$
$$(k-2) \quad (k-2) = 0$$

entonces

$$k_5 = 2 \qquad k_6 = 2$$

iv) Puesto que las raíces obtenidas son reales simples y con multiplicidad, entonces

$$y_1 = e^x \quad y_2 = xe^x \quad y_3 = x^2e^x \quad y_4 = e^{-x} \quad y_5 = e^{2x} \quad y_6 = xe^{2x}$$

v) Así, la solución general de la ecuación diferencial dada es por tanto

$$y_c = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x + C_4e^{-x} + C_5e^{2x} + C_6xe^{2x}$$

5. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' + y = 0 \ldots (1)$$

Solución:

Siguiendo los pasos descritos la *sección 3.2.9*

i) En (1), $a_2 = 1$

ii) La ecuación característica asociada a (1) es: $k^2 + 1 = 0$

iii) Determinación de las raíces

De la ecuación característica se sigue inmediatamente que

$$k^2 = -1$$

por tanto

$$k_{1,2} = \pm i$$

iv) Puesto que las raíces obtenidas son de la forma $k = \alpha \pm i\beta$, donde $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, entonces

$$y_1 = e^{0x}Cos(1)x$$
$$y_2 = e^{0x}Sen(1)x$$

por tanto

$$y_1 = Cosx \qquad y_2 = Senx$$

v) Así, la solución general de la ecuación diferencial dada es por tanto

$$y_c = C_1Cosx + C_2Senx$$

6. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0 \ldots (1)$$

Solución:

Siguiendo los pasos descritos la *sección 3.2.9*

i) En (1), $a_3 = 1$

ii) La ecuación característica asociada a (1) es: $k^3 - 3k^2 + 9k + 13 = 0$

iii) Determinación de las raíces

Utilizando división sintética, tenemos que los divisores del término independiente son: $\pm 1, \quad \pm 13$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 9 & 13 & -1 \\ & -1 & 4 & -13 & \\ \hline 1 & -4 & 13 & 0 & \end{array} \qquad k_1 = -1$$

Resolviendo la ecuación cuadrática reducida

$$k^2 - 4k + 13 = 0$$

$$k_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(13)}}{2}$$

por tanto

$$k_{2,3} = 2 \pm 3i$$

iv) Puesto que las raíces obtenidas son reales simples y complejas conjugadas, entonces

$$y_1 = e^{-x} \qquad y_2 = e^{2x} Cos 3x \qquad y_3 = e^{2x} Sen 3x$$

v) Así, la solución general de la ecuación diferencial dada es por tanto

$$y_c = C_1 e^{-x} + e^{2x}(C_2 Cos 3x + C_3 Sen 3x)$$

7. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$y^{(iv)} + 8y'' + 16y = 0 \ldots (1)$$

Solución:

Siguiendo los pasos descritos la *sección 3.2.9*

i) En (1), $a_4 = 1$

ii) La ecuación característica asociada a (1) es: $k^4 + 8k^2 + 16 = 0$

iii) Determinación de las raíces

$$k^4 + 8k^2 + 16 = k^4 + 4k^2 + 4k^2 + 16 =$$
$$= k^2\left(k^2 + 4\right) + 4\left(k^2 + 4\right) = \left(k^2 + 4\right)\left(k^2 + 4\right) = 0$$

entonces

$$\left(k^2 + 4\right)\left(k^2 + 4\right) = 0$$

y por tanto

$$k_{1,2} = \pm 2i \quad k_{3,4} = \pm 2i$$

iv) Puesto que las raíces obtenidas son de la forma $k = \alpha \pm i\beta$, donde $\alpha = 0$ y $\beta = 2$, y de multiplicidad dos, entonces

$$y_1 = Cos2x \quad y_2 = Sen2x \quad y_3 = xCos2x \quad y_4 = xSen2x$$

v) Así, la solución general de la ecuación diferencial dada es por tanto

$$y_c = C_1 Cos2x + C_2 Senx + C_3 xCos2x + C_4 xSen2x$$

3.3 ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES NO HOMOGÉNEAS DE ORDEN n.

3.3.1 OTRO PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Teorema: Sean *K* soluciones $y_{p1}, y_{p2}, \ldots, y_{pn}$ de la ecuación diferencial lineal no homogénea de orden *n*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x) \ldots (1)$$

en el intervalo *I* que , a su vez, corresponden a *k* funciones distintas $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ esto es, supongamos que y_{p_i}, representa una solución particular de la ecuación diferencial correspondiente

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = fi(x)$$

en donde $i = 1, 2, \ldots, k$ entonces

$$y_p = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + \ldots + y_{pk}(x)$$

es solución particular de

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x)$$

3.3.2 EJEMPLOS

Demostrar que si $y_{p1} = -4x^2$ es solución particular de $y'' - 3y' + 4y = \underbrace{-16x^2 + 24x - 8}_{f_1(x)}$, $y_{p2} = e^{2x}$ es solución particular de $y'' - 3y' + 4y = \underbrace{2e^{2x}}_{f_2(x)}$ y si $y_{p3} = xe^{x}$ es solución particular de $y'' - 3y' + 4y = \underbrace{2xe^{2x} - e^{x}}_{f_3(x)}$, entonces, de acuerdo con el *teorema 3.3.1*

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} + y_{p3}$$

es solución particular de

$$y'' - 3y' + 4y = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x).$$

Solución:

Esto es, hay que mostrar que

$$y_p = -4x^2 + e^{2x} + xe^x$$

satisface a la ecuación diferencial

$$y'' - 3y' + 4y = -16x^2 + 24x - 8 + 2e^{2x} - e^x \ldots(1)$$

derivando y_p

$$y'_p = -8x + 2e^{2x} + e^x + xe^x$$
$$y''_p = -8 + 4e^{2x} + 2e^x + xe^x$$

sustituyendo y_p y sus derivadas en (1)

$$\begin{aligned}
&-8 + 4e^{2x} + 2e^x + xe^x - 3\left[-8x + 2e^{2x} + e^x + xe^x\right] + 4\left[-4x^2 + e^{2x} + xe^x\right] = \\
&= -8 + 4e^{2x} + 2e^x + xe^x + 24x - 6e^{2x} - 3e^x - 3xe^x - 16x^2 + 4e^{2x} + 4xe^x = \\
&= -16x^2 + 24x - 8 + 2e^{2x} + 2xe^x - e^x
\end{aligned}$$

de lo que resulta por tanto que

$$-16x^2 + 24x - 8 + 2e^{2x} + 2xe^x - e^x = -16x^2 + 24x - 8 + 2e^{2x} + 2xe^x - e^x$$

3.3.3 ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES NO HOMOGÉNEAS DE ORDEN n CON COEFICIENTES CONSTANTES.

Definición: Si todos los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ en la ecuación diferencial

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x) \ldots(1)$$

son constantes, esto es, no dependen de x. La ecuación se llama *ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficientes constantes.*

Como ya se vio en la *sección 3.1.3* la solución general de la ecuación (1) es

$$y = y_c + y_p$$

donde y_p es solución particular de la ecuación (1) de la *definición 3.3.3* mientras que y_c es solución general de su parte complementaria.
Al momento ya sabemos determinar y_c para la determinación de y_p existen varios métodos, sin embargo en el presente curso estudiaremos únicamente dos:

1. El método de coeficientes indeterminados
2. El método de variación de parámetros.

El segundo método, que es más general que el primero, será estudiado más adelante. El primero se describirá a continuación.

3.4 MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS

Este método consiste en *crear* una solución particular que sea *semejante* a la forma de $f(x)$, donde cada término de dicha solución particular, debe estar acompañado por un *coeficiente indeterminado* (una constante) que representamos por letras mayúsculas $A, B, C, \ldots,$ etc. El método es básicamente directo, pero desafortunadamente, esta *limitado* a ecuaciones diferenciales *lineales*, en donde:

- Los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son *constantes.*
- $f(x)$ es una *constante*, una función *polinomial* $P_n(x)$, una función *exponencial* $e^{\alpha x}$, funciones *Seno* y *Coseno* tales como $Cos\beta x$ ó $Sen\beta x$, y/o sumas y productos finitos de esas funciones.

Algunos ejemplos de la clase de funciones $f(x)$ adecuados para nuestra descripción son:

Si en la ecuación diferencial $f(x)$ es de la forma	Entonces la solución particular y_p deberá tener la estructura
$f(x)=10$	$y_p = A$
$f(x)=x^2-5x$	$y_p = Ax^2+Bx+C$
$f(x)=15x-6+8e^{-x}$	$y_{p1} = Ax+B;\quad y_{p2} = Ce^{-x}$ $\therefore\ y_p = y_{p1}+y_{p2} = Ax+B+Ce^{-x}$
$f(x)=sen3x-5x\cos 2x$	$y_{p1} = ACos3x+BSen3x;$ $y_{p2} = (Cx+D)Cos2x+(Ex+F)Sen2x;$ $\therefore\ y_p = y_{p1}+y_{p2} =$ $= ACos3x+BSen3x+(Cx+D)Cos2x+(Ex+F)Sen2x$
$f(x)=e^x\cos x+(3x^2-1)e^{-x}$	$y_{p1} = (ACosx+BSenx)e^{-x};\quad y_{p2} = (Cx^2+Dx+E)e^{-x}$ $\therefore\ y_p = y_{p1}+y_{p2} = (ACosx+BSenx+Cx^2+Dx+E)e^{-x}$

En la tabla observamos que, $f(x)$ es una combinación lineal de funciones del tipo: $k(cte.)$, $P_n(x)$, $P_n(x)e^{\alpha x}$, $P_n(x)Senx\beta x$, $P_n(x)e^{\alpha x}Cos\beta x$, en donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado

$n \geq 0$ y α, β son números reales. Desafortunadamente, el método de coeficientes indeterminados tiene sus limitaciones, pues *no es aplicable* si en la ecuación diferencial la función $f(x)$ no tiene alguna de las formas descritas en la presente sección, por ejemplo, para funciones de la forma

$$f(x) = \ln x\,, \quad f(x) = \frac{1}{x}\,, \quad f(x) = \tan x\,, \quad f(x) = sen^{-1}x$$

y en general para todo tipo de funciones inversas, logarítmicas y trigonométricas distintas al Seno y Coseno este método no es aplicable. La forma de elección de y_p puede resumirse en el siguiente cuadro sinóptico.

3.4.1 FORMA GENERAL DE LA SOLUCIÓN PARTICULAR y_p

FORMA DE $f(x)$	RAÍCES DE LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA	FORMA GENERAL DE y_p
Caso I; Un polinomio de grado $n \geq 0$ $P_n(x)$	a) Si el número cero no es raíz de la ecuación característica.	$\tilde{P}n(x)$
	b) Si el número cero es raíz de la ecuación característica z veces.	$x^z\tilde{P}_n(x)$
Caso II; Un polinomio de grado $n \geq 0$ por una función exponencial $P_n(x)e^{\alpha x}$ *(α real)*	a) Si el número α no es raíz de la ecuación característica.	$\tilde{P}_n(x)e^{\alpha x}$
	b) Si el número α es raíz de la ecuación característica z veces	$x^z\tilde{P}_n(x)e^{\alpha x}$
Caso III; Un polinomio de grado $n \geq 0$ por una función trigonométrica Seno o Coseno $P_n(x)Cos\beta x$ ó $P_n(x)Sen\beta x$	a) Si los números $\pm i\beta$ no son raíces de la ecuación característica.	$\tilde{P}_n(x)Cos\beta x + \tilde{Q}_n(x)Sen\beta x$
	b) Si los números $\pm i\beta$ son raíces de la ecuación característica z veces.	$x^z[\tilde{P}_n(x)Cos\beta x + \tilde{Q}_n(x)Sen\beta x]$
Caso IV; Generalización del *caso III* $P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)sen\beta x$	a) Si los números $\pm i\beta$ no son raíces de la ecuación característica.	$\tilde{P}_k(x)Cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)Sen\beta x$ *k*-max (n,m)
	b) Si los números $\pm i\beta$ son raíces de la ecuación característica z veces.	$x^z[\tilde{P}_k(x)Cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)Sen\beta x]$ *k*-max (n,m)
Caso V; Un polinomio de grado $n \geq 0$ por una función exponencial y por una función trigonométrica Seno o Coseno $e^{\alpha x}\,P_n(x)Cos\beta x$ ó $e^{\alpha x}\,P_n(x)Sen\beta x$	a) Si los números $\alpha \pm i\beta$ no son raíces de la ecuación característica	$e^{\alpha x}[\tilde{P}_n(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_n(x)sen\beta x]$
	b) Si los números $\alpha \pm i\beta$ son raíces de la ecuación característica z veces	$x^z e^{\alpha x}[\tilde{P}_n(x)Cos\beta x + \tilde{Q}_n(x)Sen\beta x]$
Caso VI; Generalización del *caso V* $e^{\alpha x}[P_n(x)Cos\beta x + Q_m(x)Sen\beta x]$	a) Si los números $\alpha \pm i\beta$ no son raíces de la ecuación característica	$e^{\alpha x}[\tilde{P}_k(x)Cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)Sen\beta x]$ *k*-max (n,m)
	b) Si los números $\alpha \pm i\beta$ son raíces de la ecuación característica z veces.	$x^z e^{\alpha x}[\tilde{P}_k(x)Cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)Sen\beta x]$ *k*-max (n,m)

Nota 1: El polinomio $\widetilde{P}_n(x)$ asignado a y_p, es polinomio de grado n≥ 0 de la forma general $A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0 x^0$, siendo $A_n, A_{n-1}, \ldots, A_1, A_0$ los coeficientes indeterminados que establece el método para la determinación de y_p, es fácil notar que si *n=0*, entonces, $P_0(x) = A_0 = cte.$ (análogamente para el polinomio $\widetilde{Q}_m(x)$ de grado m≥ 0)

Nota 2: *k-max(n.m)*, significa que dados los polinomios $\widetilde{P}_n(x)$ y $\widetilde{Q}_m(x)$, los polinomios $\widetilde{P}_k(x)$ y $\widetilde{Q}_k(x)$ asignados a la solución particular y_p deberán ser del grado correspondiente al mayor valor entre *n* y *m.*

Nota 3: Las asignaciones hechas en los incisos b) de la tabla anterior para la solución particular y_p, evitan la repetición de alguna solución de ecuación homogénea en los términos de y_p. Si lo anterior no es tomado en cuenta se incurrirá en una inconsistencia matemática y no será posible la determinación de la solución buscada. Lo anterior se ilustrará en uno de los siguientes ejemplos.

3.4.2 EJEMPLOS

1. Encontrar la solución general de

$$y'' - 9y = 54 \cdots (1)$$

Solución:

La ecuación homogénea asociada de (1) es:

$$y'' - 9y = 0 \cdots (2)$$

resolviendo (2)

i) $a_2 = 1$
ii) $k^2 - 9 = 0$
iii) $k_1 = 3$; $k_2 = -3$
iv) $y_1 = e^{3x}$; $y_2 = e^{-3x}$
v) $y_c = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$ *es solución general de (2)*

por otro lado $f(x) = 54$, como el número cero no es raíz de la ecuación característica de (2) entonces de acuerdo con lo establecido en el caso 1 inciso a) de la *tabla 3.4.1* proponemos como solución particular de (1) a;

$$y_p = A \ldots (3)$$

derivando (3), tenemos

$$y_p{}' = 0$$
$$y_p{}'' = 0$$

sustituyendo a (3) y su derivadas en (1)

$$0 - 9(A) = 54$$
$$A = -\frac{54}{9} = -6$$

entonces la solución particular de (1) es

$$y_p = -6$$

y por tanto

$y = y_c + y_p = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} - 6$ *es solución general de (1).*

2. Encontrar la solución general de

$$y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6 \ldots (1)$$

Solución:

La ecuación homogénea asociada de (1) es

$$y'' + 4y' - 2y = 0 \ldots (2)$$

resolviendo (2)

i) $a_2 = 1$
ii) $k^2 + 4k - 2 = 0$
iii) $k_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+8}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{6}}{2}$
$k_1 = -2 + \sqrt{6}$; $k_2 = -2 - \sqrt{6}$
iv) $y_1 = e^{-(2-\sqrt{6})x}$; $y_2 = e^{-(2+\sqrt{6})x}$
v) $y_c = C_1 e^{-(2-\sqrt{6})x} + C_2 e^{-(2+\sqrt{6})x}$ *es solución general de (2)*

por otro lado $f(x) = 2x^2 - 3x + 6$, como el número cero no es raíz de la ecuación característica de (2) entonces de acuerdo con lo establecido en el *caso I* inciso a) de la *tabla 3.4.1* proponemos como solución particular de (1) a;

$$y_p = Ax^2 + Bx + C \ldots (3)$$

derivando (3)

$$y_p{}' = 2Ax + B$$
$$y_p{}'' = 2A$$

sustituyendo en (3) y sus derivadas en (1)

$$2A + 8Ax + 4B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C = 2x^2 - 3x + 6$$

agrupando términos semejantes

$$-2Ax^2 + (8A - 2B)x + (2A + 4B - 2C) = 2x^2 - 3x + 6$$

de lo anterior se tiene que

$$-2A = 2 \qquad \Rightarrow A = -1$$
$$8A - 2B = -3 \qquad \Rightarrow B = -\frac{5}{2}$$
$$2A + 4B - 2C = 6 \qquad \Rightarrow C = -9$$

entonces la solución particular de (1) es

$$y_p = -x^2 - \frac{5}{2}x - 9$$

y por tanto

$y = y_c + y_p = C_1 e^{-(2-\sqrt{6})x} + C_2 e^{-(2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9$ *es solución general de (1).*

Un tropiezo del método

3. Encontrar la solución general de

$$y'' + y' - 6y = -5e^{2x} \ldots (1)$$

Solución:

La ecuación homogénea asociada de (1) es

$$y'' + y' - 6y = 0 \ldots (2)$$

resolviendo (2)

i) $a_2 = 1$
ii) $k^2 + k - 6 = 0$

iii) $k_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4(1)(-6)}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2}$

$k_1 = 2$; $k_2 = -3$

iv) $y_1 = e^{2x}$; $y_2 = e^{-3x}$

v) $y_c = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$ *es solución general de (2)*

Al derivar e^{2x} no se obtienen funciones nuevas. Así, si procedemos como en ejemplos anteriores, es lógico suponer una solución particular de la forma $y_p = Ae^{2x}$. Pero al sustituir esta expresión en la ecuación diferencial dada obtenemos la afirmación contradictoria $0 = -5e^{2x}$, y vemos que nuestra hipótesis de y_p es incorrecta.

En este caso, la dificultad se aclara al examinar la función complementaria $y_c = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$. Observamos que la función Ae^{2x} ya esta presente en y_c. Esto quiere decir e^{2x} es una solución de la ecuación homogénea asociada (2), y al sustituir un múltiplo constante* Ae^{2x} en la ecuación diferencial se obtendrá cero.

Por otro lado, si $f(x) = -5e^{2x}$, entonces, ¿ Cuál debe ser la forma de y_p?. Como el número $\alpha = 2$ es raíz de la ecuación característica de (2) z =1 veces, entonces de acuerdo con lo establecido en el *caso II* inciso b) de la *tabla 3.4.1* proponemos como solución particular de (1) a;

$$y_p = Axe^{2x} \ldots (3)$$

derivando (3)

$$y_p' = 2Axe^{2x} + Ae^{2x}$$
$$y_p'' = 4Axe^{2x} + 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} = 4Axe^{2x} + 4Ae^{2x}$$

sustituyendo (3) y sus derivadas en (1)

$$4Axe^{2x} + 4Ae^{2x} + 2Axe^{2x} + Ae^{2x} - 6Axe^{2x} = -5e^{2x}$$
$$5Ae^{2x} = -5e^{2x}$$
$$5A = -5 \;\Rightarrow\; A = -1$$

entonces la solución particular de (1) es

$$y_p = -xe^{2x}$$

*Como se vio en el ejemplo 2 de la *sección 3.2.2* si $y = g(x)$ es solución de la ecuación diferencial homogénea, un múltiplo escalar $y = kg(x)$ de esta también lo es.

y por tanto

$y = y_c + y_p = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} - xe^{2x}$ *es solución general de (1).*

4. Encontrar la solución general de

$$y'' - 2y' - 3y = 4x - 5 + 6xe^{2x} \ldots (1)$$

Solución:

La ecuación homogénea asociada de (1) es

$$y'' - 2y' - 3y = 0 \ldots (2)$$

resolviendo (2)

i) $a_2 = 1$
ii) $k^2 - 2k - 3 = 0$
iii) $(k-3)(k+1) = 0$
$k_1 = 3$; $k_2 = -1$
iv) $y_1 = e^{3x}$; $y_2 = e^{-x}$
v) $y_c = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$ *es solución general de (2)*

por otro lado, se observa que $f(x) = 4x - 5 + 6xe^{2x}$, es una función de la forma $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, donde $f_1(x) = 4x - 5$ y $f_2(x) = 6xe^{2x}$, entonces por el principio de superposición *sección 3.3.1*, la solución particular de (1) debe ser de la forma $y_p = y_{p1} + y_{p2}$. Como los números cero y $\alpha = 2$ no son raíces de la ecuación característica de (2), entonces de acuerdo con lo establecido en el *caso I* y *caso II* , inciso a) de la *tabla 3.4.1*, se proponen de manera respectiva las siguientes soluciones para formar la solución particular de (1)

$$y_{p1} = Ax + B$$
$$y_{p2} = (Cx + D)e^{2x}$$

así pues, proponemos como solución particular de (1) a;

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} = Ax + B + (Cx + D)e^{2x} \ldots (3)$$

derivando (3)

$$y_p{}' = A + 2Cxe^{2x} + Ce^{2x} + 2De^{2x}$$
$$y_p{}'' = 4Cxe^{2x} + 2Ce^{2x} + 2Ce^{2x} + 4De^{2x}$$
$$= 4Cxe^{2x} + 4Ce^{2x} + 4De^{2x}$$

sustituyendo (3) y sus derivadas en (1)

$$4Cxe^{2x} + 4Ce^{2x} + 4De^{2x} - 2(A + 2Cxe^{2x} + Ce^{2x} + 2De^{2x}) -$$
$$- 3(Ax + B + Cxe^{2x} + De^{2x}) = 4x - 5 + 6xe^{2x}$$
$$-3Cxe^{2x} + 2Ce^{2x} - 3De^{2x} - 3Ax - 2A - 3B = 4x - 5 + 6xe^{2x}$$

agrupando términos semejantes

$$-3Cxe^{2x} + e^{2x}(2C - 3D) - 3Ax - (2A + 3B) = 4x - 5 + 6xe^{2x}$$

de lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} -3A &= 4 && \Rightarrow A = -\frac{4}{3} \\ 2A + 3B &= 5 && \Rightarrow B = \frac{23}{9} \\ 2C - 3D &= 0 && \Rightarrow D = -\frac{4}{3} \\ -3C &= 6 && \Rightarrow C = -2 \end{aligned}$$

entonces la solución particular de (1) es

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{9} + \left(-2x - \frac{4}{3}\right)e^{2x}$$

y por tanto

$$y = y_c + y_p = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - \frac{4}{3}x + \frac{23}{9} + \left(-2x - \frac{4}{3}\right)e^{2x}$$ *es solución general de (1).*

5. Encontrar la solución general de

$$y'' + 4y = 12sen2x \ldots (1)$$

Solución:

La ecuación homogénea asociada de (1) es

$$y'' + 4y = 0 \ldots (2)$$

resolviendo (2)

i) $a_2 = 1$

ii) $k^2 + 4 = 0$

iii) $k_{1,2} = \dfrac{-0 \pm \sqrt{0 - 4(1)(4)}}{2} = \dfrac{\pm \sqrt{-16}}{2} = \dfrac{\pm 4i}{2}$

$k_1 = 2i$; $k_2 = -2i$

iv) $y_1 = e^{\alpha x} Cos\beta x \Rightarrow y_1 = Cos2x$

$y_2 = e^{\alpha x} Sen\beta x \Rightarrow y_2 = Sen2x$

v) $y_c = C_1 Cos2x + C_2 Sen2x$ *es solución general de (2)*

por otro lado $f(x) = 12sen2x$, como el par de números $\pm 2i$ son raíces de la ecuación característica de (2) z=1 veces, entonces de acuerdo con lo establecido en el *caso III* inciso b) de la *tabla 3.4.1* proponemos como solución particular de (1) a;

$$y_p = x(ACos2x + BSen2x) \ldots (3)$$

en lugar de

$$y_p = ACos2x + BSen2x$$

por los argumentos expuestos en el *problema 3* de esta sección. Derivando (3)

$$y_p' = -2AxSen2x + ACos2x + 2BxCos2x + BSen2x$$

$$\begin{aligned} y_p'' &= -4AxCos2x - 2ASen2x - 2ASen2x - \\ &\qquad - 4BxSen2x + 2BCos2x + 2BCos2x = \\ &= -4AxCos2x - 4ASen2x - 4BxSen2x + 4BCos2x \end{aligned}$$

sustituyendo (3) y sus derivadas en (1)

$$\begin{aligned} &-4AxCos2x - 4ASen2x - 4BxSen2x + 4BCos2x + \\ &\qquad + 4AxCos2x + 4BxSen2x = 12Sen2x \end{aligned}$$

agrupando términos semejantes

$$-4ASen2x + 4BCos2x = 12Sen2x$$

de lo anterior se tiene que

$$-4A = 12 \qquad \Rightarrow A = -3$$
$$4B = 0 \qquad \Rightarrow B = 0$$

entonces la solución particular de (1) es

$$y_p = -3x\cos 2x$$

y por tanto

$$y = y_c + y_p = C_1 Cos2x + C_2 Sen2x - 3xCos2x$$ *es solución general de (1)*

6. Encontrar la solución general de

$$y'' - 9y' + 14y = 3x^2 - 5Sen2x + 7xe^{6x} \ldots(1)$$

Solución:

La parte homogénea de (1) es

$$y'' - 9y' + 14y = 0 \ldots(2)$$

resolviendo (2)

i) $a_2 = 1$

ii) $k^2 - 9k + 14 = 0$

iii) $k_{1,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{81 - 4(1)(14)}}{2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{25}}{2} = \dfrac{9 \pm 5}{2}$

$k_1 = 7$; $k_2 = 2$

iv) $y_1 = e^{7x}$

$y_2 = e^{2x}$

v) $y_c = C_1 e^{7x} + C_2 e^{2x}$ *es solución general de (2)*

por otro lado, se observa que $f(x) = 3x^2 - 5Sen2x + 7xe^{6x}$, es una función de la forma $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$, donde $f_1(x) = 3x^2$, $f_2(x) = -5Sen2x$ y $f_3(x) = 7xe^{6x}$, entonces por el principio de superposición *sección 3.3.1*, la solución particular de (1) debe ser de la forma $y_p = y_{p1} + y_{p2} + y_{p3}$. Como los números cero, $\alpha = 6$, y $\pm 2i$ no son raíces de la ecuación característica de (2), entonces de acuerdo con lo establecido en los *casos I , II* y *III* inciso a) de la *tabla 3.4.1*, se proponen de manera respectiva las siguientes soluciones para formar la solución particular de (1)

$$y_{p1} = Ax^2 + Bx + C$$
$$y_{p2} = DCos2x + ESen2x$$
$$y_{p3} = (Fx + G)e^{6x}$$

así pues, proponemos como solución particular de (1) a;

$$\begin{aligned} y_p &= y_{p1} + y_{p2} + y_{p3} = \\ &= Ax^2 + Bx + C + DCos2x + ESen2x + Fxe^{6x} + Ge^{6x} \ldots(3) \end{aligned}$$

derivando (3)

$$y_p' = 2Ax + B - 2DSen2x + 2ECos2x + Fe^{6x} + 6Fxe^{6x} + 6Ge^{6x}$$
$$\begin{aligned} y_p'' &= 2A - 4DCos2x - 4ESen2x + 6Fe^{6x} + 36Fxe^{6x} + 6Fe^{6x} + 36Ge^{6x} = \\ &= 2A - 4DCos2x - 4ESen2x + 12Fe^{6x} + 36Fxe^{6x} + 36Ge^{6x} \end{aligned}$$

sustituyendo (3) y sus derivadas en (1)

$$\begin{aligned} &2A - 4DCos2x - 4ESen2x + 12Fe^{6x} + 36Fxe^{6x} + 36Ge^{6x} - 9(2Ax + B - 2DSen2x + \\ &+ 2ECos2x + Fe^{6x} + 6Fxe^{6x} + 6Ge^{6x}) + 14(Ax^2 + Bx + C + DCos2x + ESen2x + \\ &+ Fxe^{6x} + Ge^{6x}) = 3x^2 - 5Sen2x + 7xe^{6x} \end{aligned}$$

simplificando

$$\begin{aligned} &2A + 10DCos2x + 10ESen2x + 3Fe^{6x} - 4Fxe^{6x} - 4Ge^{6x} - 18Ax - 9B + \\ &+ 18DSen2x - 18ECos2x + 14Ax^2 + 14Bx + 14C = 3x^2 - 5Sen2x + 7xe^{6x} \end{aligned}$$

agrupando términos semejantes

$$\begin{aligned} &x^2(14A) + x(-18A + 14B) + (2A - 9B + 14C) + Sen2x(10E + 18D) + \\ &+ Cos2x(10D - 18E) + xe^{6x}(-4F) + e^{6x}(3F - 4G) = 3x^2 - 5Sen2x + 7xe^{6x} \end{aligned}$$

de lo anterior se tiene que

$$14A = 3 \qquad \Rightarrow A = \frac{3}{14}$$

$$-18A + 14B = 0 \qquad \Rightarrow B = \frac{27}{98}$$

$$2A - 9B + 14C = 0 \qquad \Rightarrow C = \frac{201}{1372}$$

$$10E + 18D = -5 \qquad \Rightarrow \text{E} = -\frac{25}{212}$$

$$10D - 18E = 0 \qquad \Rightarrow \text{D} = -\frac{45}{212}$$

$$-4F = 7 \qquad \Rightarrow \text{F} = -\frac{7}{4}$$

$$3F - 4G = 0 \qquad \Rightarrow G = -\frac{21}{16}$$

entonces la solución particular de (1) es

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} + y_{p3} =$$
$$= \frac{3}{14}x^2 + \frac{27}{98}x + \frac{201}{1372} - \frac{45}{212}Cos2x - \frac{25}{212}Sen2x - \frac{7}{4}xe^{6x} - \frac{21}{16}e^{6x}$$

y por tanto

$$y = y_c + y_p =$$
$$= C_1e^{7x} + C_2e^{2x} + \frac{3}{14}x^2 + \frac{27}{98}x + \frac{201}{1372} - \frac{45}{212}\cos 2x - \frac{25}{212}sen2x - \frac{7}{4}xe^{6x} - \frac{21}{16}e^{6x}$$

es solución general de (1).

3.5 MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS

El método de variación de parámetros a diferencia del método de coeficientes indeterminados descrito en la *sección 3.3*, es un método que carece de tropiezos y de limitaciones en el proceso de determinación de la solución general de una ecuación diferencial lineal no homogénea de orden n, de hecho el único requerimiento para su aplicación es que la función $f(x)$ en el segundo miembro sea continua e integrable, lo que hace de este, un método más poderoso y más general que el desarrollado en la sección anterior.

3.5.1 ADAPTACIÓN DEL MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS PARA UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN

Primero, adaptaremos el método de variación de parámetros a una ecuación diferencial no homogénea de segundo orden de la forma

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)\ldots(1)$$

y posteriormente lo extenderemos a una ecuación diferencial de orden superior.

Llevando (1) a su forma equivalente

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = g(x)\ldots(2)$$

de donde $P(x) = \dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}$; $Q(x) = \dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}$; $g(x) = \dfrac{f(x)}{a_2(x)}$

esto es, si multiplicamos a la ecuación (1) por el inverso de $a_2(x)$ se obtiene (2).

Por otra parte, supongamos que *P(x), Q(x) y g(x)* son *funciones continuas* en algún intervalo *I*, y establezcamos una primera

Hipótesis I **:**

Para la ecuación diferencial de segundo orden (2), se *propone* una solución particular de la forma

$$y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2\ldots(3)$$

donde y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones* en *I* de la ecuación homogénea asociada a (1), $y_c = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ y $u_1(x)$ y $u_2(x)$ dos funciones de x por determinar.

*i.e, y_1 y y_2 son *l.i.*

Derivando (3) tenemos

$$\left.\begin{aligned} y_p' &= u_1 y_1' + u_{11}' y_1 + u_2 y_2' + u_2' y_2 \\ y_p'' &= u_1 y_1'' + u_1' y_1' + u_1' y_1' + u_1'' y_1 + u_2 y_2'' + u_2' y_2' + u_2' y_2' + u_2'' y_2 \end{aligned}\right\}\ldots(4)$$

sustituyendo (3)y (4) en (2)

$$u_1 y_1'' + u_1' y_1' + u_1' y_1' + u_1'' y_1 + u_2 y_2'' + u_2' y_2' + u_2' y_2' + u_2'' y_2 + P(x)[u_1 y_1' + u_{11}' y_1 + u_2 y_2' + u_2' y_2] +$$
$$Q[u_1 y_1' + u_{11}' y_1 + u_2 y_2' + u_2' y_2] = g(x)$$

distribuyendo términos

$$u_1\overbrace{[y_1'' + P(x) y_1' + Q(x) y_1]}^{cero} + u_2\overbrace{[y_2'' + P(x) y_2' + Q(x) y_2]}^{cero} + P(x)[u_1' y_1 + u_2' y_2] + u_1' y_1' +$$
$$u_1'' y_1 + u_2' y_2' + u_2'' y_2 + \left(u_1' y_1 + u_2' y_2\right) = g(x)$$

los dos términos de la ecuación anterior, se anulan debido al hecho de que por hipótesis y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación homogénea asociada a (1). Simplificando

$$\frac{d}{dx}\left[u_1' y_1\right] + \frac{d}{dx}\left[u_2' y_2\right] + P(x)\left[u_1' y_1 + u_2' y_2\right] + \left(u_1' y_1' + u_2' y_2'\right) = g(x)$$

o bien

$$\frac{d}{dx}\left[u_1' y_1 + u_2' y_2\right] + P(x)\left[u_1' y_1 + u_2' y_2\right] + \left(u_1' y_1' + u_2' y_2'\right) = g(x)\ldots(5)$$

Puesto que es necesario determinar dos funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ que satisfagan (5), establezcamos una segunda

Hipótesis II **:**

Las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ satisfacen (5) si y solo si

$$\left.\begin{aligned} u_1' y_1 + u_2' y_2 &= 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' &= g(x) \end{aligned}\right\}\ldots(6)$$

Resolviendo el sistema (6) para u_1' y u_2' usando la regla de Cramer, la cual establece que

$$u_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad u_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

donde

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(x) & y_2' \end{vmatrix} = W_1 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x) \end{vmatrix} = W_2$$

siendo en este caso $\Delta = w(y_1, y_2)$ es el *wronskiano* de y_1 y y_2

Por lo tanto las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ quedan determinadas por la integración de

$$u_1'(x) = \frac{W_1}{W} \quad \text{y} \quad u_2'(x) = \frac{W_2}{W} \ldots (7)$$

3.5.2 GENERALIZACIÓN DEL MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS A UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE ORDEN n

La generalización del método de variación de parámetros a ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de orden n de la forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0 y = f(x) \ldots (1)$$

es inmediata.

Llevando (1) a su forma equivalente

$$y^{(n)} + P_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + P_1 y' + P_0 y = g(x) \ldots (2)$$

en donde

$$P_{n-1}(x) = \frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}; \ldots; P_1(x) = \frac{a_1(x)}{a_n(x)}; P_0(x) = \frac{a_0(x)}{a_n(x)}$$

esto es, si multiplicamos a la ecuación (1) por el inverso de $a_n(x)$ se obtiene (2). Suponiendo nuevamente que las $P_k(x); k = 1,2,\ldots,n-1$ son *funciones continuas* en algún intervalo *I*, y estableciendo ahora como primera hipótesis que si $y_c = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$ es solución general de la ecuación homogénea asociada a (1) entonces, una ecuación particular de (1) es

$$y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2 + \ldots + u_n(x)y_n \ldots (3)$$

donde $y_1, y_2, \ldots, y_n$ forman un conjunto fundamental de soluciones* en *I* de la ecuación homogénea asociada a (1), y $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ *n* funciones de x las cuales quedan determinadas por las *n* ecuaciones siguientes

*i.e, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son *l.i.*

$$\left.\begin{array}{l} y_1u_1' + y_2u_2' + \ldots + y_nu_n' = 0 \\ y_1'u_1' + y_2'u_2' + \ldots + y_n'u_n' = 0 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ y_1^{(n-1)}u_1' + y_2^{(n-1)}u_2' + \ldots + y_n^{(n-1)}u_n' = G(x) \end{array}\right\} \ldots(4)$$

en este caso la regla de Kramer da

$$u_k'(x) = \frac{W_k}{W};\, k = 1,2,\ldots,n \qquad \ldots(5)$$

donde

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \ldots(6)$$

es el *Wronskiano* del conjunto de soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$, y

$$W_k = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & 0 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & 0 & \ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & G(x) & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \ldots(7)$$

$$k - \acute{e}sima$$
$$columna$$

es el determinante obtenido de reemplazar la *k-ésima* columna del *Wronskiano* por la columna

$$\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ G(x) \end{array}$$

así pues, las $u_k(x); k = 1,2,\ldots,n$ especificadas en (3) quedan determinadas por la integración de (5)

3.5.3 EJEMPLOS

1. Encontrar la solución general de

$$y'' + y' - 2y = x \ldots (1)$$

Solución:

La parte homogénea de (1) es

$$y'' + y' - 2y = 0 \ldots (2)$$

resolviendo (2)

i) $a_2 = 1$
ii) $k^2 + k - 2 = 0$
iii) $(k-1)(k+2)$
$k_1 = 1$; $k_2 = -2$
iv) $y_1 = e^x$
$y_2 = e^{-2x}$
v) $y_c = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ *es solución general de (2).*

Proponemos como solución particular de (1) a

$$y_p = u_1(x) y_1 + u_2(x) y_2 \ldots (3)$$

donde $u_1(x)$ y $u_2(x)$ quedan determinadas por la integración de

$$u_1{}' = \frac{W_1}{W} \quad \text{y} \quad u_2{}' = \frac{W_2}{W} \ldots (4)$$

en (4)

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-2x} \\ e^x & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^{-x} - e^{-x} = -3e^{-x}$$

$$g(x) = \frac{f(x)}{a_2(x)} = \frac{x}{1} = x$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(x) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ x & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -xe^{-2x}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & x \end{vmatrix} = xe^x$$

sustituyendo los resultados anteriores en (4)

$$\left.\begin{aligned} u_1' &= \frac{-xe^{-2x}}{-3e^{-x}} = \frac{1}{3}xe^{-x} \\ u_2' &= \frac{xe^x}{-3e^{-x}} = -\frac{1}{3}xe^{2x} \end{aligned}\right\}\ldots(5)$$

integrando (5)

$$\int du_1 = \frac{1}{3}\int xe^{-x}dx = \frac{1}{3}\left[-xe^{-x} + \int e^{-x}dx\right] = \frac{1}{3}\left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]$$

$$\therefore u_1 = \frac{1}{3}\left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]$$

$$\int du_2 = -\frac{1}{3}\int xe^{2x}dx = -\frac{1}{3}\left[\frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx\right] = -\frac{1}{3}\left[\frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}\right]$$

$$\therefore u_2 = -\frac{1}{3}\left[\frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}\right]$$

sustituyendo u_1, u_2, y_1 y y_2 en (3)

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{3}\left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]e^x - \frac{1}{3}\left[\frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}\right]e^{-2x} = \\ &= \frac{1}{3}\left[-x-1\right] - \frac{1}{3}\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right] = \\ &= -\frac{x}{3} - \frac{1}{3} - \frac{x}{6} + \frac{1}{12} = \\ &= -x\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right] + \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right] = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

entonces la *solución particular de (1)* es

$$y_p = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

y por tanto

$$y = y_c + y_p = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

es solución general de (1).

2. Encontrar la solución general de

$$y'' - 3y' + 2y = xe^{x} + 2x \ldots (1)$$

Solución:

La parte homogénea de (1) es

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \ldots (2)$$

resolviendo (2)

i) $a_2 = 1$
ii) $k^2 - 3k + 2 = 0$
iii) $(k-2)(k-1) = 0$
$k_1 = 2$; $k_2 = 1$
iv) $y_1 = e^{2x}$
$y_2 = e^{x}$
v) $y_c = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}$ *es solución general de (2).*

Proponemos como solución particular de (1) a

$$y_p = u_1(x) y_1 + u_2(x) y_2 \ldots (3)$$

donde $u_1(x)$ y $u_2(x)$ quedan determinadas por la integración de

$$u_1{}' = \frac{W_1}{W} \quad \text{y} \quad u_2{}' = \frac{W_2}{W} \ldots (4)$$

en (4)

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{x} \\ 2e^{2x} & e^{x} \end{vmatrix} = e^{3x} - 2e^{3x} = -e^{3x}$$

$$g(x) = \frac{f(x)}{a_2(x)} = \frac{xe^{x} + 2x}{1} = xe^{x} + 2x$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(x) & y_2{}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & e^x \\ xe^x + 2x & e^x \end{vmatrix} = -xe^{2x} - 2xe^x$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1{}' & g(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & xe^x + 2x \end{vmatrix} = xe^{3x} + 2xe^{2x}$$

sustituyendo los resultados anteriores en (4)

$$\left.\begin{aligned} u_1{}' &= \frac{-xe^{2x} - 2xe^x}{-e^{3x}} = xe^{-x} + 2xe^{-2x} \\ u_2{}' &= \frac{xe^{3x} + 2xe^{2x}}{-e^{3x}} = -x - 2xe^{-x} \end{aligned}\right\}\ldots(5)$$

integrando (5)

$$\begin{aligned} \int du_1 &= \int [xe^{-x} + 2xe^{-2x}]dx = \int xe^{-x}dx + 2\int xe^{-2x}dx = \\ &= \left[-xe^{-x} + \int e^{-x}dx\right] + 2\left[-\frac{xe^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx\right] = \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + 2\left[-\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right] = \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} - \frac{2xe^{-2x}}{2} - \frac{2e^{-2x}}{4} = \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} - xe^{-2x} - \frac{e^{-2x}}{2} = \\ &= e^{-x}[-x-1] - e^{-2x}\left[x + \frac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

$$\therefore u_1 = e^{-x}[-x-1] - e^{-2x}\left[x + \frac{1}{2}\right]$$

$$\begin{aligned} \int du_2 &= \int \left(-x - 2xe^{-x}\right)dx = -\int xdx - 2\int xe^{-x}dx \\ &= -\frac{x^2}{2} - 2\left[-xe^{-x} + \int e^{-x}dx\right] \\ &= -\frac{x^2}{2} - 2\left[-xe^{-x} - e^{-x}\right] \end{aligned}$$

$$\therefore u_2 = -\frac{x^2}{2} + 2xe^{-x} + 2e^{-x}$$

sustituyendo u_1, u_2, y_1 y y_2 en (3)

$$y_p = \left\{ e^{-x}\left[-x-1\right] - e^{-2x}\left[x+\frac{1}{2}\right] \right\} e^{2x} + \left\{ -\frac{x^2}{2} + 2xe^{-x} + 2e^{-x} \right\} e^{x} =$$

$$= \left[-xe^{-x} - e^{-x} - xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} \right] e^{2x} - \frac{x^2e^x}{2} + 2x + 2 =$$

$$= -xe^x - e^x - x - \frac{1}{2} - \frac{x^2e^x}{2} + 2x + 2 =$$

$$= -\frac{x^2e^x}{2} - xe^x - e^x + x + \frac{3}{2}$$

entonces la *solución particular de (1)* es

$$y_p = -\frac{x^2e^x}{2} - xe^x - e^x + x + \frac{3}{2}$$

y por tanto

$$y = y_c + y_p = C_1e^{2x} + C_2e^x - \frac{x^2e^x}{2} - xe^x - e^x + x + \frac{3}{2}$$

es solución general de (1).

3. Encontrar la solución general de

$$y'' + y = Tanx \ldots (1)$$

Solución:

La parte homogénea de (1) es

$$y'' + y = 0 \ldots (2)$$

resolviendo (2)

i) $a_2 = 1$
ii) $k^2 + 1 = 0$
iii) $k = \pm\sqrt{-1}$; $\quad k_{1,2} = \pm i$

iv) $y_1 = Cosx$

$y_2 = Senx$

v) $y_c = C_1 Cosx + C_2 Senx$ *es solución general de (2).*

Proponemos como solución particular de (1) a

$$y_p = u_1(x) y_1 + u_2(x) y_2 \ldots (3)$$

donde $u_1(x)$ y $u_2(x)$ quedan determinadas por la integración de

$$u_1' = \frac{W_1}{W} \quad \text{y} \quad u_2' = \frac{W_2}{W} \ldots (4)$$

en (4)

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Cosx & Senx \\ -Senx & Cosx \end{vmatrix} = Cos^2 x + Sen^2 x = 1$$

$$g(x) = \frac{f(x)}{a_2(x)} = \frac{Tanx}{1} = Tanx$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(x) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & Senx \\ \tan x & Cosx \end{vmatrix} = -TanxSenx = -\frac{Senx}{Cosx} Senx = -\frac{Sen^2 x}{Cosx}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Cosx & 0 \\ -Senx & Tanx \end{vmatrix} = TanxCosx = \frac{Senx}{Cosx} Cosx = Senx$$

sustituyendo los resultados anteriores en (4)

$$\left.\begin{aligned} u_1' &= \frac{-\dfrac{Sen^2 x}{Cosx}}{1} = -\frac{Sen^2 x}{Cosx} = -\frac{(1 - Cos^2 x)}{Cosx} = -Secx + Cosx \\ u_2' &= \frac{Senx}{1} = Senx \end{aligned}\right\} \ldots (5)$$

integrando (5)

$$\begin{aligned} \int du_1 &= \int [-Secx + Cosx] dx = -\int Secxdx + \int Cosxdx = \\ &= -\ln|Secx + Tanx| + Senx \end{aligned}$$

$$\therefore u_1 = -\ln|Secx + Tanx| + Senx$$

$$\int du_2 = \int Senxdx = -Cosx$$

$\therefore u_2 = -Cosx$

sustituyendo u_1, u_2, y_1 y y_2 en (3)

$$\begin{aligned} y_p &= \left[-\ln|Secx + Tanx| + Senx\right]Cosx + Senx(-Cosx) = \\ &= -Cosx\ln|Secx + Tanx| + CosxSenx - CosxSenx = \\ &= -Cosx\ln|Secx + Tanx| \end{aligned}$$

entonces la *solución particular de (1)* es

$$y_p = -Cosx\ln|Secx + Tanx|$$

y por tanto

$$y = y_c + y_p = C_1Cosx + C_2Senx - Cosx\ln|Secx + Tanx|$$

es solución general de (1).

4. Encontrar la solución general de

$$3y'' - 6y' + 30y = e^x Tan3x \ldots (1)$$

Solución:

La parte homogénea de (1) es

$$y'' - 2y' + 10y = 0 \ldots (2)$$

resolviendo (2)

i) $a_2 = 1$

ii) $k^2 - 2k + 10 = 0$

iii) $k_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(10)}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \dfrac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i$

iv) $y_1 = e^x \cos 3x$

$y_2 = e^x sen3x$

v) $y_c = C_1e^xCos3x + C_2e^xSen3x$ *es solución general de (2).*

Proponemos como solución particular de (1) a

$$y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2 \ldots (3)$$

donde $u_1(x)$ y $u_2(x)$ quedan determinadas por la integración de

$$u_1' = \frac{W_1}{W} \quad \text{y} \quad u_2' = \frac{W_2}{W} \ldots (4)$$

en (4)

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x Cos3x & e^x Sen3x \\ -3e^x Sen3x + e^x Cos3x & 3e^x Cos3x + e^x Sen3x \end{vmatrix} =$$

$$= 3e^{2x}Cos^2 3x + e^{2x}Cos3xSen3x + 3e^{2x}Sen^2 3x - e^{2x}Cos3xSen3x =$$

$$= 3e^{2x}\cos^2 3x + 3e^{2x}sen^2 3x = 3e^{2x}(\cos^2 3x + sen^2 3x) =$$

$$= 3e^{2x}$$

$$g(x) = \frac{f(x)}{a_2(x)} = \frac{e^x Tan3x}{3}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(x) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & e^x Sen3x \\ \dfrac{e^x Tan3x}{3} & 3e^x Cos3x + e^x Sen3x \end{vmatrix} = -\frac{e^{2x}Tan3xSen3x}{3} =$$

$$= -\frac{e^{2x}\dfrac{Sen^2 3x}{Cos3x}}{3} = -\frac{e^{2x}\left(\dfrac{1-Cos^2 3x}{Cos3x}\right)}{3} = -\frac{e^{2x}\left(Sec3x - Cos3x\right)}{3}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x Cos3x & 0 \\ -3e^x Sen3x + e^x Cos3x & \dfrac{e^x Tan3x}{3} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}Tan3xCos3x}{3} =$$

$$= \frac{e^{2x}\left(\dfrac{Sen3x}{Cos3x}\right)Cos3x}{3} = \frac{e^{2x}Sen3x}{3}$$

sustituyendo los resultados anteriores en (4)

$$\left.\begin{aligned} u_1' &= \frac{-\dfrac{e^{2x}\left(Sec3x - Cos3x\right)}{3}}{3e^{2x}} = -\frac{e^{2x}\left(Sec3x - Cos3x\right)}{9e^{2x}} = -\frac{Sec3x - Cos3x}{9} \\ u_2' &= \frac{\dfrac{e^{2x}Sen3x}{3}}{3e^{2x}} = \frac{e^{2x}Sen3x}{9e^{2x}} = \frac{Sen3x}{9} \end{aligned}\right\}\ldots(5)$$

integrando (5)

$$\begin{aligned} \int du_1 &= \int -\frac{Sec3x - Cos3x}{9}dx = -\frac{1}{9}\int Sec3x - Cos3xdx = \\ &= -\frac{1}{9}\int Sec3xdx + \frac{1}{9}\int Cos3xdx = \\ &= -\frac{1}{27}\ln\left|Sec3x + Tan3x\right| + \frac{1}{27}Sen3x \end{aligned}$$

$$\therefore u_1 = -\frac{1}{27}\ln\left|Sec3x + Tan3x\right| + \frac{1}{27}Sen3x$$

$$\int du_2 = \int \frac{Sen3x}{9}dx = \frac{1}{9}\int Sen3xdx = -\frac{Cos3x}{27}$$

$$\therefore u_2 = -\frac{Cos3x}{27}$$

sustituyendo u_1, u_2, y_1 y y_2 en (3)

$$\begin{aligned} y_p &= \left(-\frac{1}{27}\ln\left|Sec3x + Tan3x\right| + \frac{1}{27}Sen3x\right)e^x Cos3x + \left(-\frac{Cos3x}{27}\right)e^x Senx3x = \\ &= -\frac{1}{27}\ln\left|Sec3x + Tan3x\right| e^x Cos3x \end{aligned}$$

entonces la *solución particular de (1)* es

$$y_p = -\frac{1}{27}\ln\left|Sec3x + Tan3x\right| e^x Cos3x$$

y por tanto

$$y = y_c + y_p = C_1 e^x Cos3x + c_2 e^x Sen3x - \frac{1}{27}\ln\left|Sec3x + Tan3x\right| e^x Cos3x$$

es solución general de (1).

3.6 ECUACIÓN DE EULER-CAUCHY O ECUACIÓN EQUIDIMENSIONAL

Toda ecuación diferencial lineal de la forma

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x) \ldots (1)$$

donde los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son constantes y tiene los nombres de ecuación de Cauchy-Euler, ecuación de Euler-Cauchy, ecuación de Euler ó ecuación equidimensional.

El método de solución de la ecuación diferencial (1) es análogo al procedimiento seguido en las ecuaciones diferenciales de orden n con coeficientes constantes.

3.6.1 MÉTODO DE SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DE EULER-CAUCHY

Comenzaremos el desarrollo examinando detalladamente las formas de soluciones generales de la ecuación homogénea de segundo orden

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = 0 \ldots (2)$$

Método de solución:

Proponemos una solución de la forma

$$y = x^k \ldots (3)$$

donde k será determinado. Derivando (3) tenemos

$$y' = kx^{k-1}$$
$$y'' = k(k-1)x^{k-2}$$

sustituyendo (3) y sus derivadas en (1)

$$ax^2\left[k(k-1)x^{k-2}\right] + bx\left[kx^{k-1}\right] + c\left[x^k\right] = 0$$
$$x^k\left[ak(k-1) + bk + c\right] = 0$$
$$x^k\left[ak^2 - ak + bk + c\right] = 0$$
$$x^k\left[ak^2 + k(b-a) + c\right] = 0$$

como $x^k \neq 0 \ \forall k$ entonces

$$ak^2 + k(b-a) + c = 0 \ldots (4)$$

así, (4) es la ecuación característica buscada para (2), en consecuencia $y = x^k$ es una solución de (2) siempre que k sea solución de (3). Siguiendo el mismo procedimiento para una ecuación diferencial homogénea de orden n tenemos que

Según el carácter de las raíces, escribimos las soluciones "y_i" partiendo de lo siguiente

i) A toda raíz real simple k corresponde una solución

$$y_i = x^k$$

ii) A toda raíz real k con multiplicidad r, corresponden r soluciones de la forma

$$x^k, x^k \ln x, x^k (\ln x)^2, \ldots, x^k (\ln x)^{r-1}$$

iii) A todo par de raíces complejas conjugadas $k = \alpha \pm i\beta$ corresponden dos soluciones de la forma

$$y_1 = x^\alpha \cos(\beta \ln x)$$
$$y_2 = x^\alpha sen(\beta \ln x)$$

3.6.2 EJEMPLOS

1. Encontrar la solución general de

$$x^2 y'' - 2xy' - 4y = 0 \ldots (1)$$

Solución:

Sea

$$y = x^k \ldots (2)$$

solución de (1). Derivando (2)

$$y' = kx^{k-1}$$
$$y'' = k(k-1)x^{k-2}$$

sustituyendo (2) y sus derivadas en (1)

$$x^2 \left[k(k-1)x^{k-2} \right] - 2x\left[kx^{k-1} \right] - 4\left[x^k \right] = 0$$
$$x^k \left[k(k-1) - 2k - 4 \right] = 0$$
$$x^k \left[k^2 - k - 2k - 4 \right] = 0$$
$$x^k \left[k^2 - 3k - 4 \right] = 0$$

como $x^k \neq 0 \ \forall k$, entonces

$$k^2 - 3k - 4 = 0 \ldots (3)$$

resolviendo (3) tenemos

$$(k-4)(k+1) = 0$$
$$k_1 = 4 \qquad\qquad k_2 = -1$$

de acuerdo con el inciso i) de la tabla de la *sección 3.6.1* tenemos que

$$y_1 = x^4 \qquad\qquad y_2 = x^{-1}$$

y por tanto

$$y_c = C_1 x^4 + C_2 x^{-1}$$

es solución general de (1).

2. Encontrar la solución general de

$$4x^2 y'' + 8xy' + y = 0 \ldots (1)$$

Solución:

Sea

$$y = x^k \ldots (2)$$

solución de (1). Derivando (2)

$$y' = kx^{k-1}$$
$$y'' = k(k-1)x^{k-2}$$

sustituyendo (2) y sus derivadas en (1)

$$4x^2\left[k(k-1)x^{k-2}\right] + 8x\left[kx^{k-1}\right] + \left[x^k\right] = 0$$
$$x^k\left[4k(k-1) + 8k + 1\right] = 0$$
$$x^k\left[4k^2 - 4k + 8k + 1\right] = 0$$
$$x^k\left[4k^2 + 4k + 1\right] = 0$$

como $x^k \neq 0 \ \forall k$, entonces

$$4k^2 + 4k + 1 = 0 \ldots (3)$$

resolviendo (3)

$$k_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(4)(1)}}{2(4)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

de acuerdo con el inciso ii) de la tabla de la *sección 3.6.1* tenemos que

$$y_1 = x^{-\frac{1}{2}} \qquad\qquad y_2 = x^{-\frac{1}{2}} \ln x$$

y por tanto

$$y_c = C_1 x^{-\frac{1}{2}} + C_2 x^{-\frac{1}{2}} \ln x$$

es solución general de (1).

3. Encontrara la solución general de

$$x^2 y'' + 3xy' + 3y = 0 \ldots (1)$$

Solución:

Sea

$$y = x^k \ldots (2)$$

solución de (1). Derivando (2)

$$\begin{aligned} y' &= kx^{k-1} \\ y'' &= k(k-1)x^{k-2} \end{aligned}$$

sustituyendo (2) y sus derivadas en (1)

$$\begin{aligned} &x^2\left[k(k-1)x^{k-2}\right] + 3x\left[kx^{k-1}\right] + 3\left[x^k\right] = 0 \\ &x^k\left[k(k-1) + 3k + 3\right] = 0 \\ &x^k\left[k^2 - k + 3k + 3\right] = 0 \\ &x^k\left[k^2 + 2k + 3\right] = 0 \end{aligned}$$

como $x^k \neq 0 \ \forall k$, entonces

$$k^2 + 2k + 3 = 0 \ldots (3)$$

resolviendo (3)

$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4(1)(3)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-2(4)}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-2}}{2}$$

$$k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}i$$

de acuerdo con el inciso iii) de la tabla de la *sección 3.6.1* tenemos que

$$y_1 = x^{-1}\mathrm{Cos}\left(\sqrt{2}\ln x\right) \qquad\qquad y_2 = x^{-1} Sen\left(\sqrt{2}\ln x\right)$$

y por tanto

$$y_c = C_1 x^{-1}\mathrm{Cos}\left(\sqrt{2}\ln x\right) + C_2 x^{-1} Sen\left(\sqrt{2}\ln x\right)$$

es solución general de (1).

4. Encontrar la solución general de

$$x^3 y''' + 5x^2 y'' + 7xy' + 8y = 0 \ldots (1)$$

Solución:

Sea

$$y = x^k \ldots (2)$$

solución de (1). Derivando (2)

$$y' = kx^{k-1}$$
$$y'' = k(k-1)x^{k-2}$$
$$y''' = k(k-1)(k-2)x^{k-3}$$

sustituyendo (2) y sus derivadas en (1)

$$x^3\left[k(k-1)(k-2)x^{k-3}\right]+5x^2\left[k(k-1)x^{k-2}\right]+7x\left[kx^{k-1}\right]+8\left[x^k\right]=0$$
$$x^k\left[(k^2-k)(k-2)+5k(k-1)+7k+8\right]=0$$
$$x^k\left[k^3-2k^2-k^2+2k+5k^2-5k+7k+8\right]=0$$
$$x^k\left[k^3+2k^2+4k+8\right]=0$$

como $x^k \neq 0 \ \forall k$, entonces

$$k^3+2k^2+4k+8=0\ldots(3)$$

resolviendo (3)

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 8 & 1 \\ & 1 & 3 & 7 & \\ \hline 1 & 3 & 7 & 15 & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 8 & -2 \\ & -2 & 0 & -8 & \\ \hline 1 & 0 & 4 & 0 & \end{array}$$

$$k_1=-2$$

$$k^2+4=0$$
$$k_{2,3}=\pm\sqrt{-4}=\pm 2i$$

y de acuerdo con los incisos i) y iii) de la tabla de la *sección 3.6.1* tenemos que

$$y_1=x^{-2} \qquad y_2=Cos(2\ln x) \qquad y_3=Sen(2\ln x)$$

y por tanto

$$y_c=C_1x^{-2}+C_2Cos(2\ln x)+C_3Sen(2\ln x)$$

es solución general de (1).

5. Encontrar la solución general de

$$x^2y''-3xy'+3y=2x^4e^x\ldots(1)$$

Solución:

La parte homogénea de (1)

$$x^2y''-3xy'+3y=0\ldots(2)$$

Resolvamos (2). Sea

$$y=x^k\ldots(3)$$

solución de (2). Derivando (3)

$$y' = kx^{k-1}$$
$$y'' = k(k-1)x^{k-2}$$

sustituyendo (3) y sus derivadas en (2)

$$x^2\left[k(k-1)x^{k-2}\right] - 3x\left[kx^{k-1}\right] + 3\left[x^k\right] = 0$$
$$x^k\left[k(k-1) - 3k + 3\right] = 0$$
$$x^k\left[k^2 - k - 3k + 3\right] = 0$$
$$x^k\left[k^2 - 4k + 3\right] = 0$$

como $x^k \neq 0 \ \forall k$, entonces

$$k^2 - 4k + 3 = 0 \ldots (4)$$

resolviendo (4)

$$(k-1)(k-3) = 0$$
$$k_1 = 1 \qquad\qquad \mathrm{k}_2 = 3$$

de acuerdo con el inciso i) de la tabla de la *sección 3.6.1* tenemos que

$$y_1 = x \qquad\qquad y_2 = x^3$$

y por tanto

$$y_c = C_1 x + C_2 x^3 \ldots (5)$$

es solución general de (2).

Usemos el método de variación de parámetros para determinar la solución particular de la ecuación diferencial.

Proponemos como solución particular de (1) a

$$y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2 \ldots (6)$$

donde $u_1(x)$ y $u_2(x)$ quedan determinadas por la integración de

$$u_1' = \frac{W_1}{W} \quad \text{y} \quad u_2' = \frac{W_2}{W} \ldots (7)$$

en (7)

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^3 - x^3 = 2x^3$$

$$g(x) = \frac{f(x)}{a_2(x)} = \frac{2x^4e^x}{x^2} = 2x^2e^x$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(x) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x^3 \\ 2x^2e^x & 3x^2 \end{vmatrix} = -2x^5e^x$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 2x^2e^x \end{vmatrix} = 2x^3e^x$$

sustituyendo los resultados anteriores en (7)

$$\left.\begin{aligned} u_1' &= \frac{-2x^5e^x}{2x^3} = -x^2e^x \\ u_2' &= \frac{2x^3e^x}{2x^3} = e^x \end{aligned}\right\}\ldots(8)$$

integrando (8)

$$\begin{aligned} \int du_1 &= \int [-x^2e^x]dx = -\int x^2e^x dx = \\ &= -x^2e^x + \int 2xe^x dx = \\ &= -x^2e^x + 2xe^x - 2\int e^x dx = \\ &= -x^2e^x + 2xe^x - 2e^x \end{aligned}$$

$\therefore u_1 = -x^2e^x + 2xe^x - 2e^x$

$$\int du_2 = \int e^x dx = e^x$$

$\therefore u_2 = e^x$

sustituyendo u_1, u_2, y_1 y y_2 en (6)

$$
\begin{aligned}
y_p &= \left(-x^2e^x + 2xe^x - 2e^x\right)x + \left(e^x\right)x^3 = \\
&= -x^3e^x + 2x^2e^x - 2xe^x + x^3e^x \\
&= 2x^2e^x - 2xe^x
\end{aligned}
$$

entonces la *solución particular de (1)* es

$$y_p = 2x^2e^x - 2xe^x \ldots(9)$$

y por tanto

$$y = y_c + y_p = C_1x + C_2x^3 + 2x^2e^x - 2xe^x$$

es solución general de (1).

6. Encontrar la solución general de

$$xy'' + y' = x \ldots(1)$$

Solución:

Es claro que la ecuación dada no tiene la forma de una ecuación diferencial de Euler-Cauchy. Si multiplicamos ambos miembros de (1) por *x* tenemos

$$x^2y'' + xy' = x^2 \ldots(2)$$

de donde (2) tiene la forma desea.. La parte homogénea de (2) es

$$x^2y'' + xy' = 0 \ldots(3)$$

Resolvamos (3). Sea

$$y = x^k \ldots(4)$$

solución de (3), derivando (4)

$$
\begin{aligned}
y' &= kx^{k-1} \\
y'' &= k(k-1)x^{k-2}
\end{aligned}
$$

sustituyendo (4) y sus derivadas en (3)

$$x^2\left[k(k-1)x^{k-2}\right]+x\left[kx^{k-1}\right]=0$$
$$x^k\left[k(k-1)+k\right]=0$$
$$x^k\left[k^2-k+k\right]=0$$
$$x^k\left[k^2\right]=0$$

como $x^k \neq 0 \;\; \forall k$, entonces

$$k^2 = 0\ldots(5)$$

con lo que resulta que

$$k_1 = 0 \qquad\qquad \mathrm{k}_2 = 0$$

de acuerdo con el inciso ii) de la tabla de la *sección 3.6.1* tenemos que

$$y_1 = 1 \qquad\qquad y_2 = \ln x$$

y por tanto

$$y_c = C_1 + C_2 \ln x\ldots(6)$$

es solución general de (3).

Usemos el método de variación de parámetros para determinar la solución particular de la ecuación diferencial.

Proponemos como solución particular de (1) a

$$y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2\ldots(7)$$

donde $u_1(x)$ y $u_2(x)$ quedan determinadas por la integración de

$$u_1{}' = \frac{W_1}{W} \quad \text{y} \quad u_2{}' = \frac{W_2}{W}\ldots(8)$$

en (8)

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \ln x \\ 0 & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x}$$

$$g(x) = \frac{f(x)}{a_2(x)} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(x) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \ln x \\ 1 & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

sustituyendo los resultados anteriores en (8)

$$\left.\begin{aligned} u_1' &= \frac{-\ln x}{\frac{1}{x}} = -x\ln x \\ u_2' &= \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \end{aligned}\right\}\ldots(9)$$

integrando (9)

$$\begin{aligned} \int du_1 &= \int -x\ln x dx = -\int x\ln x dx = \\ &= \frac{x^2\ln x}{2} - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x dx = \\ &= \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore u_1 = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4}$$

$$\int du_2 = \int x dx = \frac{x^2}{2}$$

$$\therefore u_2 = \frac{x^2}{2}$$

sustituyendo u_1, u_2, y_1 y y_2 en (7)

$$\begin{aligned} y_p &= \left(\frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4}\right) + \left(\frac{x^2}{2}\right)\ln x = \\ &= \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^2\ln x}{2} = \\ &= x^2\ln x - \frac{x^2}{4} \end{aligned}$$

entonces la *solución particular de (1)* es

$$y_p = x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} \ldots (10)$$

y por tanto

$$y = y_c + y_p = C_1 + C_2 \ln x + x^2 \ln x - \frac{x^2}{4}$$

es solución general de (1).

UNIDAD IV

TRANSFORMADA DE LAPLACE

4.1 INTRODUCCIÓN AL USO LA TRANSFORMADA DE LAPLACE EN ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES.

Una de las aplicaciones más importantes de la transformada de Laplace es que esta nos permite resolver *ecuaciones diferenciales lineales*, que en muchas ocasiones por los métodos ordinarios no es lo más conveniente.

La ventaja que tiene el método de transformada de Laplace sobre estos métodos ordinarios, es que ésta:

- Proporcional una *solución directa* de una ecuación diferencial en determinadas circunstancias.
- Se puede aplicar en algunas funciones de *forma irregular* las cuales no se pueden manejar con facilidad por los métodos clásicos.
- Reduce el problema de resolver una ecuación diferencial a un problema de tipo *algebraico*.
- Toma en consideración las condiciones iniciales de tal manera que, con problemas de valor inicial, *se evita la determinación de una solución general*.
- Si se aplica a una ecuación diferencial *no homogénea*, se obtiene la solución en forma inmediata, esto es, sin resolver primero la ecuación diferencial homogénea correspondiente.

El método de transformada de Laplace consiste en los siguientes pasos

1) Transformar las ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas.
2) Resolver estas ecuaciones para las incógnitas algebraicas.
3) Determinar la transformada inversa de los resultados del paso 2) y así obtener la solución deseada de la ecuación diferencial original.

4.1.1 DEFINICIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Definición : Sea *f* una función definida para $t \geq 0$. Entonces la transformada de Laplace de $f(t)$ se define como

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = F(s)\ldots(1)$$

donde *s* es un parámetro real.* El símbolo $\mathcal{L}$ se llama *operador de transformada de Laplace.*

*En la teoría avanzada de las transformaciones de Laplace, es conveniente asumir que *s* es una variable compleja de modo que *F(s)* es una función de variable compleja.

Antes de iniciar con el cálculo de transformadas de Laplace de algunas funciones elementales, es necesario introducir la siguiente

4.1.2 INTEGRAL IMPROPIA

Definición : Una integral con un límite infinito de integración se llama *integral impropia* y se define de la siguiente forma

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{k\to\infty}\int_a^k f(x)dx \ldots(2)$$

siempre y cuando el límite existe.

De acuerdo a la definición 2 la integral impropia (1) se rescribe como

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \lim_{k\to\infty}\int_0^k e^{-st} f(t)dt \ldots(3)$$

y la transformada de Laplace existe si el límite existe. Si el límite existe, la integral (3) converge y entonces el resultado es una función *F(s)*.

En la descripción general emplearemos letras minúsculas para representar la función que se desea transformar y la mayúscula correspondiente para denotar la transformación de Laplace, por ejemplo

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \qquad\qquad \mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$$

4.1.3 EJEMPLOS

Determinar la transformada de Laplace de cada una de las siguientes funciones

1. Sea $f(t) = 1$

   Solución:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st}(1)dt =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\int_0^k e^{-st}dt = \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^k =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{e^{-sk}}{s} + \frac{e^{-s(0)}}{s}\right] = \frac{1}{s}$$

   por tanto

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} = F(s)$$

2. Sea $f(t)=t$

Solución:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{t\}=\int_0^\infty e^{-st}(t)dt=\lim_{k\to\infty}\int_0^k te^{-st}dt=$$

$$=\lim_{k\to\infty}-\left.\frac{e^{-st}}{s}\right|_0^k+\frac{1}{s}\int_0^k e^{-st}dt=\lim_{k\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}t}{s}-\frac{e^{-st}}{s^2}\right]_0^k=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left[-\frac{e^{-sk}k}{s}-\frac{e^{-sk}}{s^2}+\frac{(0)e^{-s(0)}}{s}+\frac{e^{-s(0)}}{s^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{s^2}$$

por tanto

$$\mathcal{L}\{t\}=\frac{1}{s^2}=F(s)$$

3. Sea $f(t)=e^{at}$

Solución:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{e^{at}\}=\int_0^\infty e^{-st}(e^{at})dt=\int_0^\infty e^{-st+at}dt=$$

$$=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt=\lim_{k\to\infty}\left[-\left(\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\right)\right]_0^k=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left[-\frac{e^{-(s-a)k}}{s-a}+\frac{e^{-(s-a)0}}{s-a}\right]=\frac{1}{s-a}$$

por tanto

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a}=F(s)$$

4. Sea $f(t)=Senat$

Solución:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{Senat\}=\int_0^\infty e^{-st}(Senat)dt=\lim_{k\to\infty}\int_0^k e^{-st}(Senat)dt=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s}Senat\Big|_0^k+\frac{a}{s}\int e^{-st}Cosatdt\right]=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s}Senat\Big|_0^k-\frac{a}{s^2}e^{-st}Cosat\Big|_0^k-\frac{a^2}{s^2}\int_0^k e^{-st}Senatdt\right]$$

despejando la integral a primer miembro

$$\int_0^{\infty} e^{-st} Senatdt + \frac{a^2}{s^2}\int_0^{\infty} e^{-st} Senatdt = \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s} Senat - \frac{a}{s^2} e^{-st} Cosat\right]_0^k =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{e^{-sk}}{s} Senak - \frac{a}{s^2} e^{-sk} Cosak + \frac{e^{-s(0)}}{s} Sena(0) + \frac{a}{s^2} e^{-s(0)} Cosa(0)\right]$$

simplificando la expresión anterior tenemos

$$\mathcal{L}\{Senat\}\left(1 + \frac{a^2}{s^2}\right) = \frac{a}{s^2}$$

por tanto

$$\mathcal{L}\{Senat\} = \frac{a}{s^2 + a^2} = F(s)$$

5. Sea $f(t) = Senhat = \dfrac{e^{at} - e^{-at}}{2}$

Solución:

Como

$$Senhat = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$$

entonces

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{Senhat\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\left(\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right)dt =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left[\int_0^k \frac{e^{-(s-a)t}}{2}dt - \int_0^k \frac{e^{-(s+a)t}}{2}dt\right] =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{e^{-(s-a)t}}{2(s-a)} + \frac{e^{-(s+a)t}}{2(s+a)}\right]_0^k =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{e^{-k(s-a)}}{2(s-a)} + \frac{e^{-(s+a)k}}{2(s+a)} + \frac{e^{-(s-a)(0)}}{2(s-a)} - \frac{e^{-(s-a)(0)}}{2(s+a)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2(s-a)} - \frac{1}{2(s+a)} = \frac{s+a-s+a}{2(s-a)(s+a)} =$$

$$= \frac{2a}{2(s-a)(s+a)} = \frac{a}{s^2 - as + as - a^2} =$$

$$= \frac{a}{s^2 - a^2}$$

por tanto

$$\mathcal{L}\{Senhat\} = = \frac{a}{s^2 - a^2} = F(s)$$

6. Sea $f(t) = e^{bt} Senat$

Solución:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{e^{bt} Senat\} = \int_0^\infty e^{-st}\left(e^{bt} Senat\right)dt = \lim_{k\to\infty}\int_0^k e^{-(s-b)t} Senatdt =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{e^{-(s-b)t}}{s-b} Senat\Big|_0^k + \frac{a}{s-b}\int_0^k e^{-(s-b)t} Cosatdt\right] =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{e^{-(s-b)t}}{s-b} Senat\Big|_0^k + \frac{a}{s-b}\left(-\frac{e^{-(s-b)t}}{s-b} Cosat\Big|_0^k - \frac{a}{s-b}\int_0^k e^{-(s-b)t} Senat\right)\right]$$

despejando la integral a primer miembro

$$\left(\int_0^\infty e^{-(s-b)t} Senatdt\right)\left(1 + \frac{a^2}{(s-b)^2}\right) = \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{e^{-(s-b)t}}{s-b} Senat - \frac{ae^{-(s-b)t}}{(s-b)^2}\right]_0^k =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{e^{-(s-b)k}}{s-b} Senak - \frac{ae^{-(s-b)k}}{(s-b)^2} + \frac{e^{-(s-b)(0)}}{s-b} Sena(0) + \frac{ae^{-(s-b)(0)}}{(s-b)^2}\right]$$

simplificando la expresión anterior tenemos

$$\mathcal{L}\{e^{bt} Senat\}\left(\frac{(s-b)^2 + a^2}{(s-b)^2}\right) = \frac{a}{(s-b)^2}$$

por tanto

$$\mathcal{L}\{e^{bt} Senat\} = \frac{a}{(s-b)^2 + a^2} = F(s)$$

7. Sea $f(t) = e^{bt} Senhat$

Solución:

Como

$$Senhat = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$$

entonces

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{e^{bt} Senhat\} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-st} e^{bt}\left(e^{at} - e^{-at}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\int_0^{k} e^{-(s-b)t}\left(e^{at} - e^{-at}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\left[\int_0^{k} e^{-(s-b-a)t}dt - \int_0^{k} e^{-(s-b+a)t}dt\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\left[-\frac{e^{-(s-b-a)t}}{(s-b-a)} + \frac{e^{-(s-b+a)t}}{(s-b+a)}\right]_0^k =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{(s-b-a)} - \frac{1}{(s-b+a)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{s-b+a-s+b+a}{(s-b-a)(s-b+a)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2a}{(s-b)^2 - a^2}\right]$$

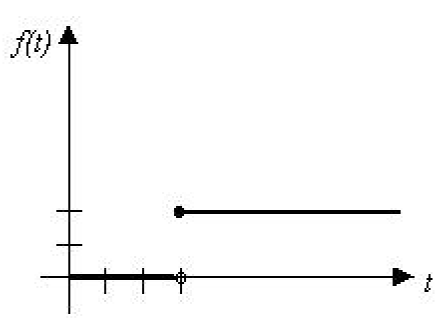
por tanto

$$\mathcal{L}\{e^{bt} Senhat\} = \frac{a}{(s-b)^2 - a^2} = F(s)$$

8. Sea $f(t) = \begin{cases} 0; & 0 \le t < 3 \\ 2; & t \ge 3 \end{cases}$

Solución:

La grafica de $f(t)$ es



entonces

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \underbrace{\int_0^{3} e^{-st}(0)dt}_{=0} + \int_3^{\infty} e^{-st}\, 2dt =$$

$$= 2\int_3^{\infty} e^{-st}dt = 2\lim_{k\to\infty}\int_3^{k} e^{-st}dt$$

$$= 2\lim_{k\to\infty}\left[-\frac{e^{-sk}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s}\right] = \frac{2e^{-3s}}{s}$$

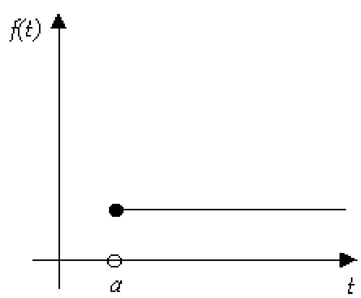
por tanto

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2e^{-3s}}{s} = F(s)$$

9.- Sea $f(t) = \begin{cases} 0; & 0 \le t < a \\ 1; & t \ge a \end{cases}$

Solución:

La grafica de $f(t)$ es



entonces

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \underbrace{\int_0^{a} e^{-st}(0)dt}_{=0} + \int_a^{\infty} e^{-st}(1)dt =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\int_a^{k} e^{-st}dt = \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_a^k = \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{e^{-sk}}{s} + \frac{e^{-sa}}{s}\right] =$$

$$= \frac{e^{-as}}{s}$$

por tanto

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{e^{-as}}{s} = F(s)$$

La función

$$f(t) = H\left(t-a\right) = \begin{cases} 0; & 0 \le t < a \\ 1; & t \ge a \end{cases}$$

recibe el nombre de salto unitario de Heaviside, o simplemente, función de escalón unitario denotada también por $U(t-a)$ y será estudiada con más detalle en la *sección 4.6*.

4.2 ORDEN EXPONENCIAL

Definición:	Se dice que una función $f(t)$ es de orden exponencial *C* si existen constantes *C*, $M>0$ y $t>0$ tales que $\lvert f(t)\rvert \le Me^{Ct}$ para todo *t* suficientemente grande.

De la definición, el mostrar que $\lvert f(t)\rvert \le Me^{Ct}$ se cumpla, es equivalente a probar que

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{e^{Ct}}=0$$

en otras palabras, decimos que una función $f(t)$ es de orden exponencial si se satisfacen cuales quiera de las dos condiciones siguientes

$$\lvert f(t)\rvert \le Me^{Ct} \text{ ó bien } \lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{e^{Ct}}=0$$

demos esta afirmación sin demostración.

4.2.1 EJEMPLOS

1. ¿Es de orden exponencial $f(t)=t^n$?

   Solución:

   $$\lim_{t\to\infty}\frac{t^n}{e^{ct}}=\lim_{t\to\infty}t^n e^{-ct}=0$$

   por tanto $f(t)=t^n$ es de orden exponencial.

2. ¿Es de orden exponencial $f(t)=Sent$?

   Solución:

   $$\lim_{t\to\infty}\frac{Sent}{e^{ct}}=\lim_{t\to\infty}e^{-ct}Sent=0$$

   por tanto $f(t)=Sent$ es de orden exponencial.

3. ¿Es de orden exponencial $f(t)=e^{t^2}$?

   Solución:

   $$\lim_{t\to\infty}\frac{e^{t^2}}{e^{ct}}=\lim_{t\to\infty}e^{t^2}e^{-ct}=\lim_{t\to\infty}e^{t(t-c)}=\infty$$

   por tanto $f(t)=e^{t^2}$ no es de orden exponencial.

Dado lo anterior valdría la pena hacernos la siguiente pregunta ¿ Que implicación tiene el hecho de que una función sea o no de orden exponencial para el tema que nos ocupa en el presente capitulo?. La respuesta a esta pregunta la dará el siguiente

Teorema:	Si $f(t)$ es continua o continua a tramos en el intervalo $[0,\infty)$ y de orden exponencial C para $t \geq 0$ entonces la transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > C$.

Se da el teorema sin demostración.

4.3 MANEJO DE TABLAS DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

En la práctica, el uso directo de la definición formal de la transformada de Laplace a problemas concretos, podría resultar no ser lo más recomendable, ya que, como se vio en la *sección 4.1.1*, la dificultad de encontrar la transformada de Laplace de una función depende de la forma de dicha función y más aún, si el problema se presenta como una combinación lineal de productos y cocientes de diversas funciones, la determinación de la transformada de Laplace se complica enormemente. Afortunadamente, de forma paralela al desarrollo de esta teoría se han elaborado tablas que acumulan los resultados de las transformadas de Laplace de algunas funciones trascendentes, el manejo adecuado de este material, podrá facilitarnos en gran medida nuestra tarea. La siguiente definición será de gran utilidad

Definición:	El operador transformada de Laplace es un operador lineal, esto es, para funciones cualquiera $f(t)$ y $g(t)$ cuyas transformadas de Laplace existe (i.e., $f(t)$ y $g(t)$ son de orden exponencial *C*). Tenemos para cualesquiera números reales *a, b* $$\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\} = a\,\mathcal{L}\{f(t)\} + b\,\mathcal{L}\{g(t)\}$$

esto es

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\left[af(t)+bg(t)\right]dt = \\
&= \int_0^\infty e^{-st}\left[af(t)\right]dt + \int_0^\infty e^{-st}\left[bg(t)\right]dt = \\
&= a\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt + b\int_0^\infty e^{-st} g(t)dt = \\
&= a\,\mathcal{L}\{f(t)\} + b\,\mathcal{L}\{g(t)\}
\end{aligned}$$

En la *tabla 1* se presentan las transformadas de Laplace de algunas funciones elementales

No.	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	t	$\frac{1}{s^2}$
3	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $n \geq 0$
4	t^α	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$, $\alpha > -1$
5	$Senkt$	$\frac{k}{s^2+k^2}$
6	$Coskt$	$\frac{s}{s^2+k^2}$
7	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
8	$Senhkt$	$\frac{k}{s^2-k^2}$
9	$Coshkt$	$\frac{s}{s^2-k^2}$
10	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $n \geq 0$

Tabla 1

4.3.1 EJEMPLOS

1. Determinar $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}t^3 + t^2 - 1\right\}$

   Solución:

   Por la propiedad de linealidad del operador $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}t^3 + t^2 - 1\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}t^3\right\} + \mathcal{L}\{t^2\} - \mathcal{L}\{1\}$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{t^3\} + \mathcal{L}\{t^2\} - \mathcal{L}\{1\} \ldots (1)$$

usando los resultados de la tabla

$$\mathcal{L}\left\{t^n\right\}=\frac{n!}{s^{n+1}}\text{, si } n=3\ \ \mathcal{L}\left\{t^3\right\}=\frac{3!}{s^{3+1}}=\frac{6}{s^4}\ldots(2)$$

$$\text{, si } n=2\ \ \mathcal{L}\left\{t^2\right\}=\frac{2!}{s^{2+1}}=\frac{2}{s^3}\ldots(3)$$

$$\text{, si } n=0\ \ \mathcal{L}\left\{t^0\right\}=\mathcal{L}\left\{1\right\}=\frac{0!}{s^{0+1}}=\frac{1}{s}\ldots(4)$$

sustituyendo (2), (3) y (4) en (1)

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}t^3+t^2-1\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{6}{s^4}\right)+\frac{2}{s^3}-\frac{1}{s}=\frac{3}{s^4}+\frac{2}{s^3}-\frac{1}{s}$$

por tanto

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}t^3+t^2-1\right\}=\frac{3}{s^4}+\frac{2}{s^3}-\frac{1}{s}$$

2. Determinar $\mathcal{L}\left\{2e^{3t}-e^{-3t}\right\}=2\,\mathcal{L}\left\{e^{3t}\right\}-\mathcal{L}\left\{e^{-3t}\right\}$

Solución:

Por la propiedad de linealidad del operador $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}\left\{2e^{3t}-e^{-3t}\right\}=2\,\mathcal{L}\left\{e^{3t}\right\}-\mathcal{L}\left\{e^{-3t}\right\}\ldots(1)$$

usando los resultados de la tabla

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\}=\frac{1}{s-a}\text{, si } a=3\text{, entonces } \mathcal{L}\left\{e^{3t}\right\}=\frac{1}{s-3}\ldots(2)$$

$$\text{, si } a=-3\text{, entonces } \mathcal{L}\left\{e^{-3t}\right\}=\frac{1}{s-(-3)}=\frac{1}{s+3}\ldots(3)$$

sustituyendo (2) y (3) en (1)

$$\mathcal{L}\left\{2e^{3t}-e^{-3t}\right\}=2\,\mathcal{L}\left\{e^{3t}\right\}-\mathcal{L}\left\{e^{-3t}\right\}=\frac{2}{s-3}-\frac{1}{s+3}=\frac{2(s+3)-(s-3)}{(s-3)(s+3)}=$$

$$=\frac{2s+6-s+3}{s^2+9}=\frac{s+9}{s^2-9}$$

por tanto

$$\mathcal{L}\left\{2e^{3t}-e^{-3t}\right\}=\frac{s+9}{s^2-9}$$

3. Determinar $\mathcal{L}\left\{4e^{5t}+6t^3-3Sen4t+2Cos2t\right\}$

Solución:

Por la propiedad de linealidad del operador $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}\left\{4e^{5t}+6t^3-3Sen4t+2Cos2t\right\}=4\,\mathcal{L}\left\{e^{5t}\right\}+6\,\mathcal{L}\left\{t^3\right\}-3\,\mathcal{L}\left\{Sen4t\right\}+2\,\left\{Cos2t\right\}\ldots(1)$$

usando los resultados de la tabla

$\mathcal{L}\left\{t^n\right\}=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$, si $n=3$, entonces $\mathcal{L}\left\{t^3\right\}=\dfrac{3!}{s^{3+1}}=\dfrac{6}{s^4}\ldots(2)$

$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\}=\dfrac{1}{s-a}$, si $a=5$ entonces, $\mathcal{L}\left\{e^{5t}\right\}=\dfrac{1}{s-5}\ldots(3)$

$\mathcal{L}\left\{Senkt\right\}=\dfrac{k}{s^2+k^2}$, *si* $k=4$ entonces, $\mathcal{L}\left\{Sen4t\right\}=\dfrac{4}{s^2+16}\ldots(4)$

$\mathcal{L}\left\{Coskt\right\}=\dfrac{s}{s^2+k^2}$, si $k=2$ entonces, $\mathcal{L}\left\{Cos2t\right\}=\dfrac{s}{s^2+4}\ldots(5)$

sustituyendo (2), (3), (4) y (5) en (1)

$$\mathcal{L}\left\{4e^{5t}+6t^3-3Sen4t+2Cos2t\right\}=\frac{4}{s-5}+6\left(\frac{6}{s^4}\right)-3\left(\frac{4}{s^2+16}\right)+2\left(\frac{s}{s^2+4}\right)$$

por tanto

$$\mathcal{L}\left\{4e^{5t}+6t^3-3Sen4t+2Cos2t\right\}=\frac{4}{s-5}+\frac{36}{s^4}-\frac{12}{s^2+16}+\frac{25}{s^2+4}$$

4.4 LA FUNCIÓN GAMMA

La definición de Euler de la función Gamma es

$$\Gamma(t)=\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}\,dt$$

para que la integral converja se requiere que $n-1>-1$ ó $n>0$.

4.4.1 FORMULAS DE RECURRENCIA

A continuación se presentan algunos resultados importantes de la función Gamma

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n) \text{ (aquí } n \text{ puede ser entero o fracción)}$$
$$\Gamma(n+1)=n! \text{ si } n=0,1,2,\ldots \text{ donde } 0!=1$$

algunos valores de la función Gamma son

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$
$$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1)}{2m}\sqrt{\pi} \quad ; \quad m=1,2,3\ldots$$
$$\Gamma\left(-m+\frac{1}{2}\right)=\frac{(-1)^m 2^m\sqrt{\pi}}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1)} \quad ; \quad m=1,2,3\ldots$$

4.4.2 EJEMPLOS

1. Demostrar que si $f(t)=t^\alpha$, entonces

$$\mathcal{L}\left\{t^\alpha\right\}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}},\alpha>-1$$

Solución:

Usando la definición de la Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left\{t^\alpha\right\}=\int_0^\infty e^{-st}t^\alpha dt=\left[-\frac{t^\alpha e^{-st}}{s}\bigg|_0^\infty+\frac{\alpha}{s}\int_0^\infty e^{-st}t^{\alpha-1}dt\right]=$$

haciendo el cambio $w=st$, entonces $dw=sdt$, luego

$$=\frac{\alpha}{s}\int_0^\infty e^{-w}\left(\frac{w}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{dw}{s}=\frac{\alpha}{s^{\alpha+1}}\int_0^\infty w^{\alpha-1}e^{-w}dw=$$

pero

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty w^{\alpha-1}e^{-w}dw$$

entonces

$$=\frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{s^{\alpha+1}}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$$

por tanto

$$\mathcal{L}\left\{t^{\alpha}\right\}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}},\quad \alpha>-1$$

Usando el resultado anterior determine $\mathcal{L}\{f(t)\}$ para

2. Sea $f(t)=t^{-1/2}$

Solución:

$$\mathcal{L}\left\{t^{-1/2}\right\}=\frac{\Gamma\left(-1/2+1\right)}{s^{-1/2+1}}=\frac{\Gamma\left(1/2\right)}{s^{1/2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

por tanto

$$\mathcal{L}\left\{t^{-1/2}\right\}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

3. Sea $f(t)=t^{1/2}$

Solución:

$$\mathcal{L}\left\{t^{1/2}\right\}=\frac{\Gamma\left(1/2+1\right)}{s^{1/2+1}}=\frac{1/2\,\Gamma\left(1/2\right)}{s^{3/2}}=\frac{1/2\sqrt{\pi}}{s^{3/2}}$$

por tanto

$$\mathcal{L}\left\{t^{1/2}\right\}=\frac{1/2\sqrt{\pi}}{s^{3/2}}$$

4. Sea $f(t) = t^{7/2}$

Solución:

$$\mathcal{L}\{t^{7/2}\} = \frac{\Gamma\left(7/2+1\right)}{s^{7/2+1}} = \frac{7/2\,\Gamma\left(7/2\right)}{s^{9/2}} = \frac{7/2\,\Gamma\left(5/2+1\right)}{s^{9/2}} =$$

$$= \frac{\left(7/2\right)\left(5/2\right)\Gamma\left(3/2+1\right)}{s^{9/2}} = \frac{\left(7/2\right)\left(5/2\right)\left(3/2\right)\Gamma\left(1/2+1\right)}{s^{9/2}} =$$

$$= \frac{\left(7/2\right)\left(5/2\right)\left(3/2\right)\left(1/2\right)\Gamma\left(1/2\right)}{s^{9/2}} = \frac{105/16\sqrt{\pi}}{s^{9/2}}$$

por tanto

$$\mathcal{L}\{t^{7/2}\} = \frac{105/16\sqrt{\pi}}{s^{9/2}}$$

5. Sea $f(t) = \left(t^{1/4} + t^{-1/4}\right)^2$

Solución:

$$\mathcal{L}\left(t^{1/4} + t^{-1/4}\right)^2 = \mathcal{L}\{t^{1/2} + 2 + t^{-1/2}\} = \mathcal{L}\{t^{1/2}\} + \mathcal{L}\{2\} + \mathcal{L}\{t^{-1/2}\} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} + \frac{2}{s} + \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

por tanto

$$\mathcal{L}\left(t^{1/4} + t^{-1/4}\right)^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} + \frac{2}{s} + \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

4.5 PRIMER TEOREMA DE TRASLACIÓN

Teorema:	Si $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$, entonces $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)$ para $s>a$; en otras palabras, se obtiene la transformada de $e^{at}f(t)$ sustituyendo *s* por $s-a$ en la transformada de Laplace de $f(t)$, i.e, $$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}=\mathcal{L}\{f(t)\}\Big\vert_{s\to s-a}=F(s)\Big\vert_{s\to s-a}=F(s-a)$$

Se da el teorema sin demostración.

4.5.1 EJEMPLOS

Evalúe

1. $\mathcal{L}\{e^{5t}t^3\}$

   Solución:

$$\mathcal{L}\{e^{5t}t^3\}=\mathcal{L}\{t^3\}\Big\vert_{s\to s-5}=\left.\frac{6}{s^4}\right\vert_{s\to s-5}=\frac{6}{(s-5)^4}$$

   por tanto

$$\mathcal{L}\{e^{5t}t^3\}=\frac{6}{(s-5)^4}$$

2. $\mathcal{L}\{e^{-2t}Cos4t\}$

   Solución:

$$\mathcal{L}\{e^{-2t}Cos4t\}=\mathcal{L}\{Cos4t\}\Big\vert_{s\to s+2}=\left.\frac{s}{s^2+16}\right\vert_{s\to s+2}=\frac{s+2}{(s+2)^2+16}=\frac{s+2}{s^2+4s+20}$$

   por tanto

$$\mathcal{L}\{e^{-2t}Cos4t\}=\frac{s+2}{s^2+4s+20}$$

3. $\mathcal{L}\left\{\left(e^{t}+e^{2t}\right)^{2}t\right\}$

Solución:

$$\mathcal{L}\left\{\left(e^{t}+e^{2t}\right)^{2}t\right\}=\mathcal{L}\left\{\left(e^{2t}+2e^{3t}+e^{4t}\right)t\right\}=\mathcal{L}\left\{e^{2t}t\right\}+2\,\mathcal{L}\left\{e^{3t}t\right\}+\mathcal{L}\left\{e^{4t}t\right\}=$$
$$=\mathcal{L}\left\{t\right\}\Big|_{s\to s-2}+2\,\mathcal{L}\left\{t\right\}\Big|_{s\to s-3}+\mathcal{L}\left\{t\right\}\Big|_{s\to s-4}=$$
$$=\left.\frac{1}{s^{2}}\right|_{s\to s-2}+\left.\frac{2}{s^{2}}\right|_{s\to s-3}+\left.\frac{1}{s^{2}}\right|_{s\to s-4}=$$
$$=\frac{1}{(s-2)^{2}}+\frac{2}{(s-3)^{2}}+\frac{1}{(s-4)^{2}}$$

por tanto

$$\mathcal{L}\left\{\left(e^{t}+e^{2t}\right)^{2}t\right\}=\frac{1}{(s-2)^{2}}+\frac{2}{(s-3)^{2}}+\frac{1}{(s-4)^{2}}$$

4. $\mathcal{L}\left\{e^{2t}(t-1)^{2}\right\}$

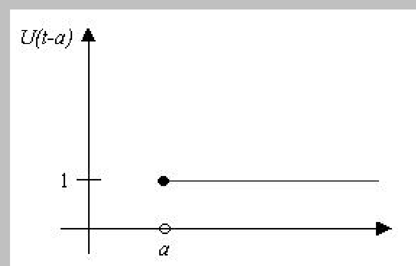
Solución:

$$\mathcal{L}\left\{e^{2t}(t-1)^{2}\right\}=\mathcal{L}\left\{e^{2t}(t^{2}-2t+1)\right\}=\mathcal{L}\left\{e^{2t}t^{2}\right\}-2\,\mathcal{L}\left\{e^{2t}t\right\}+\mathcal{L}\left\{e^{2t}\right\}=$$
$$=\mathcal{L}\left\{t^{2}\right\}\Big|_{s\to s-2}-2\,\mathcal{L}\left\{t\right\}\Big|_{s\to s-2}+\mathcal{L}\left\{e^{2t}\right\}=$$
$$=\left.\frac{2}{s^{3}}\right|_{s\to s-2}-\left.\frac{2}{s^{2}}\right|_{s\to s-2}+\frac{1}{s-2}=$$
$$=\frac{2}{(s-2)^{3}}-\frac{2}{(s-2)^{2}}+\frac{1}{s-2}$$

por tanto

$$\mathcal{L}\left\{e^{2t}(t-1)^{2}\right\}=\frac{2}{(s-2)^{3}}-\frac{2}{(s-2)^{2}}+\frac{1}{s-2}$$

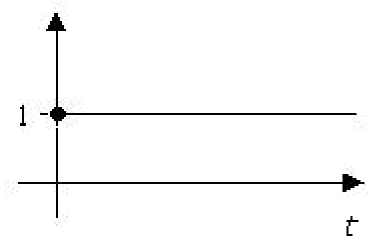
4.6 FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO

Definición: **Función** $U(t-a)$	La función escalón unitario, $U(t-a)$ se define como $$U(t-a)=\begin{cases}0; & 0\le t<a\\ 1; & t\ge a\end{cases}$$ Gráficamente tenemos 

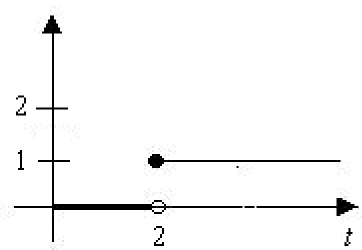
4.6.1 EJEMPLOS

Usando la definición anterior grafique

1) $U(t)=1 \;\; ; \;\; t\ge 0$



2) $U(t-2)=\begin{cases}0; & 0\le t<2\\ 1; & t\ge 2\end{cases}$



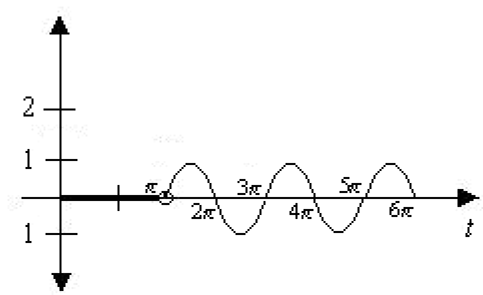
Si ahora multiplicamos a la función escalón unitario $U(t-a)$ por alguna función $g(t)$ con $t \geq 0$, esto es

$$g(t)U(t-a) = \begin{cases} 0; & 0 \leq t < a \\ g(t); & t \geq a \end{cases}$$

¿Qué ocurre con la gráfica de $U(t-a)$?. Por ejemplo, si multiplicamos la función $U(t-2\pi)$ por la función $g(t) = Sent$ con $t \geq 0$, se tiene

$$SentU(t-2\pi) = \begin{cases} 0; & 0 \leq t < 2\pi \\ Sent; & t \geq 2\pi \end{cases}$$

entonces, gráficamente tenemos



Nota: En la práctica, $f(t)$ puede representar la corriente que circula a través de un circuito eléctrico. En este caso, el papel que juega la función escalón unitario $U(t-a)$ al multiplicarla por $f(t)$ es el de un interruptor que, por decirlo así, conecta y desconecta a $f(t)$, esto es, dado que la función escalón unitario únicamente toma los valores 0 y 1, cuando $U(t-a)=0$, por el circuito eléctrico no hay circulación de corriente y decimos que el interruptor se encuentra abierto, sin embargo, cuando $U(t-a)=1$, entonces $f(t)U(t-a)$ representa una respuesta del circuito indicándonos que el interruptor esta cerrado y por tanto hay circulación de corriente a través de el.

Trabajemos ahora en forma inversa, es decir, dada una función $f(t)$ definida por intervalos,

$$f(t) = \begin{cases} 0; & 0 \leq t < 2\pi \\ Sent; & t \geq 2\pi \end{cases}$$

¿Cómo representamos a dicha función en términos de la función escalón unitario $U(t-a)$?

Si en general definimos a $f(t)$ como

$$f(t) = \begin{cases} g(t); & 0 \leq t < a \\ h(t); & t \geq a \end{cases} \quad \ldots(1)$$

entonces

$$f(t)=\begin{cases} g(t); & 0\le t<a \\ h(t); & t\ge a \end{cases} = g(t)+\begin{cases} 0; & 0\le t<a \\ -g(t)+h(t); & t\ge a \end{cases} =$$
$$= g(t)+\left[-g(t)+h(t)\right]U(t-a)=$$
$$= g(t)-g(t)U(t-a)+h(t)U(t-a)$$

por tanto tenemos que (1) en términos de $U(t-a)$ viene dada por

$$f(t)=\begin{cases} g(t); & 0\le t<a \\ h(t); & t\ge a \end{cases} = g(t)-g(t)U(t-a)+h(t)U(t-a)\ldots(2)$$

siguiendo el mismo esquema, una función definida en tres intervalos en términos de $U(t-a)$ viene dada

$$f(t)=\begin{cases} g(t); & 0\le t<a \\ h(t); & a\le t<b \\ q(t); & t\ge b \end{cases} = g(t)-g(t)U(t-a)+h(t)U(t-a)-h(t)U(t-b)+q(t)U(t-b)\ldots(3)$$

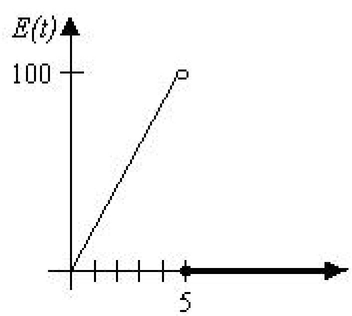
Por ejemplo, el voltaje de un circuito eléctrico está dado por

$$E(t)=\begin{cases} 20t; & 0\le t<5 \\ 0; & t\ge 5 \end{cases}$$

grafique y exprese a $E(t)$ en términos de funciones escalón unitario.

Solución:

La gráfica de la función $E(t)$ es



y de acuerdo con la ecuación (2) de esta la sección, la función $E(t)$ en términos de $U(t-a)$, siendo $a=5$, viene dada por

$$E(t)=\begin{cases} 20t; & 0\le t<5 \\ 0; & t\ge 5 \end{cases} = 20t-20tU(t-5)$$

4.7 SEGUNDO PROBLEMA DE TRASLACIÓN

Teorema:	Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ entonces $$\mathcal{L}\{f(t-a)U(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-as}F(s) \qquad ; \quad a > 0$$

Se da el teorema sin demostración.

4.7.1 Ejemplos

1. Evaluar $\mathcal{L}\{(t-2)^3 U(t-2)\}$

Solución:

Del problema, si $f(t-2) = (t-2)^3$, entonces $f(t) = t^3$, y de acuerdo con el *teorema 4.7*, se tiene que

$$\mathcal{L}\{(t-2)^3 U(t-2)\} = e^{-2s}\,\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{6e^{-2s}}{s^4}$$

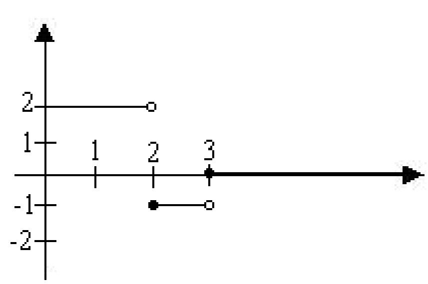
por tanto

$$\mathcal{L}\{(t-2)^3 U(t-2)\} = \frac{6e^{-2s}}{s^4}$$

Si en el teorema $f(t-a) = 1$, entonces

$$\mathcal{L}\{U(t-a)\} = e^{-as}\,\mathcal{L}\{1\} = \frac{e^{-as}}{s}$$

2. Determine la transformada de Laplace de la función



Solución:

Analíticamente la función descrita en la gráfica es

$$f(t)=\begin{cases}2; & 0\le t<2\\ \text{-}1; & 2\le t<3\\ 0; & t\ge 3\end{cases}$$

que en términos de funciones escalón unitario toma la forma

$$f(t)=\begin{cases}2; & 0\le t<2\\ \text{-}1; & 2\le t<3=2-2U(t-2)-U(t-2)-U(t-3)\\ 0; & t\ge 3\end{cases}$$

o bien

$$f(t)=2-3U(t-2)-U(t-3)$$

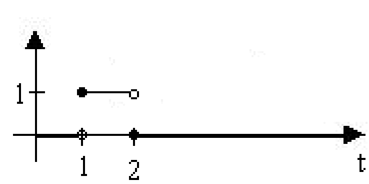
de acuerdo con el *teorema 4.7*, se tiene que

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=2\,\mathscr{L}\{1\}-3\,\mathscr{L}\{U(t-2)\}-\mathscr{L}\{U(t-3)\}=\frac{2}{s}-\frac{3e^{-2s}}{s}-\frac{e^{-3s}}{s}$$

por tanto

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\frac{2}{s}-\frac{3e^{-2s}}{s}-\frac{e^{-3s}}{s}$$

3. Determine la transformada de Laplace de



Solución:

Analíticamente la función descrita en la gráfica es

$$f(t)=\begin{cases}0; & 0\le t<1\\ 1; & 1\le t<2\\ 0; & t\ge 2\end{cases}$$

que en términos de funciones escalón unitario toma la forma

$$f(t)=\begin{cases}0; & 0\le t<1\\ 1; & 1\le t<2\\ 0; & t\ge 2\end{cases}=U(t-1)-U(t-2)$$

de acuerdo con el *teorema 4.7*, se tiene que

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{U(t-1)-U(t-2)\}=\mathcal{L}\{U(t-1)\}-\mathcal{L}\{U(t-2)\}=\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-2s}}{s}$$

por tanto

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-2s}}{s}$$

4. Evaluar

$$f(t)=\begin{cases}0; & 0\le t<2\pi\\ Sent; & 2\pi\le t<5\pi\\ 0; & t\ge 5\pi\end{cases}$$

Solución:

En términos de funciones escalón unitario se tiene que

$$f(t)=\begin{cases}0; & 0\le t<2\pi\\ Sent; & 2\pi\le t<5\pi\\ 0; & t\ge 5\pi\end{cases}=SentU(t-2\pi)-SentU(t-5\pi)$$

dado que la función a transformar no tiene la forma $f(t-a)U(t-a)$, entonces el *teorema 4.7* no es aplicable para este ejemplo. En la siguiente sección se enunciara una forma alternativa de este teorema el cual contempla una solución para resolver estos casos.

4.8 SEGUNDO PROBLEMA DE TRASLACIÓN EN SU FORMA ALTERNATIVA

Teorema: Si la función $g(t)$ carece de la forma $f(t-a)$ desplazada que se requiere en el teorema anterior, entonces

$$\mathcal{L}\{g(t)U(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\left\{g(t)\big|_{t\to t+a}\right\} = e^{-as}\mathcal{L}\{g(t+a)\},\quad a>0$$

Se da el teorema sin demostración.

4.8.1 EJEMPLOS

1. Evalúe $\mathcal{L}\{SentU(t-2\pi)\}$

   Solución:

   En este caso $g(t) = Sent$ y $a = 2\pi$, entonces $g(t+2\pi) = Sen(t+2\pi) = Sent$, y de acuerdo con el *teorema 4.8*, se tiene que

$$\mathcal{L}\{SentU(t-2\pi)\} = e^{-2\pi s}\mathcal{L}\{Sent\} = \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

   por tanto

$$\mathcal{L}\{SentU(t-2\pi)\} = \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

2. Evalúe $\mathcal{L}\{(3t+1)U(t-3)\}$

   Solución:

   Aplicando directamente el *teorema 4.8* se tiene

$$\mathcal{L}\{(3t+1)U(t-3)\} = e^{-3s}\mathcal{L}\left\{(3t+1)\big|_{t\to t+3}\right\} = e^{-3s}\mathcal{L}\{3(t+3)+1\} =$$
$$= e^{-3s}\mathcal{L}\{3t+10\} = e^{-3s}\left(\frac{3}{s^2}+\frac{10}{s}\right)$$

   por tanto

$$\mathcal{L}\{(3t+1)U(t-3)\} = e^{-3s}\left(\frac{3}{s^2}+\frac{10}{s}\right)$$

3. Evalúe $\mathcal{L}\{tU(t-2)\}$

Solución:

Aplicando directamente el *teorema 4.8* se tiene

$$\mathcal{L}\{tU(t-2)\} = e^{-2s}\,\mathcal{L}\{t|_{t\to t+2}\} = e^{-2s}\,\mathcal{L}\{t+2\} = e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s}\right)$$

por tanto

$$\mathcal{L}\{tU(t-2)\} = e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s}\right)$$

4. Evalúe $\mathcal{L}\{e^{t+1}U(t-3)\}$

Solución:

Aplicando directamente el *teorema 4.8* se tiene

$$\mathcal{L}\{e^{t+1}U(t-3)\} = e^{-3s}\,\mathcal{L}\{e^{t+1}|_{t\to t+3}\} = e^{-3s}\,\mathcal{L}\{e^{t+4}\} = e^{-3s}\,\mathcal{L}\{e^{t}e^{4}\} =$$
$$= e^{-3s}e^{4}\,\mathcal{L}\{e^{t}\} = e^{-3s+4}\left(\frac{1}{s-1}\right)$$

por tanto

$$\mathcal{L}\{e^{t+1}U(t-3)\} = e^{-3s+4}\left(\frac{1}{s-1}\right)$$

4.9 DERIVADAS DE TRANSFORMADAS

Teorema: Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y $n = 1,2,3,\ldots$, entonces

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\{f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s)$$

Se da el teorema sin demostración.

4.9.1 EJEMPLOS

1. Evalúe $\mathcal{L}\{te^{3t}\}$

   Solución:

   Aplicando directamente el *teorema 4.9* se tiene

$$\mathcal{L}\{te^{3t}\} = (-1)\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{e^{3t}\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-3}\right) = \frac{1}{(s-3)^2}$$

   por tanto

$$\mathcal{L}\{te^{3t}\} = \frac{1}{(s-3)^2}$$

2. Evalúe $\mathcal{L}\{tSenkt\}$

   Solución:

   Aplicando directamente el *teorema 4.9* se tiene

$$\mathcal{L}\{tSenkt\} = (-1)\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{Senkt\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{k}{s^2+k^2}\right) =$$

$$= -k\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+k^2}\right) = -k\left(-\frac{2s}{(s^2+k^2)^2}\right) =$$

$$= \frac{2sk}{(s^2+k^2)^2}$$

   por tanto

$$\mathcal{L}\{tSenkt\} = \frac{2sk}{(s^2+k^2)^2}$$

3. Evalúe $\mathcal{L}\left\{te^{-t}Cost\right\}$

Solución:

Aplicando directamente el *teorema 4.9* se tiene

$$\mathcal{L}\left\{te^{-t}Cost\right\}=(-1)\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left\{e^{-t}Cost\right\}=-\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left\{Cost\right\}\Big|_{s\to s+1}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)\Bigg|_{s\to s+1}=$$

$$=-\frac{d}{ds}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right)=-\left(\frac{(s+1)^2+1-(s+1)2(s+1)}{\left[(s+1)^2+1\right]^2}\right)=$$

$$=-\left(\frac{(s+1)^2+1-2(s+1)^2}{\left[(s+1)^2+1\right]^2}\right)=\frac{-(s+1)^2+2(s+1)^2-1}{\left[(s+1)^2+1\right]^2}=$$

$$=\frac{(s+1)^2-1}{\left[(s+1)^2+1\right]^2}$$

por tanto

$$\mathcal{L}\left\{te^{-t}Cost\right\}=\frac{(s+1)^2-1}{\left[(s+1)^2+1\right]^2}$$

4. Evalúe $\mathcal{L}\left\{(t-1)^3e^{t-1}U(t-1)\right\}$

Solución:

Desarrollando un poco la función a transformar se tiene

$$\mathcal{L}\left\{(t-1)^3e^{t-1}U(t-1)\right\}=\mathcal{L}\left\{\left(t^3+3t-3t^2-1\right)\underbrace{e^{t-1}U(t-1)}_{f(t)}\right\}$$

o bien

$$\mathcal{L}\left\{(t-1)^3e^{t-1}U(t-1)\right\}=\mathcal{L}\left\{t^3f(t)\right\}+3\mathcal{L}\left\{tf(t)\right\}-3\mathcal{L}\left\{t^2f(t)\right\}-\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$$

si aplicamos directamente el *teorema 4.9* a este problema, resultaría muy laborioso, pues, tendríamos que encontrar segundas y terceras derivadas de las funciones $F(s)$ resultantes en el desarrollo, sin embargo si proponemos

$$\mathcal{L}\left\{e^{t-1}(t-1)^3U(t-1)\right\}=e^{-1}\mathcal{L}\left\{e^t\underbrace{(t-1)^3U(t-1)}_{f(t)}\right\}$$

mediante los teoremas primero y segundo de traslación la tarea se simplifica considerablemente, esto es

$$\mathcal{L}\left\{e^{t-1}(t-1)^3 U(t-1)\right\} = e^{-1}\mathcal{L}\left\{e^{t}\underbrace{(t-1)^3 U(t-1)}_{f(t)}\right\} =$$

$$= e^{-1}\,\mathcal{L}\left\{(t-1)^3 U(t-1)\right\}\Big|_{s\to s-1} =$$

$$= e^{-1}\left[e^{-s}\ \mathcal{L}\left\{t^3\right\}\right]_{s\to s-1} = e^{-1}\left[e^{-s}\ \frac{6}{s^4}\right]_{s\to s-1} =$$

$$= e^{-1}\left[e^{-(s-1)}\ \frac{6}{(s-1)^4}\right] = e^{-1}e^{-(s-1)}\ \frac{6}{(s-1)^4} =$$

$$= e^{-s}\ \frac{6}{(s-1)^4}$$

por tanto

$$\mathcal{L}\left\{e^{t-1}(t-1)^3 U(t-1)\right\} = e^{-s}\ \frac{6}{(s-1)^4}$$

4.10 TRANSFORMADA DE UNA DERIVADA

Teorema:	Si $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$ son continuas en $[0,\infty)$ y de orden exponencial, y si $f^{(n)}(t)$ es continua parte por parte en $[0,\infty)$, entonces $$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{n-1}(0)$$ donde $$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$$

Se da el teorema sin demostración.

4.10.1 Ejemplos

1. Evalúe $\mathcal{L}\{ktCoskt + Senkt\}$

   Solución:

   Aplicando directamente el *teorema 4.10* se tiene

$$\mathcal{L}\{ktCoskt + Senkt\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}(tSenkt)\right\} = s\,\mathcal{L}\{tSenkt\} - Senk(0) =$$

$$= s(-1)\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{Senkt\} = -s\frac{d}{ds}\left(\frac{k}{s^2+k^2}\right) = \frac{2ks^2}{\left(s^2+k^2\right)^2}$$

   por tanto

$$\mathcal{L}\{ktCoskt + Senkt\} = \frac{2ks^2}{\left(s^2+k^2\right)^2}$$

2. Suponga que una función $y(t)$ cuenta con las propiedades $y(0) = 1; y'(0) = -1$. Determine la transformada de Laplace $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ de la siguiente expresión

$$y'' - 4y' - 5y$$

   Solución:

   La transformada de Laplace de esta expresión es

$$\mathcal{L}\{y'' - 4y' - 5y\} = \mathcal{L}\{y''\} - 4\mathcal{L}\{y'\} - 5\mathcal{L}\{y\}$$

   y aplicando directamente el *teorema 4.10* se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y''-4y'-5y\} &= s^2\mathcal{L}\{y\}-sy(0)-y'(0)-4\left[s\mathcal{L}\{y\}-y(0)\right]-5\mathcal{L}\{y\}=\\ &= s^2Y(s)-s(1)-(-1)-\left[sY(s)-1\right]-5Y(s)=\\ &= Y(s)\left[s^2-4s-5\right]-s+5\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathcal{L}\{y''-4y'-5y\}=Y(s)\left[s^2-4s-5\right]-s+5$$

3. Suponga que una función $y(t)$ cuenta con las propiedades $y(0)=2; y'(0)=3$. Despeje la transformada de Laplace $\mathcal{L}\{y(t)\}=Y(s)$ de la siguiente expresión

$$y''+y=1$$

Solución:

La transformada de Laplace de esta expresión es

$$\mathcal{L}\{y''+y\}=\mathcal{L}\{1\}$$

o bien

$$\mathcal{L}\{y''\}+\mathcal{L}\{y\}=\mathcal{L}\{1\}$$

y aplicando directamente el *teorema 4.10* se tiene

$$\begin{aligned}s^2\mathcal{L}\{y\}-sy(0)-y'(0)+\mathcal{L}\{y\}&=\frac{1}{s}\\ s^2Y(s)-s(2)-3+Y(s)&=\frac{1}{s}\\ Y(s)\left[s^2+1\right]-2s-3&=\frac{1}{s}\\ Y(s)\left[s^2+1\right]=\frac{1}{s}+2s+3&=\frac{1+2s^2+3s}{s}\end{aligned}$$

por tanto

$$Y(s)=\frac{2s^2+3s+1}{s\left(s^2+1\right)}$$

4.11 CONVOLUCIÓN

El concepto de convolución es quizás uno de los instrumentos más eficaces en el análisis armónico; con su empleo se obtienen con facilidad muchos resultados importantes. En la presente sección se definirá e interpretará gráficamente la convolución de dos funciones desde el punto de vista analítico, todo ello, orientado a la introducción de un teorema fundamental para el cálculo de la transformada de Laplace de una convolución.

***Definición*:** Si las funciones $f(t)$ y $g(t)$ son continuas parte por parte en $[0,\infty)$, la convolución de f y g se representa por $f * g$ y se define con la integral

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

4.11.1 EJEMPLOS

1. Sea $f(t)=e^t$ y $g(t)=Sent$. Determine $f(t)*g(t)$

Solución:

Por definición

$$f(t)*g(t)=e^t * Sent=\int_0^t e^{\tau}Sen(t-\tau)d\tau=\left[e^{\tau}Sen(t-\tau)\Big|_0^t+\int_0^t e^{\tau}Cos(t-\tau)d\tau\right]=$$

$$=\left[e^{\tau}Sen(t-\tau)\Big|_0^t+Cos(t-\tau)e^{\tau}\Big|_0^t-\int_0^t e^{\tau}Sen(t-\tau)d\tau\right]$$

despejando la integral de lado derecho a primer miembro se tiene que

$$f(t)*g(t)=\int_0^t e^{\tau}Sen(t-\tau)d\tau=\frac{1}{2}\left[e^{\tau}Sen(t-\tau)+e^{\tau}Cos(t-\tau)\right]_0^t=$$

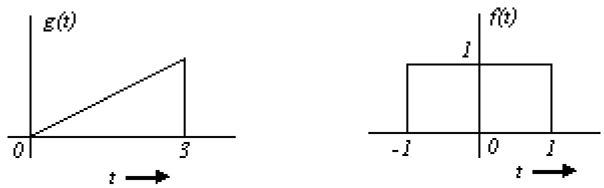
$$=\frac{1}{2}\left[e^t-Sent-Cost\right]$$

por tanto

$$f(t)*g(t)=\frac{1}{2}\left[e^t-Sent-Cost\right]$$

La interpretación gráfica de la convolución es muy útil en el análisis de sistemas así como en la teoría de comunicaciones. Permite visualizar los resultados de muchas relaciones abstractas, sobre todo en la teoría de comunicaciones. Si en los sistemas lineales sólo se conoce en forma gráfica $f(t)$ y $g(t)$ entonces la convolución gráfica resulta útil.

2. Supongamos que $f(t)$ y $g(t)$ son los pulsos rectangular y triangular de la siguiente figura.



Encontrar gráficamente la convolución $f(t)*g(t)$.

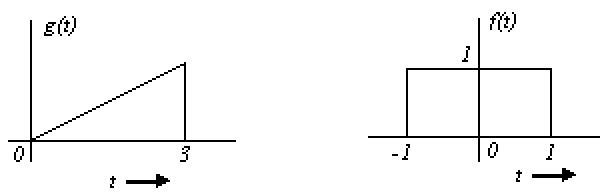
Solución:

Por definición

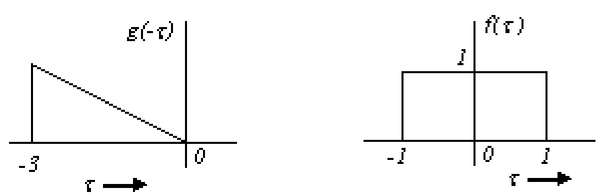
$$f*g=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \ldots(1)$$

donde en la integral τ es la variable independiente que, supongamos representa el tiempo en segundos. Esquemáticamente la interpretación geométrica de la convolución se puede ilustrar en los siguientes cuatro pasos

a) Supongamos que $f(t)$ y $g(t)$ son los pulsos rectangular y triangular representados en las gráficas siguientes

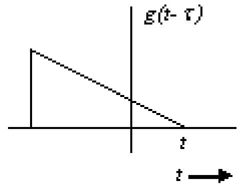


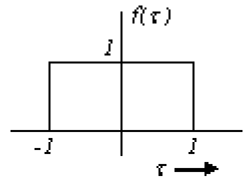
b) A continuación, en la siguiente figura se muestran las gráficas de las funciones $f(\tau)$ y $g(-\tau)$



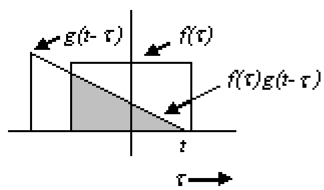
c) Para encontrar los valores de la función $f(t)*g(t)$, es necesario seleccionar diferentes valores de *t*, los cuales desplazan a lo largo del eje τ a la función $g(-\tau)$ del inciso b).

Para un tiempo arbitrario t, la función $g(t-\tau)$, representa entonces, la función $g(-\tau)$ desplazada t segundos a lo largo del eje τ y su gráfica es





d) Finalmente, el valor de la integral de convolución en cualquier instante de tiempo t está dado por la integral (1) evaluada en t, y representa el área bajo la *curva producto* de $f(\tau)$ y $g(t-\tau)$. Dicha área es la región sombreada de la siguiente figura



Por tanto, el valor de $f(t)*g(t)$ en cualquier instante de tiempo t, es igual al área sombrada en la figura.

4.11.2 PROPIEDADES DE LA CONVOLUCIÓN

Si las funciones $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ son continuas parte por parte en $[0,\infty)$, entonces las siguientes relaciones son válidas

$f(t)*g(t)=g(t)*f(t)$	Ley conmutativa
$f(t)*[g(t)+h(t)]=f(t)*g(t)+f(t)*h(t)$	Ley distributiva
$f(t)*[g(t)*h(t)]=[f(t)*g(t)]*h(t)$	Ley asociativa

4.12 TRANSFORMADA DE UNA CONVOLUCIÓN

Para motivar el cálculo de la transformada de Laplace de una convolución, retomemos las funciones $f(t)$ y $g(t)$ del problema 1 de la *sección 4.11.1* y determinemos $\mathcal{L}\{f(t)*g(t)\}$.

Solución:

$$\mathcal{L}\{e^t * Sent\}=\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^\tau Sen(t-\tau)d\tau\right\}=\frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^t - Sent - Cost\}=$$

Nota: Del problema 1 de la *sección 4.11.1* $\int_0^t e^\tau Sen(t-\tau)d\tau=\frac{1}{2}\left[e^t - Sent - Cost\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\ \mathcal{L}\left\{e^{t}\right\} - \mathcal{L}\left\{Sent\right\} - \mathcal{L}\left\{Cost\right\}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s^{2}+1} - \frac{s}{s^{2}+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{s^{2}+1-(s-1)-s(s-1)}{(s-1)(s^{2}+1)}\right] =$$

$$= \frac{1}{(s-1)} \cdot \frac{1}{(s^{2}+1)}$$

por tanto

$$\mathcal{L}\left\{e^{t} * Sent\right\} = \frac{1}{(s-1)} \cdot \frac{1}{(s^{2}+1)}$$

Como pudimos apreciar, para realizar el cálculo de la transformada de Laplace de una convolución, fue necesario dividir al problema en dos etapas. La primera, realizar el cálculo de $f(t) * g(t)$, resolviendo la integral de la *definición 4.11* y posteriormente la determinación de $\mathcal{L}\left\{f(t) * g(t)\right\}$. En la práctica lo anterior podría resultar no ser lo más conveniente, pues, el cálculo de la integral para la obtención de $f(t) * g(t)$ depende directamente de la forma de las funciones $f(t)$ y $g(t)$, y dado este hecho, tiene la posibilidad de complicarse demasiado. Sin embargo, mediante la aplicación directa del siguiente teorema, la determinación de la transformada de Laplace de un convolución de dos funciones resulta ser prácticamente inmediata.

4.12.1 TEOREMA DE CONVOLUCIÓN

Teorema:	Si $f(t)$ y $g(t)$ son continuas en tramos en $\left[0,\infty\right)$ y de orden exponencial, entonces $$\mathcal{L}\left\{f * g\right\} = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}\mathcal{L}\left\{g(t)\right\} = F(s)G(s)$$

Se da este teorema sin demostración.

4.12.2 EJEMPLOS

1. Evalúe $\mathcal{L}\left\{e^{t} * Sent\right\}$

   Solución:

   Aplicando directamente el *teorema 4.12.1* tenemos que

$$\mathcal{L}\left\{e^{t} * Sent\right\} = \mathcal{L}\left\{e^{t}\right\}\mathcal{L}\left\{Sent\right\} = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s^{2}+1}$$

por tanto

$$\mathcal{L}\left\{e^t * Sent\right\} = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s^2+1}$$

2. Evalúe $\mathcal{L}\left\{\int_0^t Sen\tau Cos(t-\tau)d\tau\right\}$

Solución:

Por la *definición 4.11*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t Sen\tau Cos(t-\tau)d\tau\right\} = \mathcal{L}\left\{Sent * Cost\right\} \ldots (1)$$

aplicando en (1) directamente el *teorema 4.12.1* tenemos que

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t Sen\tau Cos(t-\tau)d\tau\right\} = \mathcal{L}\left\{Sent * Cost\right\} = \mathcal{L}\left\{Sent\right\}\mathcal{L}\left\{Cost\right\} =$$

$$= \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{s}{s^2+1} = \frac{s}{\left(s^2+1\right)^2}$$

por tanto

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t Sen\tau Cos(t-\tau)d\tau\right\} = \frac{s}{\left(s^2+1\right)^2}$$

3. Evalúe $\mathcal{L}\left\{e^{-t} * e^t Cost\right\}$

Solución:

Aplicando directamente el *teorema 4.12.1* tenemos que

$$\mathcal{L}\left\{e^{-t} * e^t Cost\right\} = \mathcal{L}\left\{e^{-t}\right\}\mathcal{L}\left\{e^t Cost\right\} =$$

$$= \frac{1}{s+1}\mathcal{L}\underbrace{\left\{Cost\right\}\Big|_{s \to s-1}}_{1er\ T.\ de\ traslación} =$$

$$= \frac{1}{s+1} \cdot \frac{s}{s^2+1}\bigg|_{s \to s-1} =$$

$$= \frac{1}{s+1} \cdot \frac{s-1}{(s-1)^2+1}$$

por tanto

$$\mathcal{L}\left\{e^{-t} * e^{t} Cost\right\} = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{s-1}{(s-1)^2+1}$$

4.13 TEOREMA DE UNA INTEGRAL

Si en la *definición 4.11* $g(t)=1$, entonces $f(t)*1=\int_0^t f(\tau)d\tau$; en este caso, si deseamos obtener de la transformada de Laplace de $f(t)*1$ mediante el teorema de convolución, nuestro cálculo se reducirá a la determinación de la transformada de Laplace de la integral de la función $f(t)$ esto es

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}=\mathcal{L}\left\{f(t)*1\right\}=\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}\mathcal{L}\{1\}=\frac{F(s)}{s}$$

Dado lo anterior podemos entonces enunciar el siguiente teorema

Teorema:	Si $f(t)$ es una función continua tramo por tramo en $[0,\infty)$ y de orden exponencial, entonces $$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}=\frac{F(s)}{s}$$

Se da este teorema sin demostración.

4.13.1 EJEMPLOS

1. Evalúe $\mathcal{L}\left\{\int_0^t Cos\tau d\tau\right\}$

   Solución:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t Cos\tau d\tau\right\}=\mathcal{L}\{Cost\}\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{s}{s(s^2+1)}=\frac{1}{s^2+1}$$

   por tanto

$$\left\{\int_0^t Cos\tau d\tau\right\}=\frac{1}{s^2+1}$$

2. Evalúe $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \tau Sen\tau d\tau\right\}$

Solución:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \tau Sen\tau d\tau\right\} = \mathcal{L}\{tSent\}\left(\frac{1}{s}\right) = (-1)\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{Sent\} =$$

$$= -\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{s}\frac{2s}{\left(s^2+1\right)^2} = \frac{2}{\left(s^2+1\right)^2}$$

por tanto

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \tau Sen\tau d\tau\right\} = \frac{2}{\left(s^2+1\right)^2}$$

3. Evalúe $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau\right\}$

Solución:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau\right\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left\{\int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau\right\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left\{te^{-t}\right\}\left(\frac{1}{s}\right) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left\{e^{-t}t\right\}\left(\frac{1}{s}\right) =$$

$$= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{t\}\Big|_{s\to s+1}\left(\frac{1}{s}\right) = -\frac{d}{ds}\left[\frac{\left(\frac{1}{s^2}\right)\Big|_{s\to s+1}}{s}\right] =$$

$$= -\frac{d}{ds}\left[\frac{\frac{1}{(s+1)^2}}{s}\right] = -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s(s+1)^2}\right] = -\left[\frac{-\left[2s(s+1)+(s+1)^2\right]}{s^2(s+1)^4}\right] =$$

$$= \frac{2s(s+1)+(s+1)^2}{s^2(s+1)^4} = \frac{2}{s(s+1)^3} + \frac{1}{s^2(s+1)^2} = \frac{3s+1}{s^2(s+1)^3}$$

por tanto

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau\right\} = \frac{3s+1}{s^2(s+1)^3}$$

4.14 TRANSFORMADA DE UNA FUNCIÓN PERIÓDICA

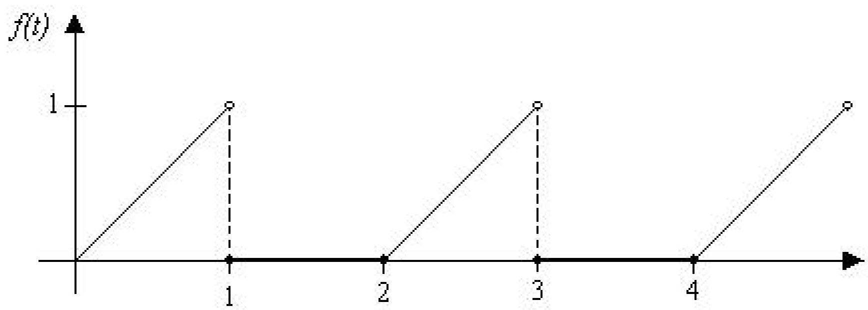
Si el periodo de una función es $T>0$, entonces $f(t)=f(t+T)$. Se puede determinar la transformada de una función periódica por integración sobre un solo periodo.

***Teorema*:**	Si $f(t)$ es continua por tramos en $[0,\infty)$, de orden exponencial y periódica con periodo T $$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt$$

Se da este teorema sin demostración.

4.14.1 EJEMPLOS

1. Determine la Transformada de Laplace de la función periódica de la siguiente figura



Solución:

El tamaño del periodo es $T=2$, además, la representación analítica de la función de la gráfica es

$$f(t)=\begin{cases} t; & 0\le t<1 \\ 0; & 1\le t<2 \end{cases}$$

aplicando directamente el *teorema 4.14*

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\int_0^1 e^{-st}tdt+\int_1^2 e^{-st}(0)dt\right]=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2s}}\left[-\frac{te^{-st}}{s}\Bigg|_0^1+\frac{1}{s}\int_0^1 e^{-st}dt\right]=$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left[-\frac{te^{-st}}{s}+\frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left[-\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-s}}{s^2}+\frac{1}{s^2}\right]=$$

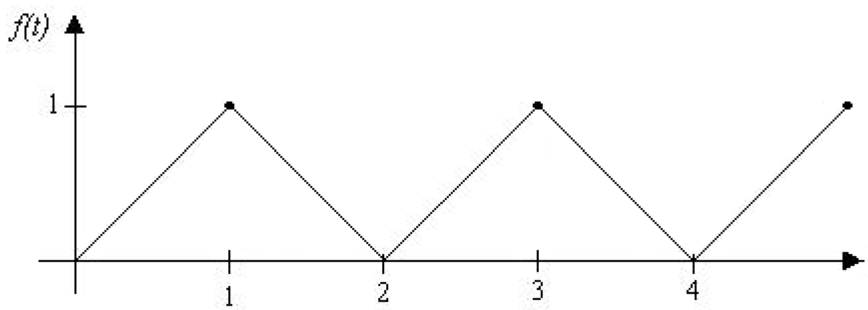
$$= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\frac{-se^{-s}-e^{-s}+1}{s^2}\right]=$$

$$= \frac{1-e^{-s}(s+1)}{(1-e^{-2s})s^2}$$

por tanto

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1-e^{-s}(s+1)}{(1-e^{-2s})s^2}$$

2. Determine la transformada de Laplace de la función periódica de la siguiente figura



Solución:

El tamaño del periodo es $T = 2$, además, la representación analítica de la función de la gráfica es

$$f(t) = \begin{cases} t; & 0 \le t < 1 \\ -t+2; & 1 \le t < 2 \end{cases}$$

aplicando directamente el *teorema 4.14*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st} f(t)dt =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\int_0^1 e^{-st}tdt + \int_1^2 e^{-st}(-t+2)dt\right] =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\int_0^1 e^{-st}tdt - \int_1^2 e^{-st}tdt + 2\int_1^2 e^{-st}dt\right] =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\left(-\frac{te^{-st}}{s}\Big|_0^1 + \frac{1}{s}\int_0^1 e^{-st}dt\right) - \left(-\frac{te^{-st}}{s}\Big|_1^2 + \frac{1}{s}\int_1^2 e^{-st}dt\right) - \frac{2e^{-st}}{s}\Big|_1^2\right] =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\left(-\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right)\Big|_0^1 - \left(-\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right)\Big|_1^2 - \frac{2e^{-st}}{s}\Big|_1^2\right] =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left[-\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{1}{s^2} + \frac{2e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{2e^{-2s}}{s} + \frac{2e^{-s}}{s}\right] =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{2e^{-s}}{s^2} + \frac{1}{s^2}\right]$$

multiplicamos y dividimos el resultado anterior por e^s

$$= \frac{e^s}{(e^s - e^{-s})s^2}\left[e^{-2s} - 2e^{-s} + 1\right] =$$

$$= \frac{e^{-s} - 2 + e^s}{(e^s - e^{-s})s^2} = \frac{e^s + e^{-s} - 2}{(e^s - e^{-s})s^2} = \frac{2Cosh(s)s - 2}{2s^2 Senh(s)} = \frac{1}{s^2}\left[\frac{Cosh(s) - 1}{Senh(s)}\right] =$$

$$= \frac{1}{s^2}Tanh\left(\frac{s}{2}\right)$$

por tanto

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2}Tanh\left(\frac{s}{2}\right)$$

4.15 TRANSFORMADA INVERSA

En la presente sección, invertiremos nuestro problema, esto es, dada la función $F(s)$, nuestro objetivo será ahora encontrar la función $f(t)$ que corresponda a dicha transformación.

***Definición*:** Se dice que $f(t)$ es la transformada inversa de $F(s)$ y se expresa por

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Es importante notar que el operador $\mathcal{L}^{-1}$ es también un *operador lineal*, esto es, si α y β son constantes entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s)+\beta G(s)\}=\alpha\,\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}+\beta\,\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

siendo $F(s)$ y $G(s)$ las transformadas de $f(t)$ y $g(t)$. La aplicación de este nuevo operador a funciones de la variable s, es casi directa. Ilustremos este hecho con ayuda de la siguiente tabla.

En la *tabla 2* se presentan las transformadas inversas de algunas funciones elementales de variable s.

No.	$F(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^2}$	t
3	$\frac{n!}{s^{n+1}},\ n\geq 0$	t^n
4	$t^{\alpha}\ \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}},\ \alpha>-1$	t^{α}
5	$\frac{k}{s^2+k^2}$	$Senkt$
6	$\frac{s}{s^2+k^2}$	$Coskt$
7	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
8	$\frac{k}{s^2-k^2}$	$Senhkt$
9	$\frac{s}{s^2-k^2}$	$Coshkt$
10	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}},\ n\geq 0$	$t^n e^{at}$

Tabla 2

4.15.1 EJEMPLOS

1. Evalúe $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}$

   Solución:

   Usando el resultado 3 de la *tabla 2*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\}=t^n$$

para $n = 2$ se tiene que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = \frac{1}{4!}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^{4+1}}\right\} = \frac{1}{4!}t^4$$

por tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = \frac{1}{4!}t^4$$

2. Evalúe $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+64}\right\}$

Solución:

Usando el resultado 5 de la *tabla 2*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\} = Senkt$$

para $k = 8$ se tiene que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+64}\right\} = \frac{1}{8}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8}{s^2+64}\right\} = \frac{1}{8}Sen8t$$

por tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+64}\right\} = \frac{1}{8}Sen8t$$

3. Evalúe $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{s^2+7}\right\}$

Solución:

Aplicando la propiedad de linealidad del operador $\mathcal{L}^{-1}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{s^2+7}\right\} = 3\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+7}\right\} + 5\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+7}\right\}$$

usando en la expresión anterior los resultados 5 y 6 de la *tabla 2*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\} = Coskt \quad \text{y} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\} = Senkt$$

para $k=\sqrt{7}$ se tiene que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{s^2+7}\right\} = 3\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+7}\right\} + 5\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+7}\right\} =$$

$$= 3Cos\sqrt{7}t + \frac{5}{\sqrt{7}}Sen\sqrt{7}t$$

por tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{s^2+7}\right\} = 3Cos\sqrt{7}t + \frac{5}{\sqrt{7}}Sen\sqrt{7}t$$

4.16 FORMA INVERSA DEL PRIMER TEOREMA DE TRASLACIÓN

***Teorema*:**	Si $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, entonces la forma inversa del *teorema 4.5* es $$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\big|_{s\to s-a}\right\}=e^{at}f(t)$$

Se da este teorema sin demostración.

4.16.1 EJEMPLOS

1. Evalúe $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s-4}{(s-4)^2+2}\right\}$

   Solución:

   Aplicando directamente el *teorema 4.17* se tiene

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-4}{(s-4)^2+2}\right\}=e^{4t}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2}\right\}=e^{4t}Cos\sqrt{2}t$$

   por tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-4}{(s-4)^2+2}\right\}=e^{4t}Cos\sqrt{2}t$$

2. Evalué $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+6s+11}\right\}$

   Solución:

   Aplicando directamente el *teorema 4.17* se tiene

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+6s+11}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+6s+9)+2}\right\}=$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+3)^2+2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+3)-3}{(s+3)^2+2}\right\}=$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2+2}\right\}-3\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^2+2}\right\}=$$

$$= e^{-3t}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2}\right\} - 3e^{-3t}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2}\right\} =$$

$$= e^{-3t} Cos\sqrt{2}t - \frac{3e^{-3t}}{\sqrt{2}} Sen\sqrt{2}t$$

por tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+6s+11}\right\} = e^{-3t} Cos\sqrt{2}t - \frac{3e^{-3t}}{\sqrt{2}} Sen\sqrt{2}t$$

3. Evalúe $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3} + \frac{1}{s^2+2s-8}\right\}$

Solución:

Aplicando directamente el *teorema 4.17* se tiene

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3} + \frac{1}{s^2+2s-8}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2-9}\right\} =$$

$$= e^{t}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} + e^{-t}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-9}\right\} =$$

$$= \frac{e^2 t^2}{2} - \frac{e^{-t}}{3} Senh 3t$$

por tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3} + \frac{1}{s^2+2s-8}\right\} = \frac{e^2 t^2}{2} - \frac{e^{-t}}{3} Senh 3t$$

4.17 FORMA INVERSA DEL SEGUNDO TEOREMA DE TRASLACIÓN

Teorema: Si $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)$, entonces la forma inversa del *teorema 4.7* es

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}\big|_{t\to t-a}U(t-a)=$$

$$=f(t)\big|_{t\to t-a}U(t-a)=f(t-a)U(t-a)$$

Se da este teorema sin demostración.

4.17.1 EJEMPLOS

1. Evalúe $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-\pi s/2}}{s^2+9}\right\}$

   Solución:

   Aplicando directamente el *teorema 4.18* tenemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s/2}}{s^2+9}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}\Bigg|_{t\to t-\pi/2}U\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}Sen3t\Big|_{t\to t-\pi/2}U\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}Sen\left(3t-\frac{3\pi}{2}\right)U\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$

   pero

$$Sen(A+B)=SenACosB-SenBCosA$$

   entonces

$$Sen\left(3t-\frac{3\pi}{2}\right)=Sen3tCos\frac{3\pi}{2}-Sen\frac{3\pi}{2}Cos3t=Cos3t$$

   por tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s/2}}{s^2+9}\right\}=\frac{1}{3}Cos3tU\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$

2. Evalúe $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right\}$

Solución:

Aplicando directamente el *teorema 4.18* tenemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}\Bigg|_{t\to t-\pi}U(t-\pi)=Sent\big|_{t\to t-\pi}U(t-\pi)=$$

$$=Sen(t-\pi)U(t-\pi)$$

pero

$$Sen(t-\pi)=SentCos\pi-Sen\pi Cost=-Sent$$

por tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right\}=-SentU(t-\pi)$$

3. Evalúe $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-s}}{s(s+1)}\right\}=$

Solución:

Aplicando directamente el *teorema 4.18* tenemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s+1)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\}\Bigg|_{t\to t-1}U(t-1)=\mathcal{L}^{-1}\underbrace{\left\{\frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right\}}_{Se\ completo\ el\ binomio}\Bigg|_{t\to t-1}U(t-1)=$$

$$=e^{-\frac{1}{2}t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-\frac{1}{4}}\right\}\Bigg|_{t\to t-1}U(t-1)=$$

$$=2e^{-\frac{1}{2}t}Senh\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\right)U(t-1)$$

por tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s+1)}\right\}=2e^{-\frac{1}{2}t}Senh\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\right)U(t-1)$$

4.18 FORMA INVERSA DEL TEOREMA DE CONVOLUCIÓN

***Teorema*:**	Si $f(t)$ y $g(t)$ son las transformadas inversas de $F(s)$ y $G(s)$ respectivamente entonces la forma inversa del *teorema 4.12.1* es $$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)G(s)\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}\mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\right\}= f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Se da este teorema sin demostración.

4.18.1 EJEMPLOS

1. Evalúe $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-1)(s+4)}\right\}=$

   Solución:

   Aplicando directamente el *teorema 4.19* se tiene

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+4)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)}\,\frac{1}{(s+4)}\right\}=$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)}\right\}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)}\right\}=e^{t}*e^{-4t}=$$

$$=\int_0^t e^{\tau}e^{-4(t-\tau)}d\tau=\int_0^t e^{\tau}e^{-4t+4\tau}d\tau=$$

$$=\int_0^t e^{\tau}e^{-4t}e^{4\tau}=e^{-4\tau}\int_0^t e^{5\tau}d\tau=$$

$$=e^{-4t}\left[\frac{e^{5\tau}}{5}\right]_0^t=e^{-4t}\left[\frac{e^{5t}}{5}-\frac{1}{5}\right]=$$

$$=\frac{e^{t}-e^{-4t}}{5}$$

   por tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+4)}\right\}=\frac{e^{t}-e^{-4t}}{5}$$

2. Evalúe $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{\left(s^2+k^2\right)^2}\right\}$

Solución:

Aplicando directamente el *teorema 4.19* se tiene

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+k^2\right)^2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+k^2)(s^2+k^2)}\right\}=$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+k^2)}\,\frac{1}{(s^2+k^2)}\right\}=$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+k^2}\right\}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+k^2}\right\}=\frac{1}{k^2}\left[Senkt*Senkt\right]=$$

$$=\frac{1}{k^2}\int_0^t Senk\tau Senk(t-\tau)d\tau$$

pero

$$\begin{array}{l} Cos(A+B)=CosACosB-SenASenB \\ - \\ \underline{Cos(A-B)=CosACosB+SenASenB} \\ Cos(A+B)-Cos(A-B)=-2SenASenB \end{array}$$

entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+k^2\right)^2}\right\}=\frac{1}{2k^2}\left[\int_0^t Cos\left[k\tau-k(t-\tau)\right]d\tau-\int_0^t Cos\left[k\tau+k(t-\tau)\right]d\tau\right]=$$

$$=\frac{1}{2k^2}\left[\int_0^t Cos(2k\tau-kt)d\tau-Cos(kt)\int_0^t d\tau\right]=$$

$$=\frac{1}{2k^2}\left[\frac{Sen(2k\tau-kt)}{2k}-\tau Cos(kt)\right]_0^t=$$

$$=\frac{1}{2k^2}\left[\frac{Senkt}{2k}-tCoskt+\frac{Sen(kt)}{2k}\right]=$$

$$=\frac{1}{2k^2}\left[\frac{Senkt}{k}-tCoskt\right]=\frac{Senkt}{2k^3}-\frac{tCoskt}{2k^2}$$

por tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+k^2\right)^2}\right\}=\frac{Senkt}{2k^3}-\frac{tCoskt}{2k^2}$$

4.19 FRACCIONES PARCIALES Y LINEALIDAD

El manejo adecuado del método de descomposición de una función de variable s en fracciones parciales o fracciones simples, determina un factor fundamental en la determinación de transformadas inversas de Laplace. La técnica es exactamente la misma que se emplea para resolver integrales indefinidas cuyos integrandos son funciones racionales. A continuación se presenta de manera sistemática está técnica aplicada a una función de la forma $F(s)/G(s)$.

1. *Dividir en caso impropio*: Si $F(s)/G(s)$ es una fracción impropia, (es decir, si el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador) entonces dividimos $F(s)$ por $G(s)$ para obtener

$$\frac{F(s)}{G(s)} = (Un \;\; polinómio) + \frac{F_1(s)}{G_1(s)}$$

2. *Factorizar el denominador*: Factorizamos completamente el denominador en factores de los tipos

$$\underbrace{(ps+q)^m}_{Factor\;\;lineal} \quad \text{y} \quad \underbrace{(as^2+bs+c)^n}_{Factor\;\;cuadrático}$$

donde as^2+bs+c es irreducible.

3. *Factores lineales*: Para cada factor lineal cuadrático $(ps+q)^m$, la descomposición en fracciones simples debe contener la siguiente suma de m fracciones simples

$$\frac{A_1}{ps+q} + \frac{A_2}{(ps+q)^2} + \ldots + \frac{A_m}{(ps+q)^m}$$

4. *Factores cuadráticos*: Para cada factor cuadrático $(as^2+bs+c)^n$, la descomposición en fracciones simples debe contener la siguiente suna de n fracciones

$$\frac{B_1 s + C_1}{as^2+bs+c} + \frac{B_2 s + C_2}{(as^2+bs+c)^2} + \cdots + \frac{B_n s + C_n}{(as^2+bs+c)^n}$$

En los siguientes ejemplos, se ilustra la aplicación de esta estrategia para determinar la transformada inversa de Laplace de funciones con forma $F(s)/G(s)$.

4.19.1 EJEMPLOS

1. Evalúe $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\right\}$

Solución:

De acuerdo con el punto 3 que establece el método, en este caso la descomposición en fracciones simples queda

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+4}\right\}\ldots(1)$$

desarrollando la suma de fracciones en segundo miembro de (1)

$$\begin{aligned}\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}&=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+4}=\\&=\frac{A(s+2)(s+4)+B(s-1)(s+4)+C(s-1)(s+2)}{(s-1)(s+2)(s+4)}=\\&=\frac{A(s^2+6s+8)+B(s^2+3s-4)+C(s^2+s-2)}{(s-1)(s+2)(s+4)}=\\&=\frac{As^2+6As+8A+Bs^2+3Bs-4B+Cs^2+Cs-2C}{(s-1)(s+2)(s+4)}=\\&=\frac{s^2(A+B+C)+s(6A+3B+C)+(8A-4B-2C)}{(s-1)(s+2)(s+4)}\end{aligned}$$

de donde

$$1=s^2(A+B+C)+s(6A+3B+C)+(8A-4B-2C)$$

entonces

$$\begin{aligned}A+B+C&=0\\6A+3B+C&=0\\8A-4B-2C&=1\end{aligned}$$

resolviendo el sistema tenemos que

$$A=\frac{1}{15};\qquad B=-\frac{1}{6};\qquad C=\frac{1}{10}$$

sustituyendo en (1)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/15}{s-1}+\frac{(-1/6)}{s+2}+\frac{1/10}{s+4}\right\}=$$

$$=\frac{1}{15}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}-\frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}+\frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}=$$

$$=\frac{1}{15}e^{t}-\frac{1}{6}e^{-2t}+\frac{1}{10}e^{-4t}$$

por tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\right\}=\frac{1}{15}e^{t}-\frac{1}{6}e^{-2t}+\frac{1}{10}e^{-4t}$$

2. Evalúe $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}\right\}$

Solución:

De acuerdo con el punto 3 que establece el método, en este caso la descomposición en fracciones simples queda

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{(s+2)}+\frac{D}{(s+2)^2}+\frac{E}{(s+2)^3}\right\}\ldots(1)$$

desarrollando la suma de fracciones en segundo miembro de (1)

$$\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{(s+2)}+\frac{D}{(s+2)^2}+\frac{E}{(s+2)^3}=$$

$$=\frac{A(s)(s+2)^3+B(s+2)^3+C(s+2)^2s^2+Ds^2(s+2)+Es^2}{s^2(s+2)^3}=$$

$$=\frac{As\left(s^3+6s^2+12s+8\right)+B\left(s^3+6s^2+12s+8\right)+Cs^2\left(s^2+4s+4\right)+D\left(s^3+2s^2\right)+Es^2}{s^2(s+2)^3}=$$

$$=\frac{As^4+6As^3+12As^2+8As+Bs^3+6Bs^2+12Bs+8B+Cs^4+4Cs^3+4Cs^2+Ds^3+2Ds^2+Es^2}{s^2(s+2)^3}$$

de donde

$$s+1=s^4(A+C)+s^3(6A+B+4C+D)+s^2(12A+6B+4C+2D+E)+s(8A+12B)+(8B)$$

entonces

$$\begin{gathered} A+C=0 \\ 6A+B+4C+D=0 \\ 12A+6B+4C+2D+E=0 \\ 8A+12B=1 \\ 8B=1 \end{gathered}$$

resolviendo el sistema tenemos que

$$A=-\frac{1}{16}; \qquad B=\frac{1}{8}; \qquad C=\frac{1}{16}; \qquad D=0; \qquad E=-\frac{1}{4}$$

sustituyendo en (1)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1/16}{s}+\frac{1/8}{s^2}+\frac{1/16}{(s+2)}-\frac{1/4}{(s+2)^3}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{16}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}+\frac{1}{16}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}-\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^3}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{16}+\frac{t}{8}+\frac{1}{16}e^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{16}+\frac{t}{8}+\frac{1}{16}e^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}t^2$$

por tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}\right\}=-\frac{1}{16}+\frac{t}{8}+\frac{1}{16}e^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}t^2$$

3. Evalué $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s-2}{s^3\left(s^2+4\right)}\right\}$

Solución:

De acuerdo con los puntos 3 y 4 que establece el método, en este caso la descomposición en fracciones simples queda

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-2}{s^3\left(s^2+4\right)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^2}+\frac{Ds+E}{s^2+4}\right\}\ldots(1)$$

desarrollando y simplificando la suma de fracciones

$$\frac{3s-2}{s^3\left(s^2+4\right)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^2}+\frac{Ds+E}{s^2+4}$$

se tiene

$$3s-2=s^4\left(A+D\right)+s^3\left(B+E\right)+s^2\left(4A+C\right)+s\left(4B\right)+4C$$

de donde

$$\begin{gathered} A+D=0 \\ 4A+C=0 \\ 4C=-2 \\ B+E=0 \\ 4B=3 \end{gathered}$$

resolviendo el sistema tenemos que

$A=\frac{1}{8};\qquad B=\frac{3}{4};\qquad C=-\frac{1}{2};\qquad D=-\frac{1}{8};\qquad E=-\frac{3}{4}$

sustituyendo en (1)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-2}{s^3\left(s^2+4\right)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/8}{s}+\frac{3/4}{s^2}-\frac{1/2}{s^3}-\frac{s/8+3/4}{\left(s^2+4\right)}\right\}=$$

$$=\frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}-\frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}-\frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}=$$

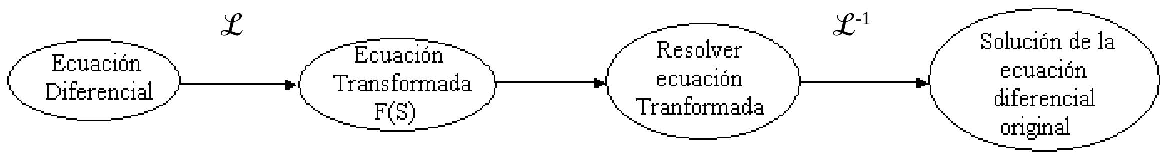
$$=\frac{1}{8}+\frac{3t}{4}-\frac{t^2}{4}-\frac{1}{8}Cos2t-\frac{3}{8}Sen2t$$

por tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-2}{s^3\left(s^2+4\right)}\right\}==\frac{1}{8}+\frac{3t}{4}-\frac{t^2}{4}-\frac{1}{8}Cos2t-\frac{3}{8}Sen2t$$

4.20 APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

El método de transformada de Laplace aplicado a la resolución de problemas en los cuales intervienen ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, se puede esquematizar de la siguiente manera



Es importante recalcar que este método, como se mencionó en los primeros párrafos de esta unidad, incorpora en forma directa las condiciones iniciales dadas en la solución, y por tanto, no son necesarias las operaciones implicadas para la determinación de las constantes en la solución general de la ecuación diferencial dada.

4.20.1 EJEMPLOS

1. Resolver $y' - 3y = e^{2t}$; $y(0) = 1$

   Solución:

   Paso I. Transformar

$$\mathcal{L}\{y'\} - 3\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^{2t}\}$$
$$sY(s) - y(0) - 3Y(s) = \frac{1}{s-2}$$

   Paso II. Resolver ecuación transformada

$$Y(s)[s-3] - 1 = \frac{1}{s-2}$$
$$Y(s)[s-3] = \frac{1}{s-2} + 1 = \frac{1+s-2}{s-2} = \frac{s-1}{s-2}$$
$$Y(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s-3)}$$

   Paso III. Transformada inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-2)(s-3)}\right\}$$

usando fracciones parciales se tiene

$$\frac{s-1}{(s-2)(s-3)} = \frac{A}{(s-2)} + \frac{B}{(s-3)} = \frac{A(s-3)+B(s-2)}{(s-2)(s-3)}$$
$$= \frac{As-3A+Bs-2B}{(s-2)(s-3)} = \frac{(A+B)s-(3A+2B)}{(s-2)(s-3)}$$

de donde

$$A+B=1$$
$$3A+2B=1$$

luego

$$B=2; \qquad A=-1$$

entonces

$$\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = -\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + 2\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$$

por tanto

$$y(t) = -e^{2t} + 2e^{3t}$$

es solución de la ecuación dada.

2. Resolver $y'' - 6y' + 9y = t^2e^{3t} \quad y(0)=2 \quad y'(0)=6$

Solución:

Paso I. Transformar

$$\mathscr{L}\{y''\} - 6\,\mathscr{L}\{y'\} + 9\,\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{e^{3t}t^2\}$$
$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 6[sY(s) - y(0)] + 9Y(s) = \mathscr{L}\{t^2\}\Big|_{s\to s-3}$$
$$s^2Y(s) - 2s - 6 - 6sY(s) + 12 + 9Y(s) = \frac{2}{s^3}\bigg|_{s\to s-3}$$
$$Y(s)[s^2 - 6s + 9] - 2s + 6 = \frac{2}{(s-3)^3}$$

Paso II. Resolver ecuación transformada

$$Y(s)(s-3)^2 = \frac{2}{(s-3)^3} + 2s - 6 = \frac{2}{(s-3)^3} + 2(s-3)$$

$$Y(s) = \frac{2}{(s-3)^5} + \frac{2}{(s-3)}$$

Paso III. Transformada inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^5}\right\} + 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)}\right\}$$

$$y(t) = 2e^{3t}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} + 2e^{3t}$$

$$y(t) = 2e^{3t}\left(\frac{t^4}{4!}\right) + 2e^{3t}$$

por tanto

$$y(t) = \frac{e^{3t}t^4}{12} + 2e^{3t}$$

es solución de la ecuación diferencial dada.

3. Resolver $y'' + 4y' + 6y = 1 + e^{-t} \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$

Solución:

Paso I. Transformar

$$\mathcal{L}\{y''\} + 4\,\mathcal{L}\{y'\} + 6\,\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{1 + e^{-t}\}$$

$$s^2Y(s) + sy(0) - y'(0) + 4[sY(s) - y(0)] + 6Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

$$s^2Y(s) + sy(0) - y'(0) + 4sY(s) - 4y(0) + 6Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

Paso II. Resolver ecuación transformada

$$Y(s)\left[s^2 + 4s + 6\right] = \frac{s+1+s}{s(s+1)} = \frac{2s+1}{s(s+1)}$$

$$Y(s) = \frac{2s+1}{s(s+1)\left(s^2 + 4s + 6\right)}$$

Paso III. Transformada inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+1}{s(s+1)\left(s^2 + 4s + 6\right)}\right\}$$

usando fracciones parciales

$$\frac{2s+1}{s(s+1)\left(s^2+4s+6\right)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{Cs+D}{s^2+4s+6}$$

desarrollando se tiene que

$$2s+1=A(s+1)(s^2+4s+6)+Bs(s^2+4s+6)+(Cs+D)s(s+1)$$
$$2s+1=(As+A)(s^2+4s+6)+Bs^3+4Bs^2+6Bs+(Cs+D)(s^2+s)$$
$$2s+1=As^3+4As^2+6As+As^2+4As+6A+Bs^3+4Bs^2+6Bs+Cs^3+Cs^2+Ds^2+Ds$$
$$2s+1=s^3(A+B+C)+s^2(5A+4B+C+D)+s(10A+6B+D)+6A$$

de donde

$$\begin{gathered}A+B+C=0\\5A+4B+C+D=0\\10A+6B+D=2\\6A=1\end{gathered}$$

luego

$$A=\frac{1}{6},\qquad B=\frac{1}{3},\qquad C=-\frac{1}{2},\qquad D=-\frac{5}{3}$$

entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+6}\right\}-\frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s+6}\right\}$$
$$y(t)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+2)-2}{(s+2)^2+2}\right\}-\frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+2}\right\}$$
$$y(t)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+2}\right\}-\frac{5}{3}e^{-2t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2}\right\}$$
$$y(t)=\frac{1}{6}+\frac{e^{-t}}{3}-\frac{1}{2}e^{-2t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2}\right\}+e^{-2t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2}\right\}-\frac{5e^{-2t}}{3\sqrt{2}}Sen\sqrt{2}t$$
$$y(t)=\frac{1}{6}+\frac{e^{-t}}{3}-\frac{1}{2}e^{-2t}Cos\sqrt{2}t+\frac{e^{-2t}Sen\sqrt{2}t}{\sqrt{2}}-\frac{5e^{-2t}}{3\sqrt{2}}Sen\sqrt{2}t$$

por tanto

$$y(t)=\frac{1}{6}+\frac{e^{-t}}{3}-\frac{1}{2}e^{-2t}Cos\sqrt{2}t-\frac{2e^{-2t}Sen\sqrt{2}t}{3\sqrt{2}}$$

es solución de la ecuación diferencial dada.

4. Resolver $x'' + 16x = Cos4t \qquad x(0) = 0 \qquad x'(0) = 1$

Solución:

Paso I. Transformar

$$\mathcal{L}\{x''\} + 16\,\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{Cos4t\}$$

$$s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) + 16X(s) = \frac{s}{s^2+16}$$

Paso II. Resolver ecuación transformada

$$X(s)\left[s^2+16\right] - 1 = \frac{s}{s^2+16}$$

$$X(s)\left[s^2+16\right] = \frac{s}{s^2+16} + 1$$

$$X(s) = \frac{s}{(s^2+16)^2} + \frac{1}{s^2+16}$$

Paso III. Transformada inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+16)^2} + \frac{1}{s^2+16}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+16)^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+16}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16} \bullet \frac{s}{s^2+16}\right\} + \frac{Sen4t}{4}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\} \bullet \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\} + \frac{Sen4t}{4}$$

$$x(t) = \left[Cos4t * \frac{Sen4t}{4}\right] + \frac{Sen4t}{4} =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^t \left[Cos4\tau Sen4(t-\tau)\right] d\tau + \frac{Sen4t}{4}$$

pero

$$SenACosB = \frac{1}{2}\left[Sen(A-B) + Sen(A+B)\right]$$

entonces

$$x(t)=\frac{1}{8}\int_0^t\left[Sen(4t-4\tau-4\tau)+Sen(4t-4\tau+4\tau)\right]d\tau+\frac{Sen4t}{4}=$$
$$=\frac{1}{8}\int_0^t\left[Sen(4t-8\tau)+Sen(4t)\right]d\tau+\frac{Sen4t}{4}=$$
$$=\frac{1}{8}\left[\frac{Cos(4t-8\tau)}{8}+\tau Sen(4t)\right]_0^t+\frac{Sen4t}{4}=$$
$$=\frac{1}{8}\left[\frac{Cos(-4t)}{8}+tSen(4t)-\frac{Cos(4t)}{8}\right]+\frac{Sen4t}{4}$$

como

$$Cos(-\theta)=Cos\theta$$
$$Sen(-\theta)=-Sen\theta$$

entonces

$$x(t)=\frac{Cos4t}{64}+\frac{tSen4t}{8}-\frac{Cos4t}{64}+\frac{Sen4t}{4}$$

por tanto

$$x(t)=\frac{tSen4t}{8}+\frac{Sen4t}{4}$$

es solución de la ecuación diferencial dada.

5. Resuelva $x''+16x=f(t)$, $x(0)=0\,;x'(0)=1$, donde

$$f(t)=\begin{cases}Cos4t\,;0\le t<\pi\\ 0\quad;\quad t\ge\pi\end{cases}$$

Solución:

La función $f(t)$ en términos de la función escalón unitario es

$$x''+16x=Cos4t-Cos4tU(t-\pi)$$

Paso I. Transformar

$$\mathcal{L}\{x''\}+16\,\mathcal{L}\{x\}=\mathcal{L}\{\cos 4t\}-\mathcal{L}\{\cos 4tu(t-\pi)\}$$

usando la forma alternativa del Segundo teorema de traslación

$$s^2X(s) + sx(0) + x'(0) + 16X(s) = \frac{s}{s^2+16} - e^{-\pi s}\,\mathcal{L}\{Cos4t\}$$
$$X(s)(s^2+16) + 1 = \frac{s}{s^2+16} - e^{-\pi s}\,\frac{s}{s^2+16}$$

Paso II. Resolver ecuación transformada

$$X(s) = \frac{s}{(s^2+16)^2} - \frac{1}{s^2+16} - e^{-\pi s}\,\frac{s}{(s^2+16)^2}$$

Paso III. Transformada inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+16)^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+16}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\pi s}\,\frac{s}{(s^2+16)^2}\right\}$$

entonces

$$x(t) = \frac{tSen4t}{8} - \frac{Sen4t}{4} - \left.\frac{tSen4t}{8}\right|_{t\to t-\pi} U(t-\pi) =$$
$$= \frac{tSen4t}{8} - \frac{Sen4t}{4} - \frac{(t-\pi)Sen4(t-\pi)}{8}U(t-\pi)$$

por tanto

$$x(t) = \frac{tSen4t}{8} - \frac{Sen4t}{4} - \frac{(t-\pi)Sen4(t-\pi)}{8}U(t-\pi)$$

es solución de la ecuación diferencial dada.

4.20.2 ECUACIÓN INTEGRAL DE VOLTERRA

En la presente subsección, ampliaremos la aplicación del teorema de la convolución para encontrar una función desconocida bajo el signo integral e implícita en una ecuación integral de Volterra cuya forma es

$$f(t) = g(t) + \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau \ldots (1)$$

En la ecuación (1), $f(t)$ es la función incógnita y $g(t)$, $h(t)$ son funciones conocidas. Cabe hacer notar que el método de solución que se sigue para resolver (1), es el mismo que se describe en el diagrama esquemático presentado en esta sección para determinar la solución de una ecuación diferencial lineal.

4.20.3 EJEMPLOS

1. Resuelva $f(t) = 3t^2 - e^{-t} - \int_0^t f(\tau)e^{t-\tau}\,d\tau$

Solución:

Paso I. Transformar

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 3\,\mathcal{L}\{t^2\} - \mathcal{L}\{e^{-t}\} - \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)e^{t-\tau}\,d\tau\right\}$$

$$F(s) = 3\left(\frac{2}{s^3}\right) - \frac{1}{s+1} - [\ \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{e^t\}\ ]$$

$$F(s) = \frac{6}{s^3} - \frac{1}{s+1} - \left[F(s)\frac{1}{s-1}\right]$$

Paso II. Resolver ecuación transformada

$$F(s) + \frac{F(s)}{s-1} = \frac{6}{s^3} - \frac{1}{s+1}$$

$$F(s)\left(1 + \frac{1}{s-1}\right) = \frac{6}{s^3} - \frac{1}{s+1}$$

$$F(s)\left(\frac{s-1+1}{s-1}\right) = \frac{6}{s^3} - \frac{1}{s+1}$$

$$F(s)\left(\frac{s}{s-1}\right) = \frac{6}{s^3} - \frac{1}{s+1}$$

$$F(s) = \left(\frac{6}{s^3} - \frac{1}{s+1}\right)\left(\frac{s-1}{s}\right)$$

$$F(s) = \frac{6(s-1)}{s^4} - \frac{s-1}{s(s+1)}$$

$$F(s) = \frac{6s-6}{s^4} - \frac{s-1}{s(s+1)}$$

$$F(s) = \frac{6}{s^3} - \frac{6}{s^4} - \frac{s-1}{s(s+1)}$$

Paso III. Transformada inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^3}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^4}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s(s+1)}\right\}$$

$$f(t) = \frac{6t^2}{2} - \frac{6t^3}{6} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s(s+1)}\right\}$$

usando fracciones parciales

$$\frac{s-1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$$

desarrollando se tiene que

$$s-1 = A(s+1) + Bs$$
$$s-1 = As + A + Bs$$
$$s-1 = s(A+B) + A$$

de donde

$$A + B = 1$$
$$A = -1$$

luego

$$B = 2$$

entonces

$$f(t) = 3t^2 - t^3 + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+1}\right\}$$

por tanto

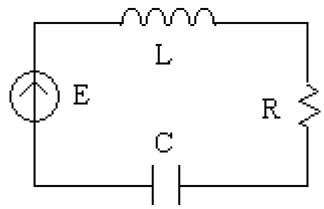
$$f(t) = 3t^2 - t^3 + 1 - 2e^{-t}$$

es solución de la ecuación integral dada.

4.20.4 APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE A CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Como ya se discutió en los preliminares de las presentes notas, una formulación matemática de problemas en las distintas áreas de la ciencia y la ingeniería, a menudo conduce a ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. En esta sección, mostraremos como la transformada de Laplace es empleada, para dar solución a problemas en el área de la electrónica. Como ejemplo ilustrativo aplicaremos la transformada de Laplace para determinar la corriente $i(t)$ en un circuito eléctrico LRC en serie. Previo al ejemplo, se da una breve descripción del circuito LRC en serie.

En un circuito simple (de Lazo) o en serie, la segunda Ley de Kirchoff establece que la suma de las caídas de voltaje a través de un inductor, un resistor y un capacitor es igual al voltaje aplicado $E(t)$.



Se sabe que las caídas de voltaje a través de cada elemento son respectivamente

$$L\frac{di}{dt}; \qquad Ri(t); \qquad \frac{1}{c}\int_0^t i(\tau)d\tau$$

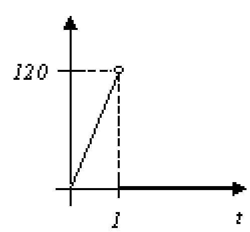
donde $i(t)$ es la corriente y L, R y C son constantes, la corriente en un circuito como la de la figura esta definida por la ecuación Integro-diferencial

$$L\frac{di}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = E(t)\ldots(1)$$

Cabe puntualizar que el método de solución que se sigue para resolver una integro-diferencial como la ecuación (1), es el mismo que se emplea para determinar la solución de una ecuación diferencial o una ecuación integral de Volterra.

4.20.5 EJEMPLOS

1. Determine la corriente $i(t)$ en un circuito RLC en serie, cuando $L = 0.1h$, $R = 20\Omega$ y $C = 10^{-3}f$; $i(0) = 0$ y el voltaje aplicado es el que se muestra en la figura



Solución:

La forma analítica del voltaje aplicado cuando $t \geq 1$ de la figura es

$$E(t) = \begin{cases} 120t & ; \quad 0 \leq t < 1 \\ 0 & ; \quad t \geq 1 \end{cases}$$

que en términos de funciones escalón unitario adquiere la forma

$$E(t)=120t-120tU(t-1)$$

entonces la ecuación integro-diferencial (1) se transforma en

$$0.1(i')+20i+10^3\int_0^t i(\tau)d\tau=120t-120tU(t-1)$$

Paso I. Transformar

$$0.1\mathcal{L}\{i'\}+20\mathcal{L}\{i\}+10^3\mathcal{L}\left\{\int_0^t i(\tau)d\tau\right\}=120[\ \mathcal{L}\{t\}-\mathcal{L}\{tU(t-1)\}\ ]$$

$$0.1[sI(s)-i(0)]+20I(s)+10^3\ \frac{I(s)}{s}=120\left[\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-s}}{s^2}-\frac{e^{-s}}{s}\right]$$

Paso II. Resolver ecuación transformada

Multiplicando por (10s) a ambos miembros de la expresión anterior se tiene

$$s^2I(s)+200I(s)+10^4I(s)=1200\left[\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}-e^{-s}\right]$$

$$I(s)\left[s^2+200+10000\right]=1200\left[\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}-e^{-s}\right]$$

$$I(s)(s+100)^2=1200\left[\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}-e^{-s}\right]$$

$$I(s)=1200\left[\frac{1}{s(s+100)^2}-\frac{e^{-s}}{s(s+100)^2}-\frac{e^{-s}}{(s+100)^2}\right]$$

Paso III. Transformada inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\{I(s)\}=1200[\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+100)^2}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s+100)^2}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{(s+100)^2}\right\}\ ]\ldots(1)$$

resolviendo por separado las transformadas inversas de la expresión anterior tenemos

$$\mathcal{L}^{-1}\{I(s)\}=i(t)\ldots(2)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+100)^2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\ \frac{1}{(s+100)^2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+100)^2}\right\}=$$

$$=1*te^{-100t}\ =\int_0^t \tau e^{-100\delta}d\tau$$

de donde

$$u = \tau \qquad dv = e^{-100\tau}\,d\tau$$

$$du = d\tau \qquad v = -\frac{e^{-100\tau}}{100}$$

entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+100)^2}\right\} = -\left.\frac{\tau e^{-100\tau}}{100}\right|_0^t + \frac{1}{100}\int_0^t e^{-100\delta}\,d\tau =$$

$$= \left[-\frac{\tau e^{-100\tau}}{100} - \frac{1}{10000}e^{-100\tau}\right]_0^t =$$

$$= \frac{-te^{-100t}}{100} - \frac{e^{-100t}}{10000} + \frac{1}{10000}$$

luego

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+100)^2}\right\} = \frac{-te^{-100t}}{100} - \frac{e^{-100t}}{10000} + \frac{1}{10000}\ldots(3)$$

por otro lado

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s+100)^2}\right\} = \left.\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+100)^2}\right\}\right|_{t\to t-1} U(t-1) =$$

$$= \left[-\frac{(t-1)e^{-100(t-1)}}{100} + \frac{e^{-100(t-1)}}{10000} + \frac{1}{10000}\right]U(t-1)$$

luego

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s+100)^2}\right\} = \left[-\frac{(t-1)e^{-100(t-1)}}{100} + \frac{e^{-100(t-1)}}{10000} + \frac{1}{10000}\right]U(t-1)\ldots(4)$$

finalmente

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{(s+100)^2}\right\} = \left.\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+100)^2}\right\}\right|_{t\to t-1} U(t-1) =$$

$$= \left.e^{-100t}t\right|_{t\to t-1} U(t-1) =$$

$$= e^{-100(t-1)}(t-1)U(t-1)$$

luego

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{(s+100)^2}\right\} = e^{-100(t-1)}(t-1)U(t-1)\ldots(5)$$

sustituyendo (2), (3) ,(4) y (5) en (1) tenemos por tanto que

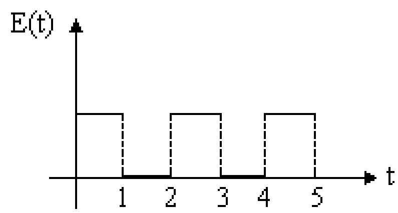
$$i(t) = \frac{3}{25}\left[1-U(t-1)\right] - \frac{3}{25}\left[e^{-100t} - e^{-100t}U(t-1)\right] - 12te^{-100t} - 1188(t-1)e^{-100(t-1)}U(t-1)$$

es la corriente pedida.

2. La ecuación diferencial de un circuito LR en serie es

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t)\ldots(1)$$

Determine la corriente $i(t)$ cuando $i(0) = 0$ dado el voltaje periódico aplicado $E(t)$ en forma de la función de onda cuadrada siguiente



Solución:

La transformada de Laplace de la ecuación (1) es

$$L\,\mathcal{L}\{i'\} + R\,\mathcal{L}\{i\} = \mathcal{L}\{E(t)\}\ldots(2)$$

donde

$$\mathcal{L}\{i'\} = sI(s) - i(0) = sI(s)\ldots(3)$$
$$\mathcal{L}\{i\} = I(s)\ldots(4)$$

como $E(t)$ es una función periódica, con periodo $T = 2$, entonces para un periodo tenemos que

$$E(t) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 \le t < 1 \\ 0 & ; \quad 1 \le t < 2 \end{cases}$$

y de acuerdo con el *teorema 4.14*

$$\mathcal{L}\{E(t)\}=\frac{1}{1-e^{-Ts}}\int_0^T e^{-t}E(t)dt=\frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\int_0^1 e^{-st}(1)dt+\int_1^2 e^{-st}(0)dt\right]=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2s}}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^1=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2s}}\left[-\frac{e^{-s}}{s}+\frac{1}{s}\right]=\frac{1-e^{-s}}{s\left(1-e^{-2s}\right)}=$$

$$=\frac{1-e^{-s}}{s\left(1-e^{-s}\right)\left(1+e^{-s}\right)}=\frac{1}{s\left(1+e^{-s}\right)}$$

luego

$$\mathcal{L}\{E(t)\}=\frac{1}{s\left(1+e^{-s}\right)}\ldots(5)$$

sustituyendo (3), (4) y (5) en (2)

$$LsI(s)+RI(s)=\frac{1}{s\left(1+e^{-s}\right)}$$

Paso II. Resolver ecuación transformada

$$I(s)L\left(s+\frac{R}{L}\right)=\frac{1}{s\left(1+e^{-s}\right)}$$

$$I(s)=\frac{1}{s\left(1+e^{-s}\right)\left[L\left(s+\frac{R}{L}\right)\right]}$$

$$I(s)=\left(\frac{1}{L}\right)\left(\frac{1}{s\left(s+\frac{R}{L}\right)}\right)\left(\frac{1}{1+e^{-s}}\right)$$

o bien

$$I(s)=\left(\frac{1}{L}\right)\underbrace{\left(\frac{\frac{L}{R}}{s}-\frac{\frac{L}{R}}{\left(s+\frac{R}{L}\right)}\right)}_{\text{por desarrollo en fracciones parciales}}\left(\frac{1}{1+e^{-s}}\right)\ldots(6)$$

recordando la serie geométrica

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \ldots \qquad |x| < 1$$

si $x = e^{-s}$, entonces

$$\frac{1}{1+e^{-s}} = 1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + \ldots \qquad \ldots(7)$$

sustituyendo (7) en (6)

$$I(s) = \left(\frac{1}{L}\right)\left(\frac{\frac{L}{R}}{s} - \frac{\frac{L}{R}}{s+\frac{L}{R}}\right)\left(1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right)\left(1 - e^{-s} + e^{-2s} - \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{R}\left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} + \ldots\right] -$$

$$- \frac{1}{R}\left[\frac{1}{s+\frac{R}{L}} - \frac{e^{-s}}{s+\frac{R}{L}} + \frac{e^{-2s}}{s+\frac{R}{L}} - \ldots\right]$$

Paso III. Transformada inversa

Aplicado el *teorema 4.18* a cada termino de la serie se tiene por tanto que

$$i(t) = \frac{1}{R}\left[1 - U(t-1) + U(t-2) - \ldots\right] -$$

$$- \frac{1}{R}\left[e^{-\frac{Rt}{L}} - e^{-\frac{R(t-1)}{L}}U(t-1) + e^{-\frac{R(t-2)}{L}}U(t-2) - e^{-\frac{R(t-3)}{L}}U(t-3) + \ldots\right]$$

o equivalentemente

$$i(t) = \frac{1}{R}\left[1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right] + \frac{1}{R}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1 - e^{-\frac{R(t-n)}{L}}\right)U(t-n)$$

UNIDAD V

SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES USANDO SERIES DE POTENCIAS

5.1 INTRODUCCION AL USO DE SERIES

Al momento hemos restringido nuestra atención al estudio de ecuaciones diferenciales cuya solución se puede obtener en forma exacta. En general una ecuación diferencial lineal de orden *n* tiene solución única y exacta si sus coeficientes son constantes, es decir, estos no dependen en forma explícita de la variable independiente. Desafortunadamente la mayor parte de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables, (con excepción de la ecuación de Euler-Cauchy estudiada en la *sección 3.6* de la unidad III) no se pueden resolver de manera exacta en términos de funciones elementales. En la presente unidad se desarrolla un método muy ingenioso para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables, en el cual, se trata de encontrar una solución mediante el uso de series de potencias.

5.2 DEFINICIÓN DE UNA SERIE DE POTENCIAS

Definición: Una serie de potencias en $x-a$ es una serie infinita de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$$

También, se dice que esta serie es una serie centrada en a.

Por ejemplo, de acuerdo con la definición anterior, la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} x^n$$

es una serie de potencias en x centrada en cero.

5.3 PROPIEDADES IMPORTANTES DE LA NOTACIÓN SUMATORIA

1) $\sum_{j=0}^{n} u_j + \sum_{j=0}^{n} v_j = \sum_{j=0}^{n} (u_j + v_j)$

2) $\alpha \sum_{j=0}^{n} u_j = \sum_{j=0}^{n} \alpha u_j$ (donde α no depende de *j*)

La propiedad 1) dice que para sumar dos series de potencias se requiere que los índices de ambas sumatorias *comiencen en el mismo número* y, que las potencias de la variable involucrada en la serie *estén enfasadas.* La propiedad 2) establece que siempre es posible introducir o extraer de una sumatoria algún α involucrado en la serie, siempre y cuando éste, sea independiente del índice de la sumatoria.

Por ejemplo, exprese

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2nCnx^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 6Cnx^{n+1}$$

como una sola serie.

Solución:

Primero es necesario igualar los índices de las sumatorias y enfasar las potencias de la variable involucrada *x*, esto es

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2nCnx^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 6Cnx^{n+1} = 2(1)C_1x^0 + \sum_{n=2}^{\infty} 2nCnx^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 6Cnx^{n+1} =$$

luego, sea $k = n-1$ en la primera sumatoria, y $k = n+1$ en la segunda tal que

$$= 2C_1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2(k+1)C_{(k+1)}x^k + \sum_{k=1}^{\infty} 6C_{k-1}x^k = 2C_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[2(k+1)C_{k+1} + 6C_{k-1}\right]x^k$$

por tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2nCnx^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 6Cnx^{n+1} = 2C_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[2(k+1)C_{k+1} + 6C_{k-1}\right]x^k$$

NOTA: En ambas sumatorias, *k* adopta los mismos valores sucesivos, 1, 2, 3,..., cuando *n*= 2, 3, 4,..., para *k=n-1* y *n*= 0, 1, 2,..., para *k=n+1*

5.4 EMPLEO DE UNA SERIE DE POTENCIAS PARA RESOLVER UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Con el propósito de hallar soluciones con series de potencias de ecuaciones diferenciales es conveniente introducir como solución una serie de potencias en *x* de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} Cnx^n$$

Donde adoptaremos que $Cn = 0, \text{ si n} = -1,\text{-}2,\text{-}3,\ldots$

5.4.1 EJEMPLOS

1. Determine una solución de

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 0 \ldots (1)$$

   como una serie de potencias en *x*.

Solución:

Proponemos

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} Cnx^n \ldots(2)$$

como solución de (1). Derivando (2)

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} nCnx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nCnx^{n-1}$$

sustituyendo a y y y' en (1) se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} nCnx^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2Cnx^{n+1} = C_1 x^0 + \sum_{n=2}^{\infty} nCnx^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2Cnx^{n+1} =$$

sea $k = n-1$ en la primer sumatoria y $k = n+1$ en la segunda sumatoria, entonces

$$= C_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)C_{k+1}x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2C_{k-1}x^k = C_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+1)C_{k+1} - 2C_{k-1} \right] x^k = 0$$

como $x^k \neq 0 \quad \forall k$ entonces lo anterior se reduce a una identidad si y solo si

$$C_1 = 0 \text{ y } (k+1)C_{k+1} - 2C_{k-1} = 0 \ldots(3)$$

despejando la constante de mayor subíndice en la segunda ecuación de (3)

$$C_{k+1} = \frac{2C_{k-1}}{k+1} \qquad \forall k = 1, \ldots, \infty$$

entonces

si $k = 1$ $\quad C_2 = \frac{2C_0}{2} = C_0$

si $k = 2$ $\quad C_3 = \frac{2C_1}{3} = 0$

si $k = 3$ $\quad C_4 = \frac{2C_2}{4} = \frac{C_2}{2} = \frac{C_0}{2!}$

si $k = 4$ $\quad C_5 = \frac{2C_3}{5} = 0$

si $k = 5$ $\quad C_6 = \frac{2C_4}{6} = \frac{C_4}{3} = \frac{C_0}{3!}$

si $k = 6$ $\qquad C_7 = \frac{2C_5}{7} = 0$

etc.

Luego de (2)

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} Cnx^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + C_6x^6 + \ldots \quad \ldots(4)$$

sustituyendo en (4) los valores encontrados para las constantes

$$y = C_0 + 0x + C_0x^2 + 0x^3 + \frac{C_0}{2!}x^4 + 0x^5 + \frac{C_0}{3!}x^6 + \ldots = C_0\left[1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \ldots\right]$$

por tanto la serie

$$y = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

es solución de la ecuación diferencial dada.

2. Determine una solución de

$$4y'' + y = 0 \ldots (1)$$

como una serie de potencias en *x*.

Solución:

Proponemos

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} Cnx^n \ldots (2)$$

como solución de (1). Derivando (2)

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} nCnx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nCnx^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)Cnx^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)Cnx^{n-2}$$

sustituyendo a y y sus derivadas en (1) se tiene

$$4\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)Cnx^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} Cnx^{n} =$$

sea $k = n-2$ en la primer sumatoria y $k = n$ en la segunda sumatoria, entonces

$$= 4\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)C_{k+2}x^{k} + \sum_{k=0}^{\infty} C_{k}x^{k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left[4(k+2)(k+1)C_{k+2} + C_{k}\right]x^{k} = 0$$

como $x^{k} \neq 0 \;\; \forall k$ entonces lo anterior se reduce a una identidad si y solo si

$$4(k+2)(k+1)C_{k+2} + C_{k} = 0 \ldots (3)$$

despejando la constante de mayor subíndice en la segunda ecuación de (3)

$$C_{k+1} = \frac{-C_{k}}{4(k+2)(k+1)} \qquad \forall k = 1,\ldots,\infty$$

entonces

si $k = 0$ $\qquad C_{2} = \dfrac{-C_{0}}{4(2)(1)} = \dfrac{-C_{0}}{8} = \dfrac{-C_{0}}{2^{2}\cdot 2!}$

si $k = 1$ $\qquad C_{3} = \dfrac{-C_{1}}{4(3)(2)} = \dfrac{-C_{1}}{2^{2}\cdot 3!}$

si $k = 2$ $\qquad C_{4} = \dfrac{-C_{2}}{4(4)(3)} = \dfrac{-C_{2}}{2^{2}\cdot 2^{2}\cdot 3} = \dfrac{C_{0}}{2^{4}\cdot 4!}$

si $k = 3$ $\qquad C_{5} = \dfrac{-C_{3}}{4(5)(4)} = \dfrac{C_{1}}{2^{4}\cdot 5!}$

si $k = 4$ $\qquad C_{6} = \dfrac{-C_{4}}{4(6)(5)} = \dfrac{-C_{0}}{2^{6}\cdot 6!}$

si $k = 5$ $\qquad C_{7} = \dfrac{-C_{5}}{4(7)(6)} = \dfrac{-C_{1}}{2^{6}\cdot 7!}$

etc.

Luego de (2)

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} Cnx^{n} = C_{0} + C_{1}x + C_{2}x^{2} + C_{3}x^{3} + C_{4}x^{4} + C_{5}x^{5} + C_{6}x^{6} + \ldots \quad \ldots (4)$$

sustituyendo en (4) los valores encontrados para las constantes

$$y = C_0 + C_1 x - \frac{C_0}{2^2 \cdot 2!} x^2 - \frac{C_1}{2^2 \cdot 3!} x^3 + \frac{C_0}{2^4 \cdot 4!} x^4 + \frac{C_1}{2^4 \cdot 5!} x^5 - \frac{C_0}{2^6 \cdot 6!} x^6 + \dots$$

$$y = C_0\left[1 - \frac{1}{2^2 \cdot 2!} x^2 + \frac{1}{2^4 \cdot 4!} x^4 - \frac{1}{2^6 \cdot 6!} x^6 + \dots\right] +$$
$$+ C_1\left[x - \frac{1}{2^2 \cdot 3!} x^3 + \frac{1}{2^4 \cdot 5!} x^5 - \frac{1}{2^6 \cdot 7!} \mathrm{x}^7 + \dots\right]$$

por tanto la serie

$$y = C_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} + 2C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}$$

es solución de la ecuación diferencial dada.

BIBLIOGRAFÍA

- Zill, Dennis G.
  Ecuaciones Diferenciales Con Aplicaciones De Modelado.
  Ed. Thomsom, 6ª edición.

- Spiegel, Murria G.
  Ecuaciones Diferenciales Aplicadas.
  Ed. Prentice Hall, 3ª edición.

- Makarenko, G.
  Problemas De Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
  Ed. I.P.N., 1ª edición.

- Zill, Dennis G.
  Ecuaciones Diferenciales Con Aplicaciones.
  Ed. Iberóamericana, 3ª edición.

- Tagle, R. Kent
  Fundamentos De Ecuaciones Diferenciales.
  Ed. Addison Wesley Logran, 2ª edición.

- Holebrook
  Transformadas De Laplace Para Ingenieros En Electrónica.
  Ed. Limusa, 1ª edición.

- Spiegel, Murray R.
  Manual De Fórmulas y Tablas Matemáticas.
  Ed. McCGrawHill, 1ª edición.