APUNTES DE FÍSICA

2º BACHILLERATO

José Escudero Martínez

Licenciado en Ciencias Físicas

INTRODUCCIÓN

Estos apuntes tienen como objetivo abarcar todos los contenidos exigidos para la Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (PEBAU) en Andalucía. En ningún caso pretenden ser un libro de texto pero sí una guía que facilite a los alumnos un seguimiento adecuado de la asignatura de Física de 2º de Bachillerato sin necesidad de tener que tomar sus propios apuntes, ahorrando con ello un tiempo considerable en la exposición de la materia en clase y permitiendo la realización de un mayor número de ejemplos y ejercicios en el aula.

Por otra parte, estos apuntes han sido posibles gracias a mi compañero de universidad y amigo, Juan Carlos Rodríguez Herola, y son reflejo de nuestra experiencia en la docencia de esta materia a lo largo de los años. Hay diferentes formas de estructurar los contenidos de la materia y, en mi caso, he decidido que sea la que se sintetiza en el índice de temas que se indican en la página siguiente y que paso a describir brevemente.

Tengo que destacar que en estos apuntes se han incluido algunos contenidos que no corresponden con el curriculum de 2º de bachillerato y, que por tanto, no son evaluables en la PEBAU (ver las directrices y orientaciones generales para la prueba de acceso y admisión en las universidades públicas de Andalucía que puedes encontrar en la página web del centro). Sin embargo, considero que son necesarios para completar la formación del alumno de este nivel.

El tema 0 es un repaso de las herramientas matemáticas básicas que vamos a utilizar este curso, con una ampliación de los vectores al espacio tridimensional.

Los temas 1 y 2 pretenden ser un repaso de los contenidos que sobre “Dinámica, Trabajo y Energía” se estudiaron en 1º de Bachillerato, pero con una mayor rigurosidad que entonces, ya que el alumno dispone de las herramientas matemáticas adecuadas, como el cálculo diferencial e integral.

El tema 3 se dedica íntegramente al estudio conjunto de la interacción gravitatoria y electrostática, incluyendo el campo gravitatorio terrestre y el movimiento de satélites. Considero que es adecuado estudiar ambos campos simultáneamente para simplificar el proceso de aprendizaje del alumno, y que este pueda ir viendo las analogías y diferencias entra ambas interacciones.

Los temas 4 y 5 conforman el bloque “Interacción electromagnética”. El tema 4 se dedica al estudio del campo magnético y al tema 5 al estudio de la inducción electromagnética, fenómeno que es la base de la llamada síntesis electromagnética.

Los temas 6 y 7 conforman el bloque “Vibraciones y ondas”, estando el primero dedicado al estudio del movimiento vibratorio armónico simple (MAS) y el segundo al movimiento ondulatorio, en general, y a las ondas armónicas, en particular, a sus propiedades y a las ondas electromagnéticas.

El tema 6, MAS, no forma parte del temario de este curso, ni es evaluable en la PEBAU, pero he considerado importante incluirlo en este curso pues creo que su estudio es más sencillo para los alumnos ahora, y además nos ayudará a entender mejor y más fácilmente al movimiento ondulatorio.

El tema 8 se dedica a una breve iniciación a la óptica geométrica en lo referente a la formación de imágenes en sistemas ópticos.

Finalmente, los temas 9 y 10 están dedicados a la “Física Moderna”: el tema 9 a la dualidad onda-partícula y el tema 10 a la física nuclear.

La temporalización es relativa ya que depende de varios factores, pero considero que sería apropiado dedicar el primer trimestre al desarrollo de los temas 0, 1, 2, 3 y 4, el segundo trimestre a los temas 5, 6, 7 y 8, y el tercer trimestre a los temas 9 y 10.

Por último desear que estos apuntes sean de gran ayuda para todos aquellos alumnos que los utilicen.

ÍNDICE DE TEMAS

TEMA 0. HERRAMIENTAS BÁSICAS DE LA FÍSICA

1. MAGNITUDES FÍSICAS Y SU CLASIFICACIÓN

Una magnitud física es una propiedad de los cuerpos que se puede medir, es decir, que se puede expresar mediante una cantidad y su correspondiente unidad.

Una primera clasificación de las magnitudes físicas es:

- Magnitudes físicas fundamentales
- Magnitudes físicas derivadas.

Recuerda que las primeras se definen sin hacer uso de ninguna otra magnitud y que las segundas utilizan para su definición a una o varias de las primeras. La elección de las magnitudes fundamentales es arbitraria pero, el número de magnitudes fundamentales elegidas debe ser el mínimo que se necesite para definir coherentemente y con precisión a todas las demás (por esto se llaman derivadas).

Tanto las magnitudes físicas fundamentales como las derivadas se agrupan en sistemas de unidades. En la tabla siguiente se recogen las magnitudes fundamentales y sus unidades en el Sistema Internacional de Unidades (SI):

MAGNITUDES FUNDAMENTALES Y SUS UNIDADES EN EL SI		
MAGNITUD	**UNIDAD DE MEDIDA**	**SÍMBOLO**
Longitud	*metro*	*m*
Masa	*kilogramo*	*Kg*
Tiempo	*segundo*	*s*
Temperatura	*grado Kelvin*	*K*
Intensidad de corriente eléctrica	*amperio*	*A*
Intensidad luminosa	*candela*	*Cd*
Cantidad de materia	*mol*	*mol*
UNIDADES COMPLEMENTARIAS DEL SI		
Ángulo plano	*radián*	*rad*
Ángulo sólido	*estereoradian*	*sr*

Recuerda que la medida de cualquier magnitud física en una unidad la puedes cambiar a otra unidad equivalente y que el método más recomendable es el llamado "método de las fracciones unitarias".

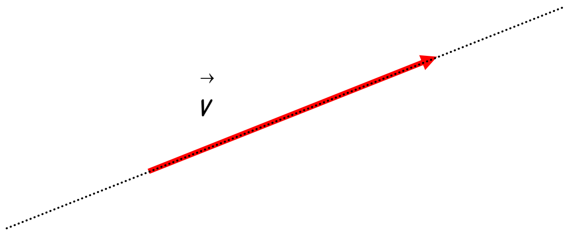
Desde otro punto de vista las magnitudes físicas se clasifican en:

- Magnitudes físicas escalares.
- Magnitudes físicas vectoriales

Recuerda que una magnitud física se dice que es escalar cuando queda perfectamente determinada mediante una cantidad y su correspondiente unidad. Este es el caso de la masa, temperatura, superficie, volumen, densidad, trabajo, etc.

Sin embargo para que una magnitud física vectorial quede perfectamente determinada no basta con dar la cantidad y su unidad, es necesario saber la dirección y el sentido (algunas veces también el punto de aplicación). Es el caso de la posición, velocidad, aceleración, fuerza, cantidad de movimiento, etc.

Las magnitudes físicas vectoriales se representan gráficamente mediante una flecha, denominada **VECTOR**, y se escribe simbólicamente con la letra que simboliza a la magnitud física con una flecha encima. Por ejemplo el vector velocidad sería:



En una magnitud física hemos de hablar de las siguientes características:

DIRECCIÓN: Es la recta que contiene al vector o que es paralela al vector.

SENTIDO: Es el extremo del vector.

MÓDULO: Es el valor numérico de la magnitud física y es directamente proporcional la longitud del vector. Se representa por:

$$|\vec{v}|$$

EJEMPLO 1º

Indica la dirección sentido y módulo de la magnitud física vectorial correspondiente en cada uno de los casos siguientes:

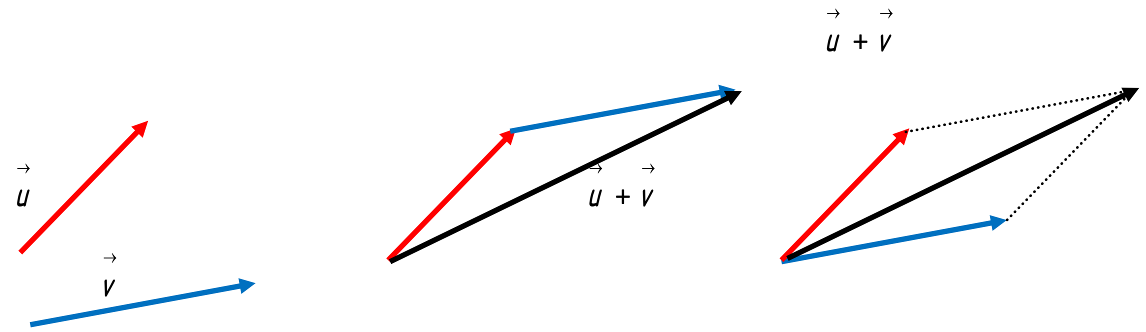
a) Coche que circula a 50 Km/h hacia la derecha.
b) Objeto que es lanzado verticalmente hacia arriba a 10 m/s.
c) Tren que se acerca al andén de la estación por tu derecha a 20 Km/h.
d) Aceleración de la gravedad terrestre.
e) Objeto que desciende a 5 m/s.
f) Moto que se acerca al paso de peatones por tu izquierda a 20 m/s.
g) Tu peso.
h) Balón que se chuta a 200 m/s con formando un ángulo de 45º con la horizontal.
i) Jugador de tenis que golpea la pelota hacia abajo formando 45º con la horizontal a 100 m/s.

2.- OPERACIONES GEOMÉTRICAS CON MAGNITUDES VECTORIALES.

Para operar con magnitudes escalares basta con manejar las cantidades y las unidades coherentes, pero para operar con magnitudes vectoriales no sólo hay que tener en cuenta la cantidad (módulo), hay que tener también en cuenta la dirección y el sentido. Recordemos las operaciones con vectores vistas los cursos anteriores y ampliemos a alguna más.

2.1 Suma y resta geométrica de vectores

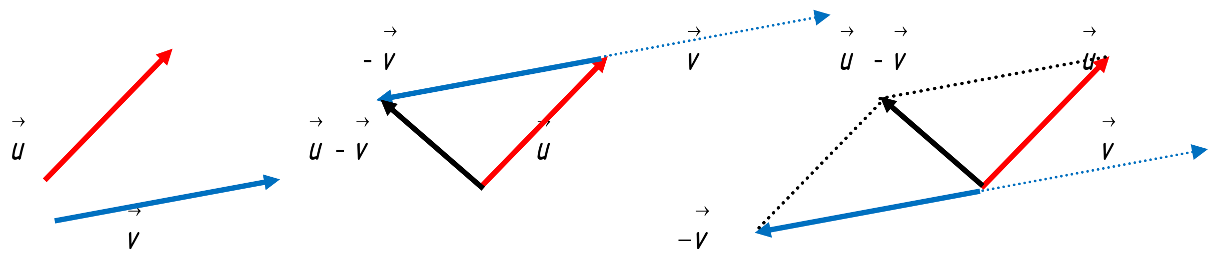
Para sumar geométricamente dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se sitúa uno de ellos a continuación del otro, y se une el origen del primero con el extremo del último:



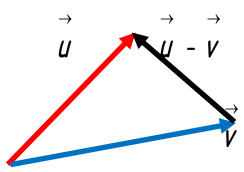
Puedes observar que cuando los vectores que sumas no tienen la misma dirección, su suma coincide con la diagonal del paralelogramo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

Para restar geométricamente dos vectores $\vec{u} - \vec{v}$, se le suma a $\vec{u}$ el opuesto de $\vec{v}$ y se procede a realizar la suma como se ha explicado.

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$



Observa como en este caso el vector $\vec{u} - \vec{v}$, es el vector que une el extremo del segundo con el extremo del primero.



2.2 Definición geométrica de producto de un escalar por un vector

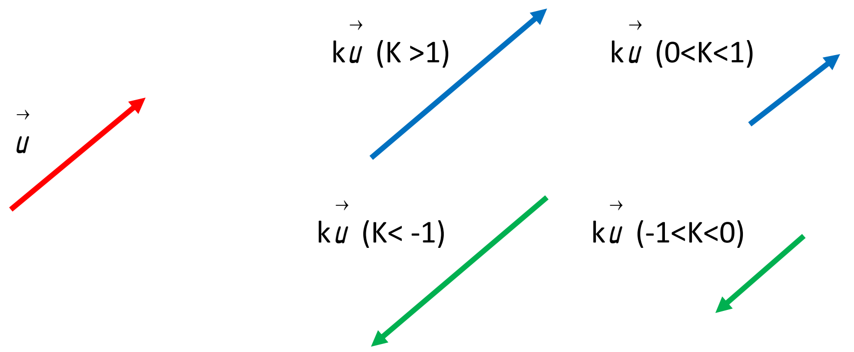
Se llama producto de un escalar por un vector, al producto de un nº real k, por un vector $\vec{u}$.

Se representa por $k.\vec{u}$, y el resultado es un nuevo vector que tiene las siguientes características:

Dirección: la misma que $\vec{u}$.

Sentido: el mismo que $\vec{u}$, si el escalar es positivo y, contrario a $\vec{u}$, si el escalar es negativo.

Módulo: el valor absoluto del escalar por el módulo de $\vec{u}$: $|k.\vec{u}| = |k|.|\vec{u}|$



2.3 Definición geométrica de producto escalar de dos vectores.

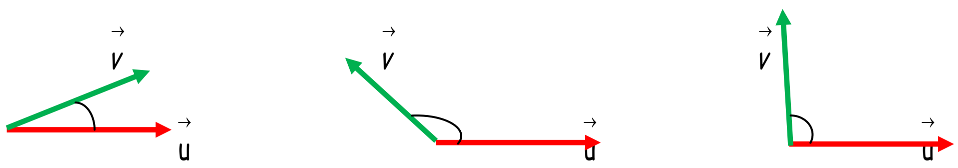
El producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que se representa por $\vec{u}\,.\,\vec{v}$, es un escalar que se obtiene de multiplicar los módulos de ambos vectores por el coseno del ángulo que forman:

$$\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = |\,\vec{u}\,|\,.\,|\,\vec{v}\,|\,.\cos(\vec{u},\vec{v})}$$

COMENTARIOS: De la definición geométrica del producto escalar podemos deducir lo siguiente:

1º.- El producto escalar de dos vectores puede ser positivo, negativo o cero, dependiendo del valor del coseno del ángulo que forman:

- Si el ángulo que forman los vectores es agudo (coseno +), el producto escalar es positivo, si el ángulo es obtuso (coseno -), el producto escalar es negativo.
- Si los vectores son perpendiculares, el producto escalar es 0, puesto que cos 90º = 0. Esta propiedad sirve como **CRITERIO DE PERPENDICULARIDAD ENTRE DOS VECTORES.**



$\vec{u}.\vec{v} > 0$ $\qquad$ $\vec{u}.\vec{v} < 0$ $\qquad$ $\vec{u}.\vec{v} = 0$

2º.- Si multiplicamos escalarmente al vector por sí mismo, obtenemos una expresión que nos permite calcular el módulo del vector a partir de su producto escalar:

$$\vec{u}\,.\,\vec{u} = |\,\vec{u}\,|\,.\,|\,\vec{u}\,|\,.\cos(\vec{u},\vec{u}) = |\,\vec{u}\,|^2 \cos 0° = |\,\vec{u}\,|^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{|\,\vec{u}\,| = \sqrt{\vec{u}\,.\,\vec{u}}}$$

Observa que el módulo de un vector coincide con la raíz cuadrada positiva de su producto escalar.

3º.- Si despejamos el coseno en la definición geométrica, obtenemos la expresión:

$$\boxed{\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{|\,\vec{u}\,|\,.\,|\,\vec{v}\,|}}$$

De modo que si conocemos el módulo de los dos vectores y el valor de su producto escalar, podemos conocer el ángulo que forman dichos vectores.

2.4 Definición geométrica de producto vectorial de dos vectores.

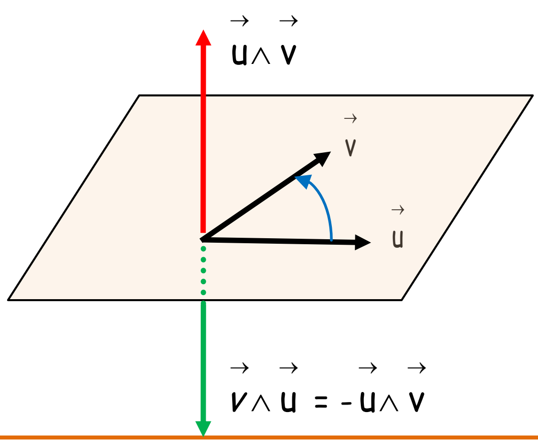
El producto vectorial de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que se representa por $\vec{u} \wedge \vec{v}$ o bien por $\vec{u} \times \vec{v}$, es un nuevo vector que tiene las siguientes características:

Módulo: es el producto del módulo de los vectores que se multiplican por el seno del ángulo que forman ambos vectores

$$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot sen(\vec{u}, \vec{v})$$

Dirección: perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es decir, perpendicular al plano que determinan $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Sentido: el de avance de un tornillo al girar el primer vector hacia el segundo por el camino más corto.



COMENTARIOS:

De la definición geométrica del producto vectorial podemos deducir lo siguiente:

1º.-Si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección (paralelos o antiparalelos), su producto vectorial es nulo, ya que los vectores formarían entre sí un ángulo de 0º o 180º, y en ambos casos el seno vale 0.

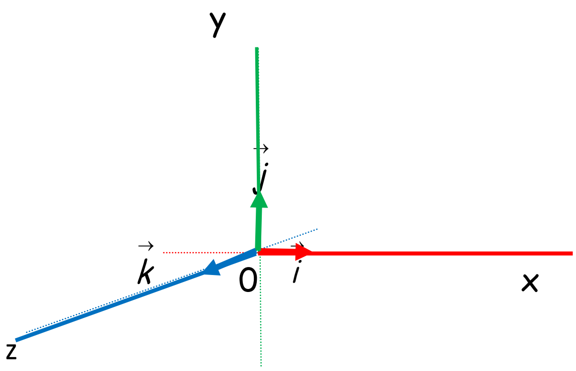
2º.- Si los vectores son perpendiculares su producto vectorial es máximo, ya que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ formarían 90º y su seno vale 1.

3º.- El producto vectorial de dos vectores no es conmutativo, como puede verse en el dibujo:

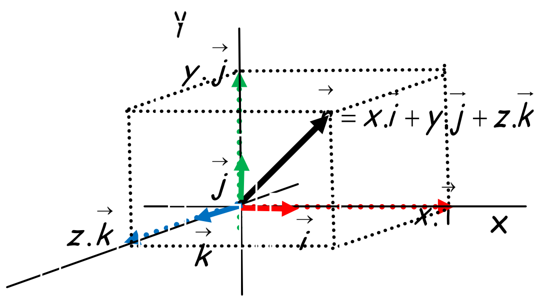
$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$$

3.- COORDENADAS CARTESIANAS O COMPONENTES DE UN VECTOR

El **sistema de coordenadas cartesiano** está formado por tres rectas perpendiculares entre sí, llamados **ejes de coordenadas cartesianos**, que se cortan en un punto O que es el origen de coordenadas. Los tres ejes son el **"eje x"**, el **"eje y"** y el **"eje z"**.



Si en cada uno de los ejes se define un vector unitario (de modo la unidad) y de sentido positivo (son los vectores $\vec{i}, \vec{j}$ y $\vec{k}$), cualquier vector $\vec{r}$ del espacio puede expresarse como una combinación lineal de los vectores $\vec{i}, \vec{j}$ y $\vec{k}$ Como puede verse en el siguiente dibujo:



A la expresión:

$$\boxed{\vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \quad ó \quad \vec{r} = (x, y, z)}$$

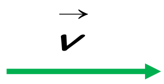
se le denomina **EXPRESIÓN ANALÍTICA O EXPRESIÓN VECTORIAL DEL VECTOR** $\vec{r}$.

A los escalares x, y, z se les denomina **COORDENADAS CARTESIANAS O COMPONENTES CARTESIANAS DEL VECTOR** $\vec{r}$.

COMENTARIOS:

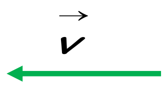
1º.- Cuando la dirección del vector es paralela a uno de los tres ejes de coordenadas, entonces el vector tiene sólo una coordenada distinta de cero: aquella que corresponde al eje respecto al cual es paralelo. Además, la coordenada no nula será positiva si el sentido del vector coincide con el sentido positivo del eje y negativa si es al contrario.

Por ejemplo, si un coche se mueve horizontalmente hacia la derecha con una velocidad de 10 m/s, la expresión analítica de su vector velocidad es:



$$\boxed{\vec{v} = 10\,\vec{i}\ m/s = 10\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k}\ m/s = (10,0,0)\,m/s} \Rightarrow \begin{cases} \text{Dirección: horizontal} \\ \text{Sentido: derecha} \\ \text{Módulo: } 10\,m/s \end{cases}$$

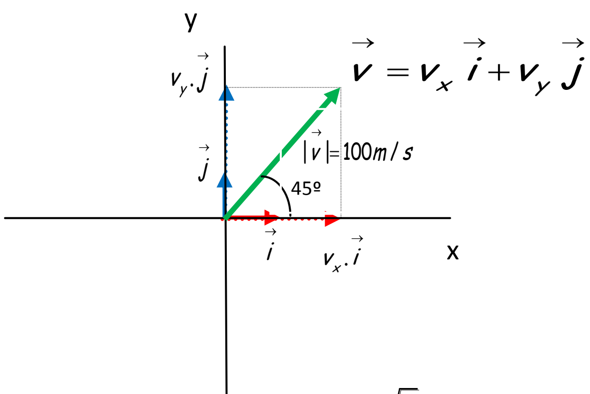
Si el coche se mueve ahora hacia la izquierda con la misma velocidad de 10 m/s, la expresión analítica de su vector velocidad es:



$$\boxed{\vec{v} = -10\,\vec{i}\ m/s = -10\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k}\ m/s = (-10,0,0)\,m/s} \Rightarrow \begin{cases} \text{Dirección: horizontal} \\ \text{Sentido: izquierda} \\ \text{Módulo: } 10\,m/s \end{cases}$$

2º.- Si el vector está contenido en el plano XY y su dirección no coincide con ninguno de los dos ejes, entonces el vector tendrá las dos primeras componentes distintas de cero y la tercera igual a cero.

Por ejemplo, supongamos que se dispara un proyectil con una velocidad de 100 m/s formando un ángulo de 45º con la parte positiva de eje x. Escribe la expresión analítica del vector velocidad.



$$\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} \Rightarrow \begin{cases} v_x = |\vec{v}|.\cos 45° = 100\cos 45° = 100.\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,m/s \\ v_y = |\vec{v}|.sen 45° = 100 sen 45° = 100.\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,m/s \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = 50\sqrt{2}\,\vec{i} + 50\sqrt{2}\,\vec{j}\ m/s$$

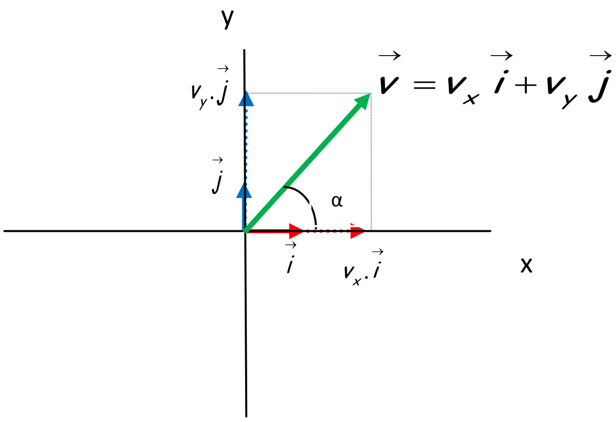
$$\boxed{\vec{v} = 50\sqrt{2}\,\vec{i} + 50\sqrt{2}\,\vec{j}\ m/s = 50\sqrt{2}\,\vec{i} + 50\sqrt{2}\,\vec{j} + 0\,\vec{k}\ m/s}$$

Observa como las dos coordenadas son positivas ya que el vector está orientado en el primer cuadrante.

La forma general de calcular las coordenadas de un vector en el plano XY, aplicando la trigonometría es:

$$\boxed{\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} \Rightarrow \begin{cases} v_x = |\vec{v}|.\cos\alpha \\ v_y = |\vec{v}|.\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases}}$$

Siendo α el ángulo que forma el semieje positivo de las x con el vector. El signo del seno y el coseno de este ángulo te proporcionará el signo de las coordenadas del vector.



3º.- Si el vector está contenido en los planos XZ ó YZ, siempre haba una coordenada nula: la coordenada "y" en el primer caso, y la coordenada "x" en el segundo.

4º.- Cuando el vector no coincida con ninguno de los ejes, ni con los planos XY, XZ ó YZ, entonces las tres coordenadas del vector serán distintas de cero.

EJEMPLO 2º

Indica la expresión analítica de la magnitud física vectorial correspondiente en cada uno de los casos siguientes:

a) Coche que circula a 50 Km/h hacia la derecha.
b) Objeto que es lanzado verticalmente hacia arriba a 10 m/s.
c) Tren que se acerca al andén de la estación por tu derecha a 20 Km/h.
d) Aceleración de la gravedad terrestre.
e) Objeto que desciende a 5 m/s.
f) Moto que se acerca al paso de peatones por tu izquierda a 20 m/s.

g) Tu peso.
h) Balón que se chuta a 200 m/s con formando un ángulo de 45º con la horizontal.
i) Jugador de tenis que golpea la pelota hacia abajo formando 45º con el semieje horizontal positivo a 100 m/s.
j) Avión que vuela a 1000 Km /h hacia S.
k) Avión que vuela a 1000 Km /h hacia NE.
l) Avión que vuela a 1000 Km /h hacia SE.
m) Avión que vuela a 1000 Km /h hacia NNO.

4.- OPERACIONES CON VECTORES EN FORMA ANALÍTICA

Supongamos dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ expresados en forma analítica:

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k} \quad \text{y} \quad \vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

4.1 Suma y resta analítica de vectores

Se define la suma analítica de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, como es vector que se obtiene de sumar las coordenadas semejantes:

$$\boxed{\vec{u}+\vec{v} = (u_x, u_y, u_z) + (v_x, v_y, v_z) = (u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z) = (u_x + v_x)\vec{i} + (u_y + v_y)\vec{j} + (u_z + v_z)\vec{k}}$$

Se define la resta analítica de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, como es vector que se obtiene de restar a las coordenadas del primero, las coordenadas semejantes del segundo:

$$\boxed{\vec{u}-\vec{v} = (u_x, u_y, u_z) - (v_x, v_y, v_z) = (u_x - v_x, u_y - v_y, u_z - v_z) = (u_x - v_x)\vec{i} + (u_y - v_y)\vec{j} + (u_z - v_z)\vec{k}}$$

4.2 Producto de un escalar por un vector en forma analítica

Se define el producto de un escalar k por un vector $\vec{u}$, como el vector que se obtiene de multiplicar cada una de sus coordenadas por el escalar:

$$\boxed{k.\vec{u} = k.(u_x, u_y, u_z) = (k.u_x, k.u_y, k.u_z) = k.u_x\vec{i} + k.u_y\vec{j} + k.u_z\vec{k}}$$

4.3 Producto escalar de dos vectores en forma analítica

El producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, escrito en forma analítica es un escalar que se obtiene de multiplicar las coordenadas semejantes de ambos vectores y sumar los resultados:

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = (u_x, u_y, u_z).(v_x, v_y, v_z) = u_x.v_x + u_y.v_y + u_z.v_z}$$

COMENTARIOS

1º.- Recuerda que el 2º comentario de la definición geométrica del producto escalar nos decía que si multiplicamos escalarmente al vector por sí mismo, obtenemos una expresión que nos permite calcular el módulo del vector a partir de sus coordenadas:

$$\vec{u}.\vec{u} = |\vec{u}|.|\vec{u}|.\cos(\vec{u},\vec{u}) = |\vec{u}|^2 \cos 0° = |\vec{u}|^2 \quad \Rightarrow \quad |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$$

Y si ahora sustituimos el producto escalar por su expresión analítica:

$$\boxed{|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}}$$

Obtenemos que el módulo de un vector es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus coordenadas.

2º.- Recuerda igualmente que, según el tercer comentario, si despejamos el coseno en la definición geométrica, obtenemos una expresión que nos permitía conocer el coseno del ángulo que forman los vectores y, a partir de él, calcular el ángulo que forman los vectores:

$$\boxed{\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}}$$

Y si ahora sustituimos el producto escalar por su expresión analítica y también el módulo de los vectores, queda la expresión:

$$\boxed{\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \frac{u_x.v_x + u_y.v_y + u_z.v_z}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}.\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}}$$

De modo que si conocemos las coordenadas de los vectores, podemos conocer el ángulo que forman.

4.4 Producto vectorial de dos vectores en forma analítica

La expresión analítica del vector que resulta de un producto vectorial entre dos vectores se obtiene del siguiente modo:

$$\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(u_y . v_z - u_z . v_y\right)\vec{i} + \left(u_z . v_x - u_x . v_z\right)\vec{j} + \left(u_x . v_y - u_y . v_x\right)\vec{k}}$$

4.5 Derivada de un vector en forma analítica

La derivada de un vector es otro vector que se obtiene de derivar cada una de sus coordenadas y se escribe:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{v}' = v_x' \vec{i} + v_y' \vec{j} + v_z' \vec{k}}$$

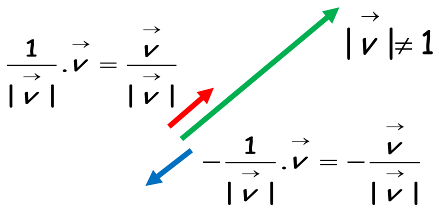
5. VECTORES UNITARIOS

Un vector es unitario cuando su módulo vale la unidad.

Si un vector $\vec{v}$ no es unitario, podemos hallar dos vectores unitarios de la misma dirección que él: uno en el mismo sentido y otro en sentido contrario.

Para ello basta con multiplicar al vector $\vec{v}$ por la inversa de su módulo o cambiar de signo dicho producto, respectivamente.

$$\boxed{\text{Si } |\vec{v}| \neq 1 \quad \Rightarrow \frac{1}{|\vec{v}|} . \vec{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad ó \quad -\frac{1}{|\vec{v}|} . \vec{v} = -\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \text{ tienen de módulo la unidad}}$$



EJEMPLO 3º

Dados los vectores $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ Calcula:

a) La suma: $\vec{u} + \vec{v}$

b) La resta: $\vec{u} - \vec{v}$

c) El producto del escalar 3 por el vector $\vec{u}$: $3.\vec{u}$

d) El producto escalar de ambos vectores: $\vec{u}.\vec{v}$

e) El módulo de cada uno de los vectores: $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$

f) El ángulo que forman ambos vectores.

g) El producto vectorial de ambos vectores: $\vec{u} \wedge \vec{v}$

h) Vector unitario de la misma dirección y sentido que $\vec{u}$. Comprueba que es unitario.

i) Vector unitario de la misma dirección y sentido contrario que $\vec{u}$. Comprueba que es unitario.

EJEMPLO 4º

Responde a los mismos apartados del ejercicio anterior con los vectores:

$$\vec{u} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \qquad \vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$$

EJEMPLO 5º

Comprueba el valor de los siguientes productos escalares entre los vectores unitarios:

$$\vec{i}.\vec{i} \qquad \vec{i}.\vec{j} \qquad \vec{i}.\vec{k} \qquad \vec{j}.\vec{j} \qquad \vec{j}.\vec{k} \qquad \vec{k}.\vec{k}$$

a) Aplicando la definición geométrica.

b) Aplicando la definición analítica.

Soluc: 1, 0, 0, 1, 0 y 1

EJEMPLO 6º

Comprueba los siguientes productos vectoriales:

$$\vec{i} \wedge \vec{i} \qquad \vec{i} \wedge \vec{j} \qquad \vec{i} \wedge \vec{k} \qquad \vec{j} \wedge \vec{i} \qquad \vec{j} \wedge \vec{j} \qquad \vec{j} \wedge \vec{k} \qquad \vec{k} \wedge \vec{i} \qquad \vec{k} \wedge \vec{j} \qquad \vec{k} \wedge \vec{k}$$

a) Aplicando la definición geométrica.

b) Aplicando la definición analítica.

Soluc: $\vec{0}$, $\vec{k}$, $-\vec{j}$, $-\vec{k}$, $\vec{0}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $-\vec{i}$, $\vec{0}$

TEMA 1. DINÁMICA DEL PUNTO MATERIAL

1. **Introducción.**
2. **Movimiento, trayectoria, espacio recorrido, vector de posición y vector desplazamiento.**
3. **Vectores velocidad instantánea y aceleración instantánea.**
4. **Componentes intrínsecas de la aceleración: aceleración normal o centrípeta y aceleración instantánea.**
5. **Clasificación de los movimientos.**
6. **MRU.**
7. **MRUA.**
8. **MCU.**
9. **Composición de movimientos: movimiento parabólico.**
10. **Las Leyes de la Dinámica ó Leyes de Newton.**
11. **La fuerza de rozamiento.**
12. **Fuerza centrípeta. Ejemplos: péndulo cónico y curvas.**
13. **Cantidad de movimiento o momento lineal.**
14. **Impulso de una fuerza.**
15. **Relación entre el impulso de una fuerza y la cantidad de movimiento.**
16. **Principio de conservación de la cantidad de movimiento o del momento lineal.**
17. **Efecto deformador de una fuerza en un muelle: Ley de Hooke.**

LECTURAS RECOMENDADAS:

Sistemas de referencia inerciales y no inerciales. Fuerzas de inercia

1. INTRODUCCIÓN

En física se denomina **punto material o partícula** a aquel objeto que tiene masa pero que no tiene dimensiones. En realidad, cuando la física considera a un cuerpo como un punto material, no es que carezca de volumen sino que este no ha de ser tenido en cuenta para el fenómeno que se está estudiando.

2. MOVIMIENTO, TRAYECTORIA, ESPACIO RECORRIDO, VECTOR DE POSICIÓN Y VECTOR DESPLAZAMIENTO

Se denomina ***movimiento*** al cambio de posición de un cuerpo respecto a un punto que se toma como referencia, denominado sistema de referencia. De la definición se deduce claramente que el movimiento es un concepto relativo, es decir, un mismo objeto puede estar en movimiento respecto a un sistema de referencia y al mismo tiempo estar en reposo respecto a otro sistema de referencia diferente.

En movimiento, se denomina ***trayectoria*** a la línea imaginaria que une las sucesivas posiciones por las que va pasando un cuerpo. Esta puede ser rectilínea, curvilínea (circular, elíptica, parabólica, etc.) o una sucesión de ambas.

En un movimiento, se denomina ***espacio recorrido*** a la longitud de la trayectoria.

Se denomina ***vector de posición*** de una partícula, respecto a un sistema de referencia, al vector que va desde el origen del sistema de referencia a la posición que ocupa la partícula. Se representa por $\vec{r}$.

El vector de posición de una partícula que se mueve respecto a un sistema de referencia será función del tiempo (sólo será constante cuando la partícula esté en reposo respecto a dicho sistema) y por eso podemos escribir:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$

El módulo del vector de posición nos indicará a qué distancia estará la partícula del sistema de referencia en cada instante.

Llamamos ***ecuaciones cartesianas del vector de posición*** a las expresiones analíticas de sus componentes x(t), y(t) y z(t), que corresponden con tres ecuaciones escalares.

En general serán tres las ecuaciones cartesianas de la posición, pero si la partícula se mueve solamente a lo largo de uno de los ejes de coordenadas entonces la única coordenada distinta de 0 del vector de posición será la de ese eje, pudiendo prescindir de las otras dos coordenadas ya que serían nulas, y por tanto, habrá una sola ecuación cartesiana de la posición.

Se llama ***vector desplazamiento*** entre dos instantes de tiempo t_1 y t_2, a la diferencia entre los vectores de posición en el instante final t_2, y el vector de posición en el instante inicial t_1,. Se representa por $\Delta\vec{r}$ y se calcula:

$$\boxed{\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}$$

Teniendo en cuenta la definición geométrica de la resta entre dos vectores, puede observarse que el vector desplazamiento coincide gráficamente con el vector que va desde la posición inicial a la posición ocupada en el instante final (figura 1.1).

El módulo del vector desplazamiento nos indicará la distancia que separa en línea recta las dos posiciones ocupadas por la partícula. En general, esta distancia será menor que el espacio recorrido. El módulo del vector desplazamiento sólo coincidirá con el espacio recorrido cuando la trayectoria sea rectilínea y no se invierta el sentido del movimiento.

En la gráfica siguiente se puede observar los vectores de posición de una partícula, respecto a un sistema de referencia, en dos instantes de tiempo diferentes, la trayectoria y el vector desplazamiento entre esos dos mismos instantes:

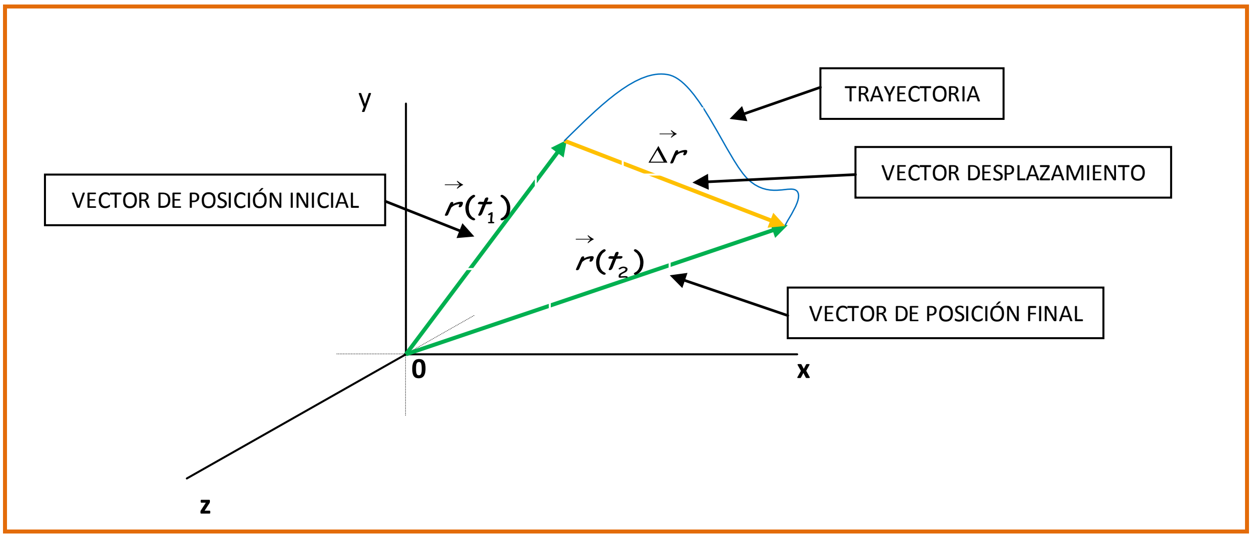


Figura 1.1
Vector de posición, vector desplazamiento y trayectoria

3. VECTORES VELOCIDAD INSTANTÁNEA Y ACELERACIÓN INSTANTÁNEA

El vector velocidad instantánea es el vector que indica la velocidad de la partícula en cualquier instante de tiempo. Es un vector tangente a la trayectoria en cada punto de ella y de sentido el del movimiento. Se calcula derivando respecto al tiempo el vector de posición instantáneo:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = x'(t)\,\vec{i} + y'(t)\,\vec{j} + z'(t)\,\vec{k} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x(t)\,\vec{i} + v_y(t)\,\vec{j} + v_z(t)\,\vec{k}}$$

El vector aceleración instantánea es el vector que indica la aceleración de la partícula en cualquier instante de tiempo. Se calcula derivando respecto al tiempo al vector velocidad instantáneo:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r}\,''(t) = v_x'(t)\,\vec{i} + v_y'(t)\,\vec{j} + v_z'\,\vec{k} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = x''(t)\,\vec{i} + y''(t)\,\vec{j} + z''(t)\,\vec{k} = \\ = a_x(t)\,\vec{i} + a_y(t)\,\vec{j} + a_z(t)\,\vec{k}\end{aligned}}$$

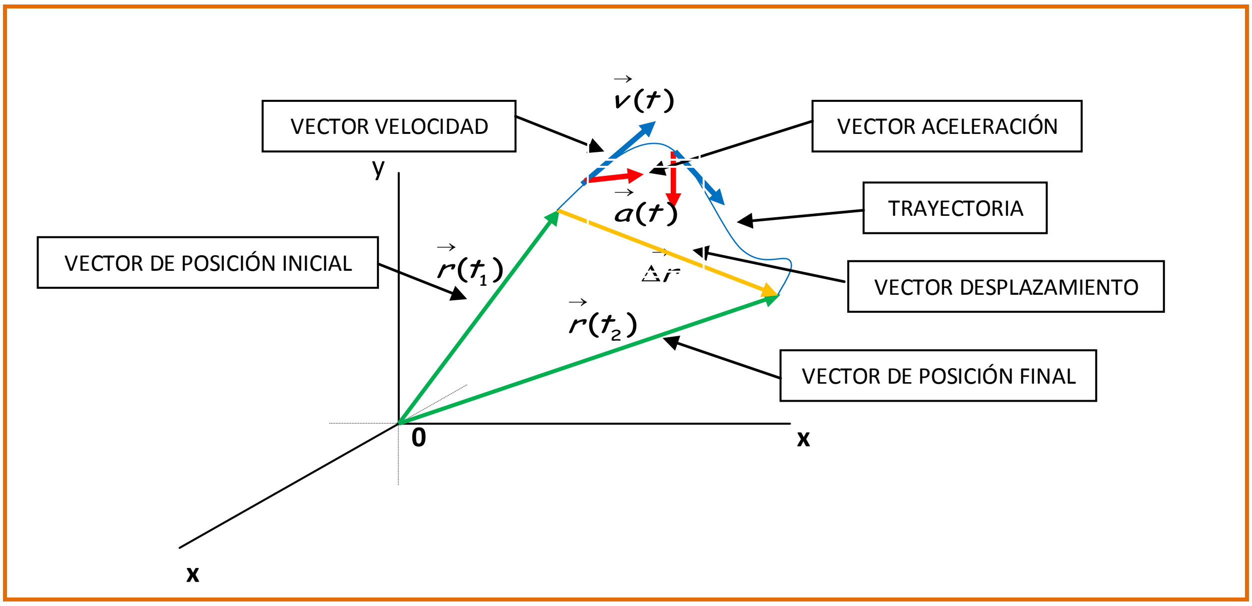


Figura 1.2
Vectores velocidad y aceleración instantáneos

4. COMPONENTES INTRÍNSECAS DE LA ACELERACIÓN:ACELERACIÓN NORMAL O CENTRÍPETA Y ACELERACIÓN TANGENCIAL

El vector aceleración mide los cambios en el vector velocidad por unidad de tiempo. Por tanto si el vector velocidad no se modifica a lo largo del tiempo, la aceleración vale 0.

Pero la velocidad es un vector y por tanto se caracteriza por tener módulo, dirección y sentido. Esto quiere decir que basta que una sola de estas características se modifique para que podamos afirmar que la velocidad no es constante.

En los movimientos rectilíneos la dirección de la velocidad no varía. El módulo puede que sí o puede que no.

En los movimientos curvilíneos la dirección y el sentido de la velocidad está cambiando continuamente. El módulo puede que sí o puede que no.

Por tanto en los movimientos rectilíneos habrá aceleración si cambia el módulo de la velocidad mientras que en los movimientos curvilíneos siempre habrá aceleración cambie o no el módulo de la velocidad.

En un movimiento en el que hay aceleración siempre es posible descomponer al vector aceleración en dos componentes, llamadas ***componentes intrínsecas de la aceleración***:

- una componente tangente a la trayectoria llamada ***aceleración tangencial***.
- Y una componente perpendicular a la trayectoria llamada ***aceleración normal o centrípeta.***

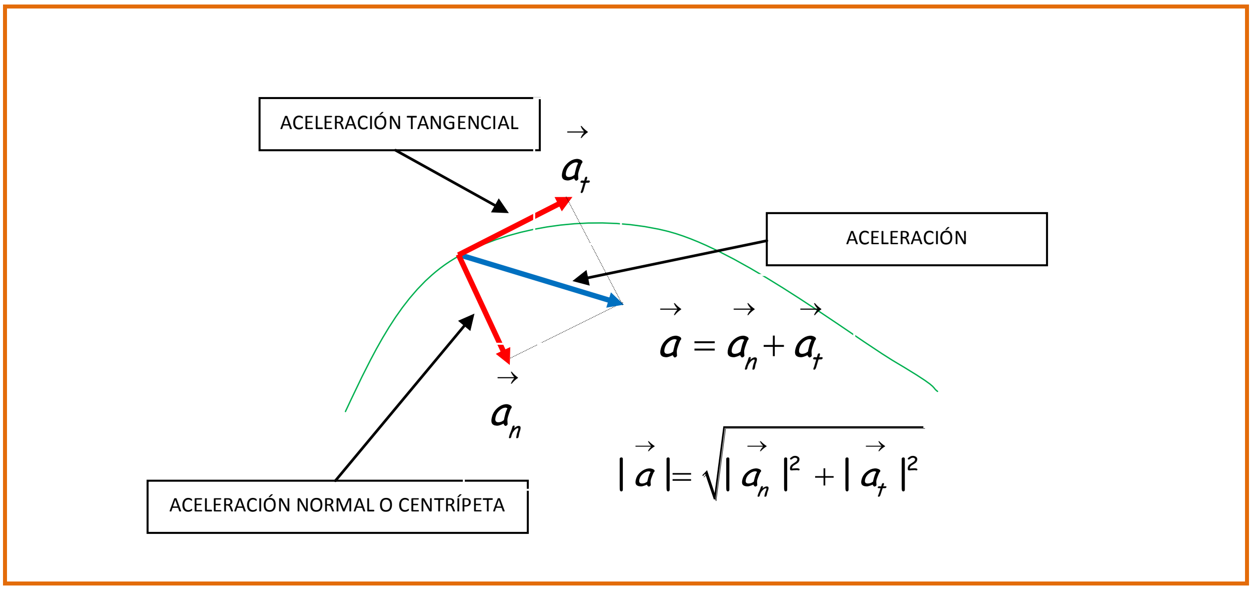


Figura 1.3
Componentes intrínsecas de la aceleración

La aceleración tangencial mide los cambios en el módulo de la velocidad mientras que la aceleración normal o centrípeta mide los cambios en la dirección (y por tanto también en el sentido) de la velocidad.

Por tanto, en los movimientos rectilíneos nunca habrá aceleración normal o centrípeta. Si en un movimiento rectilíneo hay aceleración será tangencial.

Sin embargo en los movimientos curvilíneos siempre habrá aceleración normal o centrípeta ya que siempre hay cambios en la dirección de la velocidad. En estos movimientos, si el módulo de la velocidad cambia, también habrá aceleración tangencial.

Las características de las componentes intrínsecas de la aceleración son:

ACELERACIÓN TANGENCIAL:

MÓDULO: $\boxed{|\vec{a}_t| = \dfrac{d|\vec{v}|}{dt} \; o \; simplemente \quad a_t = \dfrac{dv}{dt}}$

DIRECCIÓN: tangente a la trayectoria.

SENTIDO: el del movimiento si la velocidad aumenta o contrario al movimiento si la velocidad disminuye.

ACELERACIÓN NORMAL O CENTRÍPETA:

MÓDULO: $\boxed{|\vec{a}_n| = |\vec{a}_c| = \dfrac{|\vec{v}|^2}{R} \; o \; simplemente \quad a_n = a_c = \dfrac{v^2}{R}}$

DIRECCIÓN: perpendicular a la trayectoria.

SENTIDO: hacia el centro de la trayectoria.

RELACIÓN ENTRE LA ACELERACIÓN Y SUS COMPONENTES INTRÍNSECAS:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t}$$

MÓDULO: $\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_c|^2 + |\vec{a}_t|^2}}$

Ejemplo 1º

El vector de posición instantáneo de una partícula que se mueve por el espacio, en unidades del SI, es:

$$\vec{r}(t) = (t^2 - t)\vec{i} + (4 - 2t)\vec{j} + t^3\vec{k}$$

Para dicha partícula calcula:

a) La posición inicial. b) La posición a los 3 s.

c) La distancia a la que se encuentra la partícula del punto de referencia a los 5 s.

d) El vector desplazamiento entre los instantes 3 y 5 s.

e) El vector velocidad instantánea. f) La velocidad inicial.

g) El módulo de la velocidad a los 2 s. h) El vector aceleración instantánea.

i) El módulo de la aceleración a los 10 s.

Ejemplo 2º

Las coordenadas cartesianas del vector de posición de una partícula que se mueve por el plano XY vienen dadas por las siguientes expresiones, en unidades del SI:

$$\begin{cases} x(t) = -t^2 + 2 \\ y(t) = 3t - 2 \end{cases}$$

Para dicha partícula responde a los mismos apartados del ejemplo anterior.

Ejemplo 3º

La posición instantánea de una partícula que se mueve a lo largo del eje de abscisas viene dada por la expresión:

$$x(t) = t^2 - 6t + 1$$

en unidades SI. Calcular:

a) La velocidad y la aceleración con la que se mueve el cuerpo en cualquier instante.

b) La posición inicial y la velocidad inicial.

c) La posición y la velocidad a los 4s.

d) ¿Ha cambiado el sentido del movimiento? ¿Por qué?

e) ¿Se anula la velocidad en algún momento? ¿Cuándo?

f) Calcula el espacio recorrido en los 5 primeros segundos?

Ejemplo 4º

La posición de un punto material que se mueve a lo largo del eje x varía con el tiempo según la expresión:

$$x(t) = 4t^2 - 3t + 11$$

donde x se mide en metros y t en segundos. Responde a los mismos apartados del ejemplo anterior.

SOLUC: a) v(t) = 8t-3 m/s a(t)=8 m/s^2 b) x_0=11 m v_0=-3 m/s c) x(t=4s) = 63 m v(t=4s) = 29 m/s d) si e) si a t = 3/8 s f) e = 86,125 m

5. CLASIFICACIÓN DE LOS MOVIMIENTOS

Los movimientos se clasifican atendiendo a dos puntos de vista: según la trayectoria y según el módulo de la velocidad.

TRAYECTORIA
- Rectilíneos
- Curvilíneos: circulares, parabólicos, elípticos, etc.

MÓDULO DE LA VELOCIDAD
- UNIFORMES: $|\vec{v}|$ = cte
- VARIADOS
  - uniformemente variados: $|\vec{v}|$ varía de forma uniforme
  - variados de forma no uniforme: $|\vec{v}|$ varía de forma no uniforme

6. MOVIMIENTO RECTILÍNEO Y UNIFORME (MRU)

Tiene trayectoria rectilínea y modulo de velocidad constante, es decir, el vector velocidad es constante y, por tanto, no hay aceleración.

La ecuación del movimiento o ecuación de la posición de un MRU sería:

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}.t \quad \text{ó} \quad \begin{cases} x(t) = x_0 + v_x.t \\ y(t) = y_0 + v_y.t \\ z(t) = z_0 + v_z.t \end{cases}}$$

Si la partícula se mueve solo a lo largo del eje x, la ecuación paramétrica del movimiento o ecuación paramétrica de la posición sería:

$$\boxed{x(t) = x_0 + v.t}$$

que es la ecuación que conoces de los cursos anteriores.

El espacio recorrido por el móvil en un tiempo t puede calcularse como: $\boxed{e = v.t}$

7. MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO (MRUA)

Tiene trayectoria rectilínea y modulo de velocidad varía de forma uniforme, es decir, sólo tiene aceleración tangencial y es constante.

La ecuación del movimiento o ecuación de la posición de un MRUA sería:

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 . t + \frac{1}{2}\vec{a} . t^2 \quad ó \quad \begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}.t + \frac{1}{2}a_x.t^2 \\ y(t) = y_0 + v_{0y}.t + \frac{1}{2}a_y.t^2 \\ z(t) = z_0 + v_{0z}.t + \frac{1}{2}a_z.t^2 \end{cases}}$$

Si la partícula se mueve solo a lo largo del eje x, la ecuación paramétrica del movimiento o ecuación paramétrica de la posición sería:

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0.t + \frac{1}{2}a.t^2}$$

La ecuación paramétrica de la velocidad es: $\boxed{v(t) = v_0 + a.t}$

El espacio recorrido en un tiempo t, cuando no se invierte el sentido del movimiento, se calcula:

$$\boxed{e = v_0.t + \frac{1}{2}a.t^2}$$

que son las ecuaciones que conoces de los cursos anteriores.

Aunque aún te será más familiar la que corresponde a un MRUA en la dirección vertical, el eje y, cuya ecuación paramétrica del movimiento o ecuación paramétrica de la posición sería:

$$\boxed{y(t) = y_0 + v_0.t + \frac{1}{2}a.t^2}$$

y en concreto cuando se trata de un ***movimiento de caída libre***, es decir, con la sola presencia de la fuerza de la gravedad (sin rozamiento con el aire), donde siempre conocemos el valor de la aceleración, a, que es la aceleración de la gravedad. Como recordarás se simboliza por la letra g y en el caso de movimientos de caída libre en las proximidades de la superficie de la tierra vale -9,8 m/s^2. La ecuación paramétrica de la posición o ecuación del movimiento de caída libre en las proximidades de la tierra sería:

$$\boxed{y(t) = y_0 + v_0.t + \frac{1}{2}g.t^2 = y_0 + v_0.t - 5t^2}$$

Recordarás también la siguiente ecuación en la que no aparece el tiempo: $\boxed{v^2 = v_0^2 + 2ae}$

esta ecuación algunas veces presenta problemas cuando despejamos la v y/o v_0 en movimientos con aceleración negativa.

Ejemplo 5º

Dos atletas están separados 200 m y corren a su encuentro con velocidades respectivas de 8 y 10 m/s. Calcula:

a) Las ecuaciones del movimiento de ambos corredores.
b) El punto de encuentro y el instante en que lo harán.
c) El espacio recorrido por cada uno de ellos hasta ese momento.

Ejemplo 6º

Un coche inicialmente en reposo persigue a una moto que se encuentra 50 m por delante de él. La moto circula a velocidad constante de 20 m/s mientras que el coche acelera uniformemente a 4 m/s^2. Calcula:

a) Las ecuaciones del movimiento de ambos vehículos.
b) ¿Dónde y cuándo se encontrarán?
c) El espacio recorrido por cada vehículo hasta ese momento y contado desde el instante en que comenzó a moverse el coche.

Ejemplo 7º

Desde la terraza de un edificio de 80 m se lanza hacia abajo a un objeto con una velocidad de 5 m/s. Simultáneamente se lanza desde el suelo otro objeto con una velocidad de 30 m/s. Hallar:

a) Las ecuaciones del movimiento de cada objeto.
b) ¿Dónde y cuándo se cruzarán?
c) El segundo cuerpo ¿estará subiendo o bajando?. ¿Por qué?
d) El espacio recorrido por cada uno de ellos hasta el momento del encuentro.

Ejemplo 8º

Desde dos pueblos A y B separados por una distancia de 10 Km, salen al encuentro dos automóviles con velocidades de 72 Km/h y 108 Km/h. Calcular:

a) Las ecuaciones de movimiento de ambos automóviles.
b) El tiempo que tardan en cruzarse.
c) La distancia a la que están ambos automóviles del pueblo A en ese momento.
d) El espacio que ha recorrido cada coche hasta ese momento.

SOLUC: b) 200 s c) 4000 m d) 4000 m y 6000 m respectivamente

Ejemplo 9º

Desde una ventana a 15 m del suelo, se deja caer un cuaderno. Al mismo tiempo, desde el suelo se lanza un lápiz con una velocidad inicial de 12 m/s.Hallar:

a) La ecuación del movimiento de cada objeto.
b) ¿Dónde y cuándo se cruzan?.

SOLUC: a) $y_1 = 15 – 4{,}9t^2$ $y_2 = 12t – 4{,}9t^2$ b) A los 1,25 s y a 7,3 m del suelo

8. MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME (MCU)

Es un movimiento con trayectoria circular y módulo de velocidad constante. No tiene, por tanto, aceleración tangencial pero sí tiene aceleración normal o centrípeta. En la figura siguiente pueden verse los vectores velocidad y aceleración en diferentes puntos de la trayectoria:

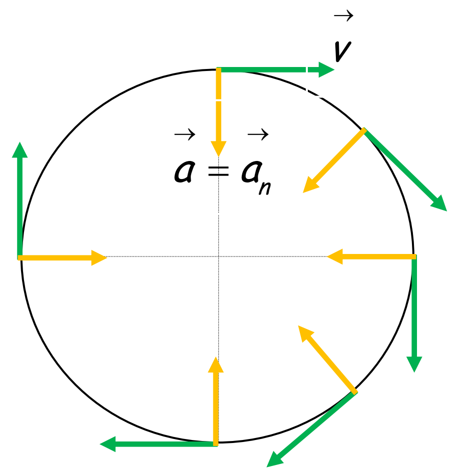


Figura 1.4
Vectores velocidad y aceleración en un MCU

Observa en la figura que el módulo del vector velocidad es el mismo en cualquier punto de la trayectoria. Observa igualmente que el módulo de la aceleración normal o centrípeta también es igual en cualquier punto de la trayectoria.

$$\boxed{|\vec{a}_n| = |\vec{a}_c| = \frac{|\vec{v}|^2}{R} \text{ o } \textit{ simplemente } \quad a_n = a_c = \frac{v^2}{R}}$$

Como el módulo de la velocidad es constante, el tiempo que emplea la partícula en describir una vuelta completa siempre es el mismo. A este tiempo se llama ***periodo*** del MCU y se representa por la letra T y en el SI de unidades se mide en s.

En un MCU se denomina ***frecuencia*** al nº de vueltas descritas por unidad de tiempo. Se representa por la letra f, coincide con la inversa del periodo y en el SI de unidades se mide en vueltas/s = ciclos/s = rps (revoluciones/s). A esta unidad se denomina hercio (Hz).

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

Se denomina velocidad angular al ángulo descrito por unidad de tiempo. Se representa por la letra ω, se calcula dividiendo el ángulo descrito entre el tiempo empleado en describirlo y en el SI de unidades se mide en rad/s.

$$\boxed{\omega = \frac{\text{ángulo descrito}}{\text{tiempo empleado}} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f}$$

La relación que existe entre los módulos de la velocidad lineal v y de la velocidad angular ω es: $\boxed{v = \omega . R}$ siendo R el radio de la trayectoria circular.

Ejemplo 10º

La polea de un motor gira con m.c.u. a razón de 240 rpm (revoluciones por minuto). Hallar:

a) La frecuencia, a velocidad angular y el periodo del movimiento de la polea.
b) La aceleración centrípeta de los puntos del extremo exterior de la polea si su radio es de 20 cm.

SOLUC: a) 4 Hz 25,12 rad/s y 0,25 s b) 126,2 m/s^2

Ejemplo 11º

Un tocadiscos gira a 33 rpm. Calcula:

a) La velocidad angular y el ángulo descrito a los 3 s.
b) Si el radio es de 10cm y una mosca se encuentra en el borde del disco calcula la velocidad lineal de la mosca.
c) La distancia recorrida por la mosca a los 3s.

SOLUC: a) 3,454 rad/s y 10,362 rad b) 0,34 m/s c) 1 m

Ejemplo 12º

La velocidad angular de una rueda es de 6,28 rad/s. Hallar:

a) la frecuencia, el periodo.
b) La velocidad lineal (v) y la aceleración normal de un punto de la periferia de la rueda. El radio de giro es de 50 cm.

SOLUC: a) 1 Hz y 1 s b) 3,14 m/s y 19,72 m/s^2

Ejemplo 13º

Un ciclista recorre una trayectoria circular de 5 m de radio con una velocidad de 54 Km/h. Calcular:

a) La aceleración del ciclista.
b) La velocidad angular
c) El tiempo que tarda en completar cada vuelta

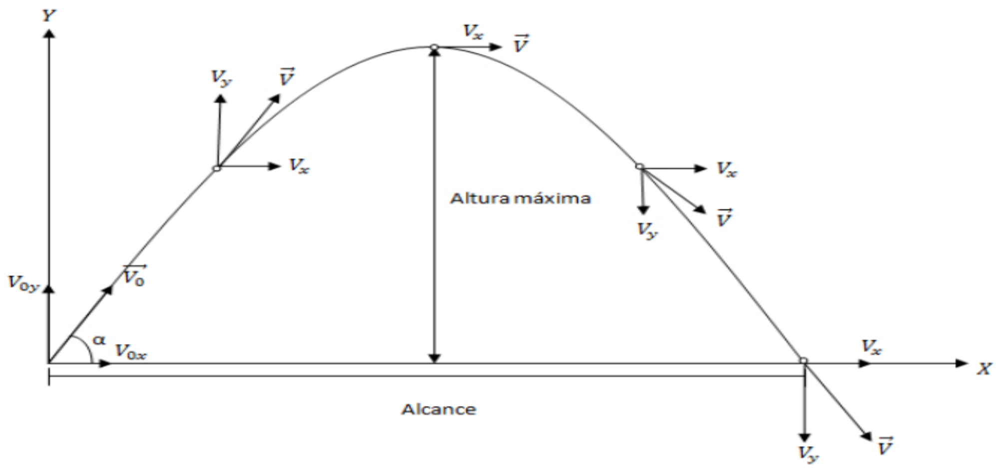
SOLUC: a) 45 m/s^2 b) 3 rad/s c) 2 s

9. COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS: MOVIMIENTO PARABÓLICO

Se dice que una partícula describe un movimiento compuesto cuando la partícula se encuentra sometida a dos o más movimiento simultáneos. Un ejemplo de este fenómeno se produce cuando una barca en un río se ve sometida a dos movimientos simultáneos: el movimiento impulsado por el barquero al remar y el de arrastre de la corriente del agua del río.

Otro ejemplo de movimiento compuesto es el que tienen los cuerpos cuando son lanzados en la superficie de la tierra en una dirección distinta a la vertical. El cuerpo se ve sometido a dos movimientos: un MRU de avance en la dirección horizontal y un MRU de caída libre como consecuencia de la acción de la fuerza gravitatoria (de su propio peso). El resultado de estos dos movimientos es un movimiento parabólico.

En la siguiente figura se representa al vector velocidad y a sus componentes horizontal y vertical en diferentes puntos de la trayectoria para una partícula lanzada desde el origen de coordenadas:



$$\boxed{\vec{v}_0 = v_{0x}\,\vec{i} + v_{0x}\,\vec{j}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{v_{0x} = |\vec{v}_0|\cos\alpha} \\ \boxed{v_{0y} = |\vec{v}_0|\,sen\alpha} \end{cases}$$

Siendo α el ángulo de lanzamiento.

Es importante destacar que en los lanzamientos horizontales el ángulo de lanzamiento es 0º.

Figura 1.5
Vector velocidad y sus componentes en un movimiento parabólico

En la figura anterior puede observarse como la componente horizontal de la velocidad permanece constante (MRU) mientras que la componente vertical de la velocidad va variando, siendo positiva mientras el cuerpo asciende, haciéndose 0 en el punto más alto de la trayectoria y siendo negativa mientras desciende.

Las ecuaciones del movimiento ó posición y de la velocidad son las siguientes:

ECUACIONES DE LA POSICIÓN

$$\boxed{\vec{r}(t) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = x_0 + v_{0x}t = x_0 + |\vec{v}_0|\cos\alpha.t} \\ \boxed{y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 = y_0 + |\vec{v}_0|\,sen\alpha.t - 5t^2} \end{cases}$$

ECUACIONES DE LA VELOCIDAD

$$\boxed{\vec{v}(t) = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{v_x = v_{0x} = |\vec{v}_0|\cos\alpha} \\ \boxed{v_y = v_{0y} + gt = |\vec{v}_0|\,sen\alpha - 10t} \end{cases}$$

Ejemplo 14º

Una persona lanza una pelota desde una plataforma situada a 1,7 m del suelo con una velocidad de 6 m/s y un ángulo de disparo de 53º. Calcular:

a) Las ecuaciones de la posición y de la velocidad.
b) El tiempo de vuelo.
c) La velocidad con la que llega al suelo.
d) El alcance.
e) La altura máxima a la que llega la pelota.

Ejemplo 15º

Un proyectil es lanzado desde un acantilado de 150 m de altura con una velocidad inicial de 400 m/s y un ángulo de inclinación de 30º. Calcular:

a) Las componentes de la velocidad inicial
b) El tiempo que tarde en caer al suelo.
c) El alcance.
d) La altura máxima alcanzada.

SOLUC: a) v_{0x} = 346,4 m/s v_{0y} = 200 m/s b) 41,5 s c) 14,4 km d) 2191 m

Ejemplo 16º

Un chico lanza piedras horizontalmente desde lo alto de un acantilado de 25 m de altura. Si desea que choquen contra un islote que se encuentra a 30 m de la base del acantilado, calcula:

a) La velocidad con la que debe lanzar las piedras.
b) El tiempo que tardan las piedras en llegar al islote.

SOLUC: a) 13,3 m/s b) 2,2 s

10. LAS LEYES DE NEWTON

La Mecánica clásica se basa en tres leyes o principios que fueron enunciados por el científico inglés Isaac Newton (1642-1727). Estas tres leyes del movimiento se recogen en una de sus obras más importantes: el libro titulado "Principios matemáticos de la filosofía natural (1687)".

Realmente podrían reducirse a sólo dos leyes, ya que la segunda incluye a la primera. Sin embargo así es como él las presentó, es más fácil para comprenderlas y además la primera realmente fue propuesta por Galileo Galilei (1564-1642) un gran hombre del renacimiento nacido en Pisa.

10.1 PRIMERA LEY DE NEWTON, PRIMER PRINCIPIO DE LA DINÁMICA O PRINCIPIO DE INERCIA

"Si sobre un cuerpo no actúa ninguna fuerza ó si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo vale cero, entonces la partícula estará en reposo o moviéndose con velocidad constante, es decir, con MRU."

COMENTARIOS

1º.- Según este principio, las fuerzas no son las causantes del movimiento de los cuerpo ya que, un cuerpo puede estar moviéndose con MRU y sin embargo la resultante de las fuerzas vale 0.

2º.- Este principio también dice que en ausencia de fuerzas los cuerpos carecen de aceleración, es decir, no cambian su velocidad, o sea, no cambian su estado de reposo o de movimiento inicial en el que estaban. Como la **inercia** se define como la resistencia u oposición que presenta un cuerpo a cambiar su estado de reposo o de movimiento, es por esta razón por la que también se denomina principio de inercia.

3º.- Cuando sobre un cuerpo no actúan fuerzas o la resultante de todas las que actúan vale 0 se dice que el cuerpo está en **equilibrio**. Por tanto, tanto un cuerpo en reposo como con MRU, se encuentra en equilibrio. En el primer caso se habla de **equilibrio estático**, mientras que en el segundo caso se habla de **equilibrio dinámico**.

4º.- El reposo y el MRU son dos situaciones equivalentes desde el punto de vista dinámico porque en ambos hay ausencia de fuerzas.

10.2 SEGUNDA LEY DE NEWTON, SEGUNDO PRINCIPIO DE LA DINÁMICA O PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE LA DINÁMICA

"La resultante de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula coincide con el producto de su masa por su aceleración".

$$\boxed{\vec{F}_{RTE.} = m\vec{a}}$$

$$\boxed{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n = m\vec{a}}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a}}$$

COMENTARIOS:

1º.- La primera Ley de Newton es un caso particular de la segunda:

$$Si \quad \vec{F}_{RTE.} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{RTE.} = m\vec{a} = 0 \Rightarrow m\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{v} = cte \Rightarrow reposo \quad ó \quad MRU$$

2º.- La unidad de fuerza es la unidad de masa por la unidad de aceleración que, en el SI de unidades, es kg.m/s^2. A esta unidad se le conoce con el nombre de Newton.

$$Kg\frac{m}{s^2} = NEWTON(N)$$

Un Newton es la fuerza que aplicada a un cuerpo de 1 Kg le proporciona una aceleración de 1 m/s^2.

3º.- La fuerza resultante que actúa sobre una partícula y la aceleración dicha partícula son vectores de la misma dirección y sentido ya que, la fuerza se obtiene del producto de un escalar positivo, la masa m, por un vector, la aceleración $\vec{a}$.

$\vec{a}$

$\vec{F}_{RTE.} = m\vec{a}$

4º.- La ecuación $\vec{F}_{RTE.} = m\vec{a}$ es una ley física que nos dice que las fuerzas son las causantes de las aceleraciones de los cuerpos, es decir, las fuerzas son las causantes de los cambios en la velocidad de los cuerpos, o sea, de los cambios en el movimiento de los cuerpos. Por tanto, la expresión $\vec{F}_{RTE.} = m\vec{a}$ es una relación causa-efecto: la causa son las fuerzas y el efecto es la aceleración.

5º.- Esta Ley también nos permite interpretar físicamente a la masa, no como cantidad de materia, sino como una medida de la inercia de los cuerpos, es decir, como una medida de la resistencia u oposición que presentan los cuerpos a los cambios en su movimiento. En efecto, si aplicamos dos fuerzas iguales a dos cuerpos de diferente masa, la aceleración que adquiere cada uno de ellos sería:

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}}{m} \quad y \quad \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}}{M}$$

El cuerpo de menor masa presenta mayor aceleración, es decir, cambia más rápidamente su velocidad y, por tanto, presenta menor inercia. Al contrario que el de mayor masa.

10.3 TERCERA LEY DE NEWTON, TERCER PRINCIPIO DE LA DINÁMICA O PRINCIPIO DE ACCIÓN Y REACCIÓN

"Si un cuerpo A ejerce una fuerza (acción) sobre otro cuerpo B, este ejerce sobre el A otra fuerza (reacción) igual pero de sentido contrario".

COMENTARIOS:

1º.- Este principio afirma que las fuerzas siempre aparecen por parejas, el par acción-reacción, y son fuerzas de la misma dirección, de igual módulo pero de sentido contrario.

2º.- Según el comentario anterior podría pensarse que el par de fuerzas acción-reacción se anula entre sí. Sin embargo esto no es cierto puesto que están aplicadas a cuerpos diferentes.

3º.- Las fuerzas de acción y reacción son simultáneas, es decir, no hay separación temporal entre ellas.

4º.- Este principio afirma que las fuerzas son siempre acciones mutuas entre cuerpos y, por esta razón, a las fuerzas también se les conoce con el nombre de interacciones.

11. LA FUERZA DE ROZAMIENTO

La fuerza de rozamiento es una fuerza que disipa energía en forma de calor. Suele decirse que la fuerza de rozamiento se opone al movimiento. Aunque esto es cierto, no es menos cierto que también permite otros movimientos. En efecto, sin la fuerza de rozamiento no podríamos andar, ni escribir, las ruedas de los vehículos no podrían avanzar, etc.

La fuerza de rozamiento puede ser ***estática*** ó ***dinámica*** (también llamada ***cinética***). La fuerza de rozamiento estática es la que actúa mientras el cuerpo está en reposo sobre la superficie y puede tener valores comprendidos entre 0 y un valor máximo. Cuando la fuerza aplicada supera este valor máximo el cuerpo inicia el movimiento sobre la superficie y entonces aparece la fuerza de rozamiento dinámica o cinética.

El valor máximo de la fuerza de rozamiento estática vale:

$$\boxed{|\vec{F}|_{roz.est.máx.} = \mu_e \cdot |\vec{N}|} \quad ó \quad bien \quad \boxed{F_{roz.est.máx.} = \mu_e . N}$$

Siendo:

μ_e una constante característica que sólo depende de la naturaleza de las superficies puestas en contacto y que se denomina *coeficiente de rozamiento estático.*

$\vec{N}$ es la fuerza normal con la que se aprietan ambas superficies.

El módulo de esta fuerza representa el valor mínimo que debe de tener una fuerza paralela a la superficie para que al aplicarla sobre el cuerpo en reposo, este inicie su movimiento.

El valor de la fuerza de rozamiento dinámica o cinética es:

$$\boxed{|\vec{F}|_{roz.din.} = |\vec{F}|_{roz.cin.} = \mu_d \cdot |\vec{N}| = \mu_c \cdot |\vec{N}|} \quad ó \quad bien \quad \boxed{F_{roz.din.} = F_{roz.cin.} = \mu_d . N = \mu_c . N}$$

Siendo:

$\mu_d = \mu_c$ una constante característica que sólo depende de la naturaleza de las superficies puestas en contacto y que se denomina *coeficiente de rozamiento dinámico o cinético.*

$\vec{N}$ es la fuerza normal con la que se aprietan ambas superficies.

COMENTARIOS

1º.- Ambos coeficientes de rozamiento son adimensionales, es decir, carecen de unidades puesto que se obtienen dividiendo el módulo de dos fuerzas.

2º.- El coeficiente de rozamiento estático es ligeramente mayor que el dinámico ó cinético. Esto significa que se necesita aplicar más fuerza a un cuerpo en reposo para que inicie su movimiento que, una vez en movimiento, mantenga su velocidad constante:

$$\boxed{\mu_e > \mu_c \quad \Rightarrow \quad F_{roz.est.máx.} > F_{roz.cin.}}$$

3º.- Ambos coeficientes de rozamiento se pueden calcular experimentalmente del siguiente modo:

Para calcular el coeficiente de rozamiento estático entre un cuerpo y la superficie sobre la que se apoya se va elevando poco a poco la superficie hasta localizar el ángulo para el cual el cuerpo inicia su movimiento. Con esta inclinación se ha alcanzado el valor máximo de la fuerza de rozamiento estática que coincidirá con la componente paralela del peso y por tanto:

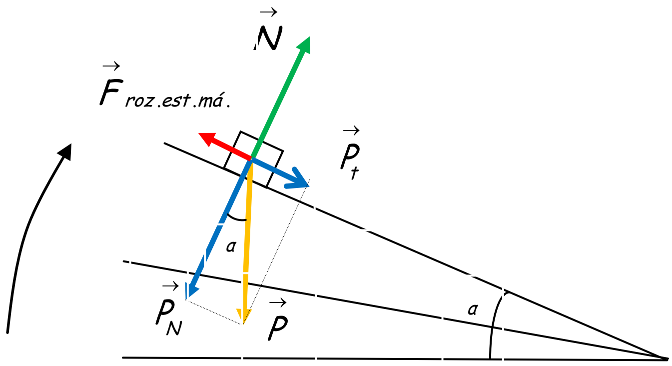
$$F_{roz.est.máx.} = P_t$$

$$\mu_e.N = P.sena$$

$$\mu_e.P_N = P.sena$$

$$\mu_e.P.\cos a = P.sena$$

$$\boxed{\mu_e = \frac{sena}{\cos a} = tga}$$



Siendo α el ángulo para el cual el cuerpo inicia el deslizamiento por la superficie.

Con la inclinación anterior el cuerpo deslizará con movimiento acelerado ya que la fuerza de rozamiento dinámica, que es inferior a la de rozamiento estática máxima, será inferior a P_t. Si queremos que deslice con MRU debemos disminuir levemente la inclinación hasta conseguir el equilibrio entre la fuerza de rozamiento dinámica y P_t. Para esta nueva inclinación se cumplirá:

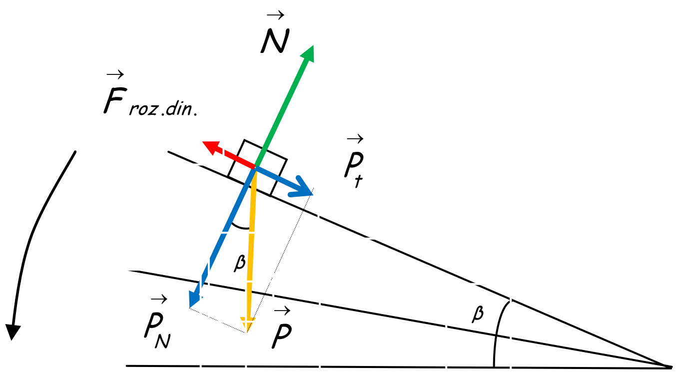
$$F_{roz.din.} = P_t$$

$$\mu_c.N = P.sen\beta$$

$$\mu_c.P_N = P.sen\beta$$

$$\mu_c.P.\cos\beta = P.sen\beta$$

$$\boxed{\mu_c = \frac{sen\beta}{\cos\beta} = tg\beta}$$



Siendo β el ángulo de inclinación para el cual el cuerpo desliza con velocidad constante (MRU).

Ejemplo 17º

Considera uno cualesquiera de los objetos que en este momento tienes encima de la mesa (un cuerpo en reposo apoyado sobre una superficie horizontal). Analiza las fuerzas que actúan sobre él.

Ejemplo 18º

Considera el mismo cuerpo del ejemplo anterior pero ahora le aplicas una fuerza $\vec{F}$ horizontal. Analiza las fuerzas que actúan sobre él y si se moverá o no en los siguientes casos:

a) Si no existiese rozamiento entre el cuerpo y la superficie de la mesa.
b) Considerando la situación real.

Ejemplo 19º

Haz lo mismo que en el ejemplo anterior suponiendo que la fuerza $\vec{F}$ que se aplica forma un ángulo α con la horizontal.

Ejemplo 20º

Sobre un cuerpo de 20 Kg, apoyado en una superficie horizontal con rozamiento ($\mu_c = 0,25$), se aplica una fuerza horizontal de 100 N. Calcular:

a) La fuerza de rozamiento que actúa.
b) La aceleración con la que se mueve el cuerpo.
c) La velocidad del cuerpo al cabo de 3 s si inicialmente estaba en reposo.

SOLUC: a) 49 N b) 2,5 m/s^2 c) 7,5 m/s

Ejemplo 21º

Se aplica una fuerza de 50 N a un cuerpo de 8 Kg que está apoyado, en reposo, en una superficie horizontal. La fuerza forma un ángulo de 60º con la horizontal y el coeficiente de rozamiento cinético entre el cuerpo y la superficie vale 0,1. Calcula la aceleración con la que se mueve el cuerpo.

SOLUC: 2,7 m/s^2

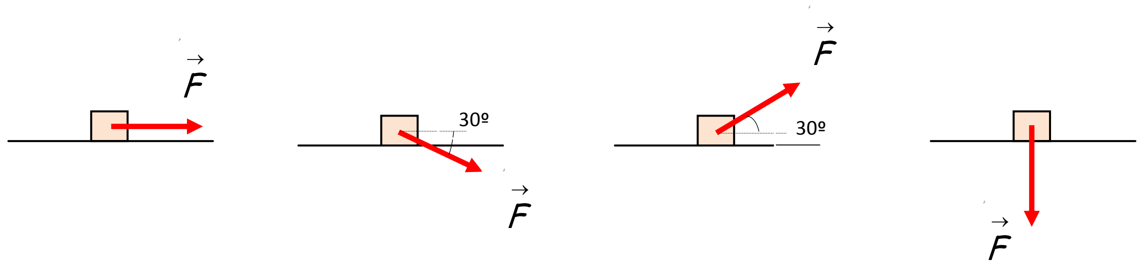
Ejemplo 22º

Se deposita a un cuerpo de masa m sobre un plano inclinado de ángulo de inclinación α y comienza a deslizar. Analiza las fuerzas que actúan sobre el cuerpo y comprueba que la aceleración de descenso es independiente de la masa del cuerpo, en los siguientes casos:

a) No hay rozamiento.
b) Sí hay rozamiento

Ejemplo 23º

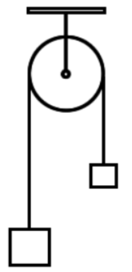
Sobre un cuerpo de 5 Kg de masa, inicialmente en reposo, actúa una fuerza $\vec{F}$, cuyo módulo es 10 N. Si el coeficiente de rozamiento estático entre el cuerpo y la superficie vale 0,4, calcula el valor de la fuerza de rozamiento que actúa y su valor máximo en cada una de las situaciones dibujadas:



SOUC: a) 10 N; 19,6 N b) 8,7 N; 21,6 N c) 8,7 N; 17,6 N d) 0 N; 23,6 N

Ejemplo 24º

Dos masas están enlazadas mediante una cuerda que pasa por la garganta de una polea (máquina de Atwood). Analiza las fuerzas que actúan sobre cada masa.



Ejemplo 25º

Se deja caer un cuerpo de 20 Kg. por un plano inclinado 30º con respecto a la horizontal desde 2 m de altura, siendo el coeficiente de rozamiento dinámico entre el cuerpo y el plano es μ_d = 0,4.

a) Calcula la aceleración con que desciende.
b) La velocidad con la que llega a la base del plano.

SOLUC: A) 1,5 m/s^2 B) 3,46 m/s

Ejemplo 26º

Se observa que un cuerpo desliza con velocidad constante por un plano inclinado. Basándote en el primer principio de la Dinámica razona si hay o no rozamiento entre el cuerpo y la superficie.

Ejemplo 27º

Un cuerpo de 15 kg. se deja caer por un plano inclinado de 60º respeto a la horizontal, desde una altura de 2 m. Hallar:

a) La aceleración de descenso si no hay rozamiento entre el cuerpo y el plano.

b) El tiempo que tarda el cuerpo en llegar a la base del plano y la velocidad que tendrá en ese momento si partió del reposo.   *SOLUC: A) a = 8,5 m/s^2 B) 0,73 s y 6,2 m/s*

Ejemplo 28º

Desde la base de un plano inclinado se lanza hacia arriba a un cuerpo de masa m. Demuestra que la aceleración de ascenso es independiente de la masa tanto si hay rozamiento como si no lo hay.

Ejemplo 29º

Desde la base de un plano inclinado de 30º se lanza hacia arriba a un cuerpo de masa m con una velocidad de 12 m/s. Calcula la aceleración de ascenso, el tiempo que está ascendiendo y la altura máxima alcanzada en los siguientes casos:

a) No hay rozamiento.
b) El coeficiente de rozamiento dinámico vale 0,18.

SOLUC: a) a = -4,9 m/s^2 t = 2,45 s h = 7,35 m b) a = -6,43 m/s^2 t = 1,87 s h = 5,62 m

Ejemplo 30º

Aplicamos horizontalmente una fuerza $\vec{F}$ a un mueble de 60 Kg. de masa, que está en reposo sobre una superficie horizontal con rozamiento siendo los coeficientes de rozamiento: $\mu_e = 0.4$ y $\mu_c = 0.3$.
Determina si se moverá o permanecerá en reposo y calcula la fuerza de rozamiento que está actuando en cada uno de los siguientes casos:

A) $\vec{F}$ = 200 N B) $\vec{F}$ = 250 N

SOLUC: A) no se mueve; F_{roz} = 200 N B) si se mueve; F_{roz} = 176,4 N

Ejemplo 31º

Se quiere determinar el coeficiente de rozamiento estático y cinético entre una caja y tablón. Al elevar poco a poco el tablón se observa que la caja comienza a deslizar cuando la inclinación es de 28º. En estas mismas condiciones la caja recorre 3 m en 3 s. Calcula ambos coeficientes.

SOLUC: μ_e = 0,53 μ_c = 0,455

Ejemplo 32º

Un esquiador, al descender, partiendo del reposo, por una pendiente de 213 m de longitud y un desnivel del 3%, emplea un tiempo de 61 s. Si se cambia de esquíes, el mismo esquiador invierte un tiempo de 42 s. Determina el coeficiente de rozamiento entre la nieve y los esquíes, en cada caso.

SOLUC: μ_{c1} = 0018 μ_{c2} = 0,005

Ejemplo 33º

Un cuerpo desliza libremente por un plano inclinado de 30º con velocidad constante. Una vez en la base del plano, se lanza hacia arriba con una velocidad de 10 m/s.

a) Calcula el tiempo que tardará en detenerse y la altura a la que lo hará.
b) Una vez se detenga, ¿volverá a deslizar hacia abajo por sí mismo? Razona la respuesta.

SOLUC: a) 1,02 s 2,55 m b) ¿?

Ejemplo 34º

Se desea subir un cuerpo de 5 Kg. por un plano inclinado 30º con respecto a la horizontal. Si el coeficiente de rozamiento cinético es 0,4, calcula:

a) La fuerza paralela al plano que tenemos que aplicarle para que suba con una aceleración de 0,5 m/s^2.
b) La altura alcanzada por el cuerpo a los 2 s suponiendo que partió del reposo.

SOLUC: a) 44,05 N b) 0,5 m

Ejemplo 35º

Dos masas de 1 y 3 Kg cuelgan de los extremos de una cuerda que pasa por una polea. Despreciando la masa de la cuerda y de la polea, calcular:

a) La aceleración del sistema.
b) La tensión de la cuerda.

SOLUC: a) $a = 4,9\ m/s^2$ b) $T = 14,7$ N

Ejemplo 36º

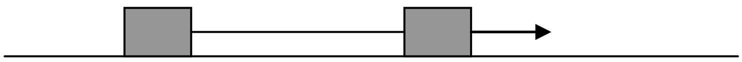
Un cuerpo de 6 Kg. de masa resbala sobre una mesa horizontal, (cuyo coeficiente de rozamiento es 0,25), resbala por la acción de una cuerda a la que está unido, esta cuerda pasa por la garganta de una polea a otro cuerpo de 4 Kg. que cuelga. Calcular:

a) la aceleración con que resbala la masa que está sobre la mesa.
b) La tensión de la cuerda en cada uno de los extremos de la cuerda.

SOLUC: a) 2,45 m/s^2 b) 29,4 N

Ejemplo 37º

Dos cuerpos de 4 y 6 kg. están apoyados sobre una superficie horizontal sin rozamiento y unidos mediante una cuerda de masa despreciable e inextensible. Del cuerpo de la derecha se tira con una fuerza F horizontal de 20 N hacia la derecha. Calcular:



a) La aceleración del sistema.
b) La tensión de la cuerda.

SOLUC: A) $a = 2\ m/s^2$ B) $T = 8$ N

Ejemplo 38º

Repite el problema anterior suponiendo que la fuerza F se aplica formando un ángulo de 30º con la horizontal.

SOLUC: A) $a = 1,74\ m/s^2$ B) $T = 6,96$ N

Ejemplo 39º

Repite el problema nº 24 suponiendo que hay rozamiento siendo $\mu_1 = 0,1$ y $\mu_2 = 0,15$.

SOLUC: A) $a = 0,73\ m/s^2$ B) $T = 6,84$ N

Ejemplo 40º

Repite el problema nº 25 suponiendo que hay rozamiento siendo $\mu_1 = 0{,}1$ y $\mu_2 = 0{,}15$.

SOLUC: A) a = 0,62 m/s^2 B) T = 6,4 N

12. FUERZA CENTRÍPETA. EJEMPLOS.

12. 1. FUERZA CENTRÍPETA.

Un cuerpo con movimiento curvilíneo siempre tiene aceleración centrípeta ya que la dirección de su velocidad va cambiando continuamente.

El cuerpo por tanto no está en equilibrio y debe de actuar sobre él una fuerza responsable de dicha aceleración que ha de tener la misma dirección y sentido que la aceleración centrípeta, es decir, dirigida hacia el centro de la trayectoria. A esta fuerza responsable de la aceleración centrípeta de los cuerpos se le denomina fuerza centrípeta.

En la gráfica siguiente se muestra la fuerza centrípeta en un MCU:

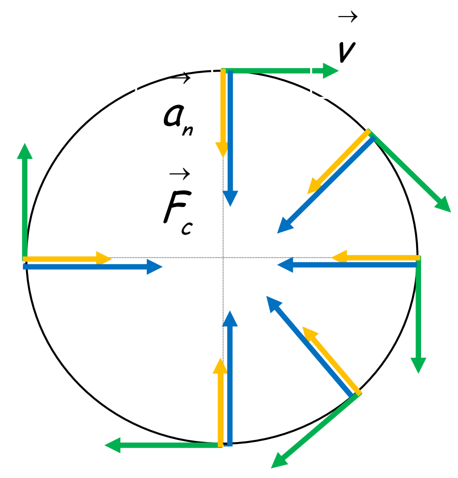


Figura 1.6
Vectores velocidad lineal, aceleración normal y fuerza centrípeta en un MCU

COMENTARIOS:

1º.- La fuerza centrípeta es sólo un nombre, no es una fuerza más que añadir al movimiento.

2º.- La fuerza centrípeta puede ser de muy diferente naturaleza: gravitatoria, eléctrica, de rozamiento, tensión, etc.

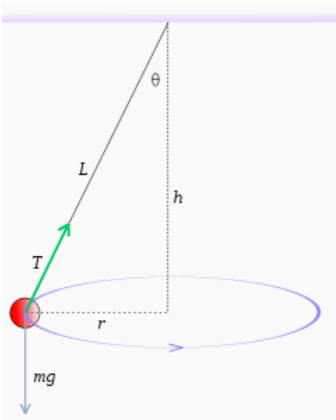
3º.- El módulo de la fuerza centrípeta, aplicando la 2ª Ley de Newton es:

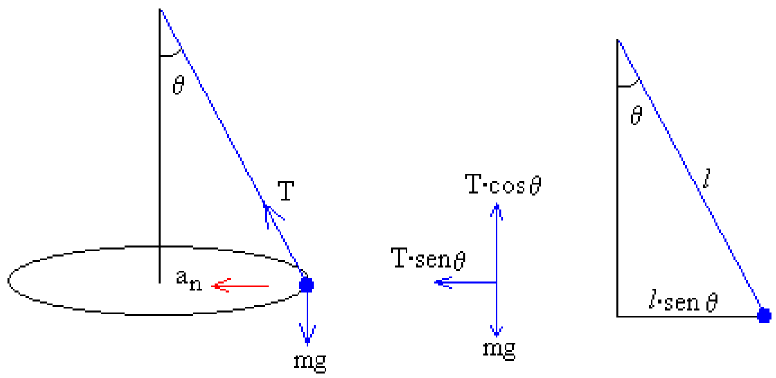
$$\vec{F}_c = m.\vec{a}_c \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_c = m.a_c = m.\frac{v^2}{R}}$$

12.2. EJEMPLOS.

12.2.1. PÉNDULO CÓNICO

El péndulo cónico es un dispositivo formado por un cuerpo pesado de pequeñas dimensiones, atado al extremo de una cuerda inextensible y masa despreciable que está sujeta a un punto fijo por el otro extremo, de modo que el cuerpo describe una trayectoria circular en un plano horizontal, formando el hilo un cierto ángulo con la vertical, tal y como se indica en la figura:





Sobre la masa m solo actúa su propio peso y la tensión de la cuerda. Aplicando el principio fundamental de la dinámica a dicha masa:

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}_c$$

En el eje vertical hay equilibrio de fuerzas, luego en dicho eje:

$$\sum \vec{F} = o \quad \Rightarrow \quad \vec{T}_y + \vec{P} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{T}_y = -\vec{P} \quad \Rightarrow \quad T_y = P \quad \Rightarrow \quad \boxed{T\cos\theta = mg}$$

En el eje horizontal hay aceleración normal o centrípeta, luego en dicho eje:

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a}_c \quad \Rightarrow \quad \vec{T}_x = m\vec{a}_c \quad \Rightarrow \quad F_{fav} - F_{op} = m\,a_c \quad \Rightarrow \quad T_x = m\,a_c \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{T\,sen\theta = m\frac{v^2}{R}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T\,sen\theta = m\frac{v^2}{L\cos\theta}}$$

Combinando ambas ecuaciones obtenemos diferentes expresiones que relacionan las distintas magnitudes de este movimiento. Por ejemplo:

- Despejando la tensión en cualquiera de ellas y sustituyendo en la otra obtendríamos:

$$\boxed{tg\theta = \frac{v^2}{gR}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{tg\theta = \frac{v^2}{g\,L\cos\theta}}$$

- Elevando al cuadrado ambas expresiones y sumando miembro a miembro obtendríamos:

$$\boxed{T = (mv)^2 + \left(m\frac{v^2}{R}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = (mv)^2 + \left(m\frac{v^2}{R\,L\cos\theta}\right)^2}$$

12.2.2. VEHÍCULOS QUE TOMAN CURVAS

12.2.2.1. CURVA PLANA SIN ROZAMIENTO

Un vehículo no podría tomar nunca una curva plana sin rozamiento. Basta hacer un análisis de fuerzas y observar que no habría ninguna fuerza que pudiera curvar la trayectoria y originar la aceleración centrípeta que se necesita.

12.2.2.2. CURVA PLANA CON ROZAMIENTO

Sin embargo un vehículo sí que podría tomar una curva plana con rozamiento. Basta hacer un análisis de fuerzas y observar que la fuerza de rozamiento estática entre los neumáticos y el asfalto puede curvar la trayectoria del móvil y originar la aceleración centrípeta que se necesita.

En efecto cuando el móvil toma la curva plana de radio R, las fuerzas que actúan son tres: La normal, el peso y la fuerza de rozamiento estática. Aplicando la segunda ley de Newton o principio fundamental de la dinámica al vehículo:

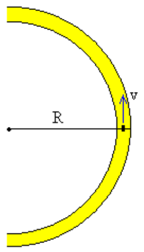
$$\sum \vec{F} = m.\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{roz} = m\vec{a}_c$$

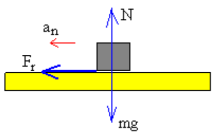
En el eje vertical hay equilibrio de fuerzas, luego en dicho eje:

$$\sum \vec{F} = o \quad \Rightarrow \quad \vec{N} + \vec{P} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = -\vec{P} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = P = m\,g}$$

En el eje horizontal hay aceleración normal o centrípeta, luego en dicho eje:

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a}_c \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{roz.est.} = m\vec{a}_c \quad \Rightarrow \quad F_{fav} - F_{op} = ma_c \quad \Rightarrow \quad F_{roz.est.} = ma_c \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_{roz.est.} = m\frac{v^2}{R}}$$



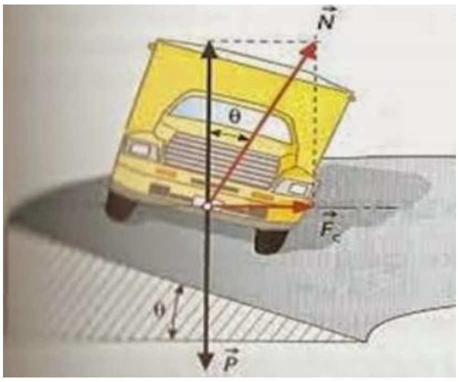


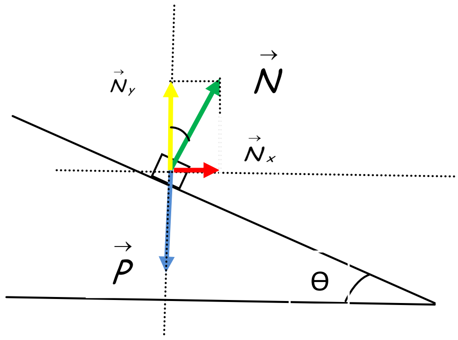
Es importante destacar que la fuerza de rozamiento estática tiene un valor límite y por tanto solo puede proporcionar un valor máximo a la aceleración centrípeta, es decir, para cada curva habrá un valor máximo de la velocidad a la que se podrá tomar. Este valor máximo sería:

$$F_{roz.est.máx.} = m\frac{v^2_{máx}}{R} \quad \Rightarrow \quad \mu_e N = m\frac{v^2_{máx}}{R} \quad \Rightarrow \quad \mu_e m\,g = m\frac{v^2_{máx}}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{máx} = \sqrt{\mu_e R\,g}}$$

12.2.2.3. CURVA PERALTADA SIN ROZAMIENTO

Cuando la curva está peraltada un vehículo sí que podría tomarla incluso sin rozamiento. Al hacer un análisis de fuerzas podemos observar que la componente horizontal de la fuerza normal es la fuerza centrípeta que permite poder curvar la trayectoria del móvil y originar la aceleración centrípeta que se necesita.





Aplicando la segunda ley de Newton o principio fundamental de la dinámica al vehículo:

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}_c$$

En el eje vertical hay equilibrio de fuerzas, luego en dicho eje:

$$\sum \vec{F} = o \quad \Rightarrow \quad \vec{N}_y + \vec{P} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{N}_y = -\vec{P} \quad \Rightarrow \quad N_y = P \quad \Rightarrow \quad \boxed{N\cos\theta = m\,g}$$

En el eje horizontal hay aceleración normal o centrípeta, luego en dicho eje:

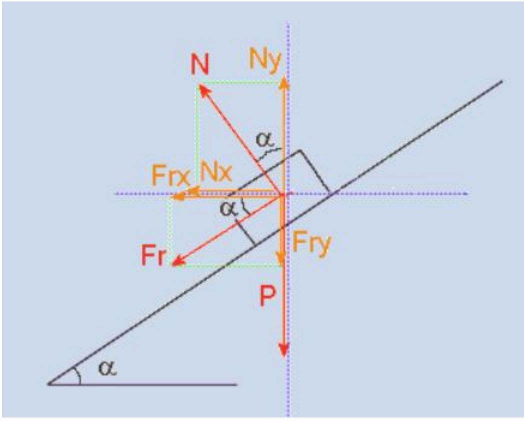
$$\sum \vec{F} = m.\vec{a}_c \quad \Rightarrow \quad \vec{N}_x = m\vec{a}_c \quad \Rightarrow \quad F_{fav} - F_{op} = m a_c \quad \Rightarrow \quad N_x = m a_c \quad \Rightarrow \quad \boxed{N\,sen\theta = m\frac{v^2}{R}}$$

Despejando N en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda, obtenemos la velocidad máxima a la que se puede tomar una curva peraltada sin rozamiento:

$$\boxed{v_{máx} = \sqrt{g R\, tg\theta}}$$

12.2.2.4. CURVA PERALTADA CON ROZAMIENTO

Cuando la curva está peraltada y hay rozamiento el análisis de fuerzas nos dice que tanto la fuerza de rozamiento estática entre los neumáticos y el asfalto, como la fuerza normal aportan sendas componentes para formar la fuerza centrípeta y así poder curvar la trayectoria del móvil y originar la aceleración centrípeta que se necesita.



Aplicando la segunda ley de Newton o principio fundamental de la dinámica al vehículo:

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_{roz.est.} = m\vec{a}_c$$

En el eje vertical hay equilibrio de fuerzas, luego en dicho eje:

$$\sum \vec{F} = o \quad \Rightarrow \quad \vec{N}_y + \vec{P} + \vec{F}_{y\,roz.est.} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{N}_y = -\vec{P} - \vec{F}_{y\,roz.est.} \quad \Rightarrow \quad N_y = P + F_{y_{roz.est.}} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{N\cos\alpha = m\,g + \mu_e N\,sen\,\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = \frac{m\,g}{\cos\alpha - \mu_e\,sen\,\alpha}}$$

En el eje horizontal hay aceleración normal o centrípeta, luego en dicho eje:

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a}_c \quad \Rightarrow \quad \vec{N}_x + \vec{F}_{x\,roz.est.} = m\vec{a}_c \quad \Rightarrow \quad F_{fav} - F_{op} = ma_c \quad \Rightarrow \quad N_x + F_{x_{roz.est.}} = m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{N\,sen\,\alpha + \mu_e N\cos\alpha = m\frac{v^2_{máx.}}{R}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v^2_{máx.} = \frac{R\,N(sen\,\alpha + \mu_e\cos\alpha)}{m}}$$

Sustituyendo el valor obtenido de N en la ecuación de la velocidad máxima obtenemos:

$$\boxed{v_{máx} = \sqrt{g\,R\,\frac{sen\,\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\,sen\,\alpha}}}$$

Podemos comprobar que esta expresión engloba a todas las situaciones anteriores

13. MOMENTO LINEAL O CANTIDAD DE MOVIMIENTO

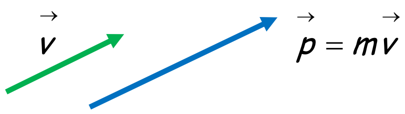
Se llama momento lineal o cantidad de movimiento de una partícula de masa m que se mueve con velocidad $\vec{v}$, al producto de la masa de su masa por su velocidad:

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

COMENTARIOS:

1º.- Es una magnitud vectorial por que se obtiene del producto de un escalar, la masa, por un vector, la velocidad.

2º.- Tiene la misma dirección y sentido que el vector velocidad:



3º.- El módulo de la cantidad de movimiento es el producto de la masa por el módulo de la velocidad:

$$\boxed{|\vec{p}| = m|\vec{v}| \quad \acute{o} \quad simplemente \quad p = m.v}$$

4º.- En el sistema internacional de unidades se mide en kg.m/s.

14. IMPULSO DE UNA FUERZA

El efecto de una fuerza no sólo depende del valor de esta, también depende del tiempo durante el que actúa la fuerza.

Llamamos **<u>impulso de una fuerza</u>** al producto de la fuerza por el tiempo durante el cual actúa. Simbólicamente:

$$\vec{I} = \vec{F}.\Delta t$$

De la definición del impulso de una fuerza podemos deducir los siguientes comentarios:

1º.- Es una magnitud vectorial pues se define mediante el producto de una magnitud escalar, el tiempo, por una magnitud vectorial, la fuerza.

2º.- El impulso tiene la misma dirección y sentido que la fuerza.

3º.- El módulo del impulso es igual al módulo de la fuerza multiplicada por el tiempo que actúa.

4º.- En el SI de unidades el impulso se mide en N.s que es la misma unidad que la de la cantidad de movimiento o momento lineal:

$$N.s = Kg\ .\ m\ .\ s^{-2}\ .\ s = Kg\ .\ m\ .\ s^{-1} = Kg\ .\ m\ /\ s$$

15. RELACIÓN ENTRE EL IMPULSO DE UNA FUERZA Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

La relación entre ambas magnitudes físicas la podemos obtener a partir de la segunda Ley de Newton:

$$\vec{F}_{RTE.} = m.\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{RTE.} = m.\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}.\Delta t = m.\Delta \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}.\Delta t = m.(\vec{v} - \vec{v}_0) = m.\vec{v} - m.\vec{v}_0 = \Delta \vec{p}$$

$$\boxed{\vec{I} = \vec{F}.\Delta t = \Delta \vec{p}}$$

El impulso de la fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo coincide con la variación de la cantidad de movimiento de dicho cuerpo.

Ejemplo 41º

Un jugador de tenis golpea con su raqueta una pelota de 125 g que le llega con una velocidad de 12 m/s, y la devuelve en la misma dirección y sentido contrario a 20 m/s. Si la fuerza aplicada por el jugador fue de 400 N, calcula el tiempo de contacto entre la pelota y la raqueta.

16. PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DEL MOMENTO LINEAL O CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Los principios de conservación son leyes fundamentales de la Física que expresan propiedades esenciales de la naturaleza. En la Dinámica los tres principios de conservación más importantes son tres: el principio de conservación del momento lineal o cantidad de movimiento, el del momento angular o momento cinético y el de la energía mecánica. En esta pregunta veremos el primero de ellos y en el tema siguiente el tercero (el segundo se aplica a los sistemas en rotación).

El principio de conservación del momento lineal o cantidad de movimiento dice:

"***Si la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre un sistema es nula, entonces la cantidad de movimiento o momento lineal del sistema permanece constante, es decir, no varía***"

Simbólicamente:

$$Si \ \sum \vec{F}_{EXT.} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \vec{p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = cte. \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{inicial} = \vec{p}_{final}$$

En fenómenos como choques, explosiones, motores a reacción o en los disparos con armas de fuego se conserva el momento lineal del sistema, pues la resultante de las fuerzas exteriores son nulas o son muy débiles frente a la intensidad de las fuerzas internas que aparecen en los fenómenos enumerados anteriormente.

La conservación de la cantidad de movimiento tiene importantes aplicaciones tecnológicas: Por ejemplo, un cohete avanza gracias a la expulsión de gases en sentido contrario. Esto mismo sucede en los aviones a reacción y algunos automóviles.

En la naturaleza también encontramos ejemplos: algunos animales como el calamar, se impulsan lanzando un chorro de agua en sentido contrario.

Para la realización de ejercicios de aplicación de este principio es conveniente que sigas los siguientes pasos:

1º.- Identificar el cuerpo o cuerpos que forman el sistema.

2º.- Asegurarte que la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema es nula o despreciable.

3º.- Elegir el mismo sistema de referencia para la situación inicial y final.

4º.- Hacer un buen esquema de la situación inicial y final.

5º.- igualar el momento lineal inicial y el final del sistema teniendo en cuenta que son vectores.

6º.- Despejar y calcular el dato desconocido.

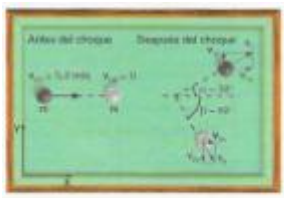
Ejemplo 42º

Dos patinadores de 50 y 70 Kg se mueven en la misma dirección y en sentido contrario con velocidades respectivas de 4 y 2 m/s. De pronto chocan y, a consecuencia del susto, quedan abrazados. Calcula la velocidad con la que se moverán los dos patinadores después del choque.

SOLUC: $\vec{v} = 0{,}4\,\vec{i}\ m/s$

Ejemplo 43º

Una bola de billar choca a una velocidad de 5,2 m/s contra otra bola igual que está parada. Después del choque, la primera se mueve en una dirección que forma 30º con su dirección inicial, y la segunda bola, en una dirección de – 60º con la dirección inicial de la primera. Calcula la velocidad final de ambas bolas.

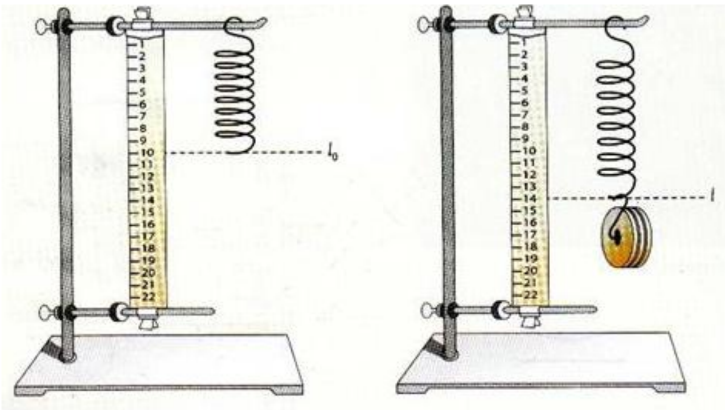


SOLUC: $\vec{v}_1 = 4{,}5\left(\cos 30^o\,\vec{i} + sen30^o\,\vec{j}\right)m/s \qquad \vec{v}_2 = 2{,}6\left(\cos(-60^o)\,\vec{i} + sen(-60^o)\,\vec{j}\right)m/s$

17. EFECTO DEFORMADOR DE UNA FUERZA EN UN MUELLE: LEY DE HOOKE.

Recordemos que las fuerzas pueden producir dos tipos de efectos en los cuerpos: cambiar su movimiento (producirles aceleraciones) y deformarlos. Hasta ahora hemos estado estudiando el primero de ellos. Veamos ahora el segundo efecto en el caso de los muelles.

Cuando sobre un muelle se aplica una fuerza, el muelle se deforma (se alarga o se encoje), pero ¿qué relación existe entre la intensidad de la fuerza aplicada al muelle y la deformación producida en el muelle? Para averiguarlo podemos colocar un muelle en posición vertical provisto con un índice que se desplaza sobre una regla graduada cuando se van colgando diferentes masas en su extremo, tal como se indica la figura:



Esta experiencia la realizó el físico inglés R. Hooke, quien en 1678 formuló la ley conocida como **LEY DE HOOKE** que dice:

LEY DE HOOKE

La deformación que sufre un muelle es directamente proporcional a la fuerza aplicada

$$\boxed{F_{aplicada} = K\Delta L = K(L - L_0)}$$

$F_{aplicada}$ = Fuerza aplicada al muelle ó fuerza deformadora del muelle (N)

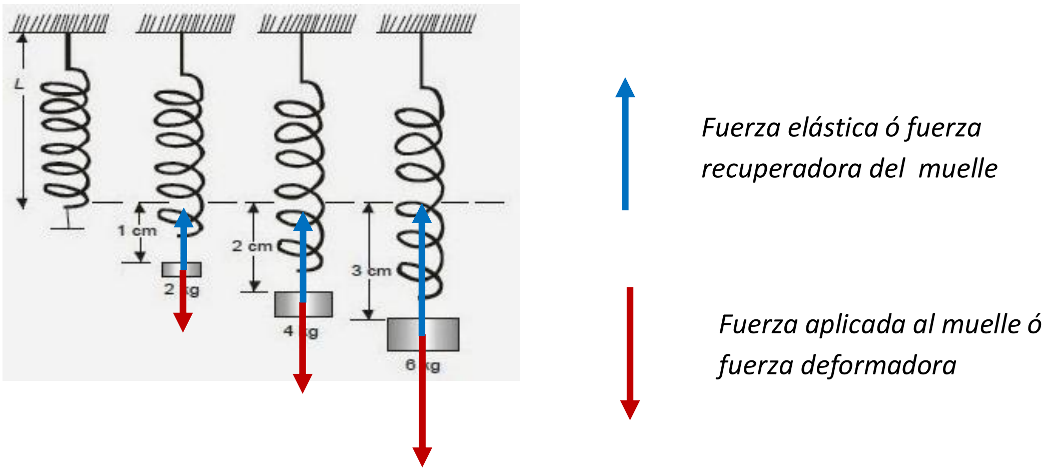
L_0 = Longitud inicial del muelle (m)

L = Longitud del muelle cuando se le aplica la fuerza F (m)

K = Es una constante característica de cada muelle denominada **CONSTANTE ELÁSTICA** (N/m)

COMENTARIOS:

1º.- Cuando el muelle se deforma bajo la acción de la fuerza aplicada, el muelle adquiere una nueva situación de equilibrio. Este equilibrio sólo es posible por la aparición de una fuerza que contrarreste a la fuerza aplicada. Esta fuerza la ejerce el muelle y se denomina fuerza recuperadora o fuerza elástica, y es una fuerza opuesta a la fuerza aplicada o fuerza deformadora (igual módulo, igual dirección pero sentido contrario).



$$\boxed{F_{elástica} = -F_{aplicada} = -K\Delta L}$$

2º.- Si la experiencia se realiza en una solo direccion, la vertical como ocurre en las figuras anteriores, los alargamientos solo se producen en esa dirección y la variación de longitud puede sustituirse por variaciones en el eje de ordenadas (eje y). La ecuación anterior quedaría:

$$\boxed{F_{elástica} = -F_{aplicada} = -K\Delta y}$$

La ecuación anterior es en realidad la ecuación paramétrica del vector fuerza, es decir, su coordenada vertical.

3º.- Lo mismo ocurriría si la deformación se produjera sólo en la horizontal:

$$\boxed{F_{elástica} = -F_{aplicada} = -K\Delta x}$$

4º.- Los muelles tienen unos límites de elasticidad dentro de los cuales se cumple la ley de Hooke. Si se superan estos límites, el muelle no cumple esta ley y su deformación puede llegar a ser permanente.

Ejemplo 44º

Un muelle se alarga 20 cm cuando ejercemos sobre él una fuerza de 24 N. Calcula:

a) El valor de la constante elástica del muelle
b) El alargamiento del muelle al ejercer sobre él una fuerza de 60 N.

SOLUC: A) K= 120 N/m *B)* $\Delta L = 0{,}5m$

Ejemplo 45º

Calcula el alargamiento que sufre un muelle de constante elástica 100 N/m cuando se aplica sobre él una fuerza de 85 N.

SOLUC: $\Delta L = 85cm$

Ejemplo 46º

Un muelle cuya constante elástica vale 150 N/m tiene una longitud de 35 cm cuando no se aplica ninguna fuerza sobre él. Calcular:

a) La fuerza que debe de ejercerse sobre él para que su longitud sea de 45 cm.
b) La longitud del muelle cuando se aplica una fuerza de 18 N

SOLUC: A) F = 15 N   B) L = 47 cm

Ejemplo 47º

Un muelle se alarga 12 cm cuando colgamos de él una masa de 1,8 Kg. Calcula:

a) La constante elástica del muelle.
b) El alargamiento del muelle al colgar una masa de 4,5 Kg.

SOLUC: A) K= 147 N/m   B) $\Delta L = 0{,}3m$

Ejemplo 48º

Un muelle de longitud inicial 25 cm adquiere una longitud de 45 cm cuando colgamos de él una masa de 2,2 Kg. Calcular:

a) La constante elástica del muelle.
b) La longitud del muelle cuando colguemos una masa de 2,75 Kg.

SOLUC: A) K= 107,8 N/m   B) L = 50 cm

Ejemplo 49º

La longitud de un muelle es de 32 cm cuando aplicamos una fuerza de 1,2 N, y de 40 cm cuando la fuerza aplicada es de 1,8 N. Calcular:

a) La longitud del muelle cuando no se aplica ninguna fuerza.
b) La constante elástica del muelle

SOLUC: B) L = 16 cm   B) K= 7,5 N/m

Ejemplo 50º

La longitud de un muelle es de 80 cm cuando aplicamos una fuerza de 0,98 N y aumenta a 90 cm cuando la fuerza aplicada vale 1,40 N. Calcular:

a) La constante elástica del muelle.
b) La longitud del muelle cuando no se aplica ninguna fuerza.

SOLUC: B) K= 4,26 N/m   B) L = 0,57 m

LECTURAS RECOMENDADAS

Para saber más

Sistemas de referencia inerciales y no inerciales

Las interacciones entre los objetos hay que describirlas respecto de un sistema de referencia inercial, ya que la fuerza resultante sobre un objeto depende, a través de la aceleración, del sistema de referencia elegido.

El problema es que, como decía Galileo: es imposible conocer, mediante experimentos mecánicos, si un sistema está en reposo o se mueve con rapidez constante y en línea recta.

Cuando se viaja en avión, tren o autobús, con rapidez constante y en línea recta, se puede pasear, leer un libro o beber un refresco lo mismo que en tierra firme.

Si el vector velocidad es constante, cualquier experiencia parece que se realiza en tierra firme.

Las leyes de la Física son las mismas para dos observadores, que por alguna causa, se encuentren en movimiento relativo en línea recta y con velocidad constante el uno respecto del otro.

De este principio, se deduce que la intensidad de la interacción, fuerza, es la misma en todos los sistemas que se muevan unos respecto a otros con movimiento rectilíneo uniforme, porque la aceleración de un objeto es la misma en todos esos sistemas de referencia.

Un sistema de referencia es **inercial** cuando está en reposo o su movimiento es rectilíneo uniforme. En este sistema de referencia se aplican las leyes de Newton y las aceleraciones son un producto de las fuerzas que, a su vez, son el resultado de la interacción entre los objetos.

En la mayoría de los casos un sistema de referencia fijo en el suelo puede considerarse inercial, a pesar de los movimientos de rotación y de traslación de la Tierra.

A un observador situado en un sistema animado con aceleración se le denomina **no inercial** y en estos sistemas no son válidas las leyes de Newton.

Para aplicar las leyes de Newton, en un sistema de referencia no inercial, se deben introducir las llamadas **fuerzas de inercia**, que dependen de la aceleración del sistema de referencia. Estas fuerzas tienen sentido contrario a la aceleración del sistema.

$$\vec{F}_i = -m \cdot \vec{a}_i$$

Siendo $\vec{a}_i$ la aceleración del sistema de referencia.

En un sistema de referencia acelerado no se cumplen las leyes de Newton.

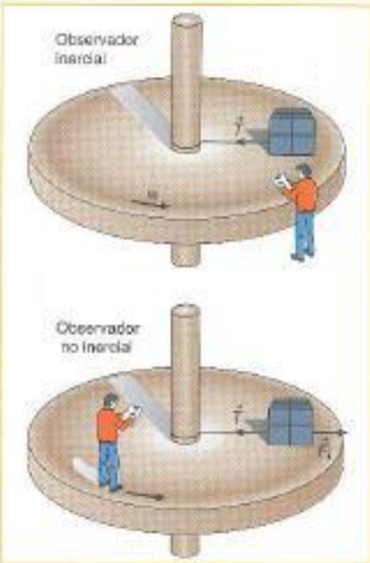
Las fuerzas de inercia no son el resultado de ninguna interacción entre los objetos; son un artificio de cálculo que introduce el observador no inercial para aplicar las leyes de Newton en su sistema de referencia y por tanto no tienen su pareja de acción-reacción.

Las observaciones realizadas desde este punto de vista se reducen a un problema de estática, ya que los objetos estarían en equilibrio, y se aplica el llamado **principio de D'Alembert**.

$$\Sigma(\vec{F}_{reales} + \vec{F}_{inercia}) = 0$$

Movimiento sobre una plataforma

Imagínese una plataforma que gira en torno a un eje que pasa por su centro. Sobre la plataforma hay un objeto atado al extremo de una cuerda unida al eje. Supóngase que entre la plataforma y el objeto no hay rozamiento y que ambos, plataforma y objeto, giran, en torno al eje, con la misma velocidad angular y que esta es constante. Un dinamómetro intercalado en la cuerda indica la intensidad de la tensión de la cuerda.



Un observador inercial, situado fuera de la plataforma, deduce que la tensión de la cuerda proporciona la aceleración normal que obliga al objeto a describir una trayectoria circular. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a}\ ;\ \vec{T} = m \cdot \vec{a}_n \Rightarrow T = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

Para un observador no inercial, que viaja en la plataforma, el objeto está en reposo. Como observa que el dinamómetro está estirado, introduce una fuerza ficticia de inercia $\vec{F}_i = -m \cdot \vec{a}_n$, y que denomina fuerza centrífuga, que equilibra la tensión de la cuerda.

$$\Sigma\vec{F} = 0\ ;\ \vec{T} + \vec{F}_i = 0\ ;\ \vec{T} - m \cdot \vec{a}_n = 0\ ;\ T - m\frac{v^2}{R} = 0 \Rightarrow T = m\frac{v^2}{R}$$

A cualquier observador situado sobre la plataforma le parece que la fuerza de inercia es real y por ello la denomina fuerza centrífuga.

Jugando encima de la plataforma

Subidos a una plataforma que gira con velocidad constante están situados dos niños que juegan a pasarse una pelota de uno al otro.

Una persona mayor observa que, al principio del juego, la mayoría de los intentos de pase fallan.

Para un observador inercial situado fuera de la plataforma, la pelota sigue una trayectoria en línea recta. El segundo niño no la recibe porque cambia de posición mientras la pelota está en camino.

Para un observador no inercial situado sobre la plataforma el segundo niño está en reposo y no recibe la pelota porque esta describe una trayectoria curvilínea.

TEMA 2. TRABAJO Y ENERGÍA. FUERZAS CONSERVATIVAS Y NO CONSERVATIVAS

1. **Definición de trabajo mecánico.**
2. **Definición de potencia.**
3. **Fuerzas conservativas y no conservativas. Energía potencial.**
4. **Teorema de la energía cinética o teoerma del trabajo o teorema de las fuerzas vivas (TFV).**
5. **Relación entre el trabajo y la energía. Teorema o Principio de Conservación de la Energía Mecánica (TCEM).**

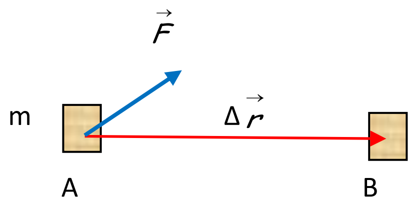
CUESTIONES

PROBLEMAS

1. DEFINICIÓN DE TRABAJO

Decimos que una fuerza realiza trabajo sobre un cuerpo si le transfiere alguna forma de energía. En particular, si dicha energía es mecánica diremos que la fuerza ha realizado trabajo mecánico.

Supongamos un cuerpo de masa m que se desplaza entre dos posiciones A y B siguiendo una ***trayectoria rectilínea*** bajo la acción de una ***fuerza constante*** $\vec{F}$



Se define el trabajo realizado por una ***fuerza constante*** $\vec{F}$ en un ***desplazamiento rectilíneo*** de la masa m entre dos posiciones A y B, al producto escalar del vector fuerza $\vec{F}$ por el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ entre ambas posiciones:

$$\boxed{W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = |\vec{F}|\,.\,|\Delta\vec{r}|\,.\,\cos(\vec{F},\Delta\vec{r})} \quad [2.1]$$

De la definición anterior se pueden sacar las siguientes conclusiones o comentarios:

1º.- El trabajo realizado por una fuerza es una magnitud física escalar, puesto que se define mediante el producto escalar de dos vectores. Por tanto el trabajo puede ser un nº positivo, negativo o valer cero.

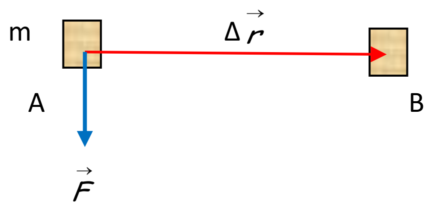
2º.- La unidad de trabajo coincide con la unidad de fuerza por la unidad de longitud, que en el SI de unidades sería el Newton (N) por el metro (m). Y a esta unidad se le da el nombre de Julio (J).

$$\boxed{\text{N.m = Julio (J)}}$$

La definición de Julio es la siguiente: "Un Julio es el trabajo que realizaría una fuerza de 1 N en un desplazamiento de 1 m, cuando la fuerza se aplicara en la misma dirección y sentido que el movimiento."

3º.- Si aplicamos una fuerza a un cuerpo y este no se mueve ($\Delta\vec{r}$ = 0), la fuerza no realiza trabajo.

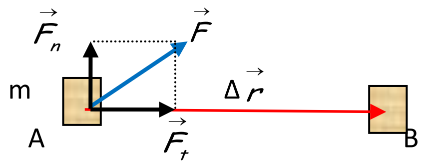
4º.- Si la fuerza aplicada es perpendicular al desplazamiento, la fuerza tampoco realiza trabajo, ya que el ángulo formado por los vectores fuerza y desplazamiento valdría 90º y el coseno de este ángulo vale 0 (cos($\vec{F}$,$\Delta\vec{r}$) = cos (90º) = 0) (podemos afirmar que las fuerzas perpendiculares a los desplazamientos no realizan trabajo).



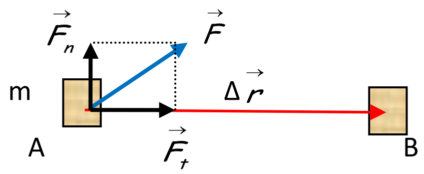
$$W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = |\vec{F}| \cdot |\Delta\vec{r}| \cdot \cos(90º) = 0$$

5º.- El trabajo realizado por una fuerza coincide con el trabajo que realiza su componente tangencial. En efecto, podemos descomponer a la fuerza aplicada en sus dos componentes $\vec{F}_t$ y $\vec{F}_n$ de modo que la componente normal no realiza trabajo.

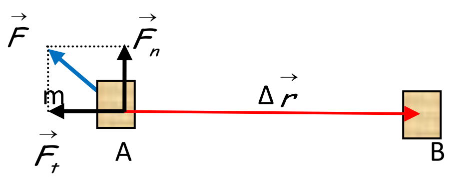
$$W(\vec{F}) = W(\vec{F}_n) + W(\vec{F}_t) = 0 + W(\vec{F}_t) = W(\vec{F}_t)$$



6º.- El trabajo realizado por una fuerza es positivo cuando la fuerza favorece el desplazamiento del cuerpo, es decir, la componente tangencial de la fuerza tiene la misma dirección y sentido que el movimiento, y sería negativo cuando la fuerza se opone al movimiento, es decir, la componente tangencial se opone al movimiento del cuerpo.



$W_A^B > 0$

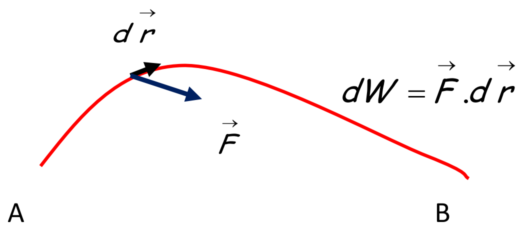


$W_A^B < 0$

7º.- No hay que confundir trabajo con esfuerzo. Esfuerzo consiste en aplicar fuerza, mientras que trabajo consiste en aplicar fuerza y producir desplazamiento que no sea perpendicular a la fuerza.

8º.- La definición de trabajo que se ha dado al iniciar la pregunta ha sido para una fuerza constante en un desplazamiento rectilíneo, pero las fuerzas no siempre son constantes y los desplazamientos pocas veces son rectilíneos. Entonces ¿cómo definir el trabajo realizado por una fuerza cualquiera en un desplazamiento cualquiera?.

En estos casos se divide la trayectoria en infinitas trayectorias elementales de modo que cada una de estas trayectorias infinitesimales puede ser considerada como rectilínea y la fuerza constante en cada una de ellas. Calcularíamos entonces el trabajo elemental dW realizado en cada trayectoria elemental mediante el producto escalar $dW = \vec{F} . d\vec{r}$ y sumaríamos todos estos trabajos para obtener el trabajo a lo largo de toda la trayectoria. Esta sumatoria se realiza mediante una operación matemática denominada integral y se escribe así:

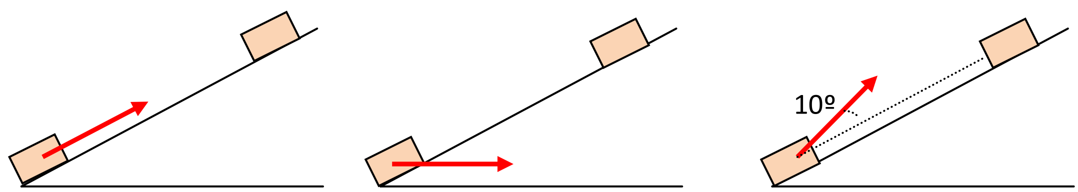


$$\boxed{W = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

donde A y B son los puntos inicial y final de la trayectoria y $d\vec{r}$ es un vector de desplazamiento infinitesimal tangente a la trayectoria en cada uno de sus puntos.

<u>Ejemplo 1º</u>

En cada una de las situaciones siguientes se representa la fuerza $\vec{F}$ que se aplica a un cuerpo. Suponiendo que esta fuerza tiene un valor de 10 N, el ángulo de inclinación del plano es de 30º, el desplazamiento por el plano es de 2 m, el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano es 0,2 y la masa que se desplaza es de 1 Kg.



Para cada una de las tres situaciones calcula:

a) El trabajo realizado por la fuerza peso.
b) El trabajo realizado por la fuerza normal.
c) El trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$.
d) El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento.

2. DEFINICIÓN DE POTENCIA.

Se define la potencia como el trabajo realizado por unidad de tiempo, y se calcula dividiendo el trabajo realizado entre el tiempo empleado en realizarlo:

$$\boxed{P = \frac{W}{t}} \quad [2.2]$$

De la definición de potencia podemos sacar las siguientes conclusiones:

1º.- La potencia es una magnitud física derivada y escalar que mide la eficacia con la se realiza un determinado trabajo. En efecto cuanto menos tiempo se emplee en realizar el mismo trabajo mayor será la potencia.

2º.- El trabajo se mide en la unidad de de trabajo dividida entre la unidad de tiempo y, por tanto, en el SI será J/s. A esta unidad se le conoce con el nombre de vatio (w)

$$1\frac{J}{s} = 1w$$

Un vatio es la potencia desarrollada cuando se realiza un trabajo de 1 julio en un segundo.
Otras unidades de potencia son los múltiplos y submúltiplos del vatio (Kw, Mw, etc) y el caballo de vapor (1 CV = 735 w)

3º.- Si en la expresión de la potencia despejamos en trabajo obtenemos:

$$\boxed{W = P.t} \quad [2.3]$$

De esta expresión podemos deducir que las unidades de trabajo (o energía) coinciden con las unidades de potencia por las unidades de tiempo. Una de estas unidades es el Kw.h, que es la unidad en la que se mide la energía eléctrica consumida en los hogares y cuya equivalencia con el julio es la siguiente:

$$1Kw.h = 1000w.3600s = 3.600.000w.s = 3,6.10^6 J$$

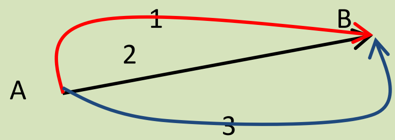
Ejemplo 2º

Un coche de 1,5 t sube por una pendiente del 12% con una velocidad constante de 72 Km/h. Despreciando los rozamientos, calcular:

a) Trabajo realizado por el motor durante los 10 primeros minutos.
b) Potencia desarrollada por el motor. Exprésala en CV.

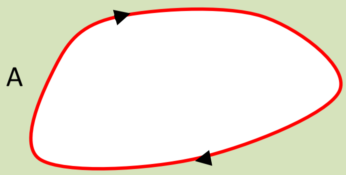
3. FUERZAS CONSERVATIVAS Y NO CONSERVATIVAS. ENERGÍA POTENCIAL

Una **fuerza conservativa** es aquélla cuyo trabajo realizado sobre un cuerpo que se traslada entre dos puntos dados, A y B, es independiente de la trayectoria seguida por aquél entre dichos puntos.



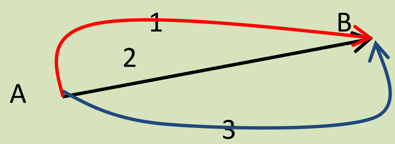
$$W_A^B(1) = W_A^B(2) = W_A^B(3) = \dots$$

Consecuencia inmediata de la anterior definición es que el trabajo realizado por una fuerza conservativa a lo largo de cualquier ciclo (trayectoria cerrada) es nulo.



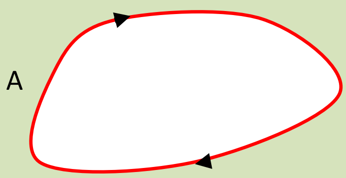
$$W_A^A = W\,(\text{por cualquier trayectoria}) = 0$$

Una fuerza se dice que no es conservativa cuando el valor del trabajo realizado por ella entre dos posiciones depende de la trayectoria seguida entre ambas posiciones



$$W_A^B(1) \neq W_A^B(2) \neq W_A^B(3)\dots$$

Consecuencia inmediata de la anterior definición es que debe de existir al menos un ciclo en el que trabajo realizado por la fuerza no conservativa es distinto de 0.



$$W_A^A\,(\text{por lo menos en un ciclo}) \neq 0$$

Son ejemplos de fuerzas conservativas: la fuerza gravitatoria (y por tanto la fuerza peso), la fuerza elástica, la fuerza eléctrica y la …(se completará cuando demos el tema 9).

Son ejemplos de fuerzas no conservativas la fuerza de rozamiento y …(se completará en el tema 4). Cualquier otra fuerza de la que no se haya dicho explícitamente que es conservativa se tratará como no conservativa.

¿Qué ventajas presentan las fuerzas conservativas frente a las no conservativas?.

La ventaja de las fuerzas conservativas se encuentra en que el trabajo realizado por las mismas sólo depende de los valores que toma una magnitud escalar, a la que llamamos **energía potencial** (E_p), en los puntos extremos de la trayectoria, de manera que podemos escribir la siguiente relación, conocida como **teorema de la energía potencial** y que dice:

El trabajo realizado por las fuerzas conservativas cuando una partícula se desplaza entre dos posiciones coincide con la variación de energía potencial de la partícula entre dichas posiciones, pero cambiada de signo.

$$\boxed{W_C = -\Delta E_p = - [\, E_p(B) - E_p(A)\,] = E_p(A) - E_p(B)} \qquad [2.4]$$

donde $\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A)$ es la variación de energía potencial entre los puntos A(inicial) y B(final) de la trayectoria seguida por el cuerpo.

El signo "-" significa que el cuerpo disminuye su energía potencial siempre que en su movimiento la fuerza conservativa haya realizado trabajo positivo. Así pues:

"La energía potencial asociada a una determinada fuerza conservativa disminuye en una cantidad igual al trabajo realizado por dicha fuerza entre dos puntos dados de una trayectoria."

Según este teorema, podemos calcular el trabajo de las fuerzas conservativas sin tener que hacer uso de la definición de trabajo, bastaría con evaluar la variación de energía potencial.

Cada fuerza conservativa tiene asociada su propia energía potencial:

Energía potencial gravitatoria en un punto próximo a la superficie terrestre

En puntos suficientemente próximos a la superficie terrestre, la fuerza peso puede considerarse prácticamente constante y la energía potencial asociada es:

$$E_p = m \cdot g \cdot h \qquad [2.5]$$

Si se trata de puntos alejados de la tierra donde la fuerza peso no puede considerarse constante, la expresión de la energía potencial es diferente y se verá en el tema siguiente.

Energía potencial elástica

Supongamos un muelle de constante K situado horizontalmente. La fuerza recuperadora del muelle puede expresarse $\vec{F} = -K \cdot x\,\vec{i}$, siendo x la distancia de separación de la posición de equilibrio del muelle y la expresión de la energía potencial elástica asociada a esta fuerza es:

$$E_p = \frac{1}{2}\, K \cdot x^2 \qquad [2.6]$$

Energía potencial eléctrica

La estudiaremos en el tema siguiente.

Ejemplo 3º

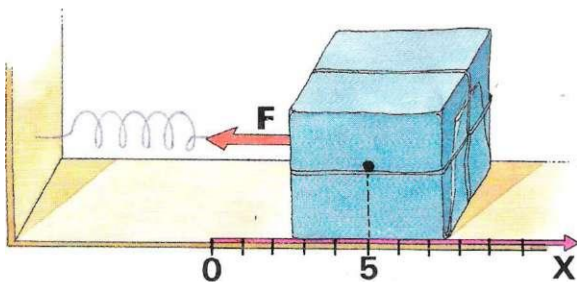
Un cuerpo de 2 Kg de masa se levanta desde el suelo hasta una altura de 4 m. Calcula:

a) Haciendo uso de la definición de trabajo, calcula el trabajo realizado por la fuerza peso si se levanta verticalmente.
b) Comprueba que este trabajo coincide con menos la variación de energía potencial de la partícula entre la posición inicial y final.
c) Imagina que la partícula se eleva a la misma altura, pero desplazándola por un plano inclinado de 30º. Responde a las mismas preguntas de los apartados a) y b). ¿Qué te llama la atención de los resultados obtenidos?
d) ¿Por qué crees que las carreteras de montaña se hacen en zig-zag y no en línea recta?

Ejemplo 4º

Supongamos que un cuerpo de 100 g de masa está sujeto a un muelle horizontal de constante elástica 50 N/m. Si lo separamos 5 cm de su posición de equilibrio estirando el muelle, calcular:

a) La energía potencial elástica que tiene el cuerpo en dicha posición.
b) El trabajo realizado por la fuerza elástica en el desplazamiento desde la posición de equilibrio hasta los 5 cm.
c) El trabajo realizado por la fuerza que produce el desplazamiento (fuerza externa).
d) ¿Qué energía potencial elástica tendría el cuerpo si en vez de estirar el muelle lo hubiésemos comprimido 5 cm desde su posición de equilibrio? ¿Qué trabajo habría realizado la fuerza elástica en este desplazamiento? ¿Y la fuerza externa?.



4. TEOREMA DEL TRABAJO, O TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA O TEOREMA DE LAS FUERZAS VIVAS (TFV)

El teorema del trabajo, de la energía cinética o TFV dice que: "Cuando una partícula se desplaza entre dos posiciones, el trabajo total realizado por las fuerzas que actúan sobre el cuerpo a lo largo de un determinado desplazamiento, es igual a la variación de energía cinética que experimenta dicho cuerpo"

$$\boxed{W_A^{\ B}{}_{TOTAL} = \Delta E_C = E_C(B) - E_C(A)} \quad [2.7]$$

Comentarios:

1º.- Este teorema es aplicable a cualquier tipo de fuerzas (conservativas y/o no conservativas) y cualquier desplazamiento (rectilíneo o no).

2º.- Este teorema nos permite calcular el trabajo total realizado sobre una partícula sin necesidad de utilizar la definición de trabajo, bastaría con evaluar la energía cinética de la partícula en las posiciones inicial y y final.

3º.- Si despejamos a la energía cinética final en la ecuación del teorema obtenemos:

$$E_C(B) = E_C(A) + W_A^{\ B}{}_{TOTAL}$$

Como vemos según el signo del trabajo total realizado sobre la partícula la energía cinética de la partícula habrá aumentado, disminuido o permanecido constante.

$$\text{Si } W_A^{\ B}{}_{TOTAL} > 0 \Rightarrow E_C(B) > E_C(A) \Rightarrow E_C \uparrow$$

$$\text{Si } W_A^{\ B}{}_{TOTAL} < 0 \Rightarrow E_C(B) < E_C(A) \Rightarrow E_C \downarrow$$

$$\text{Si } W_A^{\ B}{}_{TOTAL} = 0 \Rightarrow E_C(B) = E_C(A) \Rightarrow E_C = \text{cte.}$$

4º.- Según el comentario anterior el trabajo realizado sobre una partícula debe entenderse como una transferencia de energía.

Ejemplo 5º

Se deja deslizar a un cuerpo de 1 Kg de masa por un plano inclinado de 30º. Si el cuerpo parte del reposo y el coeficiente de rozamiento entre este y el plano es de 0,1, hallar:

a) El trabajo realizado por cada una de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo y el trabajo resultante cuando el cuerpo se desplace 3 m sobre el plano.
b) La velocidad que adquiere el cuerpo al final cuando ha recorrido 3m sobre el plano aplicando el TFV.
c) Responde al apartado anterior mediante la dinámica.

Ejemplo 6º

Un cuerpo de 10 Kg se lanza sobre una superficie horizontal con una velocidad de 10 m/s. Debido al rozamiento, el cuerpo acaba deteniéndose después de recorrer 200 m sobre la superficie. Calcula el valor de la fuerza de rozamiento:

a) Mediante el TFV.
b) Mediante la dinámica.

5. RELACIÓN ENTRE EL TRABAJO Y LA ENERGÍA. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Consideremos a una partícula que se desplaza entre dos posiciones A y B siguiendo una trayectoria cualquiera y bajo la acción de fuerzas de cualquier tipo (conservativas y/o no conservativas, constantes y/o no constantes). Aplicando el teorema del trabajo (TFV) obtenemos:

$$W_A^{B}{}_{TOTAL} = \Delta E_c$$

Si descomponemos el trabajo total en la suma de dos trabajos: el realizado por las fuerzas conservativas y el realizado por las fuerzas no conservativas la expresión anterior nos queda:

$$W_A^{B}{}_{TOTAL} = W_A^{B}{}_{FC} + W_A^{B}{}_{FNC}$$

si tenemos en cuenta que el trabajo de las fuerzas conservativas coincide con la menos variación de la energía potencial de la partícula (teorema de la energía potencial), la ecuación anterior queda:

$$\Delta E_c = -\Delta E_p + W_A^{B}{}_{FNC}$$

Despejando el trabajo de las fuerzas no conservativas, obtenemos

$$\Delta E_c + \Delta E_p = W_A^{B}{}_{FNC}$$

Y si tenemos en cuenta que la energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial, podemos escribir la siguiente expresión que se conoce con el nombre de **Teorema de la Energía Mecánica**:

$$\boxed{\Delta E_m = W_A^{B}{}_{FNC}} \quad [2.8]$$

La variación de energía mecánica que experimenta un cuerpo en una determinada trayectoria, coincide con el trabajo realizado por todas las fuerzas no conservativas que actúan sobre la partícula en dicha trayectoria.

A partir de este teorema podemos extraer las siguientes consecuencias:

1º.- Si a lo largo de una determinada trayectoria entre dos puntos A y B sólo realizan trabajo las fuerzas conservativas ($W_{NC} = 0$), entonces $\Delta E_m = 0$, es decir, la energía mecánica permanece constante. Este resultado se conoce como **principio de conservación de la energía mecánica (PCEM) o teorema de conservación de la energía mecánica,** uya expresión matemática puede escribirse así:

$$\boxed{\text{Si } W_A^{B}{}_{FNC} = 0 \Rightarrow \Delta E_m = 0 \Rightarrow E_m = \text{cte.} \Rightarrow \Delta E_c = -\Delta E_p} \quad [2.9]$$

Es importante destacar que si la energía mecánica de la partícula permanece constante, esto no implica necesariamente que lo sean sus energías cinética y potencial. Lo que debe de ocurrir es que el aumento o disminución en su energía cinética se verá compensada, respectivamente, por una disminución o aumento en la misma cantidad de su energía potencial.

2º.- Si a lo largo de una determinada trayectoria entre dos puntos A y B, realizan trabajo las fuerzas no conservativas ($W_{NC} \neq 0$), entonces $\Delta E_m \neq 0$, es decir, la energía mecánica varía en una cantidad igual al trabajo realizado por las fuerzas no conservativas. Según sea el signo de este trabajo, así será el signo de la variación de energía mecánica, y por tanto, la energía mecánica de la partícula habrá aumentado o disminuido:

$$\text{Si } W_A^B{}_{FNC} > 0 \Rightarrow \Delta E_m > 0 \Rightarrow E_m \uparrow$$

$$\text{Si } W_A^B{}_{FNC} < 0 \Rightarrow \Delta E_m < 0 \Rightarrow E_m \downarrow$$

En particular, aquellas fuerzas no conservativas que realizan un trabajo negativa harán disminuir la energía mecánica; dichas fuerzas se denominan **disipativas** dado que cuando actúan hacen que la energía mecánica se disipe en forma de calor. Entre dichas fuerzas destacan las fuerzas de rozamiento por deslizamiento o las de resistencia de un medio al cuerpo que se mueve a través de él.

Ejemplo 7º

Un cuerpo de masa m se deja caer desde la azotea de un edificio de 40 m de altura.

A) Analiza si se conserva o no la energía mecánica del cuerpo durante su caída.

B) Analiza como varían las energías cinética y potencial gravitatoria del cuerpo durante su caída.

C) Calcula la velocidad con la que golpea al suelo aplicando el Principio de Conservación de la Energía Mecánica (PCEM).

D) Calcula la velocidad con la que golpea al suelo aplicando las ecuaciones del movimiento de caída libre.

SOLUC: C) y D) v = -28 m/s

Ejemplo 8º

Repite el problema anterior suponiendo que el cuerpo se lanza hacia abajo con una velocidad de 8 m/s.

SOLUC: C) y D) v = -29,1 m/s

Ejemplo 9º

Un cuerpo de masa m se deja deslizar por un plano inclinado de 30º sin rozamiento desde una altura de 2 m.

A) Analiza si se conserva o no la energía mecánica del cuerpo durante su descenso.

B) Analiza como varían las energías cinética y potencial gravitatoria del cuerpo durante su descenso.

C) Calcula la velocidad del cuerpo cuando llegue a la base del plano aplicando el PCEM.

D) Calcula la velocidad del cuerpo cuando llegue a la base del plano aplicando las ecuaciones de la cinemática.

SOLUC: C) y D) v = 6,3 m/s

Ejemplo 10º

Repite el problema anterior suponiendo que hay rozamiento y que el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano es de 0,2. (Cómo es evidente, no podrás responder al apartado C pero, en su lugar, sí podrás responder aplicando la relación entre el trabajo de las fuerzas no conservativas y la energía mecánica, ecuación 2.8).

Ejemplo 11º

Un cuerpo de masa m se lanza hacia arriba desde el suelo por un plano inclinado de 30º sin rozamiento con una velocidad de 14 m/s.

A) Analiza si se conserva o no la energía mecánica del cuerpo durante su ascenso.
B) Analiza como varían las energías cinética y potencial gravitatoria del cuerpo durante su ascenso.
C) Calcula la altura máxima alcanzada aplicando el PCEM.
D) Calcula la altura máxima alcanzada aplicando las ecuaciones de la cinemática.

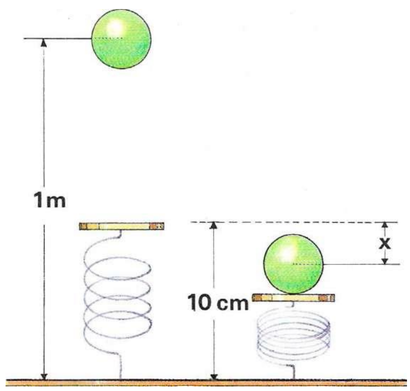
SOLUC: C) y D) h = 10 m

Ejemplo 12º

Repite el problema anterior suponiendo que hay rozamiento y que el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano es de 0,2 (Cómo es evidente, no podrás responder al apartado C pero, en su lugar, sí podrás responder aplicando la relación entre el trabajo de las fuerzas no conservativas y la energía mecánica, ecuación 2.8).

Ejemplo 13º

Desde una altura de 1m se deja caer un cuerpo de 50 g de masa sobre un muelle elástico de 10 cm de longitud y cuya constante elástica es 500 N/m.

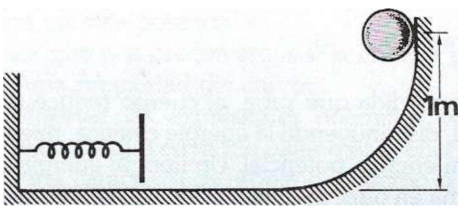


A) Haz un análisis energético del movimiento de caída del cuerpo desde su posición inicial hasta que se produce la máxima compresión del muelle, suponiendo que no hay rozamiento.
B) Calcula la máxima deformación del muelle.
C) ¿Qué ocurrirá después de haberse producido la máxima deformación del muelle?

SOLUC: B) 4 cm

Ejemplo 14º

Un cuerpo de 1 Kg se deja caer desde 1 m de altura, sin rozamiento, tal y como se indica en la figura:



A) Haz un análisis energético del problema desde que el cuerpo se suelta hasta que se produce la máxima deformación del muelle.
B) Calcula la velocidad con la que golpea el cuerpo al muelle.
C) Calcula la máxima deformación del muelle si su constante elástica vale 200 N(m.
D) ¿Qué ocurrirá después de haberse producido la máxima deformación del muelle?

SOLUC: B) 4,4 m/s C) 31 cm

CUESTIONES

Cuestión 1ª Comente las siguientes frases: a) La energía mecánica de una partícula permanece constante si todas las fuerzas que actúan sobre ella son conservativas. b) Si la energía mecánica de una partícula no permanecer constante, es porque una fuerza disipativa realiza trabajo.

Cuestión 2ª a) ¿puede ser negativa la energía cinética de una partícula? ¿Y la energía potencial? En caso afirmativo explique el significado físico. b) ¿Se cumple siempre que el aumento de energía cinética es igual a la disminución de su energía potencial? Justifique la respuesta.

Cuestión 3ª Analice las siguientes proposiciones, razonando si son verdaderas o falsas: a) El trabajo realizado por una fuerza sobre un cuerpo es igual a la variación de su energía cinética. b) Razone por qué el trabajo realizado por las fuerzas de rozamiento es siempre negativo.

Cuestión 4ª Si sobre una partícula actúan tres fuerzas conservativas de distinta naturaleza y una no conservativa, ¿cuántos términos de energía potencial hay en la ecuación de la energía mecánica de esa partícula? ¿Cómo aparece en dicha ecuación la contribución de la fuerza no conservativa?

Cuestión 5ª Comente las siguientes afirmaciones, razonando si son verdaderas o falsas: a) existe una función energía potencial asociada a cualquier fuerza. b) el trabajo de una fuerza conservativa sobre una partícula que se desplaza entre dos puntos es menor si el desplazamiento se realiza a lo largo de la recta que los une.

Cuestión 6ª Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) ¿Puede asociarse una energía potencial a una fuerza de rozamiento? b) ¿Qué tiene más sentido físico, la energía potencial en un punto o la variación de energía potencial entre dos puntos?

Cuestión 7ª Explique las relaciones que existen entre trabajo, variación de energía cinética y variación de energía potencial de una partícula que se desplaza bajo la acción de varias fuerzas. ¿Qué indicaría el hecho de que la energía mecánica no se conserve?

Cuestión 8ª Comente cada una de las afirmaciones siguientes y razone si son ciertas o falsas: a) El trabajo de una fuerza conservativa aumenta la energía cinética de la partícula y disminuye su energía potencial. b) El trabajo de una fuerza no conservativa aumenta la energía potencial de la partícula y disminuye su energía mecánica.

Cuestión 9ª ¿Puede un mismo cuerpo tener más de una forma de energía potencial? Razone la respuesta aportando algunos ejemplos.

Cuestión 10ª a) ¿Qué trabajo se realiza al sostener un cuerpo durante un tiempo **t**? b) ¿Qué trabajo realiza la fuerza peso de un cuerpo si éste se desplaza una distancia **d** por una superficie horizontal? Razona las respuestas.

Cuestión 11ª Un automóvil arranca sobre una carretera recta y horizontal, alcanza una cierta velocidad que mantiene constante durante un cierto tiempo y, finalmente, disminuye su velocidad hasta detenerse. a) Explique los cambios de energía que tienen lugar a lo largo del recorrido. b) El automóvil circula después por un tramo pendiente hacia abajo con el freno accionado y mantiene constante su velocidad. Razone los cambios energéticos que se producen.

Cuestión 12ª Explique y razone la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones: a) El trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre una partícula cuando se traslada desde un punto hasta otro es igual a la variación de su energía cinética. b) El trabajo realizado por todas las fuerzas conservativas que actúan sobre una partícula cuando se traslada desde un punto hasta otro es menor que la variación de su energía potencial.

Cuestión 13ª Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) Si la energía mecánica de una partícula permanece constante, ¿puede asegurarse que todas las fuerzas que actúan sobre la partícula son conservativas? b) Si la energía potencial de una partícula disminuye, ¿tiene que aumentar su energía cinética?

Cuestión 14ª Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) Una partícula sobre la que actúa una fuerza efectúa un desplazamiento. ¿Puede asegurarse que realiza trabajo? b) Una partícula, inicialmente en reposo, se desplaza bajo la acción de una fuerza conservativa. ¿Aumenta o disminuye su energía potencial?

Cuestión 15ª Sobre una partícula sólo actúan fuerzas conservativas. a) ¿Se mantiene constante su energía mecánica? Razone la respuesta. b) Si sobre la partícula actúan además fuerzas de rozamiento, ¿cómo afectarían a la energía mecánica?

Cuestión 16ª Una partícula parte de un punto sobre un plano inclinado con una cierta velocidad y asciende, deslizándose por dicho plano inclinado sin rozamiento, hasta que se detiene y vuelve a descender hasta la posición de partida. a) Explique las variaciones de energía cinética, de energía potencial y de energía mecánica de la partícula a lo largo del desplazamiento. b) Repita el apartado anterior suponiendo que hay rozamiento.

Cuestión 17ª Explique por qué, en lugar de energía potencial en un punto, deberíamos hablar de variación de energía potencial entre dos puntos. Ilustre su respuesta con algunos ejemplos.

Cuestión 18ª El trabajo realizado por una fuerza conservativa en el desplazamiento de una partícula entre dos puntos es menor si la trayectoria seguida es el segmento que une dichos puntos.

Cuestión 19ª ¿Se puede afirmar que el trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es siempre igual a la variación de su energía cinética? Razone la respuesta y apóyese con algún ejemplo.

Cuestión 20ª Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) ¿Puede asociarse una energía potencial a una fuerza de rozamiento? b) ¿Qué tiene más sentido físico, la energía potencial en un punto o la variación de energía potencial entre dos puntos?

Cuestión 21ª Un cuerpo desliza hacia arriba por un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal. Razone qué trabajo realiza la fuerza peso del cuerpo al desplazarse éste una distancia d sobre el plano.

Cuestión 22ª Desde el borde de un acantilado de altura h se deja caer libremente un cuerpo. ¿Cómo cambian sus energías cinética y potencial? Justifique la respuesta.

Cuestión 23ª a) Explique el principio de conservación de la energía mecánica y en qué condiciones se cumple. b) Un automóvil desciende por un tramo pendiente con el freno accionado y mantiene constante su velocidad. Razone los cambios energéticos que se producen.

Cuestión 24ª ¿Se puede afirmar que el trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es siempre igual a la variación de su energía cinética? ¿Es igual a la variación de su energía potencial? Razone las respuestas.

Cuestión 25ª Un cuerpo de masa m se eleva desde el suelo hasta una altura h de dos formas diferentes: directamente y mediante un plano inclinado. Razone que el trabajo de la fuerza peso es igual en ambos casos.

Cuestión 26ª Una partícula se desplaza bajo la acción de una fuerza conservativa. ¿Aumenta o disminuye su energía potencial? ¿Y su energía cinética? Razone las respuestas.

Cuestión 25ª Se lanza hacia arriba por un plano inclinado un bloque con una velocidad v_0. Razone cómo varían su energía cinética, su energía potencial y su energía mecánica cuando el cuerpo sube y, después, baja hasta la posición de partida. Considere los casos: i) que no haya rozamiento; ii) que lo haya.

Cuestión 26ª Si sobre una partícula actúan tres fuerzas conservativas de distinta naturaleza y una no conservativa, ¿cuántos términos de energía potencial hay en la ecuación de la energía mecánica de esa partícula? ¿Cómo aparece en dicha ecuación la contribución de la fuerza no conservativa?

Cuestión 27ª a) Explique qué es la energía mecánica de una partícula y en qué casos se conserva. b) Un objeto se lanza hacia arriba por un plano inclinado con rozamiento. Explique cómo cambian las energías cinética, potencial y mecánica del objeto durante el ascenso.

Cuestión 28ª Un objeto desciende con velocidad constante por un plano inclinado. Explique con la ayuda de un esquema, las fuerzas que actúan sobre el objeto. ¿Es constante su energía mecánica? Razone la respuesta.

Cuestión 29ª Si la energía mecánica de una partícula es constante, ¿debe ser necesariamente nula la fuerza resultante que actúa sobre la misma? Razone la respuesta.

PROBLEMAS

Problema 1º Un cuerpo se lanza hacia arriba por un plano inclinado de 30º, con una velocidad inicial de 10 m s^{-1}.

a) Explique cualitativamente cómo varían las energías cinética, potencial y mecánica del cuerpo durante la subida.
b) ¿Cómo varía la longitud recorrida si se duplica la velocidad inicial? ¿Y si se duplica el ángulo del plano? (g = 10 m s^{-2})

Problema 2º Una fuerza conservativa actúa sobre una partícula y la desplaza, desde un punto x_1 hasta otro punto x_2, realizando un trabajo de 50 J.

a) Determine la variación de energía potencial de la partícula en ese desplazamiento. Si la energía potencial de la partícula es cero en x_1, ¿cuánto valdrá en x_2?
b) Si la partícula, de 5 g, se mueve bajo la influencia exclusiva de esa fuerza, partiendo del reposo en x_1, ¿cuál será la velocidad en x_2?, ¿cuál será la variación de energía mecánica?

SOLUC: b) v_2 = 141 m/s ΔE_p = -50 J

Problema 3º Un cuerpo de 2 kg cae sobre un resorte elástico de constante k = 4000 N m^{-1}, vertical y sujeto al suelo. La altura a la que se suelta el cuerpo, medida sobre el extremo superior del resorte, es de 2 m.

a) Explique los cambios energéticos durante la caída y la compresión del resorte.
b) Determine la deformación máxima del resorte. (g = 10 m s^{-2})

SOLUC: b) 15 cm ($100x^2 - x - 2 = 0$)

Problema 4º Un bloque de 5 kg desliza con velocidad constante por una superficie horizontal mientras se le aplica una fuerza de 10 N, paralela a la superficie.

a) Dibuje en un esquema todas las fuerzas que actúan sobre el bloque y explique el balance trabajo energía en un desplazamiento del bloque de 0,5 m.
b) Dibuje en otro esquema las fuerzas que actuarían sobre el bloque si la fuerza que se le aplica fuera de 30 N en una dirección que forma 60º con la horizontal, e indicar el valor de cada fuerza. Calcule la variación de energía cinética del bloque en un desplazamiento de 0,5 m.
g = 10 m s^{-2}

SOLUC: b) ΔE_c = 5,1 J

Problema 5º Un bloque de 2 kg se lanza hacia arriba, por una rampa rugosa (μ = 0,2) que forma un ángulo de 30º con la horizontal, con una velocidad de 6 m s^{-1}. Tras su ascenso por la rampa, el bloque desciende y llega al punto de partida con una velocidad de 4,2 m s^{-1}.

a) Dibuje un esquema de las fuerzas que actúan sobre el bloque cuando asciende por la rampa y, en otro esquema, las que actúan cuando desciende e indicar el valor de cada fuerza. ¿se verifica el principio de conservación de la energía mecánica en el proceso descrito? Razone la respuesta.
b) Calcule el trabajo de la fuerza de rozamiento en el ascenso del bloque y comente el signo del resultado obtenido.
g = 10 m s^{-2}

SOLUC: b) -9,2 J

Problema 6º Un trineo de 100 kg parte del reposo y desliza hacia abajo por la ladera de una colina de 30º de inclinación respecto a la horizontal.

a) Haga un análisis energético del desplazamiento del trineo suponiendo que no existe rozamiento y Determine, para un desplazamiento de 20 m, la variación de sus energías cinética, potencial y mecánica, así como el trabajo realizado por el campo gravitatorio terrestre.
b) Explique, sin necesidad de cálculos, cuáles de los resultados del apartado a) se modificarían y cuales no, si existiera rozamiento.
$g = 10\ m\ s^{-2}$

SOLUC: a) W(P) = 10 000 J

Problema 7º Un bloque de 10 kg desliza hacia abajo por un plano inclinado 30º sobre la horizontal y de longitud 2 m. El bloque parte del reposo y experimenta una fuerza de rozamiento con el plano de 15 N.

a) Analice las variaciones de energía que tienen lugar durante el descenso del bloque.
b) Calcule la velocidad del bloque al llegar al extremo inferior del plano inclinado.
$g = 10\ m\ s^{-2}$

SOLUC: b) 3,74 m/s

Problema 8º Por un plano inclinado 30º respecto a la horizontal asciende, con velocidad constante, un bloque de 100 kg por acción de una fuerza paralela a dicho plano. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es 0,2.

a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre el bloque y explique las transformaciones energéticas que tienen lugar en su deslizamiento.
b) Calcule la fuerza paralela que produce el desplazamiento, así como el aumento de energía potencial del bloque en un desplazamiento de 20 m.
$g = 10\ m\ s^{-2}$

SOLUC: b) 660 N; 10 000 J

Problema 9º Un bloque de 2 kg se lanza hacia arriba, por una rampa rugosa ($\mu_c = 0,2$) que forma un ángulo de 30º con la horizontal, con una velocidad de 6 m s^{-1} .

a) Explique cómo varían las energías cinética, potencial y mecánica del cuerpo durante la subida.
b) Calcule la longitud máxima recorrida por el bloque en el ascenso. ($g = 10\ m\ s^{-2}$)

SOLUC: b)

Problema 10º Un trineo de 100 kg desliza por una pista horizontal al tirar de él con una fuerza F, cuya dirección forma un ángulo de 30° con la horizontal. El coeficiente de rozamiento es 0,1.

a) Dibuje en un esquema todas las fuerzas que actúan sobre el trineo y calcule el valor de F para que el trineo deslice con movimiento uniforme.
b) Haga un análisis energético del problema y calcule el trabajo realizado por la fuerza F en un desplazamiento de 200 m del trineo.

$g=10\ m\ s^{-2}$

SOLUC: a) 108,7 N b) 18908 J

Problema 11º Un cuerpo de 0,5 kg se encuentra inicialmente en reposo a un altura de 1 m por encima del extremo libre de un resorte vertical, cuyo extremo inferior está fijo. Se deja caer el cuerpo sobre el resorte y, después de comprimirlo, vuelve a subir. El resorte tiene una masa despreciable y una constante elástica $k = 200\ N\ m^{-1}$.

a) Haga un análisis energético del problema y justifique si el cuerpo llegará de nuevo al punto de partida.
b) Calcule la máxima compresión que experimenta el resorte
$g = 10\ m\ s^{-2}$

SOLUC: b) 25 cm ($20x^2 - x - 1 = 0$)

Problema 12º Un bloque de 500 kg asciende a velocidad constante por un plano inclinado de pendiente 30º, arrastrado por un tractor mediante una cuerda paralela a la pendiente. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es 0,2.

a) Haga un esquema de las fuerzas que actúan sobre el bloque y calcule la tensión de la cuerda.
b) Calcule el trabajo que el tractor realiza para que el bloque recorra una distancia de 100 m sobre la pendiente. ¿Cuál es la variación de energía potencial del bloque?
$g =10\ m\ s^{-2}$.

SOLUC: a) T = 3300 N b) ΔE_p = 250 000 J

Problema 13º Un bloque de 1 kg desliza con velocidad constante por una superficie horizontal y choca contra el extremo de un muelle horizontal, de constante elástica 200 N m^{-1}. comprimiéndolo.

a) ¿Cuál ha de ser la velocidad del bloque para comprimir el muelle 40 cm?
b) Explique cualitativamente cómo variarían las energías cinética y potencial elástica del sistema bloque - muelle, en presencia de rozamiento. $g = 10\ m\ s^{-2}$

SOLUC: a) 5,66 m/s

Problema 14º Un bloque de 3 kg, situado sobre un plano horizontal, está comprimiendo 30 cm un resorte de constante k = 1000 N m^{-1}. Al liberar el resorte el bloque sale disparado y, tras recorrer cierta distancia sobre el plano horizontal, asciende por un plano inclinado de 30º. Suponiendo despreciable el rozamiento del bloque con los planos:

a) Determine la altura a la que llegará el cuerpo.
b) Razone cuándo será máxima la energía cinética y calcule su valor.
$g = 10\ m\ s^{-2}$

SOLUC: a) b)

Problema 15º Un bloque de 2 kg está situado en el extremo de un muelle, de constante elástica 500 N m^{-1}, comprimido 20 cm. Al liberar el muelle el bloque se desplaza por un plano horizontal y, tras recorrer una distancia de 1 m, asciende por un plano inclinado 30º con la horizontal. Calcule la distancia recorrida por el bloque sobre el plano inclinado.

a) Supuesto nulo el rozamiento.
b) Si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y los planos es 0,1.
$g = 10\ m\ s^{-2}$

SOLUC: a) b)

Problema 16º Un cuerpo de 0,5 kg se lanza hacia arriba por un plano inclinado, que forma 30º con la horizontal, con una velocidad inicial de 5 m s^{-1}. El coeficiente de rozamiento es 0,2.
a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, cuando sube y cuando baja por el plano, y calcule la altura máxima alcanzada por el cuerpo.
b) Determine la velocidad con la que el cuerpo vuelve al punto de partida.
$g = 10\ m\ s^{-2}$

SOLUC: a) 15 b)

Problema 17º Un muchacho subido en un trineo desliza por una pendiente con nieve (rozamiento despreciable) que tiene una inclinación de 30º. Cuando llega al final de la pendiente, el trineo continúa deslizando por una superficie horizontal rugosa hasta detenerse.

a) Explique las transformaciones energéticas que tienen lugar durante el desplazamiento del trineo.
b) Si el espacio recorrido sobre la superficie horizontal es cinco veces mayor que el espacio recorrido por la pendiente, determine el coeficiente de rozamiento.

$g = 10$ m s^{-2}

SOLUC: b) $\mu = 0,1$

Problema 18º En un instante t_1 la energía cinética de una partícula es 30 J y su energía potencial de 12 J. En un instante posterior t_2 su energía cinética es de 18 J.

a) Si únicamente actúan fuerzas conservativas sobre la partícula, ¿cuál es su energía potencial en el instante t_2?
b) Si la energía potencial en el instante t_2 fuese 6 J, ¿actuarían fuerzas no conservativas sobre la partícula?

Razone las respuestas.

SOLUC: a) $E_c = 24$ J b) ¿?

Problema 19º Por un plano inclinado que forma un ángulo de 30° con la horizontal se lanza hacia arriba un bloque de 10 kg con una velocidad inicial de 5 m.s^{-1}. Tras su ascenso por el plano inclinado, el bloque desciende y regresa al punto de partida con una cierta velocidad. El coeficiente de rozamiento entre plano y bloque es 0,1.

a) Dibuje en dos esquemas distintos las fuerzas que actúan sobre el bloque durante el ascenso y durante el descenso e indique sus respectivos valores. Razone si se verifica el principio de conservación de la energía en este proceso.
b) Calcule el trabajo de la fuerza de rozamiento en el ascenso y en el descenso del bloque. Comente el signo del resultado obtenido.

$g = 10$ ms^{-2}

SOLUC: b)

Problema 20º Un bloque de 200 kg asciende con velocidad constante por un plano inclinado 30º respecto a la horizontal bajo la acción de una fuerza paralela a dicho plano. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es 0,1.

a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre el bloque y explique las transformaciones energéticas que tienen lugar durante su deslizamiento.
b) Calcule el valor de la fuerza que produce el desplazamiento del bloque y el aumento de su energía potencial en un desplazamiento de 20 m.

$g = 9,8$ m s^{-2}

SOLUC: b)

Problema 21º Un bloque de 2 kg se encuentra situado en la parte superior de un plano inclinado rugoso de 5 m de altura. Al liberar el bloque, se desliza por el plano inclinado llegando al suelo con una velocidad de 6 m s^{-1}.

a) Analice las transformaciones energéticas que tienen lugar durante el deslizamiento y represente gráficamente las fuerzas que actúan sobre el bloque.
b) Determine los trabajos realizados por la fuerza gravitatoria y por la fuerza de rozamiento. ($g = 9,8$ m s^{-2})

SOLUC: b)

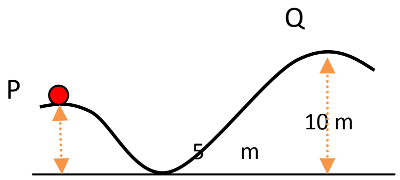
Problema 22º Por un plano inclinado 30º respecto a la horizontal desciende un bloque de 100 kg y se aplica sobre el bloque una fuerza F paralela al plano que lo frena, de modo que desciende a velocidad constante. El coeficiente de rozamiento entre el plano y el bloque es 0,2.

a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre el bloque y calcule el valor de la fuerza F
b) Explique las transformaciones energéticas que tienen lugar en el deslizamiento del bloque y calcule la variación de su energía potencial en un desplazamiento de 20 m.

$g = 9{,}8\ m\ s^{-2}$

SOLUC: *b)*

Problema 23º El cuerpo de la figura desliza por la pendiente sin fricción. Cuando está en el punto P su velocidad es v.



a) ¿Cuál es la mínima velocidad con la que tiene que moverse la partícula en P para que llegue a Q?
b) ¿Con qué velocidad llegará a Q si en P tiene una velocidad de 12 m/s?

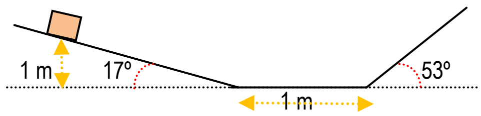
SOLUC: *a) 9,9 m/s b) 6,8 m/s*

Problema 24º Un muelle de constante elástica 250 N/m, horizontal y con un extremo fijo, está comprimido 10 cm. Unido al extremo libre del muelle se encuentra un cuerpo de 0,5 Kg que sale despedido al descomprimirse el muelle.

a) Explica las variaciones de energía que experimenta el cuerpo mientras se descomprime el muelle suponiendo que no hay rozamiento, y calcula la velocidad con la que sale despedido el cuerpo.
b) Suponiendo que a partir de que el cuerpo abandona el muelle aparece una fuerza de rozamiento de coeficiente 0,2, explica las variaciones de energía del cuerpo y calcula distancia recorrida hasta que se detiene.

SOLUC: *a) 2,24 m/s b) 1,25 m*

Problema 25º Desde el punto A de la figura se suelta un cuerpo de masa m. Calcula la longitud que recorrerá el cuerpo sobre la rampa de 53º si:



a) No ha rozamiento en todo el recorrido.
b) Hay rozamiento solo en el plano de 53º siendo el coeficiente 0,1.

Problema 26º Un cuerpo de 2 Kg se lanza con una velocidad de 6 m/s por una superficie horizontal rugosa (μ = 0,2). El bloque, después de recorrer 4 m por el plano, choca con el extremo libre de un muelle cuya constante elástica es 200 $N.m^{-1}$, colocado horizontalmente y sujeto por el otro extremo. Calcular:

a) La máxima compresión del resorte suponiendo que durante la compresión la superficie está perfectamente pulimentada.
b) El trabajo total realizado durante la compresión.

SOLUC: *A) 45 cm B) - 20,25 J*

TEMA 3. CAMPO GRAVITATORIO Y CAMPO ELÉCTRICO

1. CONCEPTO FÍSICO DE CAMPO. CAMPOS ESCALARES Y CAMPOS VECTORIALES. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

En Física se denomina campo a cualquier región del espacio en la que se ponga de manifiesto el valor de una magnitud física. Por ejemplo, cualquier región que cojamos de nuestro entorno, como el aula en la que estamos, es un campo físico por múltiples razones: es un campo de fuerzas gravitatorio, es un campo de temperaturas, de presiones, de densidad, etc.

Los campos físicos se clasifican en escalares y vectoriales, según sea la magnitud física que se manifieste en ellos.

1.A CAMPOS ESCALARES

Los campos escalares son campos físicos en los que la magnitud física que se pone de manifiesto es de tipo escalar. Son campos escalares los campos de temperaturas, presiones, densidades, luminosidades, etc.

Los campos escalares se representan gráficamente mediantes las llamadas isolíneas o superficies equiescalares que son líneas o superficies imaginarias que, en un instante dado, pasan por todos los puntos del campo que tiene el mismo valor de la magnitud escalar. Las isotermas y las isobaras son las isolíneas del campo de temperaturas y de presiones respectivamente. En un mapa topográfico las líneas que unen los puntos que se encuentran a la misma altura sobre el nivel del mar se denominan curvas de nivel.

La gráfica siguiente representa un mapa de isobaras tal y como se puede observaras diariamente en los espacios dedicados a la información meteorológica:

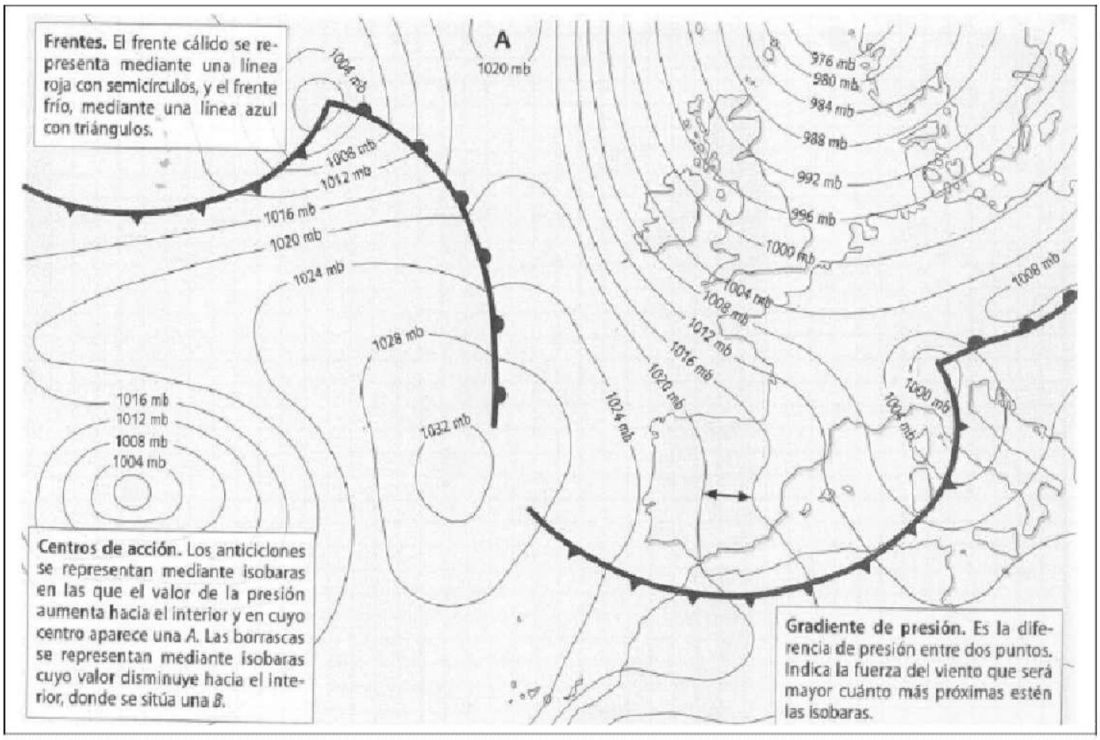


Figura 3.1

De la definición de isolíneas o superficies equipotenciales podemos deducir lo siguiente:

- La forma que tienen las isolíneas o superficies equiescalares es arbitraria y generalmente se modifican a lo largo del tiempo.
- Dos isolíneas diferentes nunca pueden cortarse. En efecto, si dos isotermas o dos isobaras diferentes se cortaran en un punto, querría decir que en un mismo instante un mismo punto tiene dos valores diferentes de temperatura o de presión.
- La mayor o menor densidad de isolíneas en una determinada región indica que hay una variación (gradiente) más o menos acusada de la magnitud escalar en dicha región.

1.B CAMPOS VECTORIALES

Son campos físicos en los que la magnitud que se manifiesta es de naturaleza vectorial. Son campos vectoriales el campo de velocidades del viento o de la corriente de un río, el campo fuerzas gravitatorio, eléctrico y magnético.

A los campos vectoriales en los que la magnitud física que se manifiesta es una fuerza, se denominan campos de fuerzas. Son campos de fuerzas el campo gravitatorio, eléctrico y magnético. Los dos primeros los estudiaremos en este tema y el tercero en los dos temas siguientes.

Los campos vectoriales se representan gráficamente mediante las denominada líneas de campo que son líneas imaginarias tangentes (de la misma dirección y sentido) en cada punto y en cada instante al vector que caracteriza al campo vectorial. Si el campo vectorial es un campo de fuerzas, a las líneas de campo se les denomina líneas de fuerza, y al vector que caracteriza al campo de fuerzas se le denomina vector intensidad de campo o simplemente vector campo.

Además las líneas de campo se dibujan de modo que la densidad de líneas es directamente proporcional al vector que caracteriza al campo vectorial, es decir, la mayor o menor proximidad entre las líneas de campo indica la mayor o menor intensidad de dicho campo.

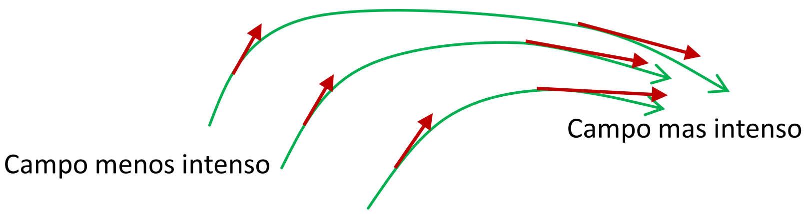


Figura 3.2

Si el campo vectorial es un campo uniforme (constante) entonces las líneas que lo representan tienen que ser paralelas e igualmente espaciadas

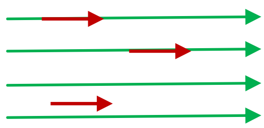


Figura 3.3

2. MODELOS PLANETARIOS: LEYES DE KEPLER

Históricamente, los modelos que intentaron describir los movimientos de los planetas han sido dos: el modelo geocéntrico y el modelo heliocéntrico.

- **Modelo geocéntrico**

Los antiguos griegos pensaban que la Tierra era el centro del Universo y que todos los cuerpos celestes se movían alrededor de ella. En una primera hipótesis, se suponía que dichos cuerpos describían circunferencias concéntricas alrededor de la Tierra, lo cual no describe bien el movimiento retrógrado de los planetas observado desde la Tierra.

Para explicar estas observaciones, el astrónomo Tolomeo de Alejandría desarrolló, en el siglo II D.C., su teoría de los epiciclos. En el caso más sencillo suponía que los planetas se movían uniformemente en una circunferencia llamada **epiciclo**, cuyo centro se movía, a su vez, sobre una circunferencia más grande, conocida como **deferente**, cuyo centro era la Tierra. La trayectoria resultante del planeta era una **epicicloide**.

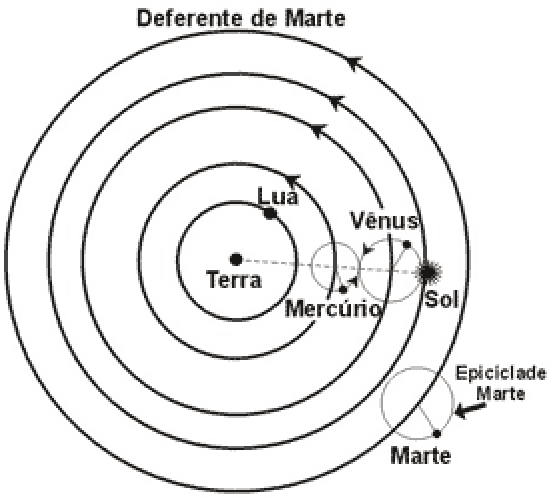


Figura 3.4

En definitiva, lo que los griegos hicieron fue describir el movimiento planetario con respecto a un sistema de referencia colocado en la Tierra.

El modelo geocéntrico se mantuvo hasta el Renacimiento (siglo XVI), sobre todo debido a la influencia de la Iglesia sobre el pensamiento científico.

- **Modelo heliocéntrico**

Fue propuesto por Nicolás Copérnico en el siglo XVI, recogiendo las ideas de Aristarco (s. III A.C.). Según este modelo, los planetas se mueven en órbitas concéntricas alrededor del Sol, es decir, describe el movimiento planetario desde un sistema de referencia situado en el Sol. En dicho sistema el movimiento de los planetas tenía una descripción más sencilla. Este modelo fue corroborado experimentalmente por Galileo al observar con su telescopio algunos satélites de Júpiter.

Leyes de Kepler

Basándose en las observaciones astronómicas de Galileo y Tycho Brahe, Johannes Kepler propuso tres leyes con las que describe cuantitativamente el movimiento de los planetas alrededor del Sol:

- **Primera Ley**

  Los planetas describen órbitas elípticas alrededor del Sol, situándose éste en uno de los focos de la elipse. (fig. 3.5)

- **Segunda ley (ley de las áreas)**

  La velocidad areolar (rapidez con que varía el área descrita por el radiovector que une el Sol con cada planeta) es constante para cada planeta, es decir, dicho radiovector barre áreas iguales en tiempo iguales.

  Como consecuencia de esta ley, la velocidad orbital de un planeta no es constante a lo largo de su órbita, siendo más pequeña en los puntos de la misma más alejados del Sol (afelio).

- **Tercera ley**

  El cuadrado del periodo orbital (T) de cada planeta es directamente proporcional al cubo de su distancia media (d) al Sol:

$$T^2 = K \cdot d^3 \quad [3.1]$$

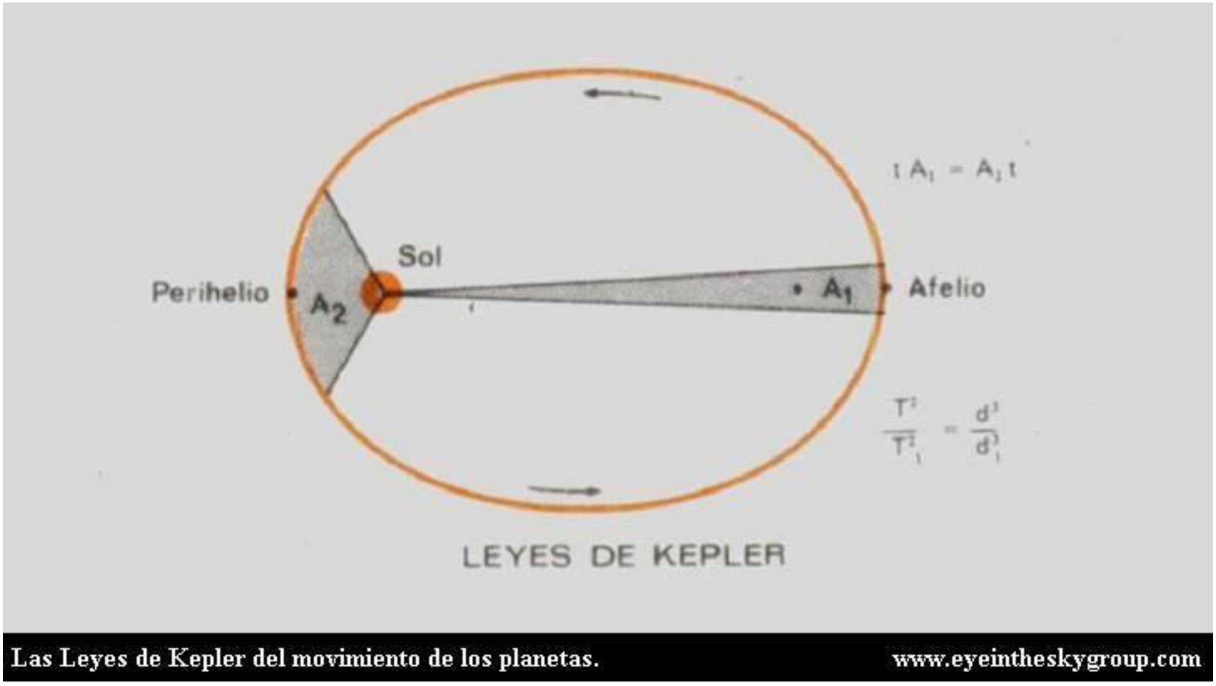


Figura 3.5

3. FUERZA GRAVITATORIA ENTRE DOS MASAS PUNTUALES

Basándose en las leyes de Kepler y en sus propias leyes de la Dinámica, Isaac Newton propone, en el s. XVII, su **ley de gravitación universal**, publicada en su obra *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*, con la que describe la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales. El enunciado de dicha ley puede resumirse así:

"La fuerza con que se atraen dos masa puntuales (M y m) separadas por una distancia r es directamente proporcional a los valores de dichas masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa"

$$\boxed{F = G\frac{M_1 . M_2}{r^2}}$$ (módulo del vector fuerza)

La expresión vectorial de la fuerza gravitatoria entre masas puntuales puede escribirse de la siguiente forma:

$$\boxed{\vec{F} = -G\frac{M_1 . M_2}{r^2}\vec{u_r}}$$ (vector fuerza) [3.2]

Donde:

G = 6,67·10^{-11} N m^2 kg^{-2} es la llamada constante de gravitación universal

"r" es módulo del vector $\vec{r}$ (que es la distancia que separa a las dos masas que interaccionan)

El vector $\vec{r}$ es el vector que va de la masa fuente a la masa testigo

Y $\vec{u_r} = \frac{\vec{r}}{r}$ es un vector unitario de la misma dirección y sentido que el vector $\vec{r}$ y por tanto un vector unitario dirigido de la masa fuente a la masa testigo (fig. 1.2).

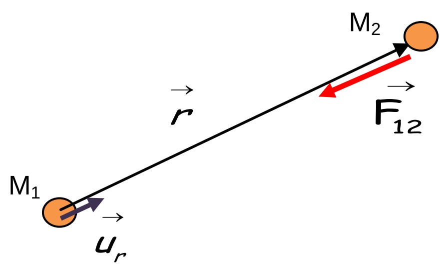


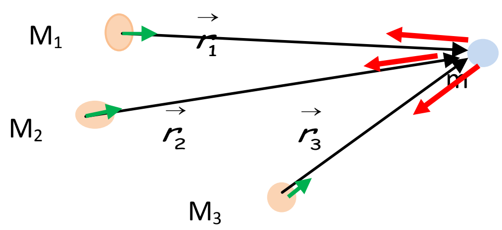
Figura 3.6

Junto a las características anteriores, podemos hacer las siguientes observaciones con respecto a la fuerza gravitatoria:

- Es una fuerza de atracción.
- Es una fuerza central porque su dirección coincide con la dirección de la recta que une las dos masas que interaccionan.
- La fuerza gravitatoria es una fuerza de largo alcance porque se manifiesta tanto a cortas distancias como a largas distancias.
- G es una constante universal, es decir, su valor no depende del medio en el que se encuentren las masas que interaccionan y, por tanto, la atracción gravitatoria entre dos masas también es independiente del medio en el que se encuentren.
- Debido al pequeño valor de G la fuerza de atracción gravitatoria entre dos masas sólo es apreciable en el caso en que al menos una de las dos masas sea de valor elevado.

- Es una fuerza cuyo valor disminuye con el cuadrado de la distancia que separa a las masas que interaccionan (es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia), lo que permite demostrar, junto con su carácter central, que se trata de una fuerza conservativa y, por tanto, tendrá asociada una energía potencial.
- **Principio de superposición:** Las fuerzas ejercidas por las masas son aditivas lo cual significa que la fuerza resultante sobre una determinada masa es igual a la suma vectorial de las fuerzas de otras masas. Esta propiedad recibe el nombre de **principio de superposición** y se puede enunciar así:

Si una masa está sometida simultáneamente a varias fuerzas independientes, la fuerza resultante se obtiene sumando vectorialmente dichas fuerzas.



$$\vec{F}_{Rte} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = -G\frac{M_1 . m}{r_1^2}\vec{u}_{r1} - G\frac{M_2 . m}{r_2^2}\vec{u}_{r2} - \ldots - G\frac{M_n . m}{r_n^2}\vec{u}_{rn}$$

Figura 3.7

- Si una de las masas es la tierra, entonces la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce la tierra sobre una masa m cualquiera sería:

$$\boxed{\vec{F} = -G\frac{M_T . m}{r^2}\vec{u}_r} \quad \boxed{F = G\frac{M_T . m}{r^2} = G\frac{M_T . m}{(R_T + h)^2}}$$ Donde r = R_T + h [3.3]

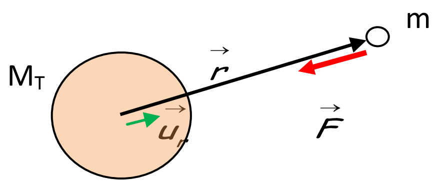


Figura 3.8

A esta fuerza es a la que llamamos peso de la masa m:

$$\vec{P} = m . \vec{g} \qquad P = m . g$$

Y podemos identificar al vector aceleración de la gravedad terrestre $\vec{g}$ y a su módulo g

$$\boxed{\vec{g} = -G\frac{M_T}{r^2}\vec{u}_r} \quad \boxed{g = G\frac{M_T}{r^2} = G\frac{M_T}{(R_T + h)^2}} \qquad [3.4]$$

<u>Ejemplo 1º</u>

Dos masas de 10 t cada una se encuentran situadas en las posiciones (0,4) m y (3,0) m.

Dibuja y calcula los vectores fuerza de interacción gravitatoria entre ambas.

Ejemplo 2º

Dos masas de 5 t cada una se encuentran situadas en las posiciones (0,0) m y (4,0) m.

a) Dibuja la fuerza gravitatoria que ejerce cada una de ellas sobre una tercera masa de 1 t situada en el punto (0,3) m. Dibuja también la fuerza gravitatoria resultante que ejercen las dos primeras masas sobre la tercera.

b) Calcula el valor de cada una de las fuerzas.

4. FUERZA ELECTROSTÁTICA ENTRE CARGAS PUNTUALES

En la actualidad, la carga eléctrica es un modelo que utiliza la Física para explicar los fenómenos eléctricos. También se denomina carga eléctrica a cualquier cuerpo electrizado. En general, damos el nombre de **carga puntual** a todo cuerpo electrizado cuando no se tienen en cuenta sus dimensiones.

Las cargas eléctricas pueden ser:

- **Positivas:** arbitrariamente se dio este nombre a la carga adquirida por el vidrio frotado. Los protones tienen esta carga.
- **Negativas:** es la carga que adquiere el ámbar (resina fosilizada) por frotamiento y de ella son portadores los electrones.

Propiedades de la carga eléctrica

1. La carga eléctrica es una magnitud física cuya unidad en el S.I. es el culombio (C), en honor al científico francés Charles Coulomb (1736-1806).
2. Las cargas del mismo signo se repelen y las cargas de signo contrario se atraen.
3. La carga se conserva: en la electrización no se crea carga, solamente se transmite de unos cuerpos a otros, de forma que la carga total permanece constante (**principio de conservación de la carga eléctrica**).
4. La carga está **cuantizada**: se presenta como un múltiplo entero (N) de la carga elemental (e) que es la carga más pequeña que puede presentarse libremente en la naturaleza. Esta carga es la del electrón, siendo su valor $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C. Así, el valor de la carga eléctrica de cualquier cuerpo electrizado será $Q = \pm N \cdot e$.
5. La electrización de un cuerpo consiste en que éste pierda o gane electrones quedando cargado positiva o negativamente, respectivamente.

Ley de Coulomb

Esta ley establece las características que presenta la interacción entre cargas puntuales:

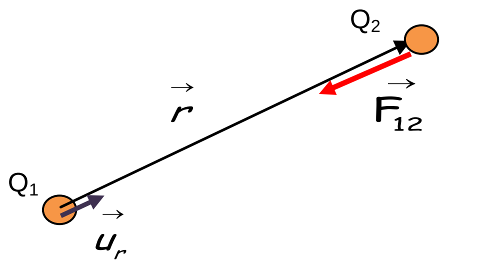
"La fuerza con que se atraen o se repelen dos cuerpos cargados es directamente proporcional al producto de dichas cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa".

$$\boxed{F = K\frac{|Q_1|.|Q_2|}{r^2}}$$ módulo del vector fuerza electrostática

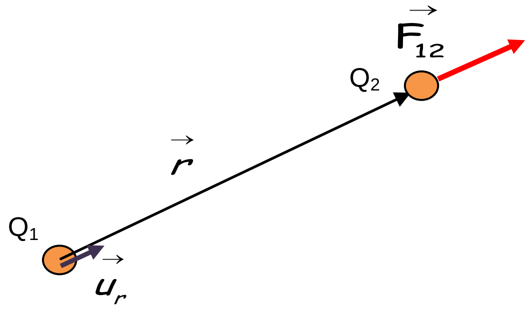
La expresión vectorial de la fuerza electrostática entre dos cargas puntuales puede escribirse de la siguiente forma:

$$\boxed{\vec{F} = K\frac{Q_1.Q_2}{r^2}\vec{u_r}}$$ vector fuerza electrostática [3.5]

Donde:
K es la llamada constante eléctrica.
"r" es módulo del vector $\vec{r}$ (que es la distancia que separa a las dos cargas que interaccionan)
El vector $\vec{r}$ es el vector que va de la carga fuente a la carga testigo
Y $\vec{u_r} = \frac{\vec{r}}{r}$ es un vector unitario de la misma dirección y sentido que el vector $\vec{r}$ y por tanto un vector unitario dirigido de la carga fuente a la carga testigo (fig. 1.2).



Cargas de distinto signo



Cargas del mismo signo

Figura 3.9

A partir de estas características, deducimos las siguientes **consecuencias**:

- La fuerza de interacción eléctrica puede ser de atracción (cargas de distinto signo), o de repulsión (cargas del mismo signo).
- Es una fuerza central porque…..
- Es una fuerza de largo alcance.
- El valor de la constante eléctrica K no es una constante universal puesto que su valor depende del medio interpuesto entre las cargas que interaccionan. Por tanto la interacción eléctrica entre dos cargas sí depende del medio en el que se encuentran dichas cargas.
- La constante eléctrica es máxima en el vacío y vale aproximadamente:

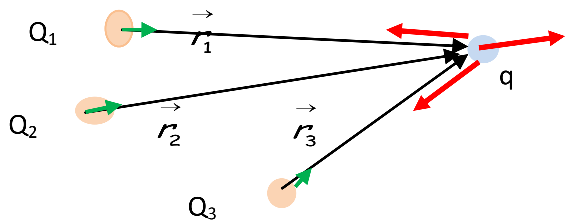
  $$K(\text{vacío}) = K_0 = 9{\cdot}10^9\ \mathrm{N\ m^2\ C^{-2}}$$

  Por tanto la interacción eléctrica entre dos cargas es máxima cuando estas están en el vacío, y disminuye cuando se encuentran en un medio material.

  La constante eléctrica puede expresarse en función de otra constante, la denominada constante dieléctrica ε. La relación entre ambas es:

  $$K = \frac{1}{4\pi \in}$$
- Es una fuerza cuyo valor disminuye con el cuadrado de la distancia que separa a las cargas que interaccionan (es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia), lo que permite demostrar, junto con su carácter central, que se trata de una fuerza conservativa y, por tanto, tendrá asociada una energía potencial.
- La ley de Coulomb solamente es válida para cargas puntuales y para cuerpos finitos de forma esférica que estén alejados, es decir, cuando el radio de las esferas es despreciable frente a la distancia entre sus centros.
- **Principio de superposición:** Las fuerzas ejercidas entre las cargas son aditivas lo cual significa que la fuerza resultante sobre una determinada carga es igual a la suma vectorial de las fuerzas que otras cargas. Esta propiedad recibe el nombre de **principio de superposición** y se puede enunciar así:

Si una carga está sometida simultáneamente a varias fuerzas independientes, la fuerza resultante se obtiene sumando vectorialmente dichas fuerzas.



$$\vec{F}_{Rte} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = K\frac{Q_1 . q}{r_1^2}\vec{u}_{r1} + K\frac{Q_2 . q}{r_2^2}\vec{u}_{r2} + \ldots + K\frac{Q_n . q}{r_n^2}\vec{u}_{rn}$$

Figura 3.10

Ejemplo 3º

Dos cargas Q_1 y Q_2 se encuentran en el vacío en las posiciones (0,0) m y (-4,0) m.

a) Dibuja la fuerza que ejerce cada una de estas cargas sobre una tercera carga Q_3 situada en la posición (0,3) m. Dibuja también la fuerza resultante que ejercen las dos primeras cargas sobre la tercera. Q_1 = 3 µC Q_2 = -5 µC Q_3 = -1 µC

b) Calcula el valor de cada una de estas fuerzas.

5. INTENSIDAD DE CAMPO GRAVITATORIO E INTENSIDAD DE CAMPO ELÉCTRICO

Recordemos que los campos de fuerzas se representan gráficamente mediante las denominadas líneas de fuerza, que son líneas imaginarias tangentes en todo punto al vector que caracteriza al campo de fuerzas, denominado vector intensidad de campo. En esta pregunta veremos quién es este vector tanto en el campo gravitatorio como en el campo eléctrico.

5.A INTENSIDAD DE CAMPO GRAVITATORIO.

Definimos el **vector intensidad de campo gravitatorio o vector campo gravitatorio** en un punto de un campo gravitatorio como la fuerza gravitatoria por unidad de masa en dicho punto, es decir, a la fuerza que se ejercería sobre una masa de 1 Kg colocada en dicho punto.

$$\boxed{\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}} \quad [3.6]$$

Si conocemos el valor de esta magnitud en un punto cualquiera del campo, podemos determinar la fuerza gravitatoria ejercida sobre cualquier masa puntual m colocada en dicho punto a partir de la ecuación [1.8]:

$$\boxed{\vec{F} = m.\vec{g}} \quad [3.7]$$

Es decir, multiplicando la masa testigo m por el valor del vector intensidad de campo en dicho punto.

Si el campo gravitatorio es creado por una masa puntual M, entonces el **vector intensidad de campo gravitatorio o vector campo gravitatorio** creado por esta masa fuente en un punto cualquiera de du alrededor valdrá:

$$\boxed{\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-G\frac{M.m}{r^2}\vec{u}_r}{m} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r} \qquad \boxed{g = G\frac{M}{r^2}} \quad [3.8]$$

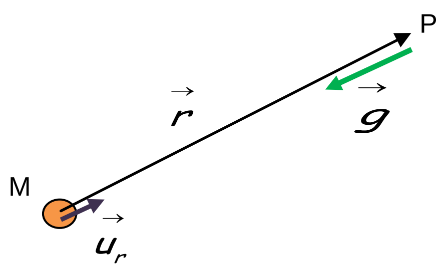


Figura 3.11

- El vector intensidad de campo gravitatorio creado por una masa puntual en cualquier punto de su campo es un vector radial dirigido hacia la masa fuente como se puede ver en la figura anterior.
- La intensidad de campo gravitatorio se mide en unidad de fuerza dividida por unidad de masa que, en el SI de unidades sería:

$$\frac{N}{Kg} = \frac{Kg.\frac{m}{s^2}}{Kg} = \frac{m}{s^2}$$

Que como vemos es la unidad de aceleración.

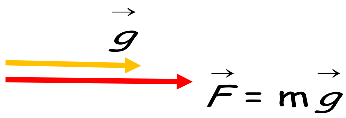
- Si observamos el módulo del vector intensidad de campo gravitatorio creado por una masa puntual en cualquier punto de su alrededor, vemos que es directamente proporcional a la masa fuente M, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que hay entre la cada punto y la masa fuente.

$$g = G\frac{M}{r^2}$$

- Si conocemos el valor de la intensidad de campo gravitatorio en un punto, podemos calcular el valor de la fuerza que experimentaría una masa cualquiera testigo m al colocarla en dicho punto. Para ello bastaría con multiplicar el valor de la masa testigo por el valor del campo.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} \implies \vec{F} = m\,\vec{g}$$

- Si observamos la expresión anterior $\vec{F} = m\,\vec{g}$, podemos comprobar que el vector intensidad de campo gravitatorio en un punto y la fuerza que ejerce ese campo sobre una masa testigo m colocada en dicho punto, son vectores de la misma dirección y sentido.



- Recordemos que un campo de fuerzas se puede representar gráficamente mediante las denominadas **líneas de campo** o **líneas de fuerza**. Por tanto el campo gravitatorio creado por una masa puntual, como campo de fuerzas que es, también se representará mediante las líneas de fuerza, que son tangentes en cada punto al vector que caracteriza al campo. Teniendo en cuenta que el vector que caracteriza al campo es el vector intensidad de campo, las líneas de fuerza del campo gravitatorio de una masa puntual M tienen la siguiente forma:

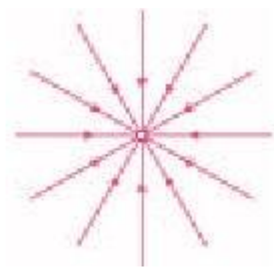


Figura 3.12

Observa como la densidad de líneas de fuerza disminuye al alejarnos de la masa fuente, es decir, las líneas de fuerza se van separando, y esto nos indica que el campo es menos intenso.

- **Principio de superposición para el campo gravitatorio:** Si el campo gravitatorio está creado por varias masas puntuales M_1, M_2, …, M_n, la intensidad de campo gravitatorio en un punto dado se determina sumando vectorialmente las intensidades de campo gravitatorio creado por cada masa por separado en dicho punto:

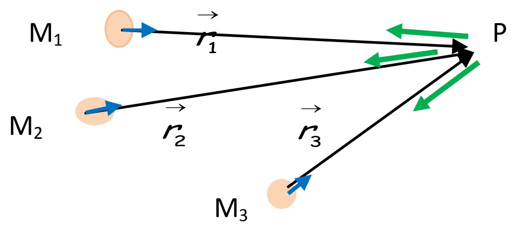


Figura 3.13

$$\vec{g}_{Rte} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \ldots + \vec{g}_n = -G\frac{M_1}{r_1^2}\vec{u}_{r1} - G\frac{M_2}{r_2^2}\vec{u}_{r2} - \ldots - G\frac{M_n}{r_n^2}\vec{u}_{rn}$$

- Si la masa fuente del campo gravitatorio es la tierra, y la consideramos como una masa puntual, entonces la intensidad de campo gravitatorio en cualquier punto de su superficie o por encima de ella es:

$$\boxed{\vec{g} = -G\frac{M_T}{r^2}\vec{u}_r} \quad \boxed{g = G\frac{M_T}{r^2} = G\frac{M_T}{(R_T + h)^2}}$$ Donde $r = R_T + h$ [3.9]

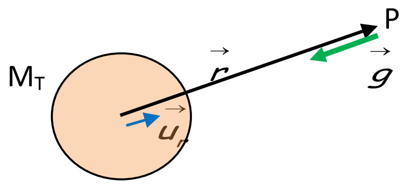


Figura 3.14

A esta magnitud es a la que llamamos aceleración de la gravedad terrestre, que como podemos observar no es constante sino que disminuye con el cuadrado de la distancia al centro de la tierra.

Podemos obtener el valor de esta magnitud en la superficie de la tierra que, como sabemos, es de 9,8 m/s^2:

$G = 6{,}67.10^{-11}$ $N.m^2/Kg^2$

$M_T = 5{,}98.10^{24}$ Kg

$R_T = 6380$ Km $= 6{,}38.10^{6}$ m

$$g(superficie) = g_o = G\frac{M_T}{R_T^2} = 6{,}67.10^{-11}.\frac{5{,}98.10^{24}}{(6{,}38.10^6)^2} = 9.799\,\frac{m}{s^2}$$

5.B INTENSIDAD DE CAMPO ELÉCTRICO.

Definimos el **vector intensidad de campo eléctrico o vector campo eléctrico** en un punto de un campo eléctrico como la fuerza eléctrica por unidad de carga positiva en dicho punto, es decir, a la fuerza que se ejercería sobre una carga de +1 C colocada en dicho punto.

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}} \quad [3.10]$$

Si conocemos el valor de esta magnitud en un punto cualquiera del campo, podemos determinar la fuerza eléctrica ejercida sobre cualquier carga puntual q colocada en dicho punto a partir de la ecuación [1.8]:

$$\boxed{\vec{F} = q.\vec{E}} \quad [3.11]$$

Es decir, multiplicando la carga testigo q por el valor del vector intensidad de campo en dicho punto.

Si el campo eléctrico es creado por una carga puntual Q, entonces el **vector intensidad de campo eléctrico o vector campo eléctrico** creado por esta carga fuente en un punto cualquiera de su alrededor valdrá:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{K\frac{Q.q}{r^2}\vec{u}_r}{q} = K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r} \qquad \boxed{E = K\frac{|Q|}{r^2}} \quad [3.12]$$

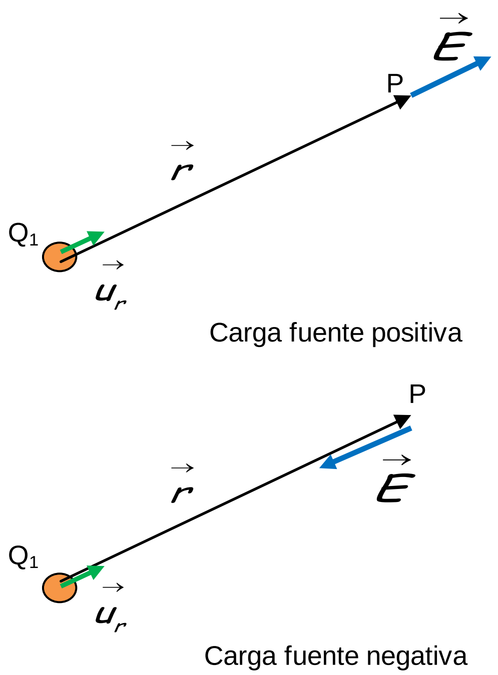


Figura 3.15

- El vector intensidad de campo eléctrico creado por una carga puntual en cualquier punto de su campo es un vector radial, alejándose de la carga fuente, si la carga es positiva, y dirigido hacia la carga fuente, si la carga es negativa, tal y como se puede ver en las figuras anteriores.
- La intensidad de campo eléctrico se mide en unidad de fuerza dividida por unidad de carga que, en el SI de unidades sería:

$$\frac{N}{C} = \frac{V}{m}$$

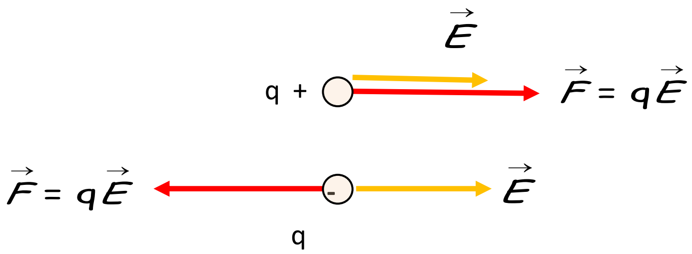
- Si observamos el módulo del vector intensidad de campo eléctrico creado por una carga puntual en cualquier punto de su alrededor, vemos que es directamente proporcional a la carga fuente Q, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que hay entre la cada punto y la carga fuente.

$$E = K\frac{|Q|}{r^2}$$

- Si conocemos el valor de la intensidad de campo eléctrico en un punto, podemos calcular el valor de la fuerza que experimentaría una carga testigo cualquiera q al colocarla en dicho punto. Para ello bastaría con multiplicar el valor de la carga testigo por el valor del campo.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \Rightarrow \vec{F} = q\vec{E}$$

- Si observamos la expresión anterior $\vec{F} = q\vec{E}$, podemos comprobar que el vector intensidad de campo eléctrico en un punto y la fuerza que ejerce ese campo sobre una carga testigo q colocada en dicho punto, son vectores de la misma dirección y sentido, si la carga testigo es positiva, o de sentidos contrarios, si la carga testigo es negativa.



- Recordemos que un campo de fuerzas se puede representar gráficamente mediante las denominadas **líneas de campo** o **líneas de fuerza**. Por tanto el campo eléctrico creado por una carga puntual Q, como campo de fuerzas que es, también se representará mediante las líneas de fuerza, que son tangentes en cada punto al vector que caracteriza al campo. Teniendo en cuenta que el vector que caracteriza al campo eléctrico es el vector intensidad de campo, las líneas de fuerza del campo eléctrico de una carga puntual Q tienen la siguiente forma:

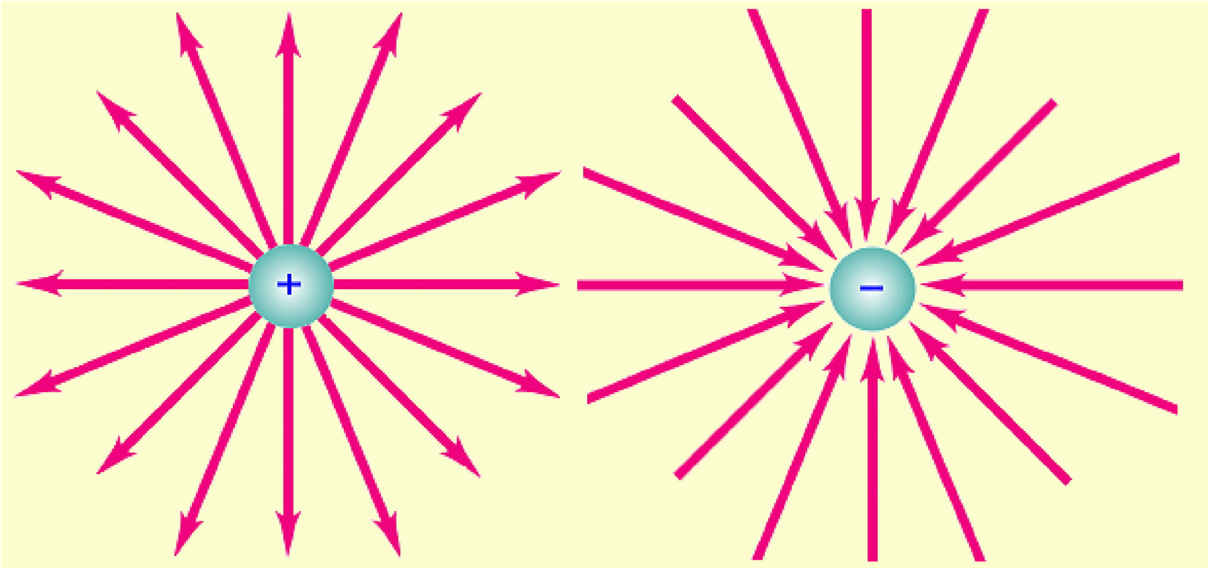


Figura 3.16

Se dice que las cargas positivas son fuentes de líneas de campo y que las cargas negativas son sumideros de líneas de campo.
Observa como la densidad de líneas de fuerza disminuye al alejarnos de la masa fuente, es decir, las líneas de fuerza se van separando, y esto nos indica que el campo es menos intenso.

- **Principio de superposición para el campo eléctrico:** Si el campo eléctrico está creado por varias cargas puntuales Q_1, Q_2, ..., Q_n, la intensidad de campo eléctrico en un punto dado se determina sumando vectorialmente las intensidades de campo eléctrico creado por cada carga por separado en dicho punto:

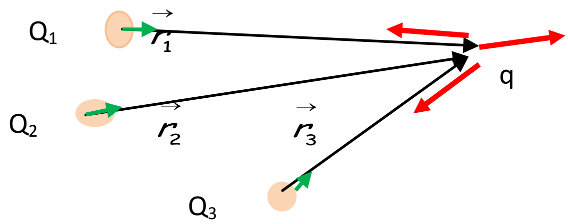


Figura 3.17

$$\vec{E}_{Rte} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n = K\frac{Q_1}{r_1^2}\vec{u}_{r1} + K\frac{Q_2}{r_2^2}\vec{u}_{r2} + \ldots + K\frac{Q_n}{r_n^2}\vec{u}_{rn}$$

Ejemplo 4º

Dos masa iguales de 10 t se encuentran respectivamente en el origen de coordenadas y en el punto (0, -3) m.

a) Dibuja la intensidad de campo gravitatorio de cada una de las masas en el punto (4,0) m. Dibuja también la intensidad de campo resultante en dicho punto debido a la acción de ambas masas.
b) Calcula el valor de los tres campos.

c) Dibuja y calcula la fuerza resultante que ejercerían las dos masas sobre una tercera masa de 2 Kg al colocarla en la posición (4,0) m.

Ejemplo 5º

Dos cargas eléctricas de Q_1 = 5 μC y Q_2 = -5 μC se encuentran respectivamente en los puntos (3,0) y (-3,0) m.

a) Dibuja el campo eléctrico creado por cada una de las cargas y el campo resultante en el punto P = (0,4) m.
b) Calcula el valor de cada uno de los campos anteriores suponiendo que las cargas están en el vacío.
c) Dibuja y calcula la fuerza eléctrica total que ejercerían las dos cargas anteriores sobre una tercera carga q = 10 C colocada en el punto P.

Ejemplo 6º

Considera el campo gravitatorio creado por la tierra.

a) Calcula su valor a 5000 Km de altura.
b) Calcula su valor a una altura de seis veces el radio terrestre.
c) ¿A qué altura habría que subir para que disminuyera al 20 % de lo que vale en su superficie?
d) ¿A qué altura de la superficie de la tierra el campo disminuye un 20 % de lo que vale en su superficie?

Ejemplo 7º

Un planeta tiene doble masa que la tierra y también doble radio. ¿Qué relación existe entre el campo gravitatorio de este planeta en su superficie y el de la tierra, también en su superficie?

Ejemplo 8º

Dos masas M_1 y M_2 se encuentran separadas una distancia d. Analiza si hay algún punto en el que se anule el campo gravitatorio resultante creado por ambas masas.

Ejemplo 9º

Calcula en qué punto se anula el campo gravitatorio resultante creado por dos masas de 10 t y 100 t que están a 10 Km de distancia.

Ejemplo 10º

Calcula en qué punto se anula el campo gravitatorio resultante creado por la tierra y la luna.

Ejemplo 11º

Dos cargas Q_1 y Q_2 se encuentran separadas una distancia d. Analiza si hay algún punto en el que se anule el campo eléctrico resultante creado por ambas cargas.

Ejemplo 12º

Calcula en qué punto se anula el campo eléctrico resultante creado por dos cargas de 4 μC y 6 μC situadas en el vacío a 40 cm de distancia.

Ejemplo 13º

Calcula en qué punto se anula el campo eléctrico resultante creado por dos cargas de -4 μC y 2 μC situadas en el vacío a 20 cm de distancia.

Ejemplo 14º

Considera un campo gravitatorio uniforme $\vec{g}$

a) Dibuja el vector intensidad de campo gravitatorio en tres puntos distintos de dicho campo.
b) ¿En cuál de los tres puntos es mayor el módulo del campo? ¿por qué?
c) Coloca una masa m en cada uno de los puntos y dibuja la fuerza gravitatoria que ejerce el campo sobre ella. ¿Dónde es mayor la fuerza?
d) Dibuja como serán aproximadamente las líneas del campo gravitatorio terrestre en el aula.

Ejemplo 15º

Considera un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$

a) Dibuja el vector intensidad de campo eléctrico en tres puntos distintos de dicho campo.
b) ¿En cuál de los tres puntos es mayor el módulo del campo? ¿por qué?
c) Coloca una carga positiva q en cada uno de los puntos y dibuja la fuerza eléctrica que ejerce el campo sobre ella. ¿Dónde es mayor la fuerza?
d) Coloca una carga negativa q en cada uno de los puntos y dibuja la fuerza eléctrica que ejerce el campo sobre ella. ¿Dónde es mayor la fuerza?

Ejemplo 16º

Una partícula de 20 g de masa y carga positiva q, está suspendida del techo mediante un hilo. En la zona en la que está la partícula se aplica un campo eléctrico uniforme y horizontal de 100 N/C. E estas condiciones el hilo se desvía 20º respecto a la vertical hasta alcanzar de nuevo el equilibrio.

a) Calcula el valor de la carga q.
b) ¿Qué habría ocurrido si la carga q hubiera tenido carga negativa?

6. ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA ENERGÍA POTENCIAL ELÉCTRICA

Recordemos que tanto la fuerza gravitatoria como la fuerza eléctrica son fuerzas conservativas, y por tanto, cada una de ellas tiene asociada una función energía potencial tal que cuando una masa o carga se desplace entre dos posiciones de un campo gravitatorio o eléctrico, respectivamente, el trabajo realizado por la fuerza del campo (gravitatorio o eléctrico) coincide con la variación de la energía potencias de la masa o carga entre ambas posiciones pero cambiada de signo.
En esta pregunta veremos las expresiones de ambas energías potenciales.

6.A ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

El hecho de que la fuerza gravitatoria sea conservativa permite asociarle la magnitud escalar energía potencial gravitatoria de modo que podemos calcular el trabajo realizado por aquélla entre dos puntos dados, aplicando el teorema de la energía potencial:

$$W_C = -\Delta E_p \quad [3.13]$$

Se puede demostrar que la expresión de la energía potencial de una masa testigo m en un punto del campo creado por una masa puntual M vale:

$$E_p = -G\frac{M\cdot m}{r} \quad [3.14]$$

De la expresión anterior podemos deducir los siguientes comentarios:

- La energía potencial gravitatoria entre dos masas tiene signo negativo, lo que indica que se trata de una fuerza de atracción.
- El signo – en la expresión anterior también nos indica que si la masa testigo m se aleja de la masa fuente M, la energía potencial aumenta acercándose al valor 0 para una distancia infinita, tal y como se puede ver en la gráfica siguiente.

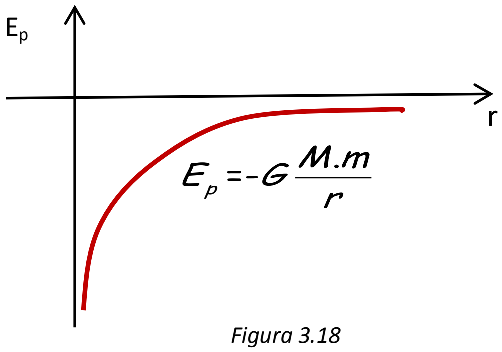


Figura 3.18

- En la gráfica anterior puede observarse que el origen de energía (lugar donde la energía vale 0) está en el infinito.
- Si la masa m se traslada desde cualquier punto P hasta el infinito y calculamos el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria en este desplazamiento obtenemos:

$$W_c\,(P \rightarrow \infty) = E_p(P) - E_p(\infty) = E_p\,(P)$$

Es decir, la energía potencial gravitatoria de una masa m en un punto P del campo puede interpretarse como el trabajo que realizaría el campo (fuerza gravitatoria) cuando la masa m se trasladase desde ese punto hasta el infinito.

- **Principio de superposición:** si el campo es creado por dos o más masas puntuales, la energía potencial gravitatoria de una masa puntual m en un punto del campo, sería la suma escalar de las energías de interacción de la masa m con cada una de las masas fuente.

$$E_p = E_{p1} + E_{p2} + \ldots + E_{pn} = -G\frac{M_1.m}{r_1} - G\frac{M_2.m}{r_2} - \ldots - G\frac{M_n.m}{r_n}$$

- Si la masa fuente es la tierra y la tratamos como una masa puntual, la energía potencial gravitatoria de cualquier masa testigo m colocada en su superficie o por encima de ella sería:

$$E_p = -G\frac{M_T.m}{R_T + h} \quad [3\text{-}15]$$

- **Validez de las expresiones de la energía potencial gravitatoria:** Las expresiones que conocemos para la energía potencial gravitatoria de una masa m situada en un punto del campo gravitatorio terrestre son dos:

$$E_p = -G\frac{M_T.m}{R_T + h} \qquad E_p = \text{mgh}$$

Pero ¿qué relación hay entre ellas? ¿dónde tienen validez?

La expresión de energía potencial gravitatoria dada por la ecuación [3.15] es válida para cualquier punto exterior a la Tierra, incluidos puntos de su superficie. Sin embargo, si la masa m se desplaza entre dos puntos muy próximos a la superficie terrestre, la variación de g es prácticamente inapreciable, pudiendo considerarse constante el campo gravitatorio en tales circunstancias. Sólo en estas condiciones será válida la expresión de la energía potencial gravitatoria terrestre m.g.h.

La primera expresión o expresión general tiene signo – y toma como origen de energía el ∞, la segunda expresión tiene signo + y toma como origen de energía la superficie terrestre. Pero ambas expresiones tienen en cuenta que la energía potencial gravitatoria aumenta al alejarnos de la tierra. Esto hace que la variación de energía potencial gravitatoria entre dos puntos próximos a la superficie terrestre coincida.

6.B ENERGÍA POTENCIAL ELÉCTRICA

El hecho de que la fuerza eléctrica sea conservativa permite asociarle la magnitud escalar energía potencial eléctrica de modo que podemos calcular el trabajo realizado por aquélla entre dos puntos dados, aplicando el teorema de la energía potencial:

$$W_C = -\Delta E_p \quad [3.16]$$

Se puede demostrar que la expresión de la energía potencial de una carga testigo q en un punto del campo creado por una carga puntual Q vale:

$$E_p = K\frac{Q \cdot q}{r} \quad [3.17]$$

De la expresión anterior podemos deducir los siguientes comentarios:

- Si las cargas que interaccionan son del mismo signo, la energía potencial eléctrica es positiva. Esto indica que la interacción entre ellas es de repulsión y también nos indica que si la carga testigo q se aleja de la carga fuente Q, la energía potencial disminuye acercándose al valor 0 para una distancia infinita, tal y como se puede ver en la gráfica siguiente.

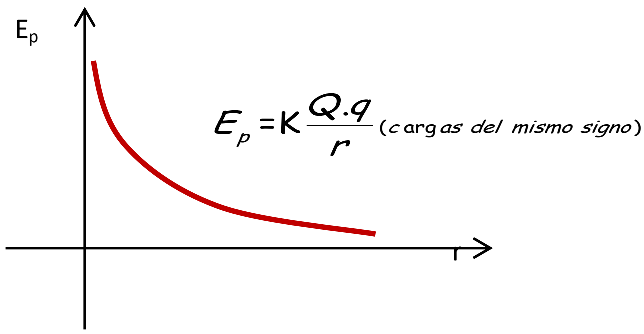


Figura 3.19

- Si las cargas que interaccionan son de distinto signo, la energía potencial eléctrica es negativa. Esto indica que la interacción entre ellas es de atracción y también nos indica que si la carga testigo q se aleja de la carga fuente Q, la energía potencial aumenta acercándose al valor 0 para una distancia infinita, tal y como se puede ver en la gráfica siguiente.

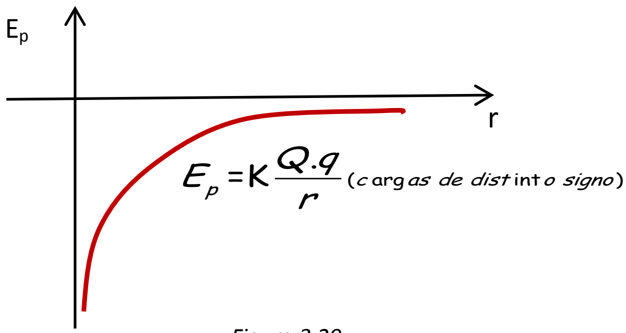


Figura 3.20

- En las dos gráficas anteriores puede observarse que el origen de energía (lugar donde la energía vale 0) está en el infinito.
- Si la masa q se traslada desde cualquier punto P hasta el infinito y calculamos el trabajo realizado por la fuerza eléctrica en este desplazamiento obtenemos:

$$W_c\ (P \rightarrow \infty) = E_p(P) - E_p(\infty) = E_p\ (P)$$

Es decir, la energía potencial eléctrica de una carga q en un punto P del campo puede interpretarse como el trabajo que realizaría el campo (fuerza eléctrica) cuando la masa q se trasladase desde ese punto hasta el infinito.

- **Principio de superposición:** si el campo es creado por dos o más cargas puntuales, la energía potencial eléctrica de una carga puntual q en un punto del campo, sería la suma escalar de las energías de interacción de la carga q con cada una de las cargas fuente.

$$E_p = E_{p1} + E_{p2} + \ldots + E_{pn} = K\frac{Q_1 \cdot q}{r_1} + K\frac{Q_2 \cdot q}{r_2} + \ldots + K\frac{Q_n \cdot q}{r_n}$$

Ejemplo 17º

Considera el campo creado por dos cargas puntuales Q_1 y Q_2 de 4 y -5 µC cada una están en el vacío situadas respectivamente en el origen de coordenadas y en el punto (0,6) m.

a) Calcula la energía potencial eléctrica que tendría una tercera carga q de 2 µC colocada en el punto A = (10,0) m
b) Si la carga q se traslada desde el punto A anterior al punto B = (0, -3) m, ¿aumenta o disminuye su energía potencial eléctrica?
c) Calcula el trabajo que realizaría el campo eléctrico sobre la carga q al desplazarse de A a B. ¿Qué indica el signo de este trabajo?.

Ejemplo 18º

Imagina que desde una altura de 10.000 Km se deja caer hacia la tierra a una masa m.

a) Despreciando los efectos del rozamiento, analiza energéticamente como sería su movimiento de caída hasta llegar a la superficie terrestre.
b) Calcula la velocidad con la que llegaría a la superficie.

7. POTENCIAL GRAVITATORIO Y POTENCIAL ELÉCTRICO

7. A POTENCIAL GRTAVITATORIO.

Se denomina **potencial gravitatorio** V en un punto del campo gravitatorio a la energía potencial gravitatoria que posee la unidad de masa situada en dicho punto, es decir, la energía potencial gravitatoria que tendría una masa de 1 Kg colocada en dicho punto:

$$\boxed{V = \frac{E_p}{m}} \quad [3.18]$$

De esta definición podemos concluir que si conocemos el valor del potencial gravitatorio en un punto del campo, podemos conocer la energía potencial gravitatoria de una masa testigo m al colocarla en dicho punto, bastaría con multiplicar la masa testigo m por el valor del potencial.

$$\boxed{E_p = m.V} \quad [3.19]$$

Para el campo gravitatorio creado por una masa puntual M, el potencial gravitatorio en un punto se puede expresar:

$$\boxed{V = \frac{E_p}{m} = \frac{-G\frac{M.m}{r}}{m} = -G\frac{M}{r}} \quad [3.20]$$

De la expresión anterior podemos deducir las siguientes conclusiones:

- El potencial gravitatorio es una magnitud física escalar que se mide en unidades de energía dividido entre unidades de masa, y que en el sistema internacional de unidades sería:

  $$\frac{J}{Kg}$$

  Esta unidad no recibe ningún nombre especial.

- El potencial gravitatorio creado por una masa puntual en cualquier punto de su campo tiene signo negativo y aumenta al alejarnos de la masa fuente acercándose al valor 0 para una distancia infinita, tal y como se puede ver en la gráfica siguiente.

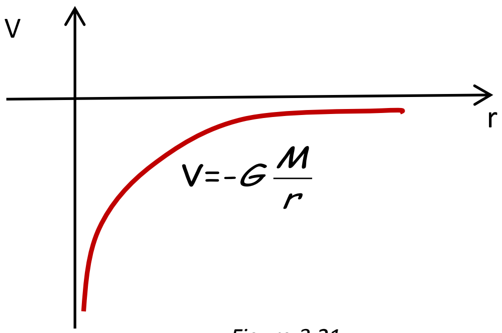


Figura 3.21

- Todos los puntos que equidistan de la masa fuente tienen el mismo valor del potencial, es decir todos los puntos de una esfera con centro en la masa fuente M y con radio r tienen el mismo valor del potencial y forman lo que se denomina una superficie equipotencial.

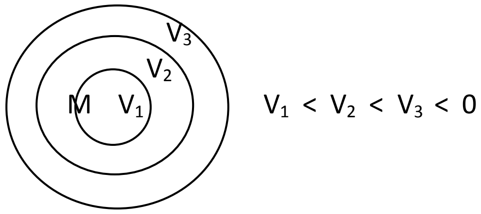


Figura 3.22

- La diferencia de potencial (ddp) gravitatorio entre dos puntos del campo gravitatorio creado por una masa puntual M valdría:

$$V_B - V_A = \left(-G\frac{M}{r_B}\right) - \left(-G\frac{M}{r_A}\right) = -GM\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) = GM\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

- El potencial gravitatorio en un punto P del campo puede interpretarse como el trabajo que realizaría el campo (fuerza gravitatoria) cuando una masa de 1 Kg se trasladase desde ese punto hasta el infinito.
- **Principio de superposición:** si el campo es creado por dos o más masas puntuales, el potencial gravitatorio en un punto del campo, sería la suma escalar de los potenciales de cada una de las masas fuente.

$$V_p = V_{p1} + V_{p2} + \ldots + V_{pn} = -G\frac{M_1}{r_1} - G\frac{M_2}{r_2} - \ldots - G\frac{M_n}{r_n}$$

- Si la masa fuente es la tierra y la tratamos como una masa puntual, el potencial gravitatoria de creado por la tierra en un punto cualquiera de su superficie o por encima de ella sería:

$$V = -G\frac{M_T}{R_T + h} \quad [3.21]$$

7. B POTENCIAL ELÉCTRICO.

Igual que ocurre con el campo gravitatorio, el carácter conservativo del campo eléctrico permite asociar a la fuerza eléctrica una magnitud escalar a la que se denomina **potencial eléctrico** V en un punto del campo eléctrico y que se define como la energía potencial eléctrica que posee la unidad de carga positiva situada en dicho punto, es decir, la energía potencial eléctrica que tendría una carga de +1 C colocada en dicho punto:

$$\boxed{V = \frac{E_p}{q}} \quad [3.22]$$

De esta definición podemos concluir que si conocemos el valor del potencial eléctrico en un punto del campo, podemos conocer la energía potencial eléctrica de una carga testigo q al colocarla en dicho punto, bastaría con multiplicar la carga testigo q por el valor del potencial.

$$\boxed{E_p = q.V} \quad [3.23]$$

Para el campo eléctrico creado por una carga puntual Q, el potencial eléctrico en un punto se puede expresar:

$$\boxed{V = \frac{E_p}{q} = \frac{K\frac{Q.q}{r}}{q} = K\frac{Q}{r}} \quad [3.24]$$

De la expresión anterior podemos deducir las siguientes conclusiones:

- El potencial eléctrico es una magnitud física escalar que se mide en unidades de energía dividido entre unidades de carga, y que en el sistema internacional de unidades sería:

$$\frac{J}{C} = Voltio(V)$$

  Esta unidad recibe el nombre de voltio.
- El potencial eléctrico creado por una carga puntual Q en cualquier punto de su campo tiene signo positivo si la carga es positiva y disminuye al alejarnos de ella acercándose al valor 0 para una distancia infinita, y tiene signo negativa si la carga fuente es negativa y aumenta al alejarnos de la ella acercándose al valor 0 para una distancia infinita, tal y como se puede ver en las gráficas siguientes.

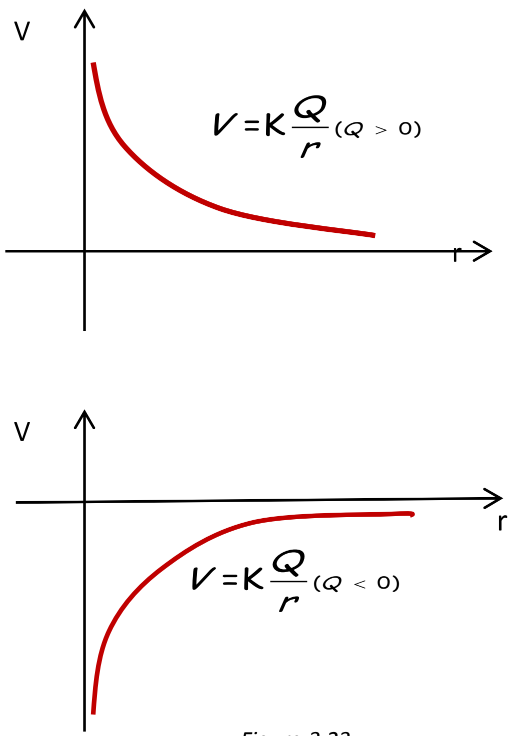
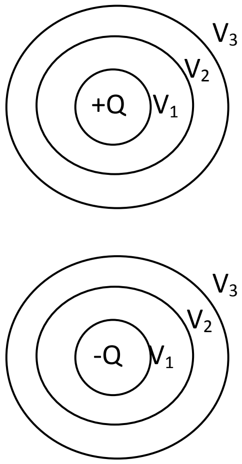


Figura 3.23

- La diferencia de potencial (ddp) eléctrica entre dos puntos del campo eléctrico creado por una carga puntual Q valdría:

$$V_B - V_A = K\frac{Q}{r_B} - K\frac{Q}{r_A} = KQ\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

- Todos los puntos que equidistan de la carga fuente tienen el mismo valor del potencial, es decir todos los puntos de una esfera con centro en la carga fuente Q y con radio r tienen el mismo valor del potencial eléctrico y forman lo que se denomina una superficie equipotencial.



$V_1 > V_2 > V_3 > 0$

$V_1 < V_2 < V_3 < 0$

Figura 3.24

- El potencial eléctrico en un punto P del campo puede interpretarse como el trabajo que realizaría el campo (fuerza eléctrica) por unidad de carga positiva, es decir, cuando una carga de +1 C se trasladase desde ese punto hasta el infinito.
- **Principio de superposición:** si el campo es creado por dos o más cargas puntuales, el potencial eléctrico en un punto del campo, sería la suma escalar de los potenciales de cada una de las cargas fuente.

$$V_p = V_{p1} + V_{p2} + \ldots + V_{pn} = K\frac{Q_1}{r_1} + K\frac{Q_2}{r_2} + \ldots + K\frac{Q_n}{r_n}$$

Ejemplo 19º

Dos masas iguales de 10 t se encuentran en las posiciones (-4,0) m y (0.4) m.

a) Calcula el potencial gravitatorio resultante creado por ambas masas en el origen de coordenadas.
b) Calcula la energía potencial gravitatoria que tendría una masa de 100 Kg colocada en el origen de coordenadas.

Ejemplo 20º

Dos cargas puntuales de -2 y 6 nC (1nC = 10^{-9} C) cada una, se encuentran en el vacío respectivamente en las posiciones (3,0) y (-3,0) m.

a) Calcula el potencial eléctrico resultante en el punto P = (0, -4) m creado por ambas cargas.
b) ¿Dónde tendría más energía potencial eléctrica una carga testigo q, en el punto P o en el origen de coordenadas?

Ejemplo 21º

Dos masas puntuales M_1 y M_2 se encuentran a una distancia d. Analiza si se anulará o no el potencial gravitatorio resultante en algún punto del campo creado por ambas masas.

Ejemplo 22º

Dos cargas puntuales Q_1 y Q_2 se encuentran a una distancia d. Analiza si se anulará o no el potencial eléctrico resultante en algún punto del campo creado por ambas cargas.

Ejemplo 23º

Dos cargas puntuales $Q_1 = 3$ nC y $Q_2 = 6$ nC se encuentran separadas 20 cm.

a) Calcula, si existe, el punto o puntos dónde se anula el potencial eléctrico resultante creado por las dos cargas.
b) Calcula el punto dónde se anula el campo eléctrico resultante creado por las dos cargas.

Ejemplo 24º

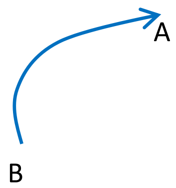
Dos cargas puntuales $Q_1 = -3$ nC y $Q_2 = 9$ nC se encuentran separadas 40 cm.

a) Calcula, si existe, el punto o puntos de la recta que une a ambas cargas dónde se anula el potencial eléctrico resultante creado por las dos cargas.
b) ¿Existirán puntos del campo, que no pertenezcan a la recta que une a ambas cargas, dónde se anule el potencial eléctrico resultante creado por las dos cargas?
c) Calcula el punto dónde se anula el campo eléctrico resultante creado por las dos cargas.

8. TRABAJO Y DIFERENCIA DE POTENCIAL GRAVITATORIO Y ELÉCTRICO

8. A TRABAJO Y DIFERENCIA DE POTENCIAL GRAVITATORIO.

Consideremos dos puntos A y B de un campo gravitatorio. Cada uno de estos puntos tendrá un valor definido para el potencial gravitatorio V_A y V_B. Supongamos que una masa testigo m se traslada desde A hasta B. Por el teorema de la energía potencial sabemos que el trabajo que realiza el campo gravitatorio (fuerza conservativa) sobre la masa m en este desplazamiento coincide con la variación de energía potencial gravitatoria de la masa m entre ambas posiciones pero cambiada de signo:



$$W_{A campo}^{B} = -\Delta E_p = E_p(A) - E_p(B)$$

Y si tenemos en cuenta la relación entre el potencial gravitatorio y la energía potencial $E_p = mV$ podemos escribir:

$$W_{A campo}^{B} = -\Delta E_p = -[E_{pB} - E_{pA}] = -[mV_B - mV_A] = -m[V_B - V_A] = -m\Delta V$$

Esta ecuación nos permite calcular el trabajo del campo a partir de la diferencia de potencial:

$$\boxed{W_{A campo}^{B} = -m[V_{pB} - V_{pA}] = -m\Delta V} \quad [3.25]$$

Si llamamos trabajo externo o trabajo que hay que realizar al trabajo realizado por una fuerza opuesta a la del campo y tenemos en cuenta que ambos trabajos son de signo opuesto, obtenemos:

$$\boxed{W_{A externo}^{B} = -W_{A campo}^{B} = m[V_{pB} - V_{pA}] = m\Delta V} \quad [3.26]$$

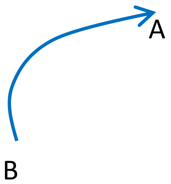
Por otro lado, si despejamos en cualquiera de las dos ecuaciones anteriores obtenemos La interpretación física de la diferencia de potencial gravitatoria entre dos puntos de un campo:

$$\boxed{\Delta V = V_B - V_A = \frac{-W_{A campo}^{B}}{m} = \frac{W_{A externo}^{B}}{m}} \quad [3.27]$$

La diferencia de potencial gravitatoria entre dos puntos de un campo es el trabajo realizado por el campo por unidad de masa pero cambiado de signo, o bien, el trabajo externo por unidad de masa.

8. B TRABAJO Y DIFERENCIA DE POTENCIAL ELÉCTRICO.

Consideremos dos puntos A y B de un campo eléctrico. Cada uno de estos puntos tendrá un valor definido para el potencial eléctrico V_A y V_B. Supongamos que una carga testigo q se traslada desde A hasta B. Por el teorema de la energía potencial sabemos que el trabajo que realiza el campo eléctrico (fuerza conservativa) sobre la carga q en este desplazamiento coincide con la variación de energía potencial eléctrica de la carga q entre ambas posiciones pero cambiada de signo:



$$W_{A campo}^{B} = -\Delta E_p = E_p(A) - E_p(B)$$

Y si tenemos en cuenta la relación entre el potencial eléctrico y la energía potencial $E_p = qV$ podemos escribir:

$$W_{A campo}^{B} = -\Delta E_p = -[E_{pB} - E_{pA}] = -[qV_B - qV_A] = -q[V_B - V_A] = -q\Delta V$$

Esta ecuación nos permite calcular el trabajo del campo a partir de la diferencia de potencial:

$$\boxed{W_{A campo}^{B} = -q[V_{pB} - V_{pA}] = -q\Delta V} \quad [3.28]$$

Si llamamos trabajo externo o trabajo que hay que realizar al trabajo realizado por una fuerza opuesta a la del campo y tenemos en cuenta que ambos trabajos son de signo opuesto, obtenemos:

$$\boxed{W_{A externo}^{B} = -W_{A campo}^{B} = q[V_{pB} - V_{pA}] = q\Delta V} \quad [3.29]$$

Por otro lado, si despejamos en cualquiera de las dos ecuaciones anteriores obtenemos La interpretación física de la diferencia de potencial eléctrica entre dos puntos de un campo:

$$\boxed{\Delta V = V_B - V_A = \frac{-W_{A campo}^{B}}{q} = \frac{W_{A externo}^{B}}{q}} \quad [3.30]$$

La diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos de un campo es el trabajo realizado por el campo por unidad de carga positiva pero cambiado de signo, o bien, el trabajo externo por unidad de carga positiva.

9. RELACIÓN ENTRE EL POTENCIAL ELÉCTRICO Y EL CAMPO ELÉCTRICO

Cuando una carga q se coloca en el seno de un campo eléctrico $\vec{E}$, la carga se ve sometida a una fuerza eléctrica cuyo valor viene dado por $\vec{F} = q\vec{E}$.

Esta fuerza realiza un trabajo a medida que la carga se desplaza por la acción de ella. El trabajo realizado por la fuerza eléctrica cuando la carga se desplaza entre dos posiciones A y B del campo eléctrico, y teniendo en cuenta que la fuerza eléctrica es una fuerza conservativa, viene dado por la expresión:

$$W_{Acampo}^{B} = -\Delta E_p = -[E_{pB} - E_{pA}]$$

Teniendo en cuenta la relación entre la energía potencial eléctrica de una carga en un punto y el potencial eléctrico en dicho punto, $E_p = qV$, podemos escribir el trabajo de la fuerza eléctrica como:

$$W_{Acampo}^{B} = -\Delta E_p = -[E_{pB} - E_{pA}] = -[qV_B - qV_A] = -q[V_B - V_A] = -q\Delta V$$

Si despejamos la diferencia de potencial eléctrico en la expresión anterior, aplicamos la definición de trabajo realizado por una fuerza y tenemos en cuenta la definición del vector intensidad de campo eléctrico, obtenemos la relación buscada:

$$\Delta V = V_B - V_A = \frac{-W_{AFza.Eléctrica}^{B}}{q} = \frac{-\int_A^B \vec{F}_{eléc.} . d\vec{r}}{q} = -\int_A^B \vec{E} . d\vec{r}$$

$$\boxed{\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} . d\vec{r}} \quad [3.31\text{-}A]$$

La diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos de un campo eléctrico coincide con el trabajo realizado por el vector intensidad de campo eléctrico entre ambos puntos pero cambiado de signo.

IMPORTANTE:

1º.- Si el campo eléctrico es uniforme y el desplazamiento se hace en la misma dirección y sentido que las líneas del campo eléctrico, podemos obtener una sencilla expresión:

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} . d\vec{r} = -\int_A^B E . dr . \cos 0° = -E\int_A^B dr = -E.d$$

Siendo d la distancia que separa, en la dirección del campo, a ambos puntos.

$$\boxed{\Delta V = V_B - V_A = -E.d} \quad [3.31\text{-}B]$$

La diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos de un <u>campo eléctrico uniforme</u> coincide con el producto del módulo del vector intensidad de campo eléctrico y la distancia que separa, en la dirección del campo, dichos puntos cambiado de signo.

2º.- Esta misma relación se puede obtener para el campo gravitatorio y la diferencia de potencial gravitatorio:

$$\boxed{\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{g}\cdot d\vec{r}} \quad \text{y si es } \vec{g} \text{ uniforme} \quad \boxed{\Delta V = V_B - V_A = -g.d}$$

Ejemplo 25º

Dos cargas puntuales de -2 y 6 nC (1nC = 10^{-9} C) cada una, se encuentran en el vacío respectivamente en las posiciones (3,0) y (-3,0) m.

a) Calcula la diferencia de potencial eléctrico creado por las dos cargas entre los puntos A = (1, 4) m y B = (0,0) m.
b) Calcula el trabajo realizado por el campo y el trabajo externo cuando una carga q = 10 C se traslade del punto A al punto B.

Ejemplo 26º

Un electrón inicialmente en reposo es acelerado por una diferencia de potencial de 10 KV.

a) Analiza las transformaciones energéticas del electrón a lo largo de su movimiento.
b) Calcula la velocidad adquirida por el electrón una vez acelerado.

Ejemplo 27º

Se denomina electronvoltio (eV) a la energía cinética que adquiere un electrón cuando, estando en reposo, es acelerado por una diferencia de potencial de 1 V.

a) Calcula la energía cinética que adquiere el electrón en estas condiciones.
b) ¿A cuántos julios equivale 1 eV?

Ejemplo 28º

Repite el problema anterior suponiendo que es un protón el que se acelera.

10. SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN CAMPO DE FUERZAS CONSERVATIVO

9. A SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES EN EL CAMPO GRAVITATORIO

Recordemos que tanto el campo gravitatorio como el campo eléctrico son campos vectoriales de fuerzas y por tanto se pueden representar gráficamente mediante las líneas de campo o líneas de fuerza que son……

Pero, también sabemos, que ambos campos son campos de fuerzas conservativos, y esto nos permite completar su representación gráfica mediante la introducción de un nuevo concepto: el de superficies equipotenciales.

Se denominan superficies equipotenciales en un campo de fuerzas conservativo, a las superficies imaginarias formadas por todos aquellos puntos que tienen el mismo valor del potencial (gravitatorio o eléctrico).

Por ejemplo, si se trata del campo gravitatorio creado por una masa puntual M, sabemos que el valor del potencial en cualquier punto de su campo vale:

$$V = -G\frac{M}{r}$$

que, como ya dijimos en una pregunta anterior, los puntos que tienen el mismo valor del potencial gravitatorio son los que equidistan de la masa fuente, es decir, todos los puntos situados en una esfera concéntrica con la masa fuente. Por tanto, las superficies equipotenciales del campo gravitatorio creado por una masa puntual M son esferas concéntricas con ella, tal y como se observa en la figura siguiente:

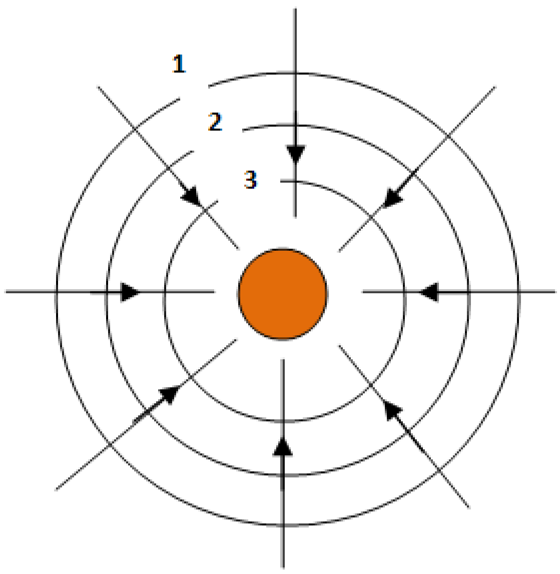


Figura 3.25

En este esquema, observamos que las líneas de campo gravitatorio son perpendiculares a las superficies equipotenciales y se dirigen en el sentido de máximo decrecimiento del potencial gravitatorio, es decir, $V_1 > V_2 > V_3$.

Si se trata del campo eléctrico creado por una carga puntual Q, podemos afirmar también que las superficies equipotenciales son esferas concéntricas con la carga fuente:

$$V = K\frac{Q}{r}$$

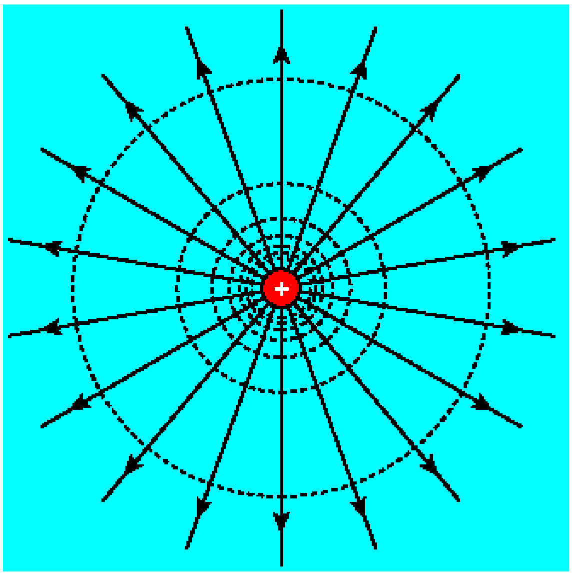


Figura 3.26

Si la carga fuente es negativa lo único que cambiaría sería el sentido de las líneas de fuerza.

Observa que, tanto si la carga fuente es positiva como si es negativa, las líneas de fuerza son perpendiculares a las superficies equipotenciales y siempre van dirigidas hacia los potenciales decrecientes.

De la definición de superficies equipotenciales, podemos deducir lo siguiente:

- Dos superficies equipotenciales diferentes nunca se cortarán, es decir, no puede haber un mismo punto con dos valores diferentes del potencial.

- Cuando una masa o una carga testigo se mueva entre dos puntos de una superficie equipotencial, su energía potencial no cambia, y por tanto, no se realiza trabajo sobre ella.

$$E_p = mV \Rightarrow \quad W_{A campo}^{B} = -W_{A externo}^{B} = -\Delta E_p = -m\Delta V = 0$$

$$E_p = qV \Rightarrow \quad W_{A campo}^{B} = -W_{A externo}^{B} = -\Delta E_p = -q\Delta V = 0$$

En el caso del campo gravitatorio, esto es lo que le ocurre a los satélites en su movimiento de rotación alrededor de los planetas, que lo hacen en una órbita que pertenece a la misma superficie equipotencial y por tanto mantienen su movimiento de rotación sin consumir energía.

- Las superficies equipotenciales y las líneas de fuerza son siempre perpendiculares en cada uno de los puntos del campo, y además, el potencial decrece en el sentido del campo.

- Del apartado anterior podemos concluir que, si conocemos la forma de las superficies equipotenciales, podemos deducir la forma que tendrán las líneas de fuerza, y a la inversa. Y esto podemos aplicarlo a un campo de fuerzas uniforme, ya sea gravitatorio o eléctrico. Como las líneas de fuerza de un campo uniforme son líneas paralelas e igualmente espaciadas, podemos deducir que las superficies equipotenciales serán planos perpendiculares a las líneas de fuerza y paralelos entre sí. En la figura siguiente se ha representado a un campo eléctrico uniforme:

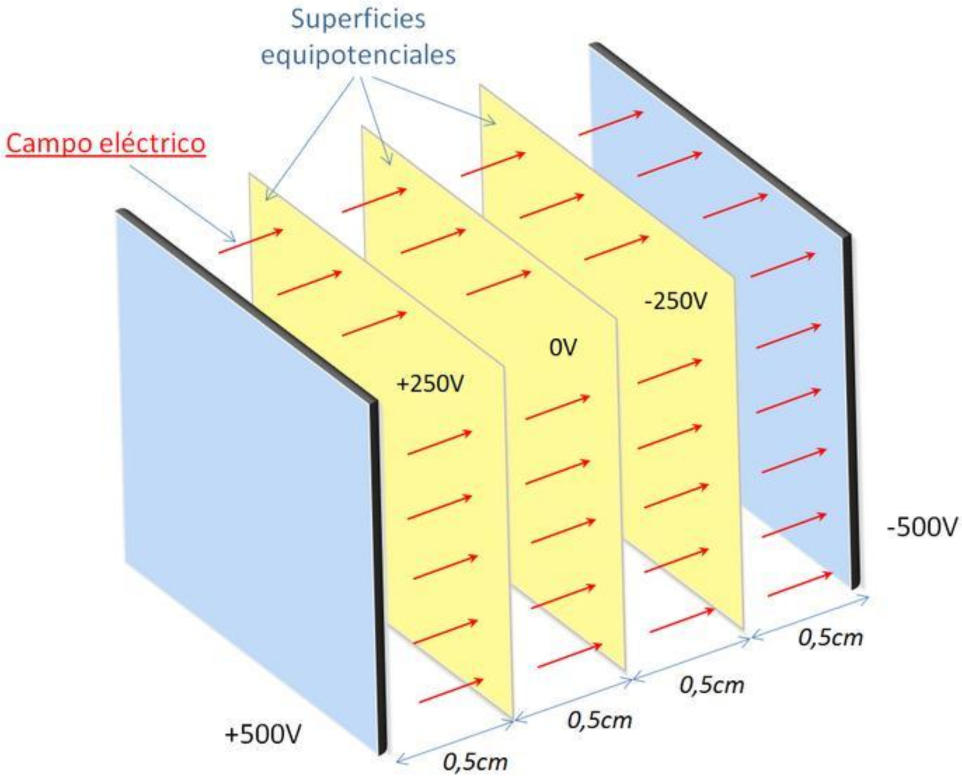


Figura 3.27

Observa como las líneas de fuerza se dirigen hacia los potenciales decrecientes.

11. CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE

A continuación, vamos a realizar un estudio elemental del campo gravitatorio terrestre a partir de las generalidades descritas hasta ahora sobre el campo gravitatorio creado por masas puntuales. Dicho estudio también sería válido para el campo gravitatorio creado por cualquier otro cuerpo celeste.

11.1 FUERZA GRAVITATORIA Y ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA TERRESTRES

Suponiendo que la Tierra fuese una esfera perfecta, se puede demostrar que la fuerza gravitatoria que aquélla ejerce sobre cualquier cuerpo de masa m situado en sus proximidades, viene dada por la misma expresión que proporciona la ley de gravitación universal:

$$\vec{F} = -G\frac{M_T \cdot m}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

donde M_T es la masa de la Tierra, r es la distancia entre el centro de la Tierra y el punto en que se encuentra la masa m, y $\overrightarrow{u_r}$ es un vector unitario con origen en el centro de la Tierra y dirigido hacia la posición de m.

Esta fuerza, también denominada **peso**, tiene las mismas características que la fuerza gravitatoria ente masas puntuales pudiendo expresarse su módulo como:

$$F = G\frac{M_T \cdot m}{r^2}$$

Si R_T es el radio de la Tierra y h la altura a la que se sitúa m sobre la superficie terrestre, podemos escribir $r = R_T + h$.

Por ser la fuerza gravitatoria conservativa, cualquier cuerpo de masa m situado a una altura h sobre la superficie terrestre poseerá una energía potencial gravitatoria, cuya expresión vendrá dada a partir de la ecuación [3.15]:

$$E_p = -G\frac{M_T \cdot m}{r} \Rightarrow E_p = -G\frac{M_T \cdot m}{R_T + h} \quad [3.31]$$

donde hemos considerado el infinito como origen de energía potencial.

11.2 INTENSIDAD DE CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE

La intensidad de campo gravitatorio terrestre o aceleración de la gravedad en cualquier punto exterior a la Tierra tiene la misma expresión que en el caso de una masa puntual. Así pues, podemos escribir:

$$\vec{g} = -G\frac{M_T}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

cuyo módulo vendrá dado por:

$$g = G\frac{M_T}{r^2}$$

Podemos transformar la expresión anterior en otra equivalente que nos proporciona como varía la gravedad terrestre con la altura. Para ello escribimos en la expresión anterior $r = R_T + h$:

$$g = G\frac{M_T}{(R_T+h)^2} \quad [3.32]$$

Si llamando g_0 a la intensidad de campo gravitatorio en la superficie terrestre (h = 0):

$$g_0 = G\frac{M_T}{{R_T}^2} \Rightarrow g_0 \cdot R_T^2 = G \cdot M_T$$

Sustituyendo en la ecuación [3.32]:

$$g = g_0\frac{R_T^2}{(R_T + h)^2}$$

Si dividimos por R_T^2 tanto su numerador como su denominador, se convierte en la expresión:

$$g = \frac{g_0}{(1 + \frac{h}{R_T})^2}$$

que nos indica la variación de g con la altura y en relación a su valor en la superficie terrestre g_0.

11.3 ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA TERRESTRE

$$E_p = -G\frac{M_T.m}{R_T + h} \qquad E_p = mgh$$

La expresión de energía potencial gravitatoria dada por la primera ecuación es válida para cualquier punto exterior a la Tierra, incluidos puntos de su superficie. Sin embargo, si la masa m se desplaza entre dos puntos muy próximos a la superficie terrestre, la variación de g es prácticamente inapreciable, pudiendo considerarse constante el campo gravitatorio en tales circunstancias. Sólo en estas condiciones será válida la segunda expresión de la energía potencial gravitatoria terrestre

11.4 POTENCIAL GRAVITATORIO TERRESTRE

Definimos el potencial gravitatorio terrestre, V, en un punto como la energía potencial gravitatoria que posee la unidad de masa situada en dicho punto. Por tanto:

$$V = \frac{E_p}{m}$$

Si tenemos en cuenta la ecuación correspondiente a la energía potencial dada en el apartado anterior, el potencial gravitatorio en un punto situado a una altura h de la superficie terrestre será:

$$V = -G\frac{M_T}{R_T+h}$$

11.5 MOVIMIENTO DE SATÉLITES: VELOCIDAD, PERIODO Y ENERGÍA ORBITAL

En este apartado describiremos el movimiento de satélites alrededor de la Tierra. En todo los casos, supondremos que el satélite describe una órbita circular de radio r a una altura h de la superficie terrestre. Lo que se deduzca en este punto puede generalizarse a cualquier satélite orbitando alrededor de su planeta, y a cualquier planeta orbitando alrededor del sol.

Velocidad orbital

Es la velocidad lineal con la que un satélite se traslada alrededor de la Tierra describiendo una órbita cerrada. Suponiendo que el satélite de masa m describe un MCU, la fuerza gravitatoria terrestre proporciona la fuerza centrípeta necesaria para mantener estable la órbita del satélite (fig. 1.5). Aplicando el principio fundamental de la dinámica al satélite obtenemos la velocidad de orbita:

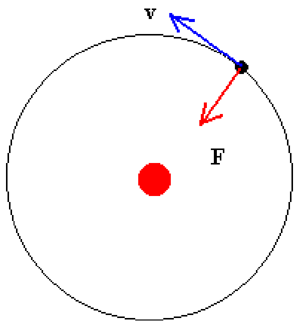


Figura 1.5

$$F_c = m.a_c \Rightarrow \quad G\frac{M_T.m}{r^2} = m\frac{v_{orb}^2}{r} \Rightarrow \quad v_{orb} = \sqrt{G\frac{M_T}{r}} = \sqrt{G\frac{M_T}{R_T+h}}$$

$$\boxed{v_{orb} = \sqrt{G\frac{M_T}{r}} = \sqrt{G\frac{M_T}{R_T+h}}} \qquad [3.34]$$

donde r = R_T + h es el radio de la órbita.

En la expresión anterior podemos deducir lo siguiente:

- La velocidad orbital de un satélite es independiente de su masa. Sólo depende de la masa que crea el campo, la tierra en este caso, y del radio de la órbita.
- Cada órbita tiene un valor definido para la velocidad a la que se puede mover el satélite y esta velocidad disminuye con la raíz cuadrada del radio orbital.

Periodo orbital

Se denomina periodo orbital de un satélite al tiempo que tarda el satélite en completar una vuelta. Para deducir su expresión utilizamos la expresión de la velocidad orbital obtenida en el punto anterior y la expresión que relaciona a esta con la velocidad angular:

$$\left.\begin{array}{r} v = \sqrt{G\dfrac{M_T}{r}} \\ v = w.r = \dfrac{2\pi}{T}r \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{G\frac{M_T}{r}} = \frac{2\pi}{T}r \Rightarrow \quad G\frac{M_T}{r} = \frac{4\pi^2}{T^2}r^2 \Rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_T}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_T}}} \quad [3.35]$$

De la expresión anterior podemos deducir lo siguiente:

- El periodo orbital no depende de la masa del cuerpo que orbita. Sólo depende de la masa fuente y del radio orbital.
- Cuanto más alejado este el satélite orbitando, más tiempo tardará en completar una vuelta.
- Esta expresión también se puede utilizar para calcular el radio orbital de un satélite si conocemos su periodo orbital.
- Podemos observar que, suponiendo que el movimiento orbital es un movimiento circular, hemos obtenido la TERCERA LEY DE KEPLER:

$$\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_T} = \frac{4\pi^2}{GM_T}r^3 = cte.r^3}$$

Energía orbital

Llamada también energía de ligadura, E, es la energía total o mecánica que posee un satélite en su órbita estable alrededor de la Tierra. Esta energía es tanto cinética como potencial gravitatoria. Por tanto:

$$E = E_c + E_p \Rightarrow E = \frac{1}{2}m \cdot v^2 - G\frac{M_T \cdot m}{r} \Rightarrow E = \frac{1}{2}m \cdot \frac{G \cdot M_T}{r} - G\frac{M_T \cdot m}{r}$$

Sacando factor común, finalmente podemos escribir:

$$\boxed{E_m = -\frac{1}{2}G\frac{M_T.m}{r}} \quad [3.36]$$

De la expresión anterior podemos deducir lo siguiente:

- Observamos que la energía orbital es negativa lo que significa que el satélite en órbita alrededor de la Tierra es un cuerpo ligado al campo gravitatorio terrestre al que hay que comunicarle energía para que salga de su influencia.
- También destacamos el hecho de que al aumentar el radio orbital la energía orbital aumenta haciéndose menos negativa, es decir, acercándose a cero. Esto es debido a que la interacción gravitatoria entre las dos masas va disminuyendo al aumentar la distancia de interacción entre ellas.
- El hecho de que la energía orbital aumente al aumentar el radio orbital, también implica que para que un satélite cambie a una órbita de mayor radio será necesario comunicarle una cantidad de energía igual a la diferencia entre las energías orbitales correspondientes.

11.6 VELOCIDAD DE ESCAPE

Es la mínima velocidad, v_e, que hay que suministrar a un satélite situado en un punto del campo gravitatorio terrestre para que salga de la influencia de éste. Para ello la energía total que debe poseer el satélite debe ser, al menos, nula:

$$E = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m \cdot v_e^2 - G \frac{M_T \cdot m}{r} = 0 \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2\,G \cdot M_T}{r}}$$

$$\boxed{v_e = \sqrt{2G \frac{M_T}{r}} = \sqrt{2G \frac{M_T}{R_T + h}}} \quad [3.37]$$

En estas condiciones, el satélite saldría del campo gravitatorio terrestre alcanzando el infinito sin energía cinética, pudiéndose demostrar que su trayectoria es una parábola.

En el caso de que el satélite sea lanzado desde la superficie terrestre (h = 0), la velocidad de escape tendrá la expresión:

$$v_e = \sqrt{\frac{2\,G \cdot M_T}{R_T}}$$

Que vale aproximadamente unos 11 Km/s

Si la velocidad comunicada al satélite fuese mayor que la de escape, su energía total sería positiva y alcanzaría el infinito con cierta energía cinética, demostrándose en este caso que el satélite seguiría una hipérbola.

Ejemplo 29º

La Estación Espacial Internacional (ISS) está orbitando aproximadamente a 400 Km de altura.

a) Calcula la velocidad con la que orbita.
b) Calcula la velocidad de escape de un capsula si es lanzada desde la estación espacial.

Ejemplo 30º

Se desea poner a un satélite en órbita geoestacionaria. ¿A qué altura habría que situarlo? (se denomina órbita geoestecionaria a aquella órbita a la que le corresponde un periodo orbital igual al tiempo que tarda la tierra en dar una vuelta completa sobre sí misma, es decir, 24 h).

Ejemplo 31º

Un satélite artificial de 1 t orbita en torno a la tierra a una altura de 5000 Km. ¿Qué energía extra habría que comunicarle al satélite para que pase a orbitar a una altura doble de la que está?

Ejemplo 32º

Se quiere lanzar desde la tierra a un satélite de 500 Kg para que orbite a una altura de 1000 Km. ¿Qué energía habría que comunicarle al satélite para ponerlo en órbita?

12. INGRAVIDEZ

Se denomina ingravidez a la ausencia de gravedad, es decir, a la ausencia de campo gravitatorio.

Si analizamos la expresión del campo gravitatorio creado por una masa puntual:

$$\boxed{\vec{g} = -G\frac{M_1}{r^2}\vec{u}_r} \text{ (vector campo)} \quad \boxed{g = G\frac{M_1}{r^2}} \text{ (módulo del vector campo)}$$

podemos ver que la ingravidez se alcanzaría teóricamente en el infinito. En la práctica se alcanzaría en aquellas zonas donde el campo sea lo suficientemente débil como para no apreciarse.

En el caso de la tierra, considerada como una masa puntual, la expresión quedaría:

$$\boxed{\vec{g}_T = -G\frac{M_T}{r^2}\vec{u}_r - G\frac{M_T}{(R_T+h)^2}\vec{u}_r =} \text{ (vector campo)}$$

$$\boxed{g_T = G\frac{M_T}{r^2} = G\frac{M_T}{(R_T+h)^2}} \text{ (módulo del vector campo)}$$

Pero, ¿es esto lo que les ocurre a los astronautas en la Estación Espacial Internacional (ISS) o en los transbordadores espaciales? La respuesta es que no, puesto que estos ingenios están muy cerca de la tierra, a menos de 500 Km de altura, y allí la gravedad, como fácilmente puedes comprobar, es sólo algo inferior a $g_0 = 9{,}8\ m/s^2$.

Entonces, ¿qué es lo que sucede para que los astronautas estén flotando en el aire? Lo que sucede es que los astronautas se encuentran, al igual que sus naves, en movimiento circular alrededor de la tierra, y la fuerza gravitatoria (su peso) se está empleando en proporcionarles la aceleración centrípeta que necesitan para mantenerse en órbita. Esto produce una pérdida aparente de peso similar a lo que ocurre en un ascensor cuando inicia la bajada o se descuelga, ó cuando salta al vacío un paracaidista antes de abrir su paracaídas. Por tanto se trata de una ingravidez aparente que aparece siempre que se esté en caída libre.

13. FLUJO DE UN CAMPO GRAVITATORIO Y FLUJO DE UN CAMPO ELÉCTRICO

13.1 FLUJO DE UN CAMPO GRAVITATORIO

Cuando una superficie **S** se coloca en el interior de un campo gravitatorio $\vec{g}$, esta superficie es atravesada por un cierto nº de líneas de fuerza. En Física existe una magnitud física cuyo valor es directamente proporcional al nº de líneas de fuerza que atraviesa una determinada superficie.

Supongamos un campo gravitatorio uniforme $\vec{g}$ y una superficie plana **S**, colocada en el interior de dicho campo. Se define el **flujo gravitatorio** del campo $\vec{g}$, a través de la superficie plana S, como el producto escalar de los vectores campo gravitatorio $\vec{g}$ y superficie $\vec{S}$.

$$\boxed{\phi = \vec{g}.\vec{S} = \left|\vec{g}\right|.\left|\vec{S}\right|.\cos(\vec{g},\vec{S})} \quad [3.38]$$

El vector superficie, $\vec{S}$,es un vector perpendicular a la superficie y cuyo módulo coincide con el área de la misma.

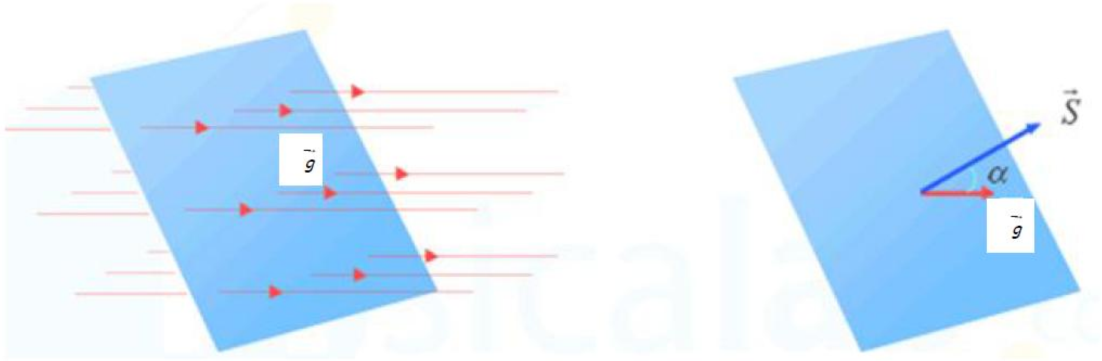


Figura 3.28

De la definición de flujo gravitatorio a través de una superficie, podemos deducir las siguientes características:

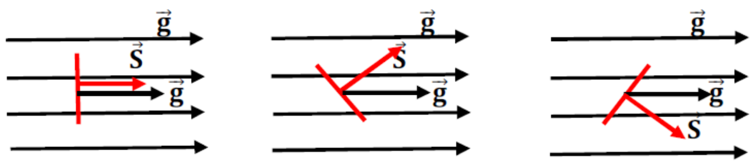
1ª.- El flujo gravitatorio es una magnitud física escalar puesto que se define mediante el producto escalar de dos vectores.

2ª.- La unidad de flujo gravitatorio es la unidad de campo gravitatorio por la unidad de superficie que, en el SI de unidades sería $N.kg^{-1}.m^2 = m^3.s^{-2}$.

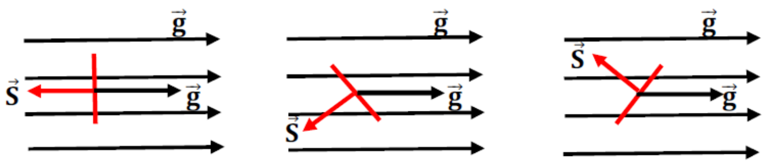
3ª.- Si observamos la expresión del flujo, podemos ver que depende de tres factores: la intensidad del campo $|\vec{g}|$, el tamaño de la superficie $|\vec{S}|$, y la orientación de la superficie respecto al campo gravitatorio **cos**($\vec{g}$, $\vec{S}$). Por tanto, si queremos modificar el flujo gravitatorio a través de una superficie, podemos modificar cualesquiera de estos tres factores.

4ª.- El flujo gravitatorio puede ser positivo, negativo o cero.

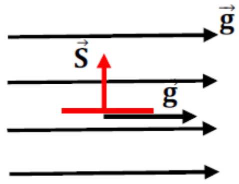
- El flujo a través de una superficie es positivo si **cos**($\vec{g}$, $\vec{S}$) **> 0,** y esto implica que los vectores $\vec{g}$ y $\vec{S}$ formen un ángulo agudo. Desde el punto de vista físico esto significa que hay un nº neto de líneas de fuerza que son salientes de la superficie.



- El flujo a través de una superficie es negativo si **cos**($\vec{g}$, $\vec{S}$) **< 0,** y esto implica que los vectores $\vec{g}$ y $\vec{S}$ formen un ángulo mayor de 90º. Desde el punto de vista físico esto significa que hay un nº neto de líneas de fuerza que son entrantes a la superficie.



- El flujo a través de una superficie es nulo si **cos($\vec{g}$, $\vec{S}$) = 0,** y esto implica que los vectores $\vec{g}$ y $\vec{S}$ sean perpendiculares, es decir, que la superficie este colocada paralelamente a las líneas de fuerza. Desde el punto de vista físico esto significa que la superficie no es atravesada por ninguna línea de fuerza o que el nº de líneas que atraviesan la superficie en ambos sentidos es el mismo.



5ª.- El flujo es máximo y positivo cuando **cos($\vec{g}$, $\vec{S}$) = 1** , es decir, el nº de líneas de fuerza que atraviesa la superficie es máximo y salientes. Si **cos($\vec{g}$, $\vec{S}$) = -1,** El flujo es máximo y negativo, es decir, el nº de líneas de fuerza que atraviesa la superficie es máximo pero entrantes.

6ª.- Si la superficie es cerrada y la masa fuente está en su interior, el flujo a través de la superficie cerrada nunca será cero, siempre será negativo ya que la superficie es atravesada por un determinado nº de líneas de campo desde el exterior hacia el interior.

7ª.- Si la superficie es cerrada y la masa fuente está en su exterior, el flujo a través de la superficie cerrada siempre será cero ya que la superficie es atravesada en ambos sentidos por el mismo nº de líneas de campo.

8ª.- La definición de flujo que hemos dado es para un campo gravitatorio uniforme y una superficie plana. Pero, ¿y si el campo no es uniforme y/o la superficie no es plana? En estos casos se divide la superficie en infinitas superficies elementales, $d\vec{S}$ **,** de modo que cada una de estas superficies infinitesimales puede ser considerada como plana y el campo gravitatorio constante en cada una de ellas. Calcularíamos entonces el flujo elemental, **d ϕ ,** realizado en cada superficie elemental mediante el producto escalar $\vec{g}.d\vec{S}$ y sumaríamos todos estos flujos para obtener el flujo total a través de toda la superficie. Esta sumatoria se realiza mediante una operación matemática denominada integral y se escribe así:

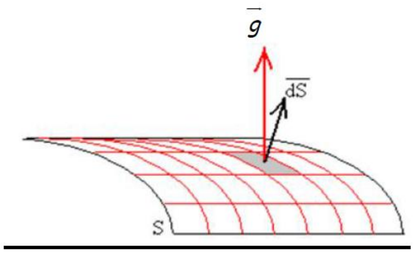


Figura 3.29

$$\boxed{\phi = \int d\phi = \int \vec{g}.d\vec{S}} \quad [3.39]$$

12.2 FLUJO DE UN CAMPO ELÉCTRICO

Cuando una superficie **S** se coloca en el interior de un campo eléctrico $\vec{E}$, esta superficie es atravesada por un cierto nº de líneas de fuerza. En Física existe una magnitud física cuyo valor es directamente proporcional al nº de líneas de fuerza que atraviesa una determinada superficie.

Supongamos un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ y una superficie plana **S**, colocada en el interior de dicho campo. Se define el **flujo** eléctrico del campo $\vec{E}$, a través de la superficie plana S, como el producto escalar de los vectores campo eléctrico $\vec{E}$ y superficie $\vec{S}$

$$\boxed{\phi = \vec{E}\cdot\vec{S} = \left|\vec{E}\right|\cdot\left|\vec{S}\right|\cdot\cos(\vec{E},\vec{S})} \quad [3.40]$$

El vector superficie, $\vec{S}$,es un vector perpendicular a la superficie y cuyo módulo coincide con el área de la misma.

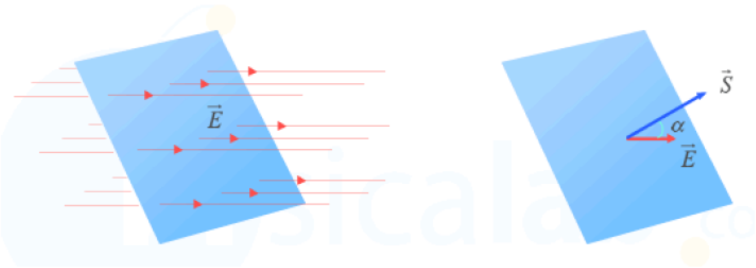


Figura 3.30

De la definición de flujo eléctrico a través de una superficie, podemos deducir las siguientes características:

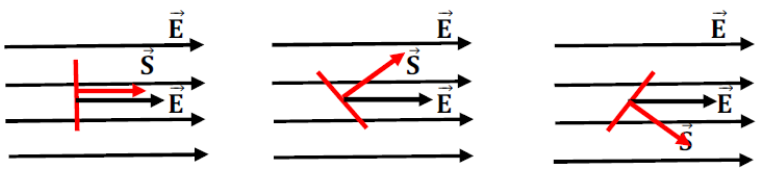
1ª.- El flujo eléctrico es una magnitud física escalar puesto que se define mediante el producto escalar de dos vectores.

2ª.- La unidad de flujo eléctrico es la unidad de campo eléctrico por la unidad de superficie que, en el SI de unidades sería $N.C^{-1}.m^2$.

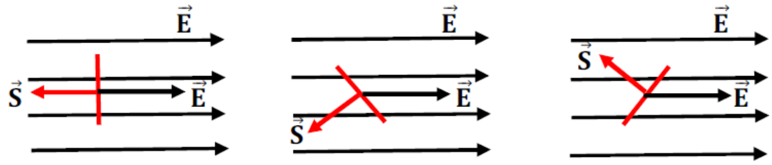
3ª.- Si observamos la expresión del flujo, podemos ver que depende de tres factores: la intensidad del campo $\vec{E}$, el tamaño de la superficie $|\vec{S}|$, y la orientación de la superficie respecto al campo eléctrico **cos**($\vec{E},\vec{S}$). Por tanto, si queremos modificar el flujo eléctrico a través de una superficie, podemos modificar cualesquiera de estos tres factores.

4ª.- El flujo eléctrico puede ser positivo, negativo o cero.

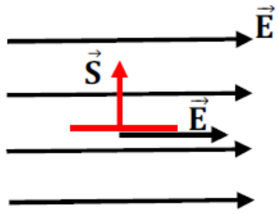
- El flujo a través de una superficie es positivo si **cos**($\vec{E},\vec{S}$) **> 0,** y esto implica que los vectores $\vec{E}$ y $\vec{S}$ formen un ángulo agudo. Desde el punto de vista físico esto significa que hay un nº neto de líneas de fuerza que son salientes de la superficie.



- El flujo a través de una superficie es negativo si **cos(**$\vec{E}$, $\vec{S}$) **< 0,** y esto implica que los vectores $\vec{E}$ y $\vec{S}$ formen un ángulo mayor de 90º. Desde el punto de vista físico esto significa que hay un nº neto de líneas de fuerza que son entrantes a la superficie.



- El flujo a través de una superficie es nulo si **cos(**$\vec{E}$, $\vec{S}$) **= 0,** y esto implica que los vectores $\vec{E}$ y $\vec{S}$ sean perpendiculares, es decir, que la superficie este colocada paralelamente a las líneas de fuerza. Desde el punto de vista físico esto significa que la superficie no es atravesada por ninguna línea de fuerza o que el nº de líneas que atraviesan la superficie en ambos sentidos es el mismo.



5ª.- El flujo es máximo y positivo cuando **cos(**$\vec{E}$, $\vec{S}$) **= 1** , es decir, el nº de líneas de fuerza que atraviesa la superficie es máximo y salientes. Si **cos(**$\vec{E}$, $\vec{S}$) **= -1,** El flujo es máximo y negativo, es decir, el nº de líneas de fuerza que atraviesa la superficie es máximo pero entrantes.

6ª.- Si la superficie es cerrada y la carga fuente está en su interior, el flujo a través de la superficie cerrada nunca será cero, siempre será negativo ya que la superficie es atravesada por un determinado nº de líneas de campo desde el exterior hacia el interior.

7ª.- Si la superficie es cerrada y la carga fuente está en su exterior, el flujo a través de la superficie cerrada siempre será cero ya que la superficie es atravesada en ambos sentidos por el mismo nº de líneas de campo.

8ª.- La definición de flujo que hemos dado es para un campo eléctrico uniforme y una superficie plana. Pero, ¿y si el campo no es uniforme y/o la superficie no es plana? En estos casos se divide la superficie en infinitas superficies elementales, $d\vec{S}$ **,** de modo que cada una de estas superficies infinitesimales puede ser considerada como plana y el campo eléctrico constante en cada una de ellas. Calcularíamos entonces el flujo elemental, **d** ϕ **,** realizado en cada superficie elemental mediante el producto escalar $\vec{E}.d\vec{S}$ y sumaríamos todos estos flujos para obtener el flujo total a través de toda la superficie. Esta sumatoria se realiza mediante una operación matemática denominada integral y se escribe así:

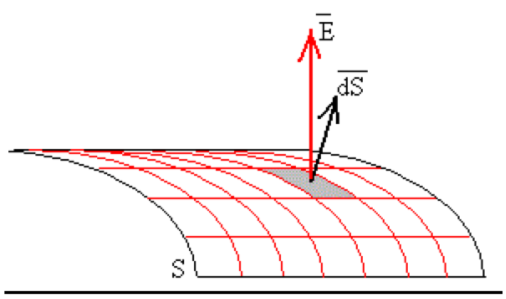


Figura 3.31

$$\boxed{\phi = \int d\phi = \int \vec{E}.d\vec{S}} \quad [3.41]$$

14. TEOREMA DE GAUSS PARA EL CAMPO GRAVITATORIO. APLICACIONES.

14.1 TEOREMA DE GAUSS PARA EL CAMPO GRAVITATORIO

El Teorema de Gauss para el campo gravitatorio dice:

El flujo neto que atraviesa una superficie cerrada en el interior de un campo gravitatorio es directamente proporcional a la masa total que encierra dicha superficie.

$$\boxed{\phi_{neto} = \int d\phi = \int \vec{g}.d\vec{S} = -4\pi G M_{Total}} \quad [3.42]$$

De la expresión del Teorema de Gauss para el campo gravitatorio deducimos lo siguientes COMENTARIOS:

1º.- Entendemos por flujo neto al flujo que atraviesa la superficie hacia fuera menos el flujo que atraviesa la superficie hacia dentro.

2º.- Entendemos por masa total a la suma algebraica de todas las masas que hay en el interior de la superficie cerrada.

3º.- La constante de proporcionalidad es - 4πG. El signo menos nos indica que el flujo gravitatorio a través de una superficie cerrada siempre será negativo, es decir, nunca habrá un flujo gravitatorio neto hacia el exterior de una superficie cerrada.

4º.- Si la superficie cerrada no encierra a ninguna masa en su interior, el flujo gravitatorio siempre será nulo.

14.2 APLICACIONES DEL TEOREMA DE GAUSS PARA EL CAMPO GRAVITATORIO

El Teorema de Gauss permite calcular la expresión del campo gravitatorio creado por algunas distribuciones de masa. Estas distribuciones de masa deben de ser cuerpos homogéneos con cierta simetría (esférica, cilíndrica, plana), en la que tengamos una idea clara de la dirección y sentido que llevarían las líneas de fuerza en cada punto.

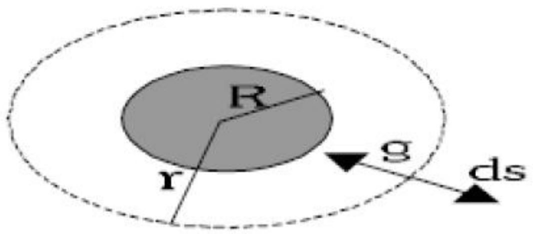
El objetivo que se persigue al aplicar el Teorema de Gauss es poder despejar g de la fórmula $\int \vec{g}.d\vec{S} = -4\pi G M_{Total}$. Para ello, para despejar g, es preciso considerar una superficie cerrada adecuada (llamada superficie gaussiana), en la que g tenga un valor constante y que sea perpendicular a la superficie en cada uno de sus puntos. De esta forma:

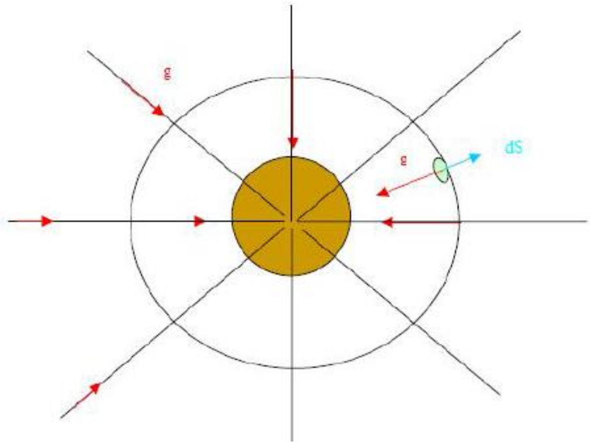
$$\boxed{\int \vec{g}.d\vec{S} = \int g.dS.\cos(180°) = -g\int dS = -g.S = -4\pi G M_{Total} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{4\pi G M_{Total}}{S}}$$

Donde S es valor de la superficie gaussiana que hemos considerado.

14.2.1 CAMPO GRAVITATORIO CREADO POR UNA ESFERA UNIFORME EN PUNTOS EXTERIORES

Tomamos como superficie de Gauss a una esfera de radio r > R y con el mismo centro que la esfera de masa. Al ser la esfera homogénea y por la simetría de la distribución de masa, el campo gravitatorio vale lo mismo en todos los puntos de la superficie gaussiana y es perpendicular a ella, siendo su sentido hacia dentro:





De esta forma:

$$\int \vec{g}.d\vec{S} = \int g.dS.\cos(180^\circ) = -g\int dS = -g.S = -4\pi G M_{Total} \quad \Rightarrow \quad \boxed{g = \frac{4\pi G M_{Total}}{S}}$$

Siendo S el valor de la superficie y M_{total} la masa de la esfera maciza. Por tanto, el valor campo gravitatorio en puntos exteriores a la esfera uniforme de masa es:

$$\boxed{g = \frac{4\pi G M_{Total}}{S} = \frac{4\pi G M_{Total}}{4\pi r^2} = \frac{G M_{Total}}{r^2} = G\frac{M_{Total}}{r^2}} \quad \textbf{[3.43]}$$

De la expresión anterior podemos deducir los siguientes resultados:

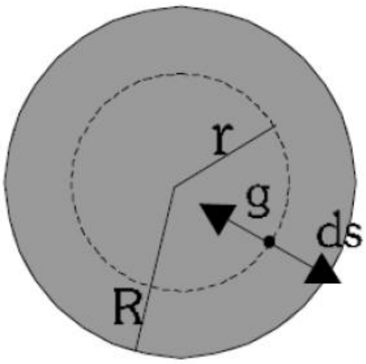
- Como vemos el campo gravitatorio en un punto exterior de una masa esférica uniforme tiene el mismo valor que el campo creado por una masa puntual, de igual valor al de la masa esférica, que estuviera situada en el centro de dicha esfera. Es decir, la masa esférica uniforme se comporta, en puntos exteriores a ella, como si se tratase de una masa puntual cuya masa total estuviese concentrada en su propio centro.

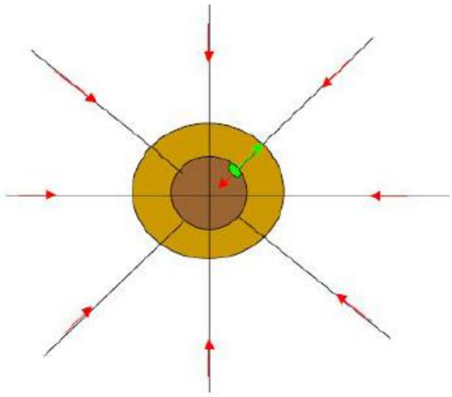
- El comentario anterior justifica, en parte, que consideremos al campo gravitatorio terrestre, en punto exteriores a la tierra ($r > R_T$), como si fuese creado por una masa puntual situada en su centro y de igual masa que la tierra ($r = R_T + h$). ¿Porqué decimos que justifica sólo en parte?

- Este mismo resultado obtendríamos para una corteza esférica uniforme, puesto que seguiríamos el mismo procedimiento que el realizado para la masa esférica maciza y uniforme.

14.2.2 CAMPO GRAVITATORIO CREADO POR UNA ESFERA DE MASA UNIFORME EN PUNTOS INTERIORES

Tomamos como superficie de Gauss a una esfera de radio r < R y con el mismo centro que la esfera de masa. Al ser la esfera homogénea y por la simetría de la distribución de masa, el campo gravitatorio vale lo mismo en todos los puntos de la superficie gaussiana que hemos considerado y es perpendicular a ella, siendo su sentido hacia dentro:





De esta forma:

$$\int \vec{g}.d\vec{S} = \int g.dS.\cos(180°) = -g\int dS = -g.S = -4\pi GM_{Total} \quad \Rightarrow \quad \boxed{g = \frac{4\pi GM_{Total}}{S}}$$

Siendo S el valor de la superficie de Gauss y m no es la masa total de la esfera, sino la masa de la parte de la esfera maciza encerrada por la superficie de Gauss. Podemos poner la masa m en función de la densidad ρ y del volumen de la superficie de Gauss.

$$m = \rho.V_{Guss} = \rho.\frac{4}{3}\pi r^3$$

Por tanto, el valor campo gravitatorio en puntos exteriores a la esfera homogénea de masa es:

$$\boxed{g = \frac{4\pi Gm}{S} = \frac{4\pi G\rho\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2} = G\rho\frac{4}{3}\pi r}$$

En la mayoría de los casos lo que conocemos de la esfera es su radio R y su masa M. Si tenemos en cuenta la relación existente entre la densidad de la esfera ρ, su masa M y su radio R:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Podemos sustituir la densidad en la expresión anterior y obtenemos:

$$\boxed{g = G\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r = G\frac{M}{R^3}r} \quad \textbf{[3.44]}$$

De la expresión anterior podemos deducir los siguientes resultados:

- Como vemos el campo gravitatorio en un punto interior de una masa esférica homogénea es directamente proporcional a la distancia de dicho punto al centro de la esfera. Esto significa que a medida que profundizamos, g disminuye hasta hacerse cero en el centro de la esfera. En la siguiente gráfica se recogen los resultados obtenidos tanto para puntos exteriores como interiores:

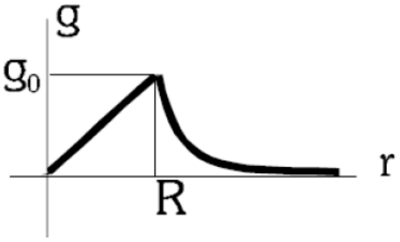


Figura 3.32 Variación del campo gravitatorio de una esfera maciza homogénea

- El comentario anterior también podría aplicarse al caso del campo gravitatorio terrestre, en punto interiores a la tierra ($r < R_T$), si consideramos, en primera aproximación, a la tierra como una esfera de masa uniforme. En la siguiente gráfica se recoge el valor del campo gravitatorio terrestre tanto en puntos exteriores como en puntos interiores:

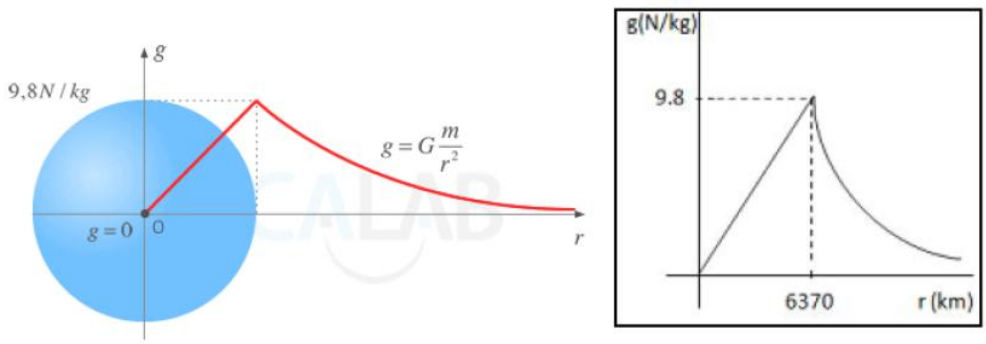


Figura 3.33 Variación del campo gravitatorio de la tierra considerada como una esfera maciza homogénea

- No obtendríamos este mismo resultado para una corteza esférica homogénea de masa, puesto que si siguiéramos el mismo procedimiento que el realizado para la masa esférica maciza y homogénea, obtendríamos que el campo gravitatorio en su interior es nulo. En la siguiente gráfica se recogen los resultados que se obtendrían para una corteza esférica homogénea de masa:

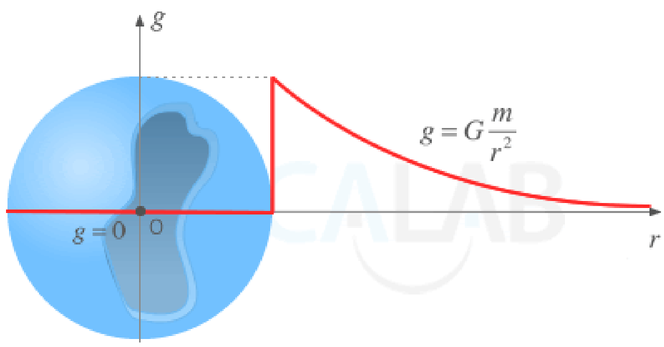


Figura 3.34 Variación del campo gravitatorio de una corteza esférica uniforme

15. TEOREMA DE GAUSS PARA EL CAMPO ELÉCTRICO. APLICACIONES

15.1 TEOREMA DE GAUSS PARA EL CAMPO ELÉCTRICO

El Teorema de Gauss para el campo eléctrico dice:

El flujo neto que atraviesa una superficie cerrada en el interior de un campo eléctrico es directamente proporcional a la carga total que encierra dicha superficie.

$$\boxed{\phi_{neto} = \int d\phi = \int \vec{E}.d\vec{S} = 4\pi K Q_{Total} = \frac{Q_{Total}}{\varepsilon}} \quad [3.45]$$

De la expresión del Teorema de Gauss para el campo eléctrico deducimos lo siguientes COMENTARIOS:

1º.- Entendemos por flujo neto al flujo que atraviesa la superficie hacia fuera menos el flujo que atraviesa la superficie hacia dentro.

2º.- Entendemos por carga neta a la suma algebraica de todas las cargas que hay en el interior de la superficie cerrada.

3º.- La constante de proporcionalidad es 4πK = 1/ε y el signo de la carga neta que encierra la superficie cerrada nos indicará si el flujo eléctrico neto es positivo o negativo.

4º.- Si la superficie cerrada no encierra a ninguna carga en su interior, o encierra tantas cargas positivas como negativas, el flujo eléctrico será nulo.

15.2 APLICACIONES DEL TEOREMA DE GAUSS PARA EL CAMPO ELÉCTRICO

El Teorema de Gauss permite calcular la expresión del campo eléctrico creado por algunas distribuciones de carga. Estas distribuciones de carga deben de ser cuerpos homogéneos con cierta simetría (esférica, cilíndrica, plana), en la que tengamos una idea clara de la dirección y sentido que llevarían las líneas de fuerza en cada punto.

El objetivo que se persigue al aplicar el Teorema de Gauss es poder despejar E de la fórmula $\int \vec{E}.d\vec{S} = 4\pi K Q_{Total} = \frac{Q_{Total}}{\varepsilon}$. Para ello, para despejar **E**, es preciso considerar una superficie cerrada adecuada (llamada superficie gaussiana), en la que **E** tenga un valor constante y que sea perpendicular a la superficie en cada uno de sus puntos. De esta forma:

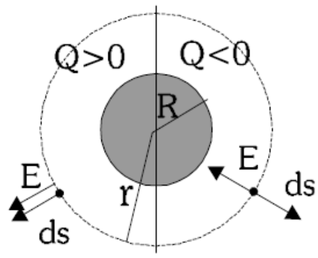
$$\int \vec{E}.d\vec{S} = \int E.dS.\cos(0^\circ \ o \ 180^\circ) = \pm E.\int dS = \pm E.S = 4\pi K Q_{Total} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad E = \pm\frac{4\pi K Q_{Total}}{S} = \pm\frac{Q_{Total}}{\varepsilon S} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{4\pi K\,|Q_{Total}|}{S} = \frac{|Q_{Total}|}{\varepsilon S}}$$

Donde S es el valor de la superficie gaussiana que hemos considerado

15.2.1 CAMPO ELÉCTRICO CREADO EN PUNTOS EXTERIORES POR UNA ESFERA MACIZA CON CARGA DISTRIBUIDA UNIFORMEMENTE

Supongamos una esfera maciza cargada de radio R y carga total Q. Tomamos como superficie de Gauss a una esfera de radio r > R y con el mismo centro que la esfera cargada. Al ser la esfera homogénea y por la simetría de la distribución de carga, el campo eléctrico vale lo mismo en todos los puntos de la superficie gaussiana y es perpendicular a ella. El siendo depende del signo de la carga neta: hacia dentro si es negativa y hacia fuera si es positiva:



Aplicando el Teorema de Gauss al campo que atraviesa dicha superficie:

$$\int \vec{E}.d\vec{S} = \int E.d\,S.\cos(0^\circ\, o\, 180^\circ) = \pm E.\int d\,S = \pm E.S = 4\pi K Q_{Total} \quad \Rightarrow \quad E = \pm\frac{4\pi K Q_{Total}}{S} = \pm\frac{Q_{Total}}{\varepsilon S}$$

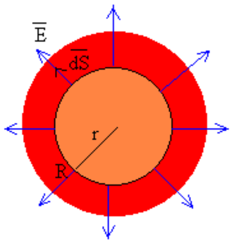
$$E = \frac{4\pi K\,|\,Q_{Total}\,|}{S} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{4\pi K\,|\,Q_{Total}\,|}{4\pi r^2} = \frac{K\,|\,Q_{Total}\,|}{r^2} = K\frac{|\,Q_{Total}\,|}{r^2}} \quad \textbf{[3.46]}$$

Del resultado anterior podemos concluir lo siguiente:

- Como vemos el campo eléctrico en un punto exterior de una esfera cargada uniformemente tiene el mismo valor que el campo creado por una carga puntual, de igual valor al de la carga esférica, que estuviera situada en el centro de dicha esfera. Es decir, la esfera cargada uniformemente se comporta, en puntos exteriores a ella, como si se tratase de una carga puntual cuya carga neta estuviese concentrada en su propio centro.
- Este mismo resultado obtendríamos para una corteza esférica cargada uniformemente, puesto que seguiríamos el mismo procedimiento que el realizado para la esfera maciza cargada uniformemente.

15.2.2 CAMPO ELÉCTRICO CREADO EN PUNTOS INTERIORES POR UNA ESFERA MACIZA CON CARGA DISTRIBUIDA UNIFORMEMENTE EN SU INTERIOR

Tomamos como superficie de Gauss a una esfera de radio r < R y con el mismo centro que la esfera cargada. Al ser la esfera homogénea y por la simetría de la distribución de carga, el campo eléctrico vale lo mismo en todos los puntos de la superficie gaussiana y es perpendicular a ella. El sentido depende del signo de la carga neta: hacia dentro si es negativa y hacia fuera si es positiva:



Aplicando el Teorema de Gauss al campo que atraviesa dicha superficie:

$$\int \vec{E}.d\vec{S} = \int E.dS.\cos(0^\circ \text{ o } 180^\circ) = \pm E.\int dS = \pm E.S = 4\pi K q_{neta} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad E = \pm \frac{4\pi K q_{neta}}{S} = \pm \frac{q_{neta}}{\varepsilon S} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{4\pi K\,|\,q_{neta}\,|}{S} = \frac{|\,q_{neta}\,|}{\varepsilon S}}$$

Siendo S el valor de la superficie de Gauss y q_{neta} ya no es la carga total de la esfera, sino la carga de la parte de la esfera maciza encerrada por la superficie de Gauss. Podemos poner la masa q_{neta} en función de la densidad de carga ρ_c y del volumen de la superficie de Gauss.

$$q_{neta} = \rho_c.V_{Gauss} = \rho_c.\frac{4}{3}\pi r^3$$

Por tanto, el valor campo eléctrico en puntos interiores a la esfera cargada homogénea es:

$$\boxed{E = \frac{4\pi K\,|\,q_{neta}\,|}{S} = \frac{4\pi K.\rho_c.\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2} = K.\rho_c.\frac{4}{3}\pi r = \frac{\rho_c}{3\varepsilon}r}$$

Pero en la mayoría de las ocasiones lo que conocemos es la carga neta de la esfera Q y su radio R, por lo que podemos expresar la densidad de carga ρ_c en función de estos dos parámetros que son constantes para cada esfera:

$$\rho_c = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} =$$

y al sustituir en la expresión del campo eléctrico:

$$\boxed{E = K.\rho_c.\frac{4}{3}\pi r = K.\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}.\frac{4}{3}\pi r = K\frac{Q}{R^3}r = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{R^3}r} \quad \textbf{[3.47]}$$

De la expresión anterior podemos concluir que:

- El campo eléctrico en un punto interior de una carga esférica maciza uniforme es directamente proporcional a la distancia de dicho punto al centro de la esfera. Esto significa que a medida que profundizamos, E disminuye hasta hacerse cero en el centro de la esfera. En la siguiente gráfica se recogen los resultados obtenidos tanto para puntos exteriores como interiores:

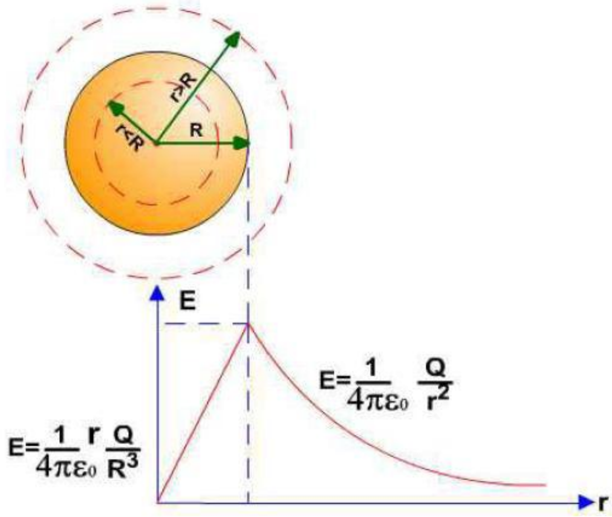


Figura 3.35 Variación del campo eléctrico de una esfera maciza cargada uniformemente

- No obtendríamos este mismo resultado para una corteza esférica cargada uniformemente, puesto que si siguiéramos el mismo procedimiento que el realizado para la carga esférica maciza y homogénea, obtendríamos que el campo gravitatorio en su interior es nulo ya que cualquier superficie gaussiana que consideremos en su interior no encierra ninguna carga. En la siguiente gráfica se recogen los resultados que se obtendrían para una corteza esférica cargada uniformemente:

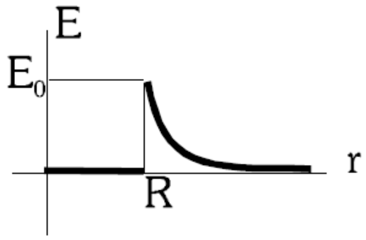


Figura 3.36 Variación del campo eléctrico en una corteza esférica cargada uniformemente

16. CAMPO ELÉCTRICO EN EL INTERIOR DE UN CONDUCTOR EN EQUILIBRIO: JAULA DE FARADAY

Un conductor eléctrico está en equilibrio cuando sus cargas se encuentran en reposo. En estas condiciones el campo eléctrico en su interior tiene que ser nulo, ya que de lo contrario sus cargas no estarán en reposo pues sufrirían la acción de ese campo.

El hecho de que el campo eléctrico en el interior de un conductor en equilibrio sea nulo, implica otras importantes consecuencias:

- El potencial eléctrico en su interior es constante. Si no lo fuera, entre los puntos de distinto potencial se establecería un campo eléctrico que rompería el equilibrio.
- Las cargas móviles del conductor en equilibrio se sitúan en su superficie, independientemente de que el conductor sea hueco o macizo. Esto es una consecuencia del teorema de Gauss puesto que si consideramos una superficie de Gauss interna infinitamente próxima a la del conductor, el flujo a su través será nulo, por ser nulo el campo en su interior. Por tanto la carga neta que encierra esa superficie gaussiana tiene que ser nula.

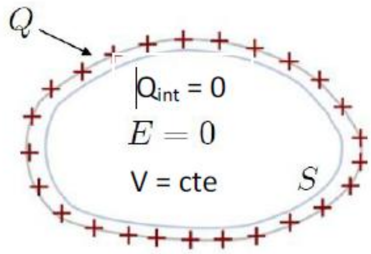


Figura 3.37 Conductor en equilibrio

- La superficie de un conductor en equilibrio, que es dónde residen las cargas móviles, es una superficie equipotencial.
- El campo eléctrico que crea el conductor en equilibrio en su superficie, es perpendicular en cada punto de su superficie puesto que se trata de una superficie equipotencial.

La ***jaula de Faraday*** es una aplicación del teorema de Gauss y consiste en una caja metálica que protege de los campos eléctricos externos. Debe su nombre al físico británico Michael Faraday que construyó una en 1836. También se conoce con el nombre de ***escudo de Faraday***. Se emplean para proteger de descargas eléctricas, ya que en su interior el campo eléctrico es nulo.

El funcionamiento de la jaula de Farday se basa en las propiedades de un conductor en equilibrio electrostático. Cuando la caja metálica se coloca en presencia de un campo eléctrico externo, las cargas positivas se quedan en las posiciones de la red; los electrones, sin embargo, que en un metal son libres, empiezan a moverse puesto que sobre ellos actúa una fuerza dada por:

$$\vec{F} = e.\vec{E}$$

Donde *e* es la carga del electrón. Como la carga del electrón es negativa, los electrones se mueven en sentido contrario al campo eléctrico y, aunque la carga total del conductor es cero, uno de los lados de la caja (en el que se acumulan los electrones) se queda con un exceso de carga negativa, mientras que el otro lado queda con un defecto de electrones (carga positiva). Este desplazamiento de las cargas hace que en el interior de la caja se cree un campo eléctrico **de sentido contrario al campo externo**, de modo que e**l campo eléctrico resultante en el interior del conductor es por tanto nulo.**

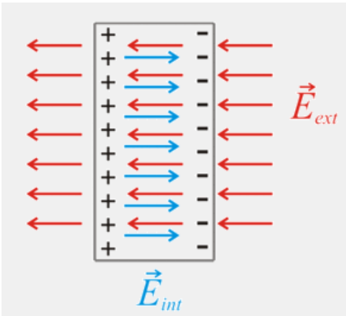


Figura 3.38 Jaula de Faraday

Como en el interior de la caja no hay campo, ninguna carga puede atravesarla; por ello se emplea para proteger dispositivos de cargas eléctricas. El fenómeno se denomina ***apantallamiento eléctrico***.

Muchos dispositivos que empleamos en nuestra vida cotidiana están provistos de una jaula de Faraday: los microondas, escáneres, cables, etc. Otros dispositivos, sin estar provistos de una jaula de Faraday actúan como tal: los ascensores, los coches, los aviones, etc. Por esta razón se recomienda permanecer en el interior del coche durante una tormenta eléctrica: su carrocería metálica actúa como una jaula de Faraday.

17. ANALOGÍAS Y DIFERENCIAS ENTRE LOS CAMPOS GRAVITATORIO Y ELÉCTRICO

Si analizamos las expresiones de la fuerza de interacción gravitatoria entre dos masas (Ley de Gravitación Universal) y de la fuerza de interacción eléctrica entre dos cargas (Ley de Coulomb) podemos deducir ciertas analogías y ciertas diferencias entre ellas:

Fuerza gravitatoria:

$\boxed{\vec{F} = -G\frac{M_1 . M_2}{r^2}\vec{u}_r}$ (vector fuerza) $\boxed{F = G\frac{M_1 . M_2}{r^2}}$ (módulo del vector fuerza)

$\boxed{\vec{g} = -G\frac{M_1}{r^2}\vec{u}_r}$ (vector campo) $\boxed{g = G\frac{M_1}{r^2}}$ (módulo del vector campo)

Fuerza electrostática

$\boxed{\vec{F} = K\frac{Q_1 . Q_2}{r^2}\vec{u}_r}$ (vector fuerza) $\boxed{F = K\frac{|Q_1| . |Q_2|}{r^2}}$ (módulo del vector fuerza)

$\boxed{\vec{E} = K\frac{Q_1}{r^2}\vec{u}_r}$ (vector campo) $\boxed{E = K\frac{|Q_1|}{r^2}}$ (módulo del vector campo)

ANALOGÍAS:

1ª.- En ambos la fuerza es directamente proporcional al producto de las magnitudes de los cuerpos que interaccionan e inversa mente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.

2ª.- Ambos son campos de fuerzas centrales, es decir, su dirección es la línea que une los cuerpos que interaccionan, masas en el campo gravitatorio y cargas en el campo eléctrico.

3ª.- Son fuerzas de largo alcance puesto que la interacción entre dos masas o entre dos cargas se anula a distancia infinita.

4ª.- No son fuerzas por contacto, sino interacciones a distancia que actúan tanto en el vacío como en presencia de medios materiales. La presencia de una masa o de una carga produce una "deformación" que dota al espacio de cierta propiedad en cada uno de sus puntos, creándose, de este modo, los campos correspondientes. Esta "deformación" del espacio sólo se pone de manifiesto al situar en esos puntos a una masa o a una carga testigo.

5ª.- Ambos son campos de fuerzas conservativos, es decir, ambos admiten una energía potencial asociada y es posible definir en ellos un potencial gravitatorio y eléctrico respectivamente.

6ª.- En ambos campos las líneas de fuerza son radiales y abiertas.

DIFERENCIAS

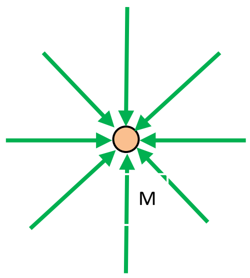
1ª.- La fuente del campo gravitatorio es la masa, y la del campo eléctrico es la carga. Sólo hay un tipo de masa, pero hay dos tipos de carga, positiva y negativa.

2ª.- Las fuerzas de interacción gravitatoria son siempre de atracción, mientras que la fuerzas de interacción electrostática pueden ser de atracción (cargas de distinto signo) o de repulsión (cargas del mismo signo).

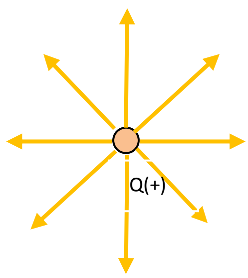
3ª.- Al ser G una constante universal, la interacción gravitatoria entre dos masas es independiente del medio en el que se encuentren estas; pero no ocurre lo mismo con las cargas ya que el valor de K es diferente para cada medio, siendo máximo en el vacío. Por tanto, la interacción eléctrica entre dos cargas es máxima cuando estas están en el vacío.

4ª.- La fuerza eléctrica es mucho mayor que la fuerza gravitatoria. Así por ejemplo la constante $K_0 = 9.10^9$ UI, mientras que la constante $G = 6{,}67.10^{-11}$ UI, y esto supone que el valor de K_0 es aproximadamente 10^{20} veces superior.

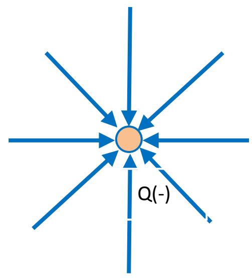
5ª.- Las líneas de fuerza del campo gravitatorio siempre son entrantes en la masa que lo crea (se dice que las masas son sumideros de líneas de fuerza), mientras que las líneas de fuerza del campo electrostático son entrantes si la carga es negativa (sumideros de líneas de campo) o salientes si la carga es positiva (fuentes de líneas de campo).



Líneas de fuerza de una masa puntual

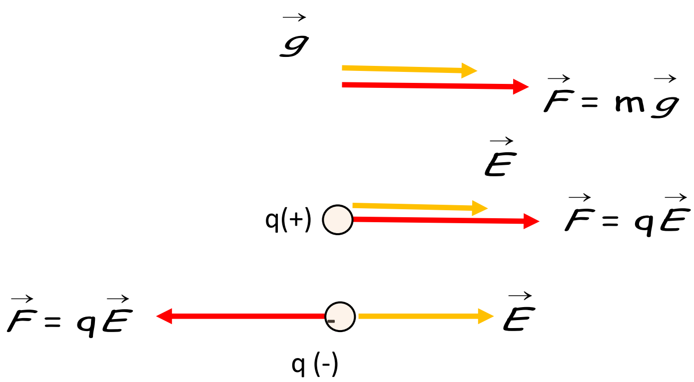


Líneas de fuerza de una carga puntual +



Líneas de fuerza de una carga puntual -

6ª.- La fuerza que actúa sobre una masa colocada en un campo gravitatorio siempre tiene la misma dirección y sentido que el campo gravitatorio. Sin embargo, en un campo eléctrico la fuerza que actúa sobre una carga positiva sí tiene la misma dirección y sentido que el campo eléctrico, pero tiene sentido contrario si el campo actúa sobre una carga negativa.



7ª.- La energía potencial gravitatoria es negativa pues corresponde a una fuerza atractiva, mientras que la energía potencial eléctrica puede ser positiva (cargas del mismo signo que se repelen) o negativa (cargas de distinto signo que se atraen).

$$E_{p.grav} = -G\frac{M.m}{r} \qquad E_p = K\frac{Q.q}{r}$$

8ª.- El flujo gravitatorio a través de una superficie cerrada que encierra un conjunto de masas siempre es negativo (Teorema de Gauss), mientras que si encierra un conjunto neto de cargas, el flujo puede ser positivo o negativo.

9ª.- El campo gravitatorio creado por una masa no se altera por el hecho de que la masa esté moviéndose. Sin embargo, cuando una carga está moviéndose, además del campo electrostático aparece un nuevo campo de fuerzas: la interacción magnética.

LECTURAS RECOMENDADAS

Para saber más

El fenómeno de la ingravidez

Con frecuencia observamos imágenes de astronautas y objetos que flotan en el aire dentro de las naves espaciales en estado de ingravidez.

El término de *ingravidez* no es correcto porque la fuerza de atracción gravitatoria con la que actúa la Tierra sobre los astronautas no se hace igual a cero y por tanto las personas y los objetos que están dentro de la nave tienen peso.

La relación entre el peso de un astronauta en la superficie de la Tierra y dentro de la estación espacial internacional, ISS; que gira en una órbita situada a 400 km de la superficie de la Tierra es:

$$\frac{P_{\text{órbita}}}{P_{\text{suelo}}} = \frac{\dfrac{G \cdot m_T \cdot m_{\text{astronauta}}}{(R_T + h)^2}}{\dfrac{G \cdot m_T \cdot m_{\text{astronauta}}}{R_T^2}} = \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2} = \frac{(6\,370\ \text{km})^2}{(6\,370\ \text{km} + 400\ \text{km})^2} = 0{,}89$$

El astronauta y todos los objetos de la nave pesan solamente un 11 % menos que en el suelo. Por tanto, la lejanía de la nave no es suficiente explicación de la aparente pérdida del peso.

Peso aparente

La sensación que tenemos de nuestro propio peso proviene de las fuerzas que lo equilibran. Así, al estar sentados sentimos la fuerza con la que actúa la silla, que equilibra nuestro peso e impide que caigamos al suelo. Al pesarnos en una báscula de baño, su resorte se comprime para equilibrar nuestro peso. Esa compresión permite determinar el valor del peso con un aparato que se haya calibrado aplicando la ley de Hooke.

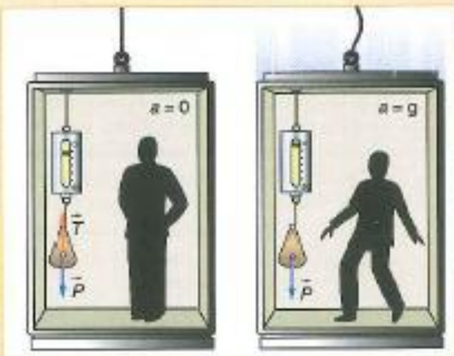
Pero veamos qué ocurre al pesarnos o al pesar un objeto con un dinamómetro dentro de un ascensor.

Si el ascensor está parado, el dinamómetro indica una cantidad igual al peso del objeto.

Si el ascensor desciende con una aceleración igual a la de la gravedad, no hay ninguna fuerza que equilibre al peso y el dinamómetro indica una cantidad igual a cero.

Aparentemente nosotros y los objetos que están dentro del ascensor no pesamos nada.

A esta situación se le denomina ingravidez, más correctamente *falta aparente de peso*, y es la que experimentan los astronautas cuando se mueven en órbita alrededor de la Tierra.



Ascensor parado. Ascensor en caída libre.

Ingravidez en órbita

Sobre una nave espacial que describe una órbita circular en torno a la Tierra actúa la interacción gravitatoria, que es la fuerza centrípeta necesaria para que el movimiento circular tenga lugar. La nave espacial lleva un movimiento continuo de caída libre hacia la superficie de la Tierra siguiendo una curva cerrada. Después de cada órbita vuelve a encontrarse en la posición inicial, para continuar con una nueva caída.

La nave espacial y el astronauta se mueven en caída libre hacia la Tierra con la misma aceleración y por ello sobre el astronauta y los objetos de la nave no actúa ninguna fuerza que equilibre su peso. Esa es la razón por la que aparentemente no pesan nada.

Creación de ambientes de ingravidez

Los científicos generan ambientes de ingravidez produciendo situaciones de caída libre hacia la superficie de la Tierra de diferentes formas: a bordo de naves espaciales, en vuelos parabólicos con aeronaves, en la caída libre desde el espacio por medio de cohetes sondas y con torres de caída libre.

Los satélites en órbita proporcionan condiciones de ingravidez durante períodos largos y continuos de tiempo.

Con cohetes se generan períodos de caída libre, durante su descenso, con una duración de hasta 20 minutos.

La Agencia Espacial Europea utiliza un avión Airbus 300 para proporcionar condiciones de ingravidez mediante vuelos parabólicos. El avión sube hasta unos 8 000 m, para descender rápidamente. Al bajar hasta la altura adecuada, el avión vuelve a ascender para repetir el ciclo. Así se consiguen períodos de caída libre de una duración de medio minuto que se pueden repetir sucesivamente. Es como si las personas y objetos se movieran dentro de una montaña rusa gigante.

También hay instalaciones sobre la superficie de la Tierra. Consisten en torres de más de 100 m de alto, dentro de las cuales se dejan caer objetos que experimentan una caída libre durante varios segundos.

La gravedad afecta a todos los procesos biológicos, físicos y químicos sobre la superficie de la Tierra. Los ambientes de ingravidez proporcionan un entorno adecuado para desentrañar comportamientos de las sustancias que quedan enmascarados por la gravedad. De esta forma se abren nuevos horizontes de experimentación en Medicina, Biología, Mecánica de fluidos, combustiones, comportamiento de materiales.

El fenómeno de la ingravidez produce incomodidades a los astronautas a la hora de realizar sus actividades diarias. Pero, lo que más preocupa a los médicos son los trastornos en su organismo, y sobre todo la pérdida de masa ósea. Otros trastornos son la disminución de glóbulos rojos, la debilidad muscular y los problemas psicológicos derivados del encierro en habitáculos de dimensiones reducidas. Para paliar los efectos de la ingravidez, los astronautas siguen programas con ejercicios físicos muy específicos a los que dedican dos horas diarias.

Para saber más

El fenómeno de las mareas

Se denomina marea al ascenso y descenso periódicos de todas las aguas oceánicas, incluyendo las del mar abierto, los golfos y las bahías, resultado de la atracción gravitatoria de la Luna y del Sol sobre el agua y la propia Tierra.

Playa de la Concha (San Sebastián).

La primera explicación correcta del fenómeno de las mareas la dio Newton, al asociarlo a la influencia de la interacción gravitatoria entre la Tierra y la Luna.

Mareas lunares

Una persona montada en un tiovivo observa que tiende a ser expulsada de la plataforma con mayor intensidad cuanto más alejada esté del centro de la misma. Para justificar esta observación, desde un sistema de referencia no inercial, la persona debe introducir una fuerza de inercia, denominada fuerza centrífuga, que le empuja hacia afuera.

La inercia hace que al girar un balón mojado las partículas de agua se desprendan de su superficie. De igual forma el movimiento de rotación de la Tierra provoca que el agua de los océanos tienda a salir desprendida, pero no lo consigue debido a la atracción gravitatoria de la propia Tierra. Este efecto es mayor en los puntos próximos al ecuador terrestre.

La Tierra y la Luna forman un sistema que se mantiene unido por la interacción gravitatoria. Si dejan de considerarse los dos astros como objetos puntuales, el sistema gira en torno a un centro común que está situado dentro de la Tierra y a una distancia de su centro de 3/4 del radio terrestre. Además, todos los puntos de la superficie de la Tierra están afectados por la atracción de la Luna con una fuerza tanto más intensa cuanto más cerca estén de esta.

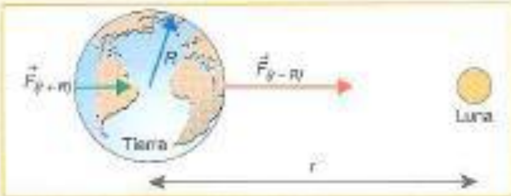
La combinación de los dos fenómenos (la diferencia de atracción lunar y la fuerza centrífuga) hace que las regiones oceánicas situadas en la cara de la Tierra orientada a la Luna se acerquen hacia el satélite, por lo que se encuentran en pleamar. A su vez, las regiones que se encuentran en la cara opuesta de la Tierra se alejan del satélite y también se encuentran en pleamar. Si la Tierra estuviera cubierta totalmente de agua se deformaría hasta tener la forma de un elipsoide alineado con el sistema Tierra-Luna.

Debido a los movimientos de la Tierra y de la Luna la componente de marea lunar se manifiesta con un período de 12 horas y 30 minutos, aproximadamente.

Mareas solares

El Sol también interviene de manera directa en el fenómeno de las mareas, con un período de 24 horas.

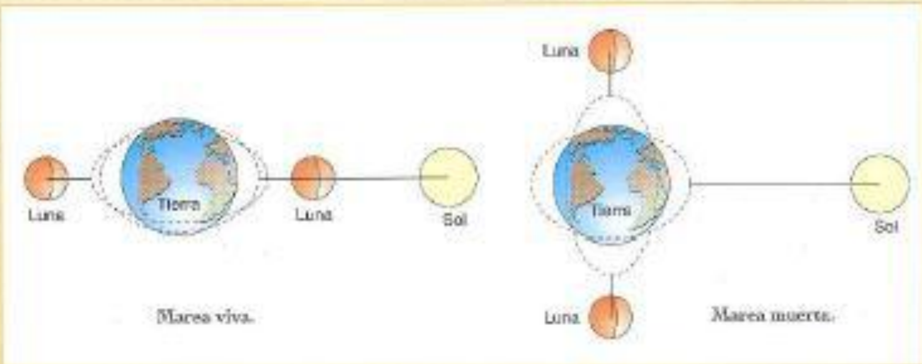
El que la masa del Sol sea 27 millones de veces mayor que la de la Luna y esté situado 400 000 veces más lejos, no basta para explicar que su efecto sobre las aguas del océano sea un 45 % menor que el efecto producido por la Luna.



Esta menor contribución del Sol al efecto de marea se debe a que la diferencia entre las intensidades de las fuerzas con que actúa la Luna sobre el océano más próximo y el más alejado es mucho mayor que la correspondiente diferencia para el caso del Sol.

Mareas vivas y mareas muertas

La magnitud de la marea es el resultado de la combinación de los dos elipsoides de deformación generados, por lo que la magnitud de la misma depende de las posiciones relativas del Sol y de la Luna respecto de la Tierra en un instante dado.



Marea viva.

Marea muerta.

Durante los períodos de luna nueva y luna llena, el Sol, la Luna y la Tierra están alineados, los dos efectos se suman y se tienen las mareas vivas. En ellas las mareas altas ascienden más y las mareas bajas descienden más de lo habitual.

Cuando la Luna está en fase de cuarto menguante o de cuarto creciente, el Sol, la Luna y la Tierra forman un ángulo recto y se tienen las mareas muertas. En este estado de los astros la marea alta es más baja y la baja más alta de lo normal.

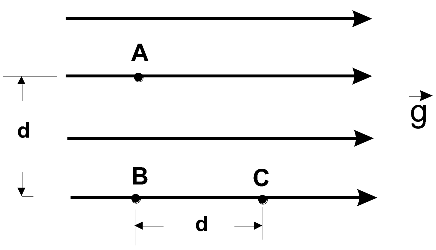
El tamaño de la marea también está altamente influenciado por la estructura de la costa y de los océanos. Así, no son comparables las mareas del mar Mediterráneo, mar cerrado, con las que se producen en el océano Atlántico y en el mar Cantábrico.

CUESTIONES

CUESTIONES INTERACCIÓN GRAVITATORIA

Cuestión 1ª a) Explique el concepto de velocidad de escape y deducir razonadamente su expresión. b) ¿Qué ocurriría en la realidad si lanzamos un cohete desde la superficie de la Tierra con una velocidad igual a la velocidad de escape?

Cuestión 2ª



En una región en la que existe un campo gravitatorio uniforme de intensidad g, representado en la figura por sus líneas de campo. a) Razone el valor del trabajo que se realiza al trasladar la unidad de masa desde el punto A al B y desde B al C. b) Analice las analogías y diferencias entre el campo descrito y el campo gravitatorio terrestre.

Cuestión 3ª Se suele decir que la energía potencial gravitatoria de un cuerpo de masa **m** situado a una altura **h** viene dada por la expresión $E_P = mgh$. a) ¿Es correcta esta afirmación? ¿Por qué? b) ¿En qué condiciones es válida dicha fórmula?

Cuestión 4ª a) Escriba la ley de Gravitación Universal y explique su significado físico. b) Según la ley de Gravitación, la fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo es proporcional a la masa de éste. ¿Por qué no caen más deprisa los cuerpos con mayor masa?

Cuestión 5ª Sean A y B dos puntos de la órbita elíptica de un cometa alrededor del Sol, estando A más alejado del Sol que B. a) Haga un análisis energético del movimiento del cometa y comparar los valores de las energías cinética y potencial en A y en B. b) ¿En cuál de los puntos A o B es mayor el módulo de la velocidad? ¿Y el de la aceleración?

Cuestión 6ª a) Si el cero de energía potencial gravitatoria de una partícula de masa **m** se sitúa en la superficie de la Tierra, ¿cuál es el valor de la energía potencial de la partícula cuando ésta se encuentra a una distancia infinita de la Tierra. b) ¿puede ser negativa la energía cinética de una partícula? ¿Y la energía potencial? En caso afirmativo explique el significado físico.

Cuestión 7ª La energía cinética necesaria para escapar de la Tierra depende de la elección del origen de energía potencial.

Cuestión 8ª Dos satélites idénticos A y B se encuentran en órbitas circulares de diferente radio ($R_A > R_B$) alrededor de la Tierra. Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) Si los dos satélites estuvieran en la misma órbita ($R_A = R_B$) y tuviesen distinta masa ($m_A < m_B$), ¿cuál de los dos se movería con mayor velocidad? ¿cuál de ellos tendría más energía cinética?

Cuestión 9ª Una partícula se mueve en un campo gravitatorio uniforme. a) ¿Aumenta o disminuye su energía potencial gravitatoria al moverse en la dirección y sentido de la fuerza ejercida por el campo? ¿Y si se moviera en una dirección perpendicular a dicha fuerza? Razone las respuestas. b) Escriba una expresión del trabajo realizado por la fuerza gravitatoria sobre la partícula para un desplazamiento **d** en ambos casos. ¿En qué se invierte dicho trabajo?

Cuestión 10ª Una partícula de masa m, situada en un punto A, se mueve en línea recta hacia otro punto B, en una región en la que existe un campo gravitatorio creado por una masas M. a) Si el valor del potencial gravitatorio en el punto B es menor que en el punto A, razone si la partícula se acerca o se aleja de M. b) Explique las transformaciones energéticas de la partícula durante el desplazamiento indicado y escribir su expresión. ¿Qué cambios cabría esperar si la partícula fuera de A a B siguiendo una trayectoria no rectilínea?

Cuestión 11ª Se desea colocar un satélite en una órbita circular, a una cierta altura sobre la Tierra. a) Explique las variaciones energéticas del satélite desde su lanzamiento hasta su situación orbital. b) ¿Influye la masa del satélite en su velocidad orbital?

Cuestión 12ª Una masa **m** se mueve en un campo gravitatorio producido por otra masa **M**. a) ¿Aumenta o disminuye su energía potencial cuando se acercan las dos partículas? b) Si inicialmente **m** estaba a una distancia **r** de **M** y se traslada hasta una distancia **2r**, Explique las variaciones de su energía cinética y potencial.

Cuestión 13ª a) La energía potencial gravitatoria de un cuerpo de masa **m** situado a una altura **h** suele escribirse como $E_P = mgh$. Comente el significado y los límites de validez de dicha expresión. b) ¿Por qué la energía potencial gravitatoria de un planeta aumenta cuando se aleja del Sol?

Cuestión 14ª Comente los siguientes enunciados, definiendo los conceptos físicos asociados y justificar su carácter de verdadero o falso: a) El campo gravitatorio es conservativo y por tanto existe un potencial asociado a él. b) El trabajo realizado por el campo gravitatorio sobre una partícula que se desplaza entre dos puntos es menor si lo hace a través de la recta que une dichos puntos, ya es que el camino más corto.

Cuestión 15ª Suponga que la Tierra redujese su radio a la mitad manteniendo su masa. a) ¿Aumentaría la intensidad M campo gravitatorio en su nueva superficie? b) ¿Se modificaría sustancialmente su órbita alrededor del Sol? Justifique las respuestas.

Cuestión 16ª Dos satélites idénticos están en órbita alrededor de la Tierra, siendo sus órbitas de distinto radio. a) ¿Cuál de los dos se moverá a mayor velocidad? b) ¿Cuál de los dos tendrá mayor energía mecánica? Razone las respuestas.

Cuestión 17ª a) ¿Qué relación existe entre el período y el radio orbital de dos satélites? b) Conociendo el radio de la órbita y su período, ¿podemos Determine las masas de la Tierra y del satélite? Razone la respuesta.

Cuestión 18ª Haciendo uso de consideraciones energéticas, determine la velocidad mínima que habría que imprimirle a un objeto de masa **m**, situado en la superficie de un planeta de masa **M** y radio **R**, para que saliera de la influencia del campo gravitatorio del planeta.

Cuestión 19ª Una partícula de masa m, situada en un punto **A**, se mueve en línea recta hacia otro punto **B**, en una región en la que existe un campo gravitatorio creado por una masa **M**. a) Si el valor del potencial gravitatorio en el punto **B** es mayor que en el punto **A**, razone si la partícula se acerca o se aleja de **M**. b) Explique las transformaciones energéticas de la partícula durante el desplazamiento indicado y escriba su expresión. ¿Qué cambios cabría esperar si la partícula fuera de **A** a **B** siguiendo una trayectoria no rectilínea?

Cuestión 20ª Un satélite está en órbita circular alrededor de la Tierra. Razone si la energía potencial, la energía cinética y la energía total del satélite son mayor, menor o igual que las de otro satélite idéntico al anterior que sigue una órbita, también circular, pero de menor radio.

Cuestión 21ª Dos satélites idénticos se encuentran en órbitas circulares de distinto radio alrededor de la Tierra. Razone las respuestas a las siguientes preguntas: a) ¿Cuál de ellos tiene mayor velocidad, el de la órbita de mayor o de menor radio? b) ¿Cuál de los dos tiene mayor energía mecánica?

Cuestión 22ª Razone la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones: a) El peso de un cuerpo en la superficie de un planeta cuya masa fuera la mitad que la de la Tierra sería la mitad de su peso en la superficie de la Tierra. b) El estado de "ingravidez" de los astronautas en el interior de las naves espaciales orbitando alrededor de la Tierra se debe a que la fuerza que ejerce la Tierra sobre ellos es nula.

Cuestión 23ª a) Considere un punto situado a una determinada altura sobre la superficie terrestre. ¿Qué velocidad es mayor en ese punto, la orbital o la de escape? b) A medida que aumenta la distancia de un cuerpo a la superficie de la Tierra disminuye la fuerza con que es atraído por ella. ¿Significa eso que también disminuye su energía potencial? Razone las respuestas.

Cuestión 24ª Dibuje en un esquema las líneas de fuerza del campo gravitatorio creado por una masa puntual M. Sean A y B dos puntos situados en la misma línea de fuerza del campo, siendo B el punto más cercano a M. a) Si una masa, m, está situada en A y se traslada a B, ¿aumenta o disminuye su energía potencial? ¿Por qué? b) Si una masa, m, está situada en A y se traslada a otro punto C, situado a la misma distancia de M que A, pero en otra línea de fuerza, ¿aumenta o disminuye la energía potencial? Razone su respuesta.

Cuestión 25ª Si por alguna causa la Tierra redujese su radio a la mitad manteniendo su masa, razone cómo se modificarían: a) La intensidad del campo gravitatorio en su superficie. b) Su órbita alrededor del Sol.

Cuestión 26ª a) Un satélite artificial describe una órbita circular en torno a la Tierra. ¿Qué trabajo realiza la fuerza con la que la Tierra atrae al satélite, durante una órbita? Justifique la respuesta.

Cuestión 27ª Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) Si se redujera el radio de la órbita lunar en torno a la Tierra, ¿aumentaría su velocidad orbital? b) ¿Dónde es mayor la velocidad de escape, en la Tierra o en la Luna?

Cuestión 28ª Razone, a partir de la segunda ley de Kepler, cómo cambia la velocidad de un planeta a lo largo de su órbita al variar la distancia al Sol.

Cuestión 29ª a) Haciendo uso de consideraciones energéticas, deduzca la expresión de la velocidad mínima que habría que imprimirle a un objeto de masa m, situado en la superficie de un planeta de masa M y radio R, para que saliera de la influencia del campo gravitatorio del planeta. b) Se desea que un satélite se encuentre en una órbita geoestacionaria. Razone con qué período de revolución y a qué altura debe hacerlo.

Cuestión 30ª ¿Se pueden determinar las masas de la Tierra y del satélite conociendo los datos de la órbita descrita por el satélite? Razone la respuesta.

Cuestión 31ª Un campo uniforme es aquel cuya intensidad es la misma en todos los puntos. ¿Tiene el mismo valor su potencial en todos los puntos? Razone la respuesta.

Cuestión 32ª El radio orbital de un planeta es N veces mayor que el de la Tierra. Razone cuál es la relación entre sus periodos.

Cuestión 33ª Demuestre la tercera ley de Kepler a partir de la ley de gravitación universal de Newton para un órbita circular.

Cuestión 34ª a) Explique qué se entiende por velocidad de escape y deduzca razonadamente su expresión. b) Razone qué energía habría que comunicar a un objeto de masa m, situado a una altura h sobre la superficie de la Tierra, para que se alejara indefinidamente de ella.

Cuestión 35ª Suponga que el radio de la Tierra se redujera a la mitad de su valor manteniéndose constante la masa terrestre. ¿Afectaría ese cambio al periodo de revolución de la Tierra alrededor del Sol? Razone la respuesta.

Cuestión 36ª a) Relación entre campo y potencial gravitatorios. b) Dibuje en un esquema las líneas del campo gravitatorio creado por una masa puntual M. Una masa m, situada en un punto A, se traslada hasta otro punto B, más próximo a M. Razone si aumenta o disminuye su energía potencial.

Cuestión 37ª Indique el significado de velocidad de escape y razone cómo cambia la velocidad de escape de un cuerpo si varía su altura sobre la superficie terrestre de 2 RT a 3 RT .

Cuestión 38ª Dos satélites A y B de distintas masas ($m_A > m_B$) describen órbitas circulares de idéntico radio alrededor de la Tierra. Razone la relación que guardan sus respectivas velocidades y sus energías potenciales.

Cuestión 39ª Razone en qué punto, situado entre dos masas puntuales m_1 y m_2 ($m_1 = m_2$), sería nula la fuerza sobre una tercera masa puntual m_3 y cuál sería la energía potencial de esta última masa en esa posición.

Cuestión 40ª Razone por qué la energía potencial gravitatoria de un cuerpo aumenta cuando se aleja de la Tierra.

Cuestión 41ª La Tierra está más cerca del Sol en el invierno boreal (en el hemisferio norte) que en el verano. Tanto enero como julio tienen 31 días. ¿En cuál de esos meses recorre la Tierra mayor distancia en su trayectoria? Justifique la respuesta.

Cuestión 42ª a) Explique qué es el peso de un objeto. b) Razone qué relación existe entre el peso de un satélite que se encuentra en una órbita de radio r en torno a la Tierra y el que tendría en la superficie terrestre.

Cuestión 43ª Dos partículas de masas m y 2m están separadas una cierta distancia. Explique qué fuerza actúa sobre cada una de ellas y cuál es la aceleración de dichas partículas.

Cuestión 44ª a) Suponga que el planeta Tierra duplicase su radio. ¿En qué factor debería variar su masa para que el campo gravitatorio en su superficie se mantuviera constante? Razone la respuesta.
b) Dos partículas puntuales de masa m están separadas una distancia r. Al cabo de un cierto tiempo la masa de la primera se ha reducido a la mitad y la de la segunda a la octava parte. Para que la fuerza de atracción entre ellas tenga igual valor que el inicial, ¿es necesario acercarlas o alejarlas? Razone la respuesta.

Cuestión 45ª a) Explique qué es la velocidad orbital de un satélite y deduzca su expresión. b) Indique qué es un satélite geoestacionario. ¿Con qué período de revolución y a qué altura debe orbitar en torno a la Tierra?

CUESTIONES INTERACCIÓN ELÉCTRICA

Cuestión 46ª Dos cargas puntuales iguales están separadas por una distancia **d**. a) ¿Es nulo el campo eléctrico total en algún punto? Si es así, ¿cuál es la posición de dicho punto? b) Repita el apartado anterior suponiendo que las cargas fueran de distinto signo.

Cuestión 47ª Indique si son o no correctas las siguientes frases, justificando las respuestas: a) Si dos puntos se encuentran al mismo potencial eléctrico, el campo eléctrico en los puntos del segmento que une dichos puntos es nulo. b) El trabajo necesario para transportar una carga de un punto a otro que se encuentra a distinto potencial eléctrico, es nulo.

Cuestión 48ª ¿Qué diferencias puedes señalar entre la interacción electrostática entre dos cargas puntuales y la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales.

Cuestión 49ª Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) ¿Puede ser nulo el campo eléctrico producido por dos cargas puntuales en un punto del segmento que las une? b) ¿Se puede determine el campo eléctrico en un punto si conocemos el valor del potencial en ese punto?

Cuestión 50ª a) Razone si la energía potencial electrostática de una carga **q** aumenta o disminuye, al pasar del punto **A** al punto **B**, siendo el potencial en **A** mayor que en **B**. b) El punto **A** está más alejado que el **B** de la carga **Q** que crea el campo. Razone si la carga **Q** es positiva o negativa.

Cuestión 51ª ¿Puede anularse el campo gravitatorio y/o el campo eléctrico en un punto del segmento que une a dos partículas cargadas? Razone la respuesta.

Cuestión 52ª En una región del espacio el potencial electrostático aumenta en el sentido positivo del eje Z y no cambia en las direcciones de los otros dos ejes. a) Dibuje en un esquema las líneas del campo electrostático y las superficies equipotenciales. b) ¿En qué dirección y sentido se moverá un electrón, inicialmente en reposo?

Cuestión 53ª Una partícula cargada penetra en un campo eléctrico uniforme con una velocidad perpendicular al campo. Describa la trayectoria seguida por la partícula y explique cómo cambia su energía.

Cuestión 54ª Dos cargas eléctricas puntuales, positivas e iguales están situadas en los puntos A y B de una recta horizontal. Conteste razonadamente a las siguientes cuestiones: a) ¿Puede ser nulo el potencial en algún punto del espacio que rodea a ambas cargas? ¿Y el campo eléctrico? b) Si separamos las cargas a una distancia doble de la inicial, ¿se reduce a la mitad la energía potencial del sistema?

Cuestión 55ª Justifique razonadamente, con la ayuda de un esquema, qué tipo de movimiento efectúan un protón y un neutrón, si penetran con una velocidad $\mathbf{v_0}$ en una región en la que existe un campo eléctrico uniforme de la misma dirección y sentido contrario que la velocidad $\mathbf{v_0}$

Cuestión 56ª Comente las siguientes afirmaciones relativas al campo eléctrico: a) Cuando una carga se mueve sobre una superficie equipotencial no cambia su energía mecánica. b) Dos superficies equipotenciales no pueden cortarse.

Cuestión 57ª a) Explique las características del campo eléctrico en una región del espacio en la que el potencial eléctrico es constante. b) Justifique razonadamente el signo de la carga de una partícula que se desplaza en la dirección y sentido de un campo eléctrico uniforme, de forma que su energía potencial aumenta.

Cuestión 58ª Razone la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones: a) Cuando nos alejamos de una carga eléctrica negativa el potencial electrostático aumenta pero la intensidad del campo que crea disminuye. b) En algún punto P situado en el segmento que une dos cargas eléctricas idénticas, el potencial electrostático se anula pero no la intensidad del campo electrostático.

Cuestión 59ª Razone las respuestas a las siguientes preguntas: a) Una carga negativa se mueve en la dirección y sentido de un campo eléctrico uniforme. ¿Aumenta o disminuye el potencial eléctrico en la posición de la carga? ¿Aumenta o disminuye su energía potencial? b) ¿Cómo diferirían las respuestas del apartado anterior si se tratara de una carga positiva?

Cuestión 60ª Una carga eléctrica positiva se mueve en un campo eléctrico uniforme. Razone cómo varía su energía potencial electrostática si la carga se mueve: a) En la misma dirección y sentido del campo eléctrico. ¿Y si se mueve en sentido contrario? b) En dirección perpendicular al campo eléctrico. ¿Y si la carga describe una circunferencia y vuelve al punto de partida?

Cuestión 61ª Al moverse una partícula cargada en la dirección y sentido de un campo eléctrico, aumenta su energía potencial. ¿Qué signo tiene la carga de la partícula? Razona la respuesta.

Cuestión 62ª a) Una partícula cargada negativamente pasa de un punto A, cuyo potencial es V_A, a otro B, cuyo potencial es $V_B > V_A$. Razone si la partícula gana o pierde energía potencial. b) Los puntos C y D pertenecen a una misma superficie equipotencial. ¿Se realiza trabajo al trasladar una carga (positiva o negativa) desde C a D? Justifique la respuesta.

Cuestión 63ª ¿Es nulo el campo eléctrico en algún punto del segmento que une dos cargas puntuales de igual valor absoluto pero de signo contrario? Razone la respuesta.

Cuestión 63ª a) Explique la relación entre campo y potencial eléctrico. b) Razone si puede ser distinto de cero el potencial eléctrico en un punto donde el campo eléctrico es nulo.

Cuestión 64ª Dos cargas $+q_1$ y $-q_2$ están situadas en dos puntos de un plano. Explique, con ayuda de una gráfica, en qué posición habría que colocar una tercera carga, $+q_3$, para que estuviera en equilibrio.

Cuestión 65ª a) Razone si la energía potencial electrostática de una carga q aumenta o disminuye al pasar de un punto A a otro B siendo el potencial en A menor que en B.

b) El punto A está más alejado que el B de la carga Q que crea el campo. Razone si la carga Q es positiva o negativa.

Cuestión 66ª Una partícula cargada se mueve espontáneamente hacia puntos en los que el potencial electrostático es mayor. Razone si, de ese comportamiento, puede deducirse el signo de !a carga.

Cuestión 67ª Considere dos cargas eléctricas +Q y –Q, situadas en dos puntos A y B. Razone cuál sería el potencial electrostático en el punto medio del segmento que une los untos A y B. ¿Puede deducirse de dicho valor que el campo eléctrico es nulo en dicho punto?

Cuestión 68ª En una región del espacio existe un campo electrostático generado por una carga puntual negativa, q. Dados dos puntos, A más cercano a la carga y B más alejado de la carga, razone si el potencial en B es mayor o menor que en A.

Cuestión 69ª Dos cargas eléctricas puntuales positivas están situadas en dos puntos A y B de una recta. ¿Puede ser nulo el campo eléctrico en algún punto de esa recta? ¿Y si las dos cargas fueran negativas? Razone las respuestas.

Cuestión 70ª Dos cargas puntuales q y - q se encuentran sobre el eje X, en x = a y en x = - a, respectivamente. Escriba las expresiones del campo electrostático y del potencial electrostático en el origen de coordenadas.

Cuestión 71ª Una partícula cargada negativamente pasa de un punto A, cuyo potencial es V_A, a otro B, cuyo potencial es $V_B < V_A$. Razone si la partícula gana o pierde energía potencial.

Cuestión 72ª Dos cargas eléctricas puntuales positivas están situadas en dos puntos A y B de una recta. ¿Puede ser nulo el campo eléctrico en algún punto de esa recta? ¿Y si una de las cargas fuera negativa? Razone las respuestas.

PROBLEMAS

Problema 1º Dos partículas de masas m_1 = 2 kg y m_2 = 5 kg están situadas en los puntos P_1(0,2)m y P_2(1,0) m, respectivamente.

a) Dibuje el campo gravitatorio producido por cada una de las masas en el origen de coordenadas y en el punto P(1,2) m y Calcule el campo gravitatorio total en el punto P.
b) Calcule el trabajo necesario para desplazar una partícula de 0,1 kg desde el punto O al punto P.

SOLUC: a) $\vec{g} = -1{,}33.10^{-10}\,\vec{i} - 8{,}44.10^{-10}\,\vec{j}\ \ m/s^2$ b) $W_{O\ ext}^{P} = 10^{-11}\ J$

Problema 2º Determine, razonadamente en qué punto (o puntos) del plano XY es nula la intensidad de campo eléctrico creado por dos cargas idénticas de $q_1 = q_2 = -4 \times 10^{-6}$ C, situadas respectivamente en los puntos (-2,0) y (2,0). ¿Es también nulo el potencial en ese punto (o puntos)? Calcule en cualquier caso su valor.

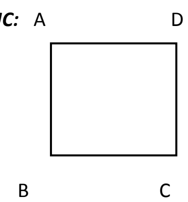
$K_e = 9 \times 10^9\ N\cdot m^2\cdot C^{-2}$

SOLUC: V = - 36 000 V

Problema 3º En dos vértices opuestos de un cuadrado, de 6 cm de lado, se colocan las masas m_1=100 g y m_2 = 300 g.

a) Dibuje en un esquema el campo gravitatorio producido por cada masa en el centro del cuadrado y calcule la fuerza que actúa sobre una masa m =10 g situada en dicho punto.
b) Calcule el trabajo realizado al desplazar la masa de 10 g desde el centro del cuadrado hasta uno de los vértices no ocupados por las otras dos masas.

SOLUC:



a) ¿? Si m_1 está en A y m_2 en C: $\vec{F} = 5{,}29.10^{-11}\,\vec{i} - 5{,}29.10^{-11}\,\vec{j}\ \ N$

Si m_1 está en B y m_2 en D: $\vec{F} = 5{,}29.10^{-11}\,\vec{i} + 5{,}29.10^{-11}\,\vec{j}\ \ N$

b) En cualquier caso: $W_{centro_{ext.}}^{vértice} = 1{,}9.10^{-12}\ J$

Problema 4º Una partícula de carga 6×10^{-6} C se encuentra en reposo en el punto (0,0). Se aplica un campo eléctrico uniforme de 500 N/C, dirigido en el sentido positivo del eje OY.

a) Describa la trayectoria seguida por la partícula hasta el instante en que se encuentra en el punto A, situado a 2 m del origen. ¿Aumenta o disminuye la energía potencial de la partícula en dicho desplazamiento?, ¿en qué se convierte dicha variación de energía?
b) Calcule el trabajo realizado por el campo en el desplazamiento de la partícula y la diferencia de potencial entre el origen y el punto A.

SOLUC: b) $W_{O\ campo}^{A} = 6.10^{-3}\ J$ $\Delta V_O^A = -1000\ V$

Problema 5º a) Determine la densidad media de la Tierra.

b) ¿A qué altura sobre la superficie de la Tierra la intensidad del campo gravitatorio terrestre se reduce a la tercera parte?

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$ R_T = 6370 km $g = 10\ m\ s^{-2}$

SOLUC: a) Observa que no te proporcionan la masa de la tierra. Tú tienes que calcularla con los datos proporcionados en el enunciado:

d = 5622 Kg/m^3

b) h = 4660 km

Problema 6º Dos cargas $q_1 = 2 \times 10^{-6}$ C y $q_2 = -4 \times 10^{-6}$ C están fijas en los puntos P_1 (0,2) m. y P_2 (1,0) m., respectivamente.

a) Dibuje el campo eléctrico producido por cada una de las cargas en el punto O (0,0) m. y en el punto P (1,2) m. y calcule r el campo eléctrico total en el punto P.

b) Calcule el trabajo necesario para desplazar una carga $q = -3 \times 10^{-6}$ C desde el punto O hasta el punto P y explique el significado físico de dicho trabajo.
$K_e = 9 \times 10^9$ N·m²·C⁻²

SOLUC: a) $\vec{E}(P) = 18000\,\vec{i} - 9000\,\vec{j}\ \ N/C$ b) $W_{O\ ext}^{P} = -0{,}081\ J$

Problema 7º a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre un cuerpo de 1000 kg, situado en el punto medio entre la Tierra y la Luna y calcule el valor de la fuerza resultante. La distancia desde el centro de la Tierra hasta el de la Luna es $3{,}84 \cdot 10^8$ m.

b) ¿A qué distancia del centro de la Tierra se encuentra el punto, entre la Tierra y la Luna, en el que el campo gravitatorio es nulo?

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻² ; M T = $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg ; M L = $7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg

SOLUC: a) $F_{Rte} = F_T - F_L = 10{,}8 - 0{,}13 = 10{,}67$ N dirigida hacia la tierra b) ¿?

Problema 8º Dos partículas con cargas positivas iguales de 4×10^{-6} C ocupan dos vértices consecutivos de un cuadrado de 1 m de lado.

a) Calcule el potencial electrostático creado por ambas cargas en el centro del cuadrado. ¿Se modificaría el resultado si las cargas fueran de signos opuestos?

b) Calcule el trabajo necesario para trasladar una carga de 5×10^{-7} C desde uno de los vértices restante hasta el centro del cuadrado. ¿Depende este resultado de la trayectoria seguida por la carga?
$K_e = 9 \times 10^9$ N·m²·C⁻²

SOLUC: a) $V = V_1 + V_2 = 2V_1 = 2V_2 = 101408\ V$ ¿? b) $W_{ext} = 0{,}02\ J$

Problema 9º Dos masas, de 5 y 10 kg, están situadas en los puntos (0, 3) y (4, 0) m, respectivamente.

a) Calcule el campo gravitatorio en el punto (4, 3) m y represéntelo gráficamente

b) Determine el trabajo necesario para trasladar una masa de 2 kg desde el punto (4, 3) hasta el punto (0, 0) m. Explique si el valor del trabajo obtenido depende del camino seguido.

SOLUC: a) $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = -2{,}08.10^{-11}\,\vec{i} - 7{,}41.10^{-11}\,\vec{j}\ \ m/s^2$ b) $W_{(4,3)_{ext.}}^{0} = 5{,}625.10^{-11}\ J$

Problema 10º En las proximidades de la superficie terrestre se aplica un campo eléctrico uniforme. Se observa que al soltar una partícula de 2 g cargada con $5 \cdot 10^{-5}$ C permanece en reposo.

a) Determine razonadamente las características del campo eléctrico (módulo dirección y sentido).

b) Explique qué ocurriría si la carga fuera: i) $10 \cdot 10^{-5}$ C ; ii) $-5 \cdot 10^{-5}$ C.

SOLUC: a) $\vec{E} = 392\,\vec{j}\ \ N.C^{-1}$ b) ¿?

Problema 11º Dos cargas puntuales, $q_1 = 2 \times 10^{-6}$ C y $q_2 = 8 \times 10^{-6}$ C, están situadas en los puntos (-1, 0) m y (2, 0) m, respectivamente.

a) Determine en qué punto del segmento que une las dos cargas es nulo el campo y/o el potencial electrostático. ¿Y si fuera $q_1 = -2 \times 10^{-6}$ C?
b) Explique, sin necesidad de hacer cálculos, si aumenta o disminuye la energía electrostática cuando se traslada otra carga, **Q**, desde el punto (0, 20) m hasta el (0, 10) m.
$K_e = 9 \times 10^9$ N·m^2·C^{-2}

SOLUC: a) Si $q_1 = 2.10^{-6}$ C y $q_2 = 8.10^{-6}$ C, el campo se anularía en el origen de coordenadas y el potencial no se anularía en ningún punto

Si $q_1 = -2.10^{-6}$ C y $q_2 = 8.10^{-6}$ C, el campo no se anularía en ningún punto y el potencial no se anularía en el punto (-0'4, 0) m

b) ¿?

Problema 12º Dos partículas de 10 g se encuentran suspendidas por dos hilos de 30 cm desde un mismo punto. Si se les suministra a ambas partículas la misma carga, se separan de modo que los hilos forman entre sí un ángulo de 60º.

a) Dibuje en un diagrama las fuerzas que actúan sobre las partículas y analice la energía del sistema en esa situación.
b) Calcule el valor de la carga que se suministra a cada partícula.
$K_e = 9 \times 10^9$ N·m^2·C^{-2} ; g = 10 m s^{-2}.

SOLUC: b) ± 0,76 μC

Problema 13º Dos cargas puntuales iguales, de - 1,2 ·10^{-6} C cada una, están situadas en los puntos A (0, 8) m y B (6, 0) m. Una tercera carga, de - 1,5 ·10^{-6} C, se sitúa en el punto P (3,4) m.

a) Represente en un esquema las fuerzas que se ejercen entre las cargas y calcule la resultante sobre la tercera carga.
b) Calcule la energía potencial de dicha carga.
$K_e = 9 \times 10^9$ N·m^2·C^{-2}

SOLUC: a) $\vec{F} = 0 \ N$ b) $E_p = 6,48.10^{-3} \ J$

Problema 14º Dos masas puntuales m = 10 kg y m' = 5 kg están situadas en los puntos (0,3) m y (4,0) m, respectivamente.

a) Dibuje el campo gravitatorio producido por cada una de las masas en el punto A (0,0) m y en el punto B (4,3) m y calcule el campo gravitatorio total en ambos puntos.
b) Determine el trabajo necesario para desplazar una partícula de 0,5 kg desde el punto B hasta el A. Discuta el signo de este trabajo y razone si su valor depende de la trayectoria seguida.

SOLUC: a) $\vec{g} = 2,8.10^{-11}\,\vec{i} + 7,41.10^{-11}\,\vec{j} \ m.s^{-2}$ b) $W_{B_{ext.}}^{A} = -1,3.10^{-11} \ J$

Problema 15º Dos pequeñas bolitas, de 20 g cada una, están sujetas por hilos de 2,0 m de longitud suspendidas de un punto común. Cuando ambas se cargan con la misma carga eléctrica, los hilos se separan hasta formar un ángulo de 15º. Suponga que se encuentran en el vacío, próximas a la superficie de la Tierra:

a) Calcule la carga eléctrica comunicada a cada bolita.
b) Se duplica la carga eléctrica de la bolita de la derecha. Dibuje en un esquema las dos situaciones (antes y después de duplicar la carga de una de las bolitas) e indique todas las fuerzas que actúan sobre ambas bolitas en la nueva situación de equilibrio.
K = 9 10^9 N m^{2}C^{-2} ; g = 10 m s^{-2}

SOLUC: a) ± 8,8.10^{-7} C b) ¿?

Problema 16º Dos cargas $q_1 = 10^{-6}$ C y $q_2 = - 4 \cdot 10^{-8}$ C están situadas a 2 m una de otra.

a) Analice, haciendo uso de las representaciones gráficas necesarias, en qué lugar a lo largo de la recta que las une, se anula la intensidad del campo electrostático creado por estas cargas.
b) Determine la situación de dicho punto y calcule el potencial electrostático en él.

SOLUC: b) A 0,56 m a la derecha de la segunda carga ($6r_2^2 - r_2 - 1 = 0$) $V = V_1 + V_2 = 3600 - 720 = 2880$ V

Problema 17º Una esfera pequeña de 100 g, cargada con 10^{-3} C, está sujeta al extremo de un hilo aislante, inextensible y de masa despreciable, suspendido del otro extremo fijo.

a) Determine la intensidad del campo eléctrico uniforme, dirigido horizontalmente, para que la esfera se encuentre en reposo y el hilo forme un ángulo de 30º con la vertical.
b) Calcule la tensión que soporta el hilo en las condiciones anteriores. $g = 10\ ms^{-2}$

SOLUC: b) E = 575 N/C b) T = 1,15 N

Problema 18º El campo eléctrico en las proximidades de la superficie de la Tierra es aproximadamente 150 N C^{-1} , dirigido hacia abajo.

a) Compare las fuerzas eléctrica y gravitatoria que actúan sobre un electrón situado en esa región.
b) ¿Qué carga debería suministrarse a un clip metálico sujetapapeles de 1 g para que la fuerza eléctrica equilibre su peso cerca de la superficie de la Tierra?

$me = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg ; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C ; $g = 10\ m\ s^{-2}$

SOLUC: a) $\vec{F}_{elect.} = 2{,}4.10^{-17}\ \vec{j}\ N$ $\vec{F}_{grav.} = -9{,}1.10^{-30}\ \vec{j}\ N$ $\frac{F_{elect.}}{F_{grav.}} = 2{,}64.10^{-12}$ b) - 66,7 μC

Problema 19º Un electrón, con una velocidad de $6 \cdot 10^{6}$ m s^{-1}, penetra en un campo eléctrico uniforme y su velocidad se anula a una distancia de 20 cm desde su entrada en la región del campo.

a) Razone cuáles son la dirección y el sentido del campo eléctrico.
b) Calcule su módulo.
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C ; $me = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg $K= 9 \cdot 10^{9}$ N m^2 C^{-2}

SOLUC: a) y b) 512 $N.C^{-1}$ en la dirección y sentido en la que se movía el electrón

Problema 20º Un electrón se mueve con una velocidad de $5 \cdot 10^{5}$ m s^{-1} y penetra en un campo eléctrico de 50 N C^{-1} de igual dirección y sentido que la velocidad.

a) Haga un análisis energético del problema y calcule la distancia que recorre el electrón antes de detenerse.
b) Razone qué ocurriría si la partícula incidente fuera un protón.

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C ; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg ; $m_p = 1{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg

SOLUC: a) 1,4 cm b) ¿?

Problema 21º Una partícula con carga $2 \cdot 10^{-6}$ C se encuentra en reposo en el punto (0,0). Se aplica un campo eléctrico uniforme de 500 N C^{-1} en el sentido positivo del eje OY.

a) Describa el movimiento seguido por la partícula y la transformación de energía que tiene lugar a lo largo del mismo.
b) Calcule la diferencia de potencial entre los puntos (0,0) y (0,2) m y el trabajo realizado para desplazar la partícula entre dichos puntos.

SOLUC: b) $\Delta V = - 1000$ V $W_{campo} = 2.10^{-3}$ J

Problema 22º Una partícula de masa m y carga -10^{-6} C se encuentra en reposo al estar sometida al campo gravitatorio terrestre y a un campo eléctrico uniforme E = 100 N C^{-1} de la misma dirección.

a) Haga un esquema de las fuerzas que actúan sobre la partícula y calcule su masa.
b) Analice el movimiento de la partícula si el campo eléctrico aumentara a 120 N C^{-1} y determine su aceleración. g = 10 m s^{-2}

SOLUC: a) m = 10^{-5} kg b) a = 2 m/s^2

Problema 23º Una bolita de plástico de 2 g se encuentra suspendida de un hilo de 20 cm de longitud y, al aplicar un campo eléctrico uniforme y horizontal de 1000 N C- 1, el hilo forma un ángulo de 15º con la vertical.

a) Dibuje en un esquema el campo eléctrico y todas las fuerzas que actúan sobre la esfera y determine su carga eléctrica.
b) Explique cómo cambia la energía potencial de la esfera al aplicar el campo eléctrico.
g = 10 m s^{-2}

SOLUC: a) q = ± 5,4 μC b) ¿?

Problema 24º El campo eléctrico en un punto P, creado por una carga q situada en el origen, es de 2000 N C^{-1} y el potencial eléctrico en P es de 6000 V.

a) Determine el valor de q y la distancia del punto P al origen. C
b) Calcule el trabajo realizado al desplazar otra carga Q = $1{,}2 \cdot 10^{-6}$ C desde el punto (3, 0) m al punto (0, 3) m. Explique por qué no hay que especificar la trayectoria seguida.
$K_e = 9 \times 10^9$ N·m^2·C^{-2}

SOLUC: a) q = 2 μC r = 3 m b) 0 J ¿?

Problema 25º La masa del Sol es 324440 veces mayor que la de la Tierra y su radio 108 veces mayor que el terrestre.

a) ¿Cuántas veces es mayor el peso de un cuerpo en la superficie del Sol que en la Tierra?
b) ¿Cuál sería la máxima altura alcanzada por un proyectil que se lanzase verticalmente hacia arriba, desde la superficie solar, con una velocidad de 720 km/h?

SOLUC: a) 27,82 veces mayor b) 73,6 m

Problema 26º Un satélite de comunicaciones está situado en órbita geoestacionaria (T = 24 h) circular en torno al ecuador terrestre. Calcule:

a) Radio de la trayectoria, aceleración tangencial del satélite y trabajo realizado por la fuerza gravitatoria durante un semiperiodo.
b) Campo gravitatorio y aceleración de la gravedad en cualquier punto de la órbita.
G = $6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} $M_T = 6 \times 10^{24}$ kg.

SOLUC: a) r = 42 000 km a_t = 0 m/s ^{2} W = 0 J b) a = g = 0,22 m/s^2

Problema 27º Un satélite describe una órbita circular de radio $2R_T$ en torno a la Tierra.

a) Determine su velocidad orbital.
b) Si el satélite pesa 5000 N en la superficie terrestre, ¿Cuál será su peso en la órbita? Explique las fuerzas que actúan sobre el satélite.
G = $6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} $M_T = 6 \times 10^{24}$ kg. R_T = 6400 km.

SOLUC: a) v = 5595 m/s b) P = 1255 N ¿?

Problema 28º La Luna dista de la Tierra $3{,}8 \times 10^8$ m, si con un cañón lo suficientemente potente se lanzara desde la Tierra hacia la Luna un proyectil:

a) ¿En qué punto de su trayectoria hacia la Luna la aceleración del proyectil sería nula?
b) ¿Qué velocidad mínima inicial debería poseer para llegar a ese punto? ¿cómo se movería a partir de esa posición?

$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; $M_T = 6 \times10^{24}$ kg; $R_T = 6400$ km; $M_L = 7 \times10^{22}$ kg; $R_L = 1600$ km.

SOLUC: a) A $5{,}5.10^4$ km de la luna b) $v = 1{,}1.10^4$ m/s ¿?

Problema 29º La masa de la Luna es 0,01 veces la de la Tierra y su radio es 0,25 veces el radio terrestre. Un cuerpo, cuyo peso en la Tierra es de 800 N, cae desde una altura de 50 m sobre la superficie lunar.

a) Determine la masa del cuerpo y su peso en la Luna.
b) Realice el balance de energía en el movimiento de caída y calcule la velocidad con que el cuerpo llega a la superficie.
$g_T = 10$ m/s^2

SOLUC: a) m = 80 Kg P = 128 N b) ¿? V = 12,65 m/s

Problema 30º Un meteorito de 1000 kg colisiona con otro, a una altura sobre la superficie terrestre de 6 veces el radio de la Tierra, y pierde toda su energía cinética.

a) ¿Cuánto pesa el meteorito en ese punto y cuál es su energía mecánica tras la colisión?
b) Si cae a la Tierra, haga un análisis energético del proceso de caída. ¿Con qué velocidad llega a la superficie terrestre? Razone las respuestas
$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} $M_T = 6 \times 10^{24}$ kg. $R_T = 6400$ km.

SOLUC: a) P = 200 N E = $-8{,}93.10^9$ J b) ¿? V = 10 000 m/s

Problema 31º a) Explique la influencia que tiene la masa y el radio de un planeta en la aceleración de la gravedad en su superficie y en la energía potencial de una partícula próxima a dicha superficie.
b) Imagínese que la Tierra aumentara su radio al doble y su masa al cuádruple, ¿cuál sería el nuevo valor de g?, ¿y el nuevo periodo de la Luna?

$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; $M_T = 6 \times 10^{24}$ kg ; $R_T = 6400$ km ; $M_L = 7 \times 10^{22}$ kg $R_L = 1600$ km

SOLUC: a) ¿? b) ¿?

Problema 32º Un satélite artificial en órbita geoestacionaria es aquel que, al girar con la misma velocidad angular de rotación de la Tierra, se mantiene sobre la misma vertical.

a) Explique las características de esa órbita y calcule su altura respecto a la superficie de la Tierra.
b) Razone qué valores obtendría para la masa y el peso de un cuerpo situado en dicho satélite sabiendo que su masa en la Tierra es de 20 kg.
$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} $M_T = 6 \times 10^{24}$ kg. $R_T = 6400$ km

SOLUC: a) ¿? h = 36 600 km b) m = 20 kg P = 4,4 N

Problema 33º Un satélite artificial de 1000 kg gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de 12.000 km. de radio.

a) Explique las variaciones de energía cinética y potencial del satélite desde su lanzamiento en la superficie terrestre hasta que alcanzó su órbita y calcule el trabajo realizado.
b) ¿Qué variación ha experimentado el peso del satélite respecto del que tenía en al superficie terrestre?
$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} $M_T = 6 \times 10^{24}$ kg. $R_T = 6400$ km.

SOLUC: a) ¿? $W_{ext.} = 3.10^{10}$ J b) $\Delta P = -7220{,}8$ N

Problema 34º Se eleva un cuerpo de 200 kg desde la superficie de la Tierra hasta una altura de 5000 km.

a) Explique las transformaciones energéticas que tienen lugar y calcule el trabajo mínimo necesario.
b) Si, por error, hubiéramos supuesto que el campo gravitatorio es uniforme y de valor igual al que tiene en la superficie de la Tierra, razone si el valor del trabajo sería mayor, igual o menor que el calculado en el apartado a). Justifique si es correcta dicha suposición.
$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} $M_T = 6 \times 10^{24}$ kg. $R_T = 6400$ km.

SOLUC: a) ¿? $W_{ext.} = 5{,}5.10^9$ J b) ¿?

Problema 35º Un satélite se encuentra a una altura de 600 Km sobre la superficie de la Tierra, describiendo una órbita circular.

a) Calcule el tiempo que tarda en dar una vuelta completa, razonando la estrategia seguida para dicho cálculo.
b) Si la velocidad orbital disminuyera, explique si el satélite se acercaría o se alejaría de la Tierra, e indique que variaciones experimentarían la energía potencial, la energía cinética y la energía mecánica del satélite.
$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} $M_T = 6 \times 10^{24}$ kg. $R_T = 6400$ km.

SOLUC: a) T = 1,62 h b) ¿?

Problema 36º Dos partículas de masas $m_1 = 2$ kg y $m_2 = 5$ kg están situadas en los puntos $P_1(0,2)$m y $P_2(1,0)$ m, respectivamente.

a) Dibuje el campo gravitatorio producido por cada una de las masas en el punto O (0,0)m y en el punto P(1,2) m y Calcule el campo gravitatorio total en el punto P.
b) Calcule el trabajo necesario para desplazar una partícula de 0,1 kg desde el punto O al punto P.

SOLUC: a) $\left.\begin{array}{l}\vec{g}_1 = -1{,}334.10^{-10}\,\vec{j}\ \ m/s^2\\ \vec{g}_2 = -8{,}3375.10^{-11}\,\vec{i}\ \ m/s^2\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = -8{,}3375.10^{-11}\,\vec{i} - 1{,}334.10^{-10}\,\vec{j}\ \ m/s^2$ b)

$W_{O_{ext.}}^{P} = 10^{-11}\ J$

Problema 37º Un satélite describe una órbita circular en torno a la Tierra de radio doble que el terrestre.

a) Determine la velocidad del satélite y su periodo de rotación.
b) Explique cómo variarían las magnitudes determinadas en a) en los siguientes casos: i) si la masa del satélite fuese el doble; ii) si orbitase en torno a un planeta de masa la mitad y radio igual a los de la Tierra.
$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} $M_T = 6 \times 10^{24}$ kg. $R_T = 6400$ km.

SOLUC: a) v = 5592 m/s T = 4 h b) ¿?

Problema 38º Un cuerpo de 300 kg situado a 5000 km de altura sobre la superficie terrestre, cae hacia el planeta.

a) Explique las transformaciones energéticas que tienen lugar y Calcule con qué velocidad llega a la superficie, suponiendo que el cuerpo partió del reposo.
b) ¿A qué altura sobre la superficie terrestre debe estar el cuerpo para que su peso se reduzca a la cuarta parte de su valor en la superficie?
$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} $M_T = 6 \times 10^{24}$ kg. $R_T = 6400$ km.

SOLUC: a) ¿? v = 7420 m/s b) h = 6400 km

Problema 39º El satélite de investigación europeo (ERS-2) sobrevuela la Tierra a 800 km de altura. Suponga su trayectoria circular y su masa de 1000 kg.

a) Calcule de forma razonada la velocidad orbital del satélite.
b) Si suponemos que el satélite se encuentra sometido únicamente a la fuerza de gravitación debida a la Tierra, ¿por qué no cae sobre la superficie terrestre? Razone la respuesta.
R_T = 6370 km ; g = 10 m s^{-2}

SOLUC: a) v = 7400 m/s b) ¿?

Problema 40º Un satélite artificial de 500 kg gira alrededor de la Luna en una órbita circular situada a 120 km sobre la superficie lunar y tarda 2 horas en dar una vuelta completa.

a) Con los datos del problema, ¿se podría calcular la masa de la Luna? Explique como lo haría.
b) Determine la energía potencial del satélite cuando se encuentra en la órbita citada.
$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; R_L = 1740 km

SOLUC: a) ¿? $M_L = 7{,}3.10^{22}$ kg b) $E_p = -1{,}3.10^{9}$ J

Problema 41º a) Explique cualitativamente la variación del campo gravitatorio terrestre con la altura y haga una representación gráfica aproximada de dicha variación.

b) Calcule la velocidad mínima con la que habrá que lanzar un cuerpo desde la superficie de la Tierra para que ascienda hasta una altura de 4000 km.

R_T = 6370 km ; g = 10 m s^{-2}

SOLUC: a) ¿? b) v = 6958 m/s

Problema 42º Suponga que un cuerpo se deja caer desde la misma altura sobre la superficie de la Tierra y de la Luna.

a) Explique por qué los tiempos de caída serían distintos y calcule su relación.
b) Calcule la altura que alcanzará un cuerpo que es lanzado verticalmente en la superficie lunar con una velocidad de 40 m s^{-1}.
$M_T = 81\ M_L$; $R_T = (11/3)\ R_L$; g = 10 m s^{-2}

SOLUC: a) ¿? b) h = 500 m

Problema 43º La nave espacial Apolo 11 orbitó alrededor de la Luna con un período de 119 minutos y a una distancia media del centro de la Luna de $1{,}8 \cdot 10^6$ m. Suponiendo que su órbita fue circular y que la Luna es una esfera uniforme:

a) determine la masa de la Luna y la velocidad orbital de la nave;
b) ¿cómo se vería afectada la velocidad orbital si la masa de la nave espacial se hiciese el doble? Razone la respuesta.

SOLUC: a) $M_L = 6.65.10^{22}$ kg v = 1581 m/s b) ¿?

Problema 44º Un satélite artificial de 400 kg gira en una órbita circular a una altura h sobre la superficie terrestre. A dicha altura el valor de la gravedad es la tercera parte del valor en la superficie de la Tierra.

a) Explique si hay que realizar trabajo para mantener el satélite en órbita y calcule su energía mecánica.
b) Determine el período de la órbita.
g = 10 m s^{-2} ; $R_T = 6{,}4 \bullet 10^6$ m

SOLUC: a) ¿? $E_m = -\ 7{,}4.10^{9}$ J (OJO: No tienes la masa de la tierra. Tú tienes que deducirla con los datos aportados) b) T = 3,18 h

Problema 45º Considere dos cargas eléctricas puntuales de $q_1=2\cdot10^{-6}$ C y $q_2=-4\cdot10^{-6}$ C separadas una distancia de 0,1 m.

a) Determine el valor del campo eléctrico en el punto medio del segmento que une ambas cargas. ¿Puede ser nulo el campo eléctrico en algún punto de la recta que las une? Conteste razonadamente con ayuda de un esquema.
b) Razone si es posible que el potencial eléctrico se anule en algún punto de dicha recta y, en su caso, calcule la distancia de dicho punto a las cargas.

K = 9 $\cdot10^9$ N m^2 C^{-2}

SOLUC: a) $\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2=7{,}2.10^6\,\vec{i}+14{,}4.10^6\,\vec{i}=21{,}6.10^6\,\vec{i}\;\;N/C$ SI, a la izquierda de q_1

b) Hay dos puntos donde el potencial se anula: a 10 cm a la izquierda de q_1 y también en el segmento que las une a 3,3 cm de q_1

Problema 46º Dos cargas puntuales de q_1= -4 C y q_2= 2 C se encuentran en los puntos (0,0) y (1,0) m respectivamente.

a) Determine el valor del campo eléctrico en el punto (0,3) m.
b) Razone qué trabajo que hay que realizar para trasladar una carga puntual q_3= 5 C desde el infinito hasta el punto (0,3) m e interprete el signo del resultado.

K = 9 $\cdot10^9$ N m^2 C^{-2}

SOLUC: a) $\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2=(-4.10^9\,\vec{j})+(-5{,}7.10^8\,\vec{i}+1{,}7.10^9\,\vec{j})=-5{,}7.10^8\,\vec{i}-2{,}3.10^9\,\vec{j}\;\;N/C$

b) $W_{\infty_{ext.}}^{(0,3)}=-3{,}15.10^{10}\;\;J$ ¿?

Problema 47º Un satélite de 200 kg describe una órbita circular, de radio R = 4 •10^6 m, en torno a Marte.

a) Calcule la velocidad orbital y el período de revolución del satélite.
b) Explique cómo cambiarían las energías cinética y potencial del satélite si el radio de la órbita fuera 2R.

G = 6,67 •10^{-11} N m^2 kg^{-2} ; M_{Marte} = 6,4 •10^{23} kg

SOLUC: a) v = 3266,8 m/s T = 2,14 h b) ¿?

Problema 48º Los transbordadores espaciales orbitan en torno a la Tierra a una altura aproximada de 300 km, siendo de todos conocidas las imágenes de astronautas flotando en su interior.

a) Determine la intensidad del campo gravitatorio a 300 km de altura sobre la superficie terrestre y comente la situación de ingravidez de los astronautas.
b) Calcule el período orbital del trasbordador.

M_T = 6 • 10^{24} kg; G = 6,67 •10^{-11} N m^2 kg^{-2} ; R_T = 6,4 • 10^6 m

SOLUC: a) g = 8,92 m/s^2 ¿? b) T = 1,51 h

Problema 49º (08-R) El potencial eléctrico en un punto P, creado por una carga Q situada en el origen, es 800 V y el campo eléctrico en P es 400 N C^{-1}.

a) Determine el valor de Q y la distancia del punto P al origen.
b) Calcule el trabajo que se realiza al desplazar otra carga q = 1,2$\cdot10^{-6}$ C desde el punto (3, 0) m al punto (0, 3) m. Explique por qué no hay que especificar la trayectoria seguida.

K = 9 $\cdot10^9$ N m^2 C^{-2}

SOLUC: a) Q = 1,78.10^{-7} C r = 2 m b) $W_{(3,0)_{ext.}}^{(0,3)}=0\;\;J$ ¿?

Problema 50º Una partícula de $5 \cdot 10^{-3}$ kg y carga eléctrica q = - $6 \cdot 10^{-6}$ C se mueve con una velocidad de 0,2 m s^{-1} en el sentido positivo del eje X y penetra en la región x > 0, en la que existe un campo eléctrico uniforme de 500 N C^{-1} dirigido en el sentido positivo del eje Y.

a) Describa, con ayuda de un esquema, la trayectoria seguida por la partícula y razone si aumenta o disminuye la energía potencial de la partícula en su desplazamiento.
b) Calcule el trabajo realizado por el campo eléctrico en el desplazamiento de la partícula desde el punto (0, 0) m hasta la posición que ocupa 5 s más tarde.

g = 10 m s^{-2}

SOLUC: a) ¿? b) $W_{(0,0)_{campo}}^{(1,-132'5)} = 0,3975\ J$

Problema 51º Una pequeña esfera de $5 \cdot 10^{-3}$ kg y carga eléctrica q cuelga del extremo inferior de un hilo aislante, inextensible y de masa despreciable, de 0,5 m de longitud. Al aplicar un campo eléctrico horizontal de $2 \cdot 10^{2}$ V m^{-1} el hilo se separa de la vertical hasta formar un ángulo de 30º.

a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre la esfera y determine el valor de la carga q.
b) Haga un análisis energético del proceso y calcule el cambio de energía potencial de la esfera.

g = 10 m s^{-2}

SOLUC: a) ¿? Q = ± $1,4.10^{-4}$ C b) ¿? $\Delta E_{p\ grav.} = -\Delta E_{p\ eléct.} = 0,0035$ J

Problema 52º Una carga de $3 \cdot 10^{-6}$ C se encuentra en el origen de coordenadas y otra carga de $-3 \cdot 10^{-6}$ C está situada en el punto (1,1) m.

a) Dibuje en un esquema el campo eléctrico en el punto B (2,0) m y calcule su valor. ¿Cuál es el potencial eléctrico en el punto B?
b) Calcule el trabajo necesario para desplazar una carga de $10 \cdot 10^{-6}$ C desde el punto A (1,0) m hasta el punto B (2,0) m.

K = $9 \cdot 10^{9}$ N m^{2} C^{-2}

SOLUC: a) $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (6,75.10^3\ \vec{i}) + (-9,6.10^3\ \vec{i} + 9,6.10^3\ \vec{j}) = -2,82.10^3\ \vec{i} + 9,6.10^3\ \vec{j}\ \ N/C$

$V(B) = V_1 + V_2 = 1,35.10^4 - 1,91.10^4 = -5,5.10^3\ \ V$

b) $W_{A_{ext.}}^{B} = -5,5.10^{-2}\ \ J$

Problema 53º Una partícula con una carga de $2 \cdot 10^{-6}$ C se encuentra en reposo en el punto (0, 0) y se aplica un campo eléctrico uniforme de 100 N C^{-1}, dirigido en el sentido positivo del eje X.

a) Describa razonadamente la trayectoria seguida por la partícula hasta el instante en que se encuentra en un punto A, situado a 4 m del origen. Razone si aumenta o disminuye la energía potencial de la partícula en dicho desplazamiento y en qué se convierte dicha variación de energía.
b) Calcule el trabajo realizado por la fuerza que actúa sobre la partícula en el desplazamiento entre el origen y el punto A y la diferencia de potencial eléctrico entre ambos puntos.

SOLUC: a) ¿? b) $W_{0_{campo}}^{B} = 8.10^{-4}\ \ J\ \ \ \Delta V = -400\ \ V$

Problema 54º Dos cargas puntuales iguales, de $+10^{-5}$ C, se encuentran en el vacío, fijas en los puntos A (0, 0) m y B (0, 3) m.

a) Calcule el campo y el potencial electrostáticos en el punto C (4, 0) m.
b) Si abandonáramos otra carga puntual de $+10^{-7}$ C en el punto C (4, 0) m, ¿Cómo se movería? Justifique la respuesta.
$K = 9\,.10^{9}\ N\ m^{2}\ C^{-2}$

SOLUC: a) $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (5625\,\vec{i}) + (2880\,\vec{i} - 2160\,\vec{j}) = 8505\,\vec{i} - 2160\,\vec{j}\ \ N/C$

$V_{(4,0)} = V_1 + V_2 = 2{,}25.10^4 + 1{,}8.10^4 = 4{,}05.10^4\ \ V$

b) ¿?

Problema 55º Un electrón se mueve con una velocidad de $2{\cdot}10^{6}$ m s^{-1} y penetra en un campo eléctrico uniforme de 400 N C^{-1}, de igual dirección y sentido que su velocidad.

a) Explique cómo cambia la energía del electrón y calcule la distancia que recorre antes de detenerse.
b) ¿Qué ocurriría si la partícula fuese un positrón? Razone la respuesta.
$e = 1{,}6{\cdot}10^{-19}$ C; $m = 9{,}1{\cdot}10^{-31}$ kg

SOLUC: a) ¿? 0,028 m b) ¿?

TEMA 4. CAMPO MAGNÉTICO

1. ORIGEN DEL CAMPO MAGNÉTICO

El fenómeno del magnetismo es conocido desde hace más de 2000 años. Se descubrió por primera vez en Magnesia (Asia Menor). Algunos cuerpos naturales como la magnetita (Fe_3O_4), presentan la propiedad de atraer pequeños trozos de hierro. A tales cuerpos se les da el nombre de **imanes naturales**, y la propiedad que tienen recibe el nombre de **magnetismo**.

Además de los imanes naturales, existen otras sustancias, como el hierro, el cobalto y el níquel, que pueden adquirir el magnetismo de una manera artificial. A estos cuerpos se les da le nombre de **imanes artificiales**.

Los imanes, tanto naturales como artificiales, tienen las siguientes propiedades:

- Todo imán presenta la máxima atracción o repulsión en los extremos, que reciben el nombre de **polos magnéticos**.
- Los polos magnéticos reciben los nombres de Norte y Sur porque se orienta según los polos magnéticos de la Tierra, que es un imán natural.
- No existen los monopolos magnético, es decir, los polos magnéticos son inseparables por lo que un imán siempre presenta dos polos (dipolos) por muy pequeño que sea.

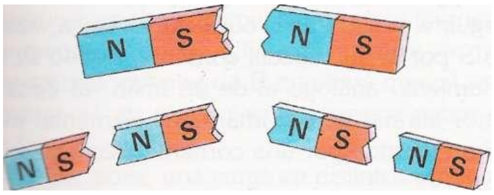
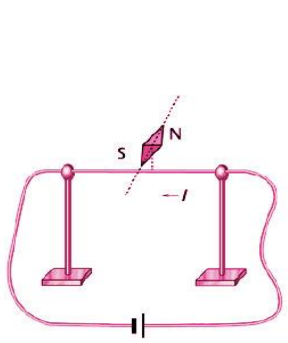


Figura 4.1

- Los polos del mismo tipo se repelen y los de distinto nombre se atraen.
- El valor de la fuerza de atracción o repulsión entre imanes decrece con la distancia de separación entre ellos.

El origen del magnetismo empezó a ser bien conocido en el transcurso de los siglos XVIII y XIX. Así, en 1819, el científico danés Christian Oersted descubrió que **las corrientes eléctricas creaban campos magnéticos a su alrededor**. Su experiencia consistió en observar que al acercar una aguja imantada a una corriente eléctrica, aquélla dejaba de orientarse hacia el polo Norte para situarse perpendicularmente a la corriente. A partir de aquí, se dedujo que las corrientes eléctricas producen el mismo efecto que los imanes.



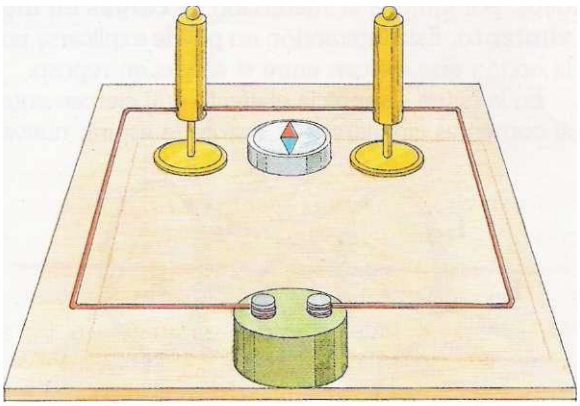


Figura 4.2 Experiencia de Oersted

Doce años más tarde, Michael Faraday observó el efecto recíproco: aproximando o alejando un imán a un conductor, en este se origina una corriente eléctrica. Ambas experiencias tienen el mismo fundamento: **las cargas eléctricas en movimiento producen fuerzas magnéticas**. El magnetismo es, pues, una consecuencia de la electricidad y del movimiento.

Posteriormente, Ampère, con sus teorías basadas en las experiencias de Oersted y Faraday, asentó los fundamentos del electromagnetismo. De todo lo dicho se deduce que el electromagnetismo se basa en una serie de puntos básicos:

- Cargas eléctricas en movimiento producen una interacción de tipo magnético, además de la interacción electrostática dada por la Ley de Coulomb. Producen, pues, una interacción electromagnética.
- Toda carga en movimiento produce un campo magnético.
- Un campo magnético actúa sobre cargas eléctricas cuando éstas están en movimiento y se cumplen, además, ciertas condiciones como veremos más adelante.
- Se dice que en un punto existe un campo magnético si una carga móvil colocada en él y que cumpla las condiciones adecuadas, experimenta una fuerza.

2. DESCRIPCIÓN DEL CAMPO MAGNÉTICO

El campo magnético es la región del espacio en la que se pone de manifiesto la fuerza magnética. Por tanto, existirá un campo magnético en cualquier punto de la región que hay en el entorno de un imán, de una carga eléctrica en movimiento o de una corriente eléctrica. Para comprobarlo, bastaría con colocar en dicha región otro imán, limaduras de hierro, una aguja imantada, una corriente eléctrica o una carga en movimiento, y observaríamos la acción de una fuerza sobre cualquiera de ellos.

El campo magnético es un campo vectorial de fuerzas y por tanto en cada punto viene caracterizado por el vector intensidad de campo, que en este caso recibe el nombre de **vector inducción magnética,** o simplemente **campo magnético**, y se representa por $\vec{B}$.

El vector campo magnético en cada punto se define como la fuerza que ejerce el campo sobre la unidad de carga positiva que se mueve con una unidad de velocidad en dirección perpendicular al campo en dicho punto. Su unidad en el S.I. es el tesla (T), en honor del científico de origen serbio Nikola Tesla.

Un **tesla** es la inducción de un campo magnético que ejerce una fuerza de 1 N sobre una carga de 1 C que se mueve a 1 m/s en el interior del campo y perpendicularmente al mismo:

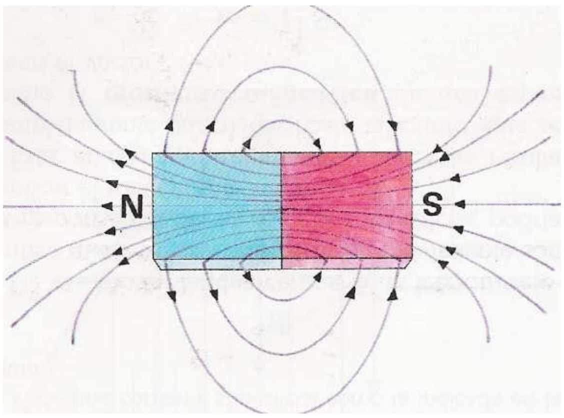
$$1 Tesla = 1 \frac{N}{C.m/s}$$

Otra unidad de campo magnético es el **Gauss (g)**:

$$\mathbf{1\ T = 10^4\ g}$$

El campo magnético, como campo vectorial de fuerzas que es, se puede representar gráficamente por líneas de campo o líneas de fuerza que reciben el nombre de **líneas de inducción magnética**. La dirección del campo es tangente en cada punto a las líneas de inducción y tiene el mismo sentido que éstas. Además se construyen de modo que la densidad de líneas es mayor en aquellos puntos en dónde el campo magnético es más intenso.

2.1 Líneas de fuerza del campo magnético de un imán rectangular



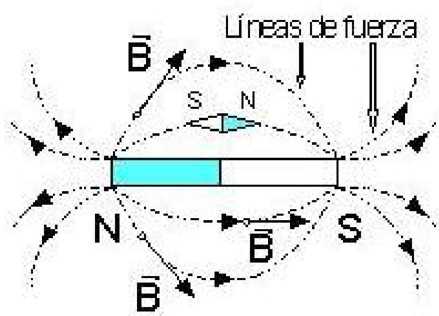


Figura 4.3
Líneas de inducción magnética del campo magnético de un imán

La tierra es un potente imán. El polo sur magnético se encuentra al norte de Canadá, aproximadamente a 1300 Km del polo norte geográfico. Por tanto, la brújula no apunta exactamente hacia el norte geográfico.

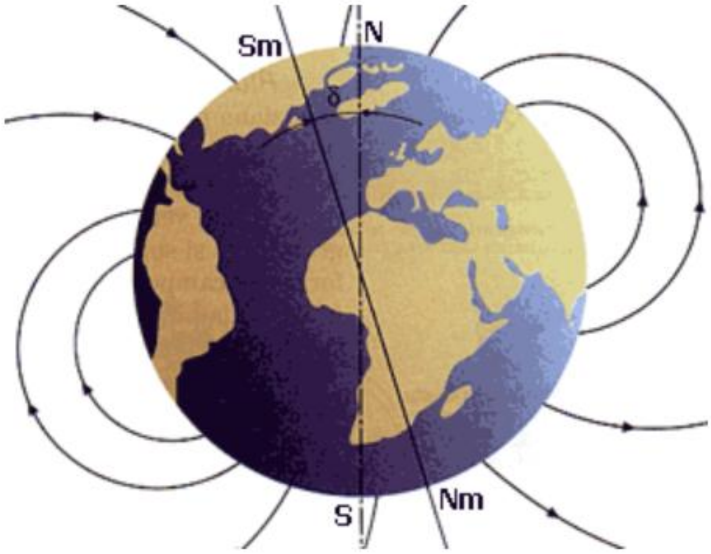


Figura 4.4
Líneas de inducción magnética del campo magnético terrestre

Observa que las líneas de fuerza son cerradas (a diferencia de las de los campos gravitatorio y eléctrico que son abiertas) y su densidad aumenta en las proximidades de los extremos del imán que es donde la intensidad del campo magnético es mayor. Observa también que las líneas de fuerza salen del polo norte y entran por el polo sur.

2.2 Líneas de fuerza de una corriente circular (espira circular)

Las líneas de inducción magnética del campo creado por una espira están representadas en la siguiente figura donde se puede observar que son líneas cerradas pudiendo decir que, al igual que un imán y según por donde se mire, la espira presenta su polo norte (por donde salen las líneas) o su polo sur (por donde entran las líneas).

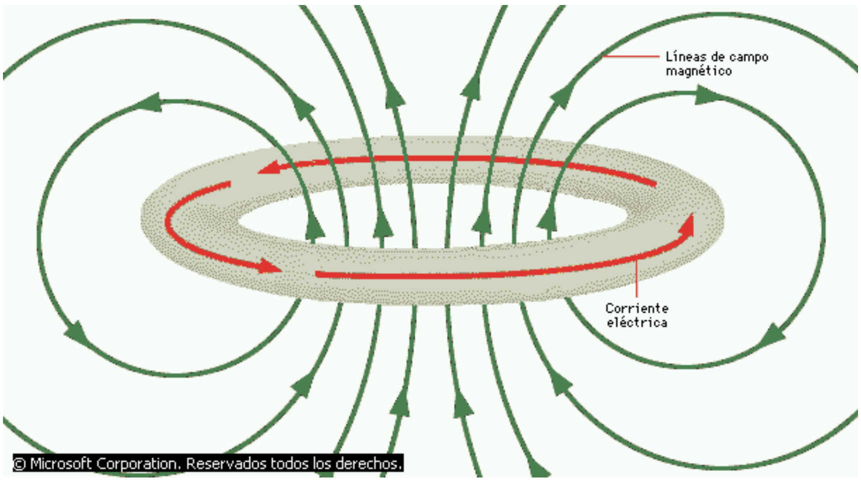


Figura 4.5
Líneas de campo de una corriente circular (espira circular)

Para saber qué cara de la espira es un polo N o un polo S, basta con seguir la regla que se indica en la siguiente figura:

Figura 4.6
Polos magnéticos de una espira circular

2.3 Líneas de fuerza de un campo uniforme

En el caso de que el campo magnético sea uniforme, las líneas de inducción son paralelas entre sí, igualmente espaciadas y todas del mismo sentido.

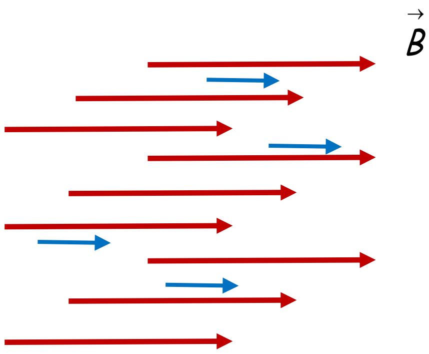
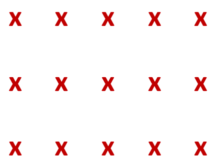
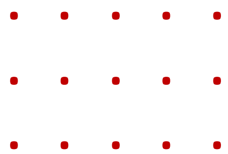


Figura 4.7
Líneas de inducción de un campo magnético uniforme

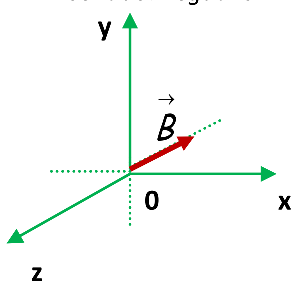
En ocasiones, se utilizan puntos o cruces para simbolizar un campo uniforme saliente o entrante al plano del papel, respectivamente.



Campo magnético entrante:
Dirección: eje z
Sentido: negativo



Campo magnético saliente:
Dirección: eje z
Sentido positivo



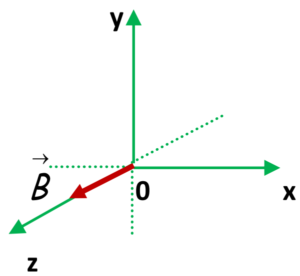


Figura 4.8
Líneas de inducción de un campo magnético uniforme

3. CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR UNA CARGA EN MOVIMIENTO

El campo magnético $\vec{B}$ que crea una carga puntual **Q** que se mueve con velocidad $\vec{v}$ en un punto **P** que se encuentra a una distancia **r** de ella viene dado por la expresión:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{Q}{r^2} . \vec{v} \times \vec{u}_r} \qquad [4.1]$$

Donde:

$\vec{r}$ es el vector que va de la carga fuente hasta el punto P

$\vec{u}_r$ es un vector unitario de la misma dirección y sentido que $\vec{r}$

μ es una constante característica de cada medio llamada **permeabilidad magnética**

De la expresión anterior podemos deducir las siguientes consecuencias:

- El campo magnético que crea una carga puntual Q en un punto aumenta con el valor de la carga y con su velocidad, pero decrece con el cuadrado de la distancia que hay de la carga fuente a dicho punto.
- El campo magnético $\vec{B}$ siempre es perpendicular a los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$
- Al igual que ocurría con el campo eléctrico el valor del campo magnético depende de las características del medio en el que se encuentren las cargas a través de la permeabilidad magnética μ aunque su comportamiento es diferente al de la constante eléctrica K, tal y como se explica a continuación.

La permeabilidad magnética μ no tiene su valor máximo en el vacío, y por tanto el campo magnético no es máximo en el vacío (recuerda que sí lo era el campo eléctrico). En el vacío la permeabilidad magnética vale:

$$\boldsymbol{\mu_0 = \mu \text{ (vacío)} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ UI}}$$

El comportamiento magnético de la materia se establece por comparación con el vacío. Para ello se utiliza **la permeabilidad magnética relativa μ_r**. La permeabilidad magnética de un medio es el cociente entre su permeabilidad μ magnética y la del vacío μ_0.

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$$

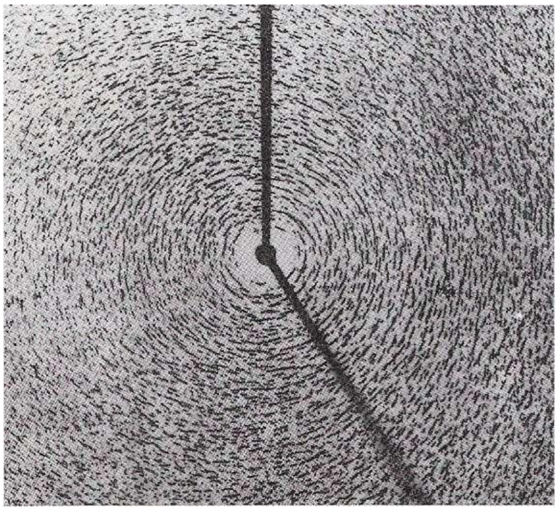
- Destaquemos que la permeabilidad magnética relativa no tiene unidades.
- Observa que la permeabilidad magnética relativa del vacío vale 1 ($\mu_{r0} = 1$).
- Si la permeabilidad magnética relativa de un medio vale 1 ($\mu_r = 1$), este medio tiene la misma permeabilidad magnética que el vacío ($\mu = \mu_0$).
- Si la permeabilidad magnética relativa de un medio vale más de la unidad ($\mu_r > 1$), este medio tiene más permeabilidad magnética que el vacío ($\mu > \mu_0$).
- Si la permeabilidad magnética relativa de un medio vale menos de la unidad ($\mu_r < 1$), este medio tiene una permeabilidad magnética menor que la del vacío ($\mu < \mu_0$).

Respecto a la permeabilidad magnética, podemos distinguir tres tipos de sustancias o medios, cuyo comportamiento es muy diferente:

- **Sustancias diamagnéticas,** como el oro o la plata cuya permeabilidad magnética es ligeramente menor que la del vacío $\mu < \mu_0$ ($\mu_r < 1$) y por tanto el campo magnético en su interior es ligeramente menor al que existe en el vacío.
- **Sustancias paramagnéticas,** como el cromo o el manganeso cuya permeabilidad magnética es ligeramente mayor que la del vacío $\mu > \mu_0$ ($\mu_r > 1$) y por tanto el campo magnético en su interior es ligeramente superior al que existe en el vacío.
- **Sustancias ferromagnéticas,** como el hierro cuya permeabilidad magnética es mucho mayor que la del vacío $\mu >> \mu_0$ ($\mu_r >> 1$) y por tanto el campo magnético en su interior es muchísimo mayor al que existe en el vacío.

4. CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR UNA CORRIENTE ELÉCTRICA RECTILÍNEA E INDEFINIDA

Las líneas de fuerza o líneas de inducción magnética del campo magnético creado por una corriente rectilínea e indefinida son circunferencias concéntricas alrededor del conductor cuyo sentido viene determinado por la regla de la mano derecha: si se coge el conductor con la mano derecha de manera que el pulgar apunte en el sentido de la corriente, los demás dedos rodearán el conductor en el mismo sentido de giro que lo hacen las líneas de campo.



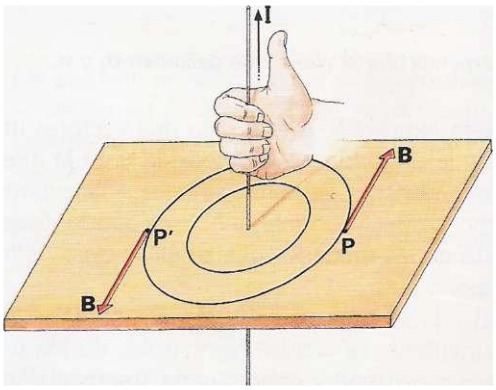


Figura 4.9
Líneas de inducción de una corriente eléctrica rectilínea

El campo magnético producido por una corriente eléctrica de intensidad **I** que circula por un conductor rectilíneo e indefinido en un punto **P** próximo al mismo presenta las siguientes características:

- **Dirección**: tangente a las líneas de inducción en cada punto.
- **Sentido**: el de las líneas de inducción determinado por la regla de la mano derecha.
- **Intensidad**: se determina con la expresión

$$\boxed{\left|\vec{B}\right| = B = \frac{\mu I}{2\pi r}} \quad [4.2]$$

donde:

μ : permeabilidad magnética del medio (en el vacío vale $4\pi\cdot10^{-7}$ T m A^{-1})
I : intensidad de corriente que pasa por el conductor (en amperios: A)
r : distancia del conductor al punto P (en metros: m)

<u>Ejemplo 1º</u> Un hilo recto por el que circula una corriente de 0,2 A se encuentra en el vacío situado en el eje de abscisas. Si la corriente circula en el sentido positivo del eje:

a) Dibuja las líneas del campo magnético (líneas de inducción magnética) creadas por la corriente eléctrica.
b) Dibuja y calcula el campo magnético en los siguientes puntos: A = (0,2,0) m B = (0,-2,0) m C = (0,0,2) m D = (0,0,-2) m

<u>Ejemplo 2º</u> Un hilo recto por el que circula una corriente de 0,2 A se encuentra en el vacío situado en el eje de ordenadas. Si la corriente circula en el sentido positivo del eje:

a) Dibuja las líneas del campo magnético (líneas de inducción magnética) creadas por la corriente eléctrica.
b) Dibuja y calcula el campo magnético en los siguientes puntos: A = (2,0,0) m B = (-2,0,0) m C = (0,0,2) m D = (0,0,-2) m

<u>Ejemplo 3º</u> Un hilo recto por el que circula una corriente de 0,2 A se encuentra en el vacío situado en el eje z. Si la corriente circula en el sentido positivo del eje:

a) Dibuja las líneas del campo magnético (líneas de inducción magnética) creadas por la corriente eléctrica.
b) Dibuja y calcula el campo magnético en los siguientes puntos: A = (2,0,0) m B = (-2,0,0) m C = (0,2,0) m D = (0,-2,0) m

<u>Ejemplo 4º</u> Puedes repetir los tres ejemplos anteriores, suponiendo que la corriente eléctrica circula en sentido negativo de los ejes.

<u>Ejemplo 5º</u> Dos conductores rectilíneos y paralelos, por los que circulan corrientes de 2 y 4 A, se encuentran en el vacío a 40 cm de distancia.

a) Dibuja y calcula el campo magnético que crean cada uno de los hilos en un punto situado entre los dos hilos y equidistante de ambos. Calcula el campo magnético resultante en dicho punto.
b) Haz lo mismo en un punto situado a la izquierda del primer hilo y a 50 cm de él.
c) Haz lo mismo que en los apartados anteriores en un punto situado a la derecha del segundo conductor y a 80 cm de él.
d) Razona si existirá algún punto en el que se anule el campo magnético resultante creado por los dos hilos. En caso afirmativo, calcúlalo.

5. FUERZA MAGNÉTICA SOBRE CARGAS PUNTUALES EN MOVIMIENTO: FUERZA DE LORENTZ

La fuerza magnética $\vec{F}$ ejercida sobre una carga puntual **q** que se mueve con velocidad $\vec{v}$ en el seno de un campo magnético $\vec{B}$ está caracterizada por la ley de Lorentz cuya expresión matemática es:

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}}$$

$$\boxed{|\vec{F}| = |q||\vec{v}||\vec{B}|\, sen(\vec{v},\vec{B})} \qquad [4.3]$$

Esta fuerza se denomina **fuerza de Lorentz** y tiene las siguientes características:

De la ley de Lorentz se extraen las siguientes **conclusiones:**

- Si una carga se introduce en reposo dentro de un campo magnético, no sufre la acción de ninguna fuerza, es decir, los campos magnéticos no actúan sobre cargas en reposo.
- Si la carga se introduce con una velocidad de la misma dirección que el campo magnético, no sufre la acción de fuerza alguna, puesto que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ forman un ángulo de 0º o de 180º, y en ambos casos el seno es cero.
- La dirección de la fuerza de Lorentz siempre es perpendicular a los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$, es decir, al plano que contiene a ambos vectores.
- El sentido de la fuerza de Lorentz es el mismo que el producto vectorial si la carga es positiva, o de sentido contrario si la carga es negativa.

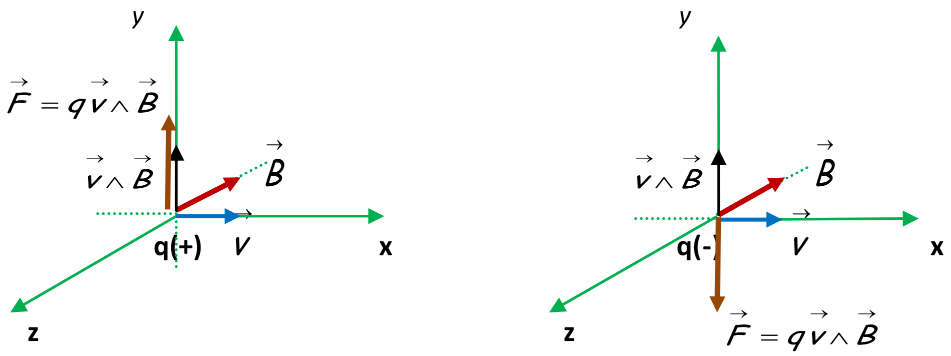


Figura 4.10
Dirección y sentido de la Fuerza de Lorentz

- Si la carga se introduce con velocidad perpendicular a la dirección del campo, la fuerza magnética toma su máximo valor:

$$|\vec{F}|_{máx} = |q||\vec{v}||\vec{B}|$$

- La fuerza magnética es en todo momento perpendicular a la velocidad por lo que no realiza trabajo alguno sobre la carga y, por tanto, no modifica su energía cinética.

- Si la carga se introduce en una región en la que coexisten un campo eléctrico y otro magnético, la fuerza ejercida sobre la misma será igual a la suma vectorial de la fuerza eléctrica y de la fuerza magnética:

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_e} + \overrightarrow{F_m} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \qquad [4.4]$$

expresión conocida como **fuerza de Lorentz generalizada**.

Ejemplo 6º

Calcula en cada uno de los casos que se representan, la dirección y el sentido del campo magnético que actúa.

Ejemplo 7º

Un electrón que se mueve paralelamente al eje de abscisas con una velocidad de 10^5 m/s, entra perpendicularmente a un campo magnético uniforme de 0,2 T.

a) Dibuja la fuerza que experimentará el e^- al entrar en el campo magnético.
b) Calcula el valor de la fuerza de Lorentz que actúa sobre el e^-.
c) Dibuja razonadamente la dirección y el sentido del campo eléctrico que habría que superponer al magnético para que el e^- no se desviara al entrar en ellos.
d) Calcula el módulo del campo eléctrico del apartado anterior.

Ejemplo 8º

Repite el problema anterior si se trata de un protón.

Ejemplo 9º

Un conductor rectilíneo por el que circula una corriente de 0,2 A se encuentra en el vacío a lo largo del eje x. En un instante dado un electrón se encuentra a 4 m por encima del hilo con una velocidad paralela al eje z de 10^4 m/s.

a) El campo magnético que crea la corriente eléctrica del hilo en el punto donde está el electrón (módulo, dirección y sentido).
b) La fuerza magnética que ejerce la corriente eléctrica sobre el electrón en dicho punto (dirección, sentido y módulo).
c) Razona cómo debería moverse el electrón en dicho punto para que la fuerza magnética sobre él fuese nula.

6. MOVIMIENTO DE CARGAS PUNTUALES EN CAMPOS MAGNÉTICOS

6.1 CARGA QUE ENTRA PERPENDICULARMENTE A UN CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME

Si una carga puntual **q** se introduce con velocidad $\vec{v}$ en dirección perpendicular a un campo magnético $\vec{B}$, actuará sobre aquella una fuerza magnética $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ que tendrá el valor máximo $|\vec{F}| = |q||\vec{v}||\vec{B}|$. Esta fuerza será en todo momento perpendicular a la velocidad por lo que será una fuerza centrípeta que no modificará el valor de la velocidad pero sí su dirección y que, al ser constante, hará que la partícula, de masa m, describa un movimiento circular uniforme (MCU) en el seno del campo magnético.

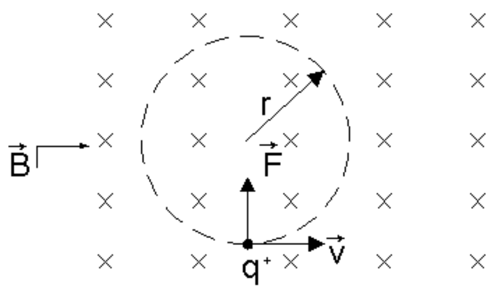


Figura 4.11
Trayectoria de una carga positiva que entra perpendicularmente a un campo magnético uniforme

Aplicando el segundo principio de la Dinámica al MCU, obtenemos:

$$\vec{F}_{Lorentz} = \vec{F}_c \Rightarrow \quad |\vec{F}|_{Lorentz} = |\vec{F}_c| \Rightarrow \quad |q||\vec{v}||\vec{B}| = m\frac{|\vec{v}|^2}{r} \Rightarrow \quad r = \frac{m|\vec{v}|}{|q||\vec{B}|}$$

$$\boxed{r = \frac{m|\vec{v}|}{|q||\vec{B}|} = \frac{mv}{|q|B}} \quad [4.5]$$

Esta última expresión proporciona el radio de la trayectoria descrita por la partícula dentro del campo magnético.

Si expresamos tanto la fuerza magnética como la fuerza centrípeta en función de la velocidad angular ω, obtenemos:

$$v = \omega . r \Rightarrow \quad \omega = \frac{v}{r} = v : \frac{mv}{|q|B} = \frac{|q|B}{m} = \frac{|q|}{m}B$$

$$\boxed{\omega = \frac{|q|}{m}B} \quad [4.6]$$

A esta expresión se le denomina **frecuencia ciclotrón** cuyo valor sólo depende de la relación carga/masa de la partícula y de la intensidad del campo magnético. A partir de ella podemos deducir el periodo T y la frecuencia f del MCU de la partícula:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi : \frac{|q|}{m} B = \frac{2\pi m}{|q|B}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi m}{|q|B}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{|q|B}{2\pi m}} \qquad [4.7]$$

6.2 CARGA QUE NO ENTRA PERPENDICULARMENTE A UN CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME

Si la carga no entra perpendicularmente al campo magnético, siempre es posible descomponer el vector velocidad en dos componentes: una paralela a la dirección del campo y otra perpendicular a dicho campo. La componente paralela no se ve afectada por la fuerza de Lorentz, por lo que el movimiento en esta dirección será un MRU, mientras que la componente perpendicular sí se verá afectada por la fuerza de Lorentz, curvándose como se ha descrito en el apartado anterior. El resultado de la composición de ambos movimientos será un movimiento helicoidal como se indica en la siguiente figura:

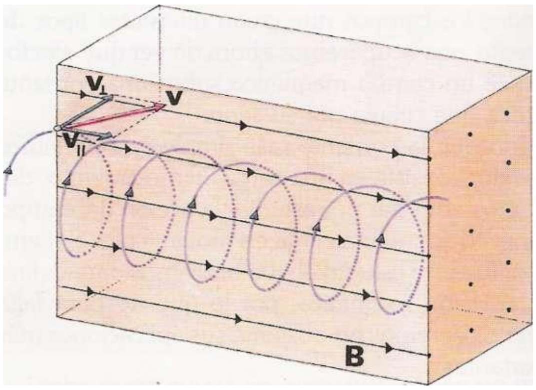


Figura 4.12
Trayectoria de una carga que no entra perpendicularmente a un campo magnético uniforme

6.3 CARGA QUE ENTRA A UN CAMPO MAGNÉTICO NO UNIFORME

Si además el campo no es uniforme, la curvatura de la trayectoria helicoidal será mayor en aquellas zonas en la que el campo aumenta. En esta situación puede demostrarse además, que la componente paralela disminuye, de modo que las vueltas de la hélice estás más próximas a medida que aumenta el campo y, si este es suficientemente intenso, la componente paralela de la velocidad llega anularse, forzando a la carga a retroceder. A este dispositivo se le denomina "espejo magnético".

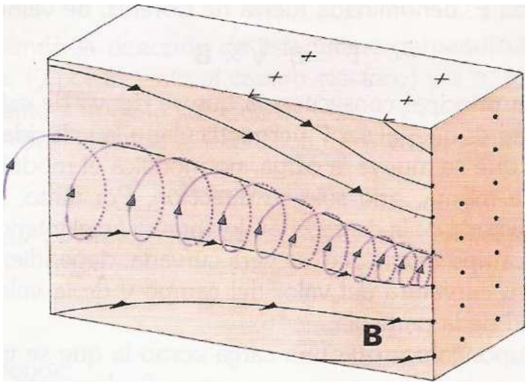


Figura 4.13
Trayectoria de una carga en un campo magnético no uniforme (espejo magnético)

Si en el lado opuesto ocurre lo mismo, la carga quedará confinada en dicha región. A este dispositivo se le denomina botella magnética. Este dispositivo es utilizado actualmente para confinar gases ionizados o plasmas como en los experimentos de fusión nuclear.

Ejemplo 10º

Un electrón que se mueve paralelamente al eje de abscisas con una velocidad de 10^5 m/s, entra perpendicularmente a un campo magnético uniforme de 0,2 T.

a) Dibuja la fuerza que experimentará el e^- al entrar en el campo magnético.
b) Calcula el valor de la fuerza de Lorentz que actúa sobre el e^-.
c) Dibuja razonadamente la trayectoria seguida por el e^- dentro del campo magnético.
d) Calcula el radio, el periodo y la frecuencia del movimiento del e^- ($m_{e-} = 9{,}11.10^{-31}$ Kg).

Ejemplo 11º

Repite el problema anterior si se trata de un protón ($m_{p+} = 1{,}67.10^{-27}$ Kg)..

Ejemplo 12º

Un electrón y un protón poseen la misma velocidad $\vec{v}$ y entran perpendicularmente a un campo magnético uniforme $\vec{B}$.

a) Dibuja la trayectoria seguida por cada una de las cargas en el interior del campo magnético.
b) Razona cualitativamente (sin cálculo numérico) quién de las dos cargas curva más su trayectoria (tiene menor radio)

Ejemplo 13º

Un electrón y un protón, que inicialmente están en reposo, son acelerados por la misma ddp eléctrica. Calcula:

a) La relación que existe entre sus energías cinéticas, una vez acelerados.
b) La relación que existe entre sus velocidades.
c) Si una vez acelerados entran perpendicularmente a un campo magnético de intensidad B, calcula la relación que existe entre los radios de sus trayectorias ($m_{p+} = 1833m_{e-}$).

7. FUERZA MAGNÉTICA SOBRE UNA CORRIENTE RECTILÚINEA

La corriente eléctrica consiste en el desplazamiento de cargas eléctricas a lo largo de un conductor. Por tanto, si situamos adecuadamente un conductor rectilíneo de longitud l, por el que pasa una corriente eléctrica de intensidad I en el seno de un campo magnético uniforme B, éste ejercerá una fuerza magnética sobre cada una de las cargas (electrones) que se desplazan por el conductor.

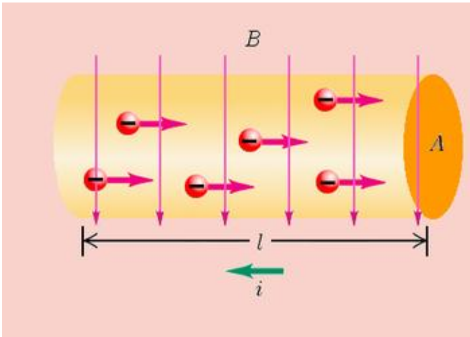


Figura 4.14
Movimiento de los electrones en el interior de un conductor

La fuerza magnética ejercida sobre todo el conductor será la resultante de las ejercidas sobre cada uno de los portadores de carga que circulan por él. Se puede demostrar que dicha fuerza tiene la siguiente expresión:

$$\boxed{\vec{F} = I.\vec{l} \wedge \vec{B}} \quad [4.8]$$

Donde:

I es la intensidad de corriente que circula por el hilo medida en A.

$\vec{l}$ es el vector longitud del conductor cuya dirección es la de éste, cuyo sentido es el de la corriente que pasa por él y cuyo módulo es la propia longitud l del conductor medida en m.

$\vec{B}$ es el vector intensidad de campo magnético que ejerce la fuerza sobre el conductor rectilíneo.

De la expresión anterior podemos sacar las siguientes conclusiones:

- La dirección de la fuerza es perpendicular al plano en el que se encuentran el conductor y el campo magnético.
- El sentido de la fuerza es el mismo que el producto vectorial $\vec{l} \wedge \vec{B}$.

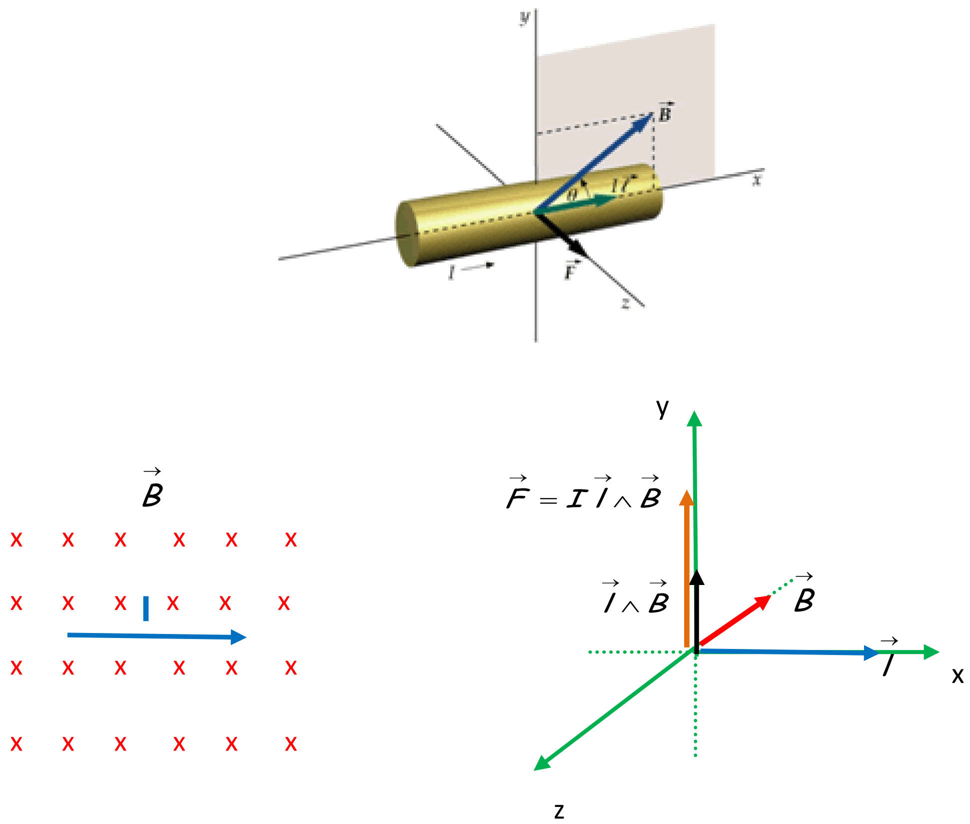
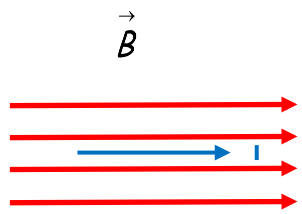


Figura 4.15
Fuerza magnética sobre un conductor rectilíneo

- El módulo de la fuerza es

$$\boxed{|\vec{F}| = \mathcal{I}.|\vec{l}|.|\vec{B}|.sen(\vec{l},\vec{B})} \qquad [4.9]$$

- Si el hilo está colocado paralelamente a las líneas de campo, este no ejerce ninguna fuerza sobre aquél, ya que los vectores $\vec{l}$ y $\vec{B}$ tendrían la misma dirección (paralelos o antiparalelos), formando entre ellos un ángulo de 0º o 180º, y en ambos casos el seno vale 0.



$$|\vec{F}| = \mathcal{I}.|\vec{l}|.|\vec{B}|.sen(0°) = 0$$

Figura 4.16
Conductor situado en la misma dirección que las líneas de fuerza

- Si el hilo está colocado perpendicularmente a las líneas de campo, este ejercería sobre aquél la máxima fuerza, ya que los vectores $\vec{I}$ y $\vec{B}$ serían perpendiculares, formando entre ellos un ángulo de 90º y el seno vale 1.

Ejemplo 14º

Un conductor de 10 cm de lado está situado sobre el eje de abscisas. Poe él, circula una corriente eléctrica de 5 A, dirigida en sentido negativo. En la región en la que se sitúa el conductor existe un campo magnético uniforme de 0,01 T, dirigido según el eje Z, en sentido creciente.

a) Calcula la fuerza (módulo, dirección y sentido) que actuará sobre el conductor.
b) Idem , si el campo es paralelo al plano XZ y forma 60º con el eje Z
c) Idem, si el campo tiene la dirección del eje X.
d) Idem, si el campo está dirigido según el eje Y, hacia las y crecientes.

Ejemplo 15º

Supongamos un hilo conductor recto de 0,3 m de longitud y 20 g de masa. Dicho conductor está en una región en la que existe un campo magnético de 1 T, saliente del papel.

a) Calcula la intensidad que debe circular por el hilo, y el sentido en el que ha de circular, para que el conductor se mantenga en equilibrio.
b) ¿Qué sucedería si, una vez conseguido lo anterior, se duplicase la longitud del hilo.

8. FUERZA MAGNÉTICA ENTRE CORRIENTES RECTILÍNEAS, PARALELAS E INDEFINIDAS

Supongamos dos conductores rectos de longitudes l_1 y l_2 por los que circulan corrientes de intensidades I_1 e I_2, respectivamente, dispuestos paralelamente uno respecto del otro y separados una distancia d. Cada uno de ellos producirá un campo magnético en cada uno de los puntos que forman el otro cuyos valores vendrán dados por:

$$\left|\vec{B}_1\right| = B_1 = \frac{\mu I_1}{2\pi d}$$

$$\left|\vec{B}_2\right| = B_2 = \frac{\mu I_2}{2\pi d}$$

Dichos campos son perpendiculares a cada uno de los conductores (θ = 90°) por lo que ejercerán sendas fuerzas sobre cada conductor de valores máximos respectivos:

$$F_{12} = |\vec{F}_{12}| = I_2 . |\vec{l}_2| . |\vec{B}_1| = I_2 . |\vec{l}_2| . \frac{\mu I_1}{2\pi d} = \frac{\mu I_1 I_2 . l_2}{2\pi d}$$

$$\boxed{F_{12} = |\vec{F}_{12}| = \frac{\mu I_1 I_2 . l_2}{2\pi d}} \quad [4.12]$$

$$F_{21} = |\vec{F}_{21}| = I_1 . |\vec{l}_1| . |\vec{B}_2| = I_1 . |\vec{l}_1| . \frac{\mu I_2}{2\pi d} = \frac{\mu I_1 I_2 . l_1}{2\pi d}$$

$$\boxed{F_{21} = |\vec{F}_{21}| = \frac{\mu I_1 I_2 . l_2}{2\pi d}} \quad [4.13]$$

Si los conductores son indefinidos, conviene utilizar la expresión de la fuerza por unidad de longitud:

$$f = \frac{F}{l}$$

que resulta ser la misma para cada conductor:

$$\boxed{f_1 = f_2 = \frac{F_{12}}{l_2} = \frac{F_{21}}{l_1} = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi d}} \quad [4.14]$$

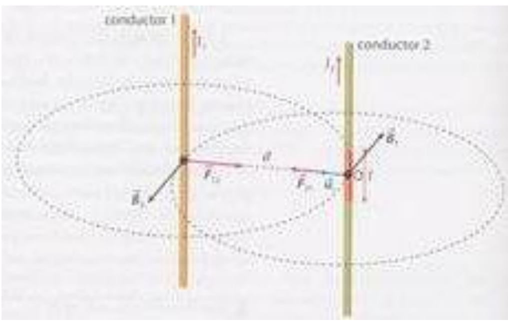


Figura 4.17
Interacción entre corrientes rectilíneas y paralelas

Esta fuerza será atractiva si las corrientes circulan en el mismo sentido (como el caso de la anterior figura) y repulsiva si circulan en sentidos opuestos.

La ecuación [4.14] permite dar la siguiente definición de amperio como unidad fundamental de intensidad de corriente en el S.I.:

Un amperio es la intensidad de corriente que debe circular por dos conductores paralelos, rectilíneos e indefinidos y separados 1 m en el vacío, para que se atraigan o repelan con una fuerza de $2\cdot10^{-7}$ N por unidad de longitud.

Ejemplo 16º

Por dos conductores rectilíneos y paralelos, que se encuentran separados 40 cm en el vacío, circulan sendas corrientes eléctricas de 2 y 4 A en sentido contrario. Calcular:

a) El campo magnético que crea cada una de ellas donde está la otra.
b) La fuerza por unidad de longitud que ejerce una sobre la otra.

CUESTIONES

Cuestión 1ª a) Fuerza magnética sobre una carga en movimiento. b) ¿En qué dirección se debe mover una carga en un campo magnético para que no se ejerza fuerza sobre ella?

Cuestión 2ª Un electrón, un protón y un átomo de helio penetran en una zona del espacio en la que existe un campo magnético uniforme en dirección perpendicular a la velocidad de las partículas. a) Dibuje la trayectoria que seguiría cada una de las partículas e indique sobre cuál de ellas se ejerce una fuerza mayor. b) Compare las aceleraciones de las tres partículas. ¿Cómo varía su energía cinética?

Cuestión 3ª Por dos conductores rectilíneos e indefinidos, dispuestos paralelamente, circulan corrientes eléctricas de la misma intensidad y sentido. a) Dibuje un esquema, indicando la dirección y el sentido del campo magnético debido a cada corriente y del campo magnético total en el punto medio de un segmento que una a los dos conductores. b) ¿Cómo cambiaría la situación al duplicar una de las intensidades?

Cuestión 4ª (a) ¿Cuál es la condición para que una partícula cargada, que se mueve en línea recta, siga en su trayectoria rectilínea cuando se somete simultáneamente a un campo eléctrico y a otro magnético, perpendiculares entre sí y perpendiculares a la velocidad de la carga? b) Dibuje las trayectorias de la partícula cargada del apartado anterior si sólo existiera el campo eléctrico o el campo magnético y explique, en cada caso, si varía la velocidad.

Cuestión 5ª Una partícula, con carga q, penetra en una región en la que existe un campo. a) Explique cómo podríamos determine, al observar la trayectoria de la partícula, si se trata de un campo eléctrico o de un campo magnético. ¿Hay algún caso en que no sería posible determine el tipo de campo? b) Haga un análisis energético del movimiento de la partícula para un campo eléctrico y para un campo magnético, ambos perpendiculares a la velocidad con la que la partícula penetra en el campo.

Cuestión 6ª Dos partículas cargadas se mueven con la misma velocidad y, al aplicarles un campo magnético perpendicular a dicha velocidad, se desvían en sentidos contrarios y describen trayectorias circulares de distintos radios. a) ¿Qué puede decirse de las características de estas partículas? b) Si en vez de aplicarles un campo magnético se les aplica un campo eléctrico paralelo a su trayectoria, indique razonadamente cómo se mueven las partículas.

Cuestión 7ª Conteste razonadamente a las siguientes cuestiones: a) ¿Se conserva la energía mecánica de una partícula cargada que se mueve en el seno de un campo magnético uniforme? ¿Es conservativa la fuerza que ejerce dicho campo sobre la carga?

Cuestión 8ª a) Explique razonadamente la acción de un campo magnético sobre un conductor rectilíneo, perpendicular al campo, por el que circula una corriente eléctrica y dibuje en un esquema la dirección y sentido de todas las magnitudes vectoriales que intervienen. b) Explique qué modificaciones se producirían, respecto del apartado anterior, en los casos siguientes: i) si el conductor forma un ángulo de 45º con el campo; ii) si el conductor es paralelo al campo.

Cuestión 9ª a) La fuerza que actúa sobre una partícula cargada que se mueve en un campo magnético no realiza trabajo ¿Por qué? b) Un alambre recto muy largo transporta una corriente de intensidad **I**. Un protón se mueve con velocidad **v** perpendicular al alambre y se encuentra en un instante a una distancia **r** del alambre. Dibuje en un esquema la dirección y sentido del campo magnético y de la fuerza que actúa sobre el protón.

Cuestión 10ª Dos partículas, de masas m_1 y m_2 e igual carga, penetran con velocidades v_1 y $v_2 = 2v_1$ en dirección perpendicular a un campo magnético. a) Si $m_2 = 2\ m_1$, ¿cuál de las dos trayectorias tendrá mayor radio? b) Si $m_1 = m_2$, ¿en qué relación estarán sus periodos de revolución? Razone las respuestas.

Cuestión 11ª Por dos conductores rectilíneos paralelos circulan corrientes de igual intensidad. a) Indique la dirección y sentido de las fuerzas que se ejercen los conductores entre sí. ¿Depende esta fuerza de la corriente que circula por ellos? b) Represente gráficamente la situación en la que la fuerza es repulsiva.

Cuestión 12ª Un protón entra, con una velocidad **v**, en una región del espacio donde existe un campo magnético uniforme. a) Indique, con la ayuda de un esquema, las posibles trayectorias del protón en el interior del campo magnético. b) Explique qué ocurre con la energía cinética del protón.

Cuestión 13ª Razone las respuestas a las siguientes preguntas: a) ¿Cómo debe moverse una carga en un campo magnético uniforme para experimentar fuerza magnética?

Cuestión 14ª Razone las respuestas a las siguientes preguntas: a) De los tres vectores que aparecen en la ecuación $\mathbf{F} = q\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$, ¿qué pares de vectores son siempre perpendiculares entre sí y cuáles pueden no serlo? b) La fuerza electromotriz inducida en una espira es función: i) del flujo magnético que la atraviesa; ii) del ángulo que forma el campo magnético con la espira; iii) del campo magnético existente; iv) de la rapidez con que varía el flujo con el tiempo.

Cuestión 15ª Razone las respuestas a las siguientes preguntas: a) ¿Existe siempre interacción magnética entre dos partículas cargadas? ¿Existe siempre interacción eléctrica entre ellas? b) ¿En qué casos un campo magnético no ejerce ninguna fuerza sobre una partícula cargada?

Cuestión 16ª a) Un haz de electrones atraviesa una región del espacio sin desviarse, ¿se puede afirmar que en esa región no hay campo magnético? De existir, ¿cómo tiene que ser? b) En una región existe un campo magnético uniforme dirigido verticalmente hacia abajo. Se disparan dos protones horizontalmente en sentidos opuestos. Razone qué trayectorias describen, en qué plano están y qué sentidos tienen sus movimientos.

Cuestión 17ª Sobre un electrón, que se mueve con velocidad **v**, actúa un campo magnético **B** en dirección normal a su velocidad. a) Razone por qué la trayectoria que sigue es circular y haga un esquema que muestre el sentido de giro del electrón. b) Deduzca las expresiones del radio de la órbita y del período del movimiento.

Cuestión 18ª Razone las respuestas a las siguientes cuestiones: a) Observando la trayectoria de una partícula con carga eléctrica, ¿se puede deducir si la fuerza que actúa sobre ella procede de un campo eléctrico uniforme o de un campo magnético uniforme? b) ¿Es posible que sea nula la fuerza que actúa sobre un hilo conductor, por el que circula una corriente eléctrica, situado en un campo magnético?

Considere dos hilos largos, paralelos, separados una distancia d, por los que circulan intensidades I1 e I2 (I1 < I2). Sea un segmento, de longitud d, perpendicular a los dos hilos y situado entre ambos. Razone si existe algún punto del citado segmento en el que el campo magnético sea nulo, si: a) Las corrientes circulan en el mismo sentido. b) Las corrientes circulan en sentidos opuestos. Si existe dicho punto, ¿de qué hilo está más cerca?

Cuestión 19ª Dos partículas con cargas eléctricas, del mismo valor absoluto y diferente signo, se mueven con la misma velocidad, dirigida hacia la derecha y en el plano del folio. Ambas partículas penetran en un campo magnético de dirección perpendicular al folio y dirigido hacia abajo. a) Analice con ayuda de un gráfico las trayectorias seguidas por las dos partículas. b) Si la masa de una de ellas es doble que la de la otra (m1 = 2 m2) ¿Cuál gira más rápidamente?

PROBLEMAS

Problema 1º Un electrón con 1 eV de energía cinética describe un movimiento circular uniforme en un plano perpendicular a un campo magnético de 10^{-4} T.

a) Explique con ayuda de esquemas, las posibles direcciones y sentidos de la fuerza, velocidad y campo magnético implicados y calcule el radio de la trayectoria.
b) Repita el apartado anterior para otro electrón que siguiera una trayectoria rectilínea.

$m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ Kg. $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C.

SOLUC: a) r = 3,4 cm

Problema 2º Un protón, tras ser acelerado mediante una diferencia de potencial de 10^5 V, entra en una región en la que existe un campo magnético de dirección perpendicular a su velocidad, describiendo una trayectoria circular de 30 cm de radio.

a) Realice un análisis energético de todo el proceso, y con ayuda de esquemas, explique las posibles direcciones y sentidos de la fuerza, velocidad, campo eléctrico y campo magnético implicados.
b) Calcule la intensidad del campo magnético. ¿Cómo varía el radio de la trayectoria si se duplicase el campo magnético?

$m_p = 1{,}7 \times 10^{-27}$ Kg. $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C.

SOLUC: b) B = 0,15 T

Problema 3º Un electrón penetra en una región en la que existe un campo magnético, de intensidad 0,1 T, con una velocidad de 6×10^6 m/s perpendicular al campo.

a) Dibuje un esquema representando el campo, la fuerza magnética y la trayectoria seguida por el electrón y calcule el radio. ¿Cómo cambiaría la trayectoria si se tratara de un protón?
b) Determine las características del campo eléctrico que, superpuesto al magnético, haría que el electrón siguiera un movimiento rectilíneo uniforme.

$m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ Kg. $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C. $m_p = 1{,}7 \times 10^{-27}$ Kg.

SOLUC: a) $r = 3{,}37.10^{-4}$ m b) Módulo = 6.10^5 N/C; dirección y sentido depende de la situación inicial

Problema 4º Un protón, acelerado por una diferencia de potencial de 10^5 V, penetra en una región en la que existe un campo magnético uniforme de 2 T, perpendicular a su velocidad.

a) Dibuje la trayectoria seguida por la partícula y analizar las variaciones de energía del protón desde su situación inicial de reposo hasta encontrarse en el campo magnético.
b) Calcule el radio de la trayectoria del protón y su periodo y explique las diferencias que encontrarías si se tratara de un electrón que penetrase con la misma velocidad en el campo magnético.

$m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ Kg. $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C. $m_p = 1{,}7 \times 10^{-27}$ Kg.

SOLUC: b) r = 2,3 cm $T = 3{,}3.10^{-8}$ s ¿?

Problema 5º En una región del espacio en la que existe un campo eléctrico de 100 N/C y un campo magnético de 10^{-3} T, perpendiculares entre si, penetran un protón y un electrón con velocidades perpendiculares a ambos campos.

a) Dibuje en un esquema los vectores velocidad, campo eléctrico y campo magnético en el caso de que las partículas no se desvíen.
b) ¿Qué energía cinética debería tener el protón y el electrón en esas condiciones?

$m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ Kg. $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C. $m_p = 1{,}7 \times 10^{-27}$ Kg.

SOLUC: b) $E_{c\,e} = 4{,}5.10^{-21}$ J $E_{c\,p} = 8{,}5.10^{-18}$ J

Problema 6º Un electrón penetra con una velocidad de 5×10^6 m/s en un campo magnético de 12 T perpendicular a dicha velocidad.

a) Dibuje en un esquema la fuerza que actúa sobre la partícula así como la trayectoria seguida, y justifique el tipo de trayectoria.

b) Calcule el radio de la trayectoria y el tiempo que tarda en dar una vuelta completa. Comente cómo varían dichos resultados si el campo magnético fuera de valor doble.

$m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ *Kg.* $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ *C.*

SOLUC: *b)* $r = 2{,}37.10^{-6}$ *m* $T = 3.10^{-12}$ *s* *¿?*

Problema 7º Un protón penetra en un campo eléctrico uniforme de 200 N C^{-1}, con una velocidad de 10^6 m s^{-1} perpendicular a dicho campo.

a) Explique, con ayuda de un esquema, las características del campo magnético que habría que aplicar, superpuesto al eléctrico, para que no se modifique la dirección y sentido de la velocidad inicial del protón.

b) Calcule el valor de dicho campo magnético. ¿Se modificaría el resultado si en vez de un protón penetrase, en las mismas condiciones un electrón?

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C

SOLUC: b) $B = 2.10^{-4}$ T ¿?

Problema 8º Un protón penetra en un campo magnético, con una velocidad perpendicular al campo, y describe una trayectoria circular con un período de 10^{-5} s.

a) Dibuje en un esquema el campo magnético, la fuerza que actúa sobre el protón y su velocidad en un punto de su trayectoria.

b) Calcule el valor del campo magnético. Si el radio de la trayectoria que describe es de 5 cm, ¿cuál es la velocidad de la partícula?

$e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C. $m_p = 1{,}7 \times 10^{-27}$ Kg.

SOLUC: b) $B = 6{,}62.10^{-3}$ T $v = 31\,000$ m/s

Problema 9º Para caracterizar el campo magnético uniforme que existe en una región se utiliza un haz de protones con una velocidad de 5×10^5 m s^{-1}. Si se lanza el haz en la dirección del eje **X**, la trayectoria de los protones es rectilínea, pero si se lanza en el sentido positivo del eje **Z**, actúa sobre los protones una fuerza de 10^{-14} N dirigida en el sentido positivo del eje **Y**.

a) Determine, razonadamente, el campo magnético (módulo, dirección y sentido).

b) Describa, sin necesidad de hacer cálculos, cómo se modificaría la fuerza magnética y la trayectoria de las partículas si en lugar de protones se lanzaran electrones con la misma velocidad.

$e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C.

SOLUC: a) $\vec{B} = 0{,}125\,\vec{i}\ T$

Problema 10º Un protón se nueve en el sentido positivo del eje OY en una región donde existe un campo eléctrico de $3 \cdot 10^5$ N C^{-1} en el sentido positivo del eje OZ y un campo magnético de 0,6 T en el sentido positivo del eje OX.

a) Dibuje un esquema de las fuerzas que actúan sobre la partícula y razona en qué condiciones la partícula no se desvía.

b) Si un electrón se moviera en el sentido positivo del eje OY con una velocidad de 10^3 m s^{-1}, ¿sería desviado? Explíquelo.

SOLUC: b) ¿?

Problema 11º Dos conductores rectilíneos, verticales y paralelos, A a la izquierda y B a la derecha, distan entre sí 10 cm. Por A circula una corriente de 10 A hacia arriba.

a) Calcule la corriente que debe circular por B, para que el campo magnético en un punto situado a 4 cm a la izquierda de A sea nulo.
b) Explique con ayuda de un esquema si puede ser nulo el campo magnético en un punto intermedio entre los dos conductores.
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N A^{-2}

SOLUC: a) 35 A b) ¿?

Problema 12º Un protón, que se encuentra inicialmente en reposo, se acelera por medio de una diferencia de potencial de 6000 V. Posteriormente, penetra en una región del espacio donde existe un campo magnético de 0,5 T, perpendicular a su velocidad.

a) Calcule la velocidad del protón al entrar en el campo magnético y el radio de su trayectoria posterior.
b) ¿Cómo se modificarían los resultados del apartado a) si se tratara de una partícula alfa, cuya masa es aproximadamente cuatro veces la del protón y cuya carga es dos veces la del mismo?
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C ; $m_p = 1{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg

SOLUC: b) $v = 1{,}06.10^6$ m/s r = 2,2 cm b) ¿?

Problema 13º En una región del espacio existe un campo magnético uniforme en el sentido negativo del eje Z. Indique, con la ayuda de un esquema, la dirección y sentido de la fuerza magnética en los siguientes casos:

a) una partícula β que se mueve en el sentido positivo del eje X;
b) una partícula α que se mueve en el sentido positivo del eje Z.

SOLUC: a) ¿? B) ¿?

Problema 14º Por un conductor rectilíneo indefinido, apoyado sobre un plano horizontal, circula una corriente de 20 A.

a) Dibuje las líneas del campo magnético producido por la corriente y calcule el valor de dicho campo en un punto situado en la vertical del conductor y a 2 cm de él.
b) ¿Qué corriente tendría que circular por un conductor, paralelo al anterior y situado a 2 cm por encima de él, para que no cayera, si la masa por unidad de longitud de dicho conductor es de 0,1 kg/m?

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ $N \cdot m^2 \cdot A^{-2}$ $g = 10$ $m \cdot s^{-2}$

SOLUC: a) $B = 2.10^{-4}$ T b) 5000 A

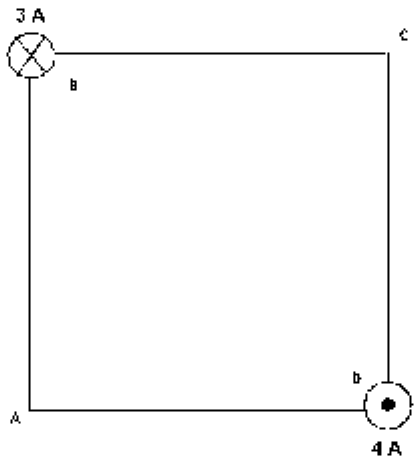
Problema 15º Dos conductores rectilíneos e indefinidos, paralelos, por los que circulan corrientes de igual intensidad, I, están separados una distancia de 0,1 m y se repelen con una fuerza por unidad de longitud de $6 \bullet 10^{-9}$ N m^{-1}.

a) Explique cualitativamente, con la ayuda de un esquema en el que dibuje el campo y la fuerza que actúa sobre cada conductor, el sentido de la corriente en cada uno de ellos.
b) Calcule el valor de la intensidad de corriente que circula por cada conductor.

$\mu_0 = 4\ \pi \bullet 10^{-}7$ T m A^{-1}

SOLUC: b) 0,055 A

Problema 16º



Dos hilos metálicos largos y paralelos, por los que circulan corrientes de 3A y 4A, pasan por los vértices B y D de un cuadrado de 2 m de lado, situado en un plano perpendicular, como se ilustra en la figura. El sentido de las corrientes se indica por los símbolos × = entra en el papel, • = sale del papel.

a) Dibuje un esquema en el que figuran las interacciones mutuas y el campo magnético resultante en el vértice A.

b) Calcule los valores numéricos del campo magnético en A y de la fuerza por unidad de longitud ejercida sobre uno de los hilos.

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N·m²·A⁻²

SOLUC: b) Si el cuadrado de la figura fuese paralelo al plano XY: $\vec{B}_B = -3.10^{-7}\,\vec{i}\,T$ $\vec{B}_D = -4.10^{-7}\,\vec{j}\,T$

$$\frac{F_{BD}}{L_D} = \frac{F_{DB}}{L_B} = 8{,}5.10^{-7}\ N/m$$

Problema 17º Un catión Na^+ penetra en un campo magnético uniforme de 0,6 T, con una velocidad de $3 \bullet 10^3$ m s⁻¹, perpendicular a la dirección del campo.

a) Dibuje la fuerza que el campo ejerce sobre el catión Na^+ y calcule su valor.
b) Dibuje la trayectoria que sigue el catión Na^+ en el seno del campo magnético y determine el radio de dicha trayectoria.

$m_{Na+} = 3{,}8 \bullet 10^{-26}$ kg ; $e = 1{,}6 \bullet 10^{-19}$ C

SOLUC: a) $2{,}88.10^{-16}$ N b) $r = 1{,}18.10^{-3}$ m

Problema 18º Un protón, un deuterón ($^2_1H^+$) y una partícula alfa, acelerados desde el reposo por una misma diferencia de potencial V, penetran posteriormente en una región en la que hay un campo magnético uniforme, **B**, perpendicular a la velocidad de las partículas.

a) ¿Qué relación existe entre las energías cinéticas del deuterón y del protón? ¿Y entre las de la partícula alfa y del protón?
b) Calcule la relación entre los radios de las trayectorias del deuterón, de la partícula alfa y del protón.

$m_{alfa} = 2\, m_{deuterón} = 4\, m_{protón}$ $q_{alfa} = 2\,e$

SOLUC: a) $E_{cd} = E_{cp}$ $E_{c\alpha} = 2\,E_{cp}$ b) $r_d = \sqrt{2}\,r_p$ $r_\alpha = \sqrt{2}\,r_p$

Problema 19º Por un alambre recto y largo circula una corriente eléctrica de 50 A. Un electrón, moviéndose a 10^6 m s⁻¹, se encuentra a 5 cm del alambre. Determine la fuerza que actúa sobre el electrón si su velocidad está dirigida:

a) Hacia el alambre.
b) Paralela al alambre. ¿Y si la velocidad fuese perpendicular a las dos direcciones anteriores.

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C ; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N A⁻²

SOLUC: a) $3{,}2.10^{-17}$ N b) $3{,}2.10^{-17}$ N 0 N

Problema 20º En una región del espacio coexisten un campo eléctrico uniforme de 5000 V m^{-1} (dirigido en el sentido positivo del eje X) y un campo magnético uniforme de 0,3 T (dirigido en el sentido positivo del eje Y):

a) ¿Qué velocidad (módulo, dirección y sentido) debe tener una partícula cargada para que atraviese dicha región sin desviarse?

b) Calcule la intensidad de un campo eléctrico uniforme capaz de comunicar a un protón en reposo dicha velocidad tras desplazarse 2 cm.

$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C ; m p = $1,7 \cdot 10^{-27}$ kg

SOLUC: a) $\vec{v} = 1,67.10^4 \vec{k}\ m/s$ b) 73,1 N/C

Problema 21º Suponga dos hilos metálicos largos, rectilíneos y paralelos, perpendiculares al plano del papel y separados 60 mm, por los que circulan corrientes de 9 y 15 A en el mismo sentido.

a) Dibuje en un esquema el campo magnético resultante en el punto medio de la línea que une ambos conductores y calcule su valor.

b) En la región entre los conductores, ¿a qué distancia del hilo por el que circula la corriente de 9 A será cero el campo magnético?

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$N A^{-2}

SOLUC: a) Si las corrientes circulan hacia arriba y los hilos están colocados en un plano paralelo al plano XY: $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 4.10^{-5} \vec{k}\ T$

b) A 22,5 mm de I_1 (Por tanto, a 37,5 mm de I_2)

Problema 22º Dos conductores rectilíneos, paralelos y muy largos, separados 10 cm, transportan corrientes de 5 y 8 A, respectivamente, en sentidos opuestos.

a) Dibuje en un esquema el campo magnético producido por cada uno de los conductores en un punto del plano definido por ellos y situado a 2 cm del primero y 12 cm del segundo y calcule la intensidad del campo total.

b) Determine la fuerza por unidad de longitud sobre uno de los conductores, indicando si es atractiva o repulsiva.

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N A^{-2}

SOLUC: a) Si los hilos están colocados en un plano paralelo al plano XY, la corriente de 5 A circula hacia arriba y la de 8 A hacia abajo:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 3,7.10^{-5} \vec{k}\ T$$

b) $\dfrac{\vec{F}_{12}}{L_2} = -\dfrac{\vec{F}_{21}}{L_1} = 8.10^{-7} \vec{i}\ \ N/m$ De repulsión

Problema 23º Un hilo recto, de longitud 0,2 m y masa $8 \cdot 10^{-3}$ kg, está situado a lo largo del eje OX en presencia de un campo magnético uniforme $\vec{B} = 0,5 \vec{k}\ T$

a) Razone el sentido que debe tener la corriente para que la fuerza magnética sea de sentido opuesto a la fuerza gravitatoria.

b) Calcule la intensidad de corriente necesaria para que la fuerza magnética equilibre al peso del hilo.

g = 10 m s^{-2}

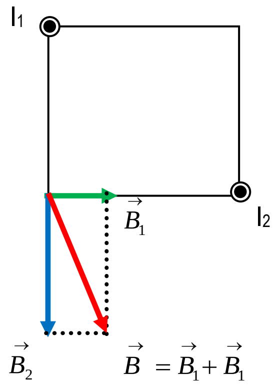
SOLUC: a) Sentido negativo del eje b) 0,8 A

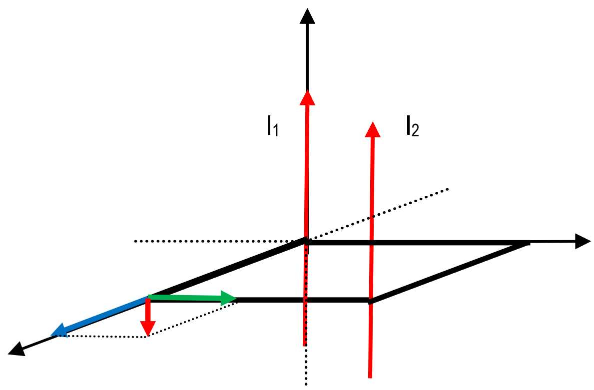
Problema 24º Dos hilos metálicos largos y paralelos, por los que circulan corrientes de 10 A, pasan por dos vértices opuestos de un cuadrado de 1 m de lado situado en un plano horizontal. Ambas corrientes discurren perpendicularmente a dicho plano y hacia arriba.

a) Dibuje un esquema en el que figuren las interacciones mutuas y el campo magnético resultante en uno de los otros dos vértices del cuadrado.
b) Calcule los valores numéricos del campo magnético en dicho vértice y de la fuerza por unidad de longitud ejercida sobre uno de los dos hilos.

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N·m²·A⁻²

SOLUC: a) El dibujo de la situación puede variar de unos alumnos a otros. La respuesta que aquí se da es para la situación descrita en la figura siguiente:





b) $\vec{B}_1 = 2.10^{-6}\,\vec{i}\,T$ $\vec{B}_2 = 2.10^{-6}\,\vec{k}\,T$ $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 2.10^{-6}\,\vec{i} + 2.10^{-6}\,\vec{k}\,T$

$\frac{F_{12}}{L_2} = -\frac{F_{21}}{L_1} = 1,41.0^{-5}\ N/m$ De atracción

Problema 25º Por un conductor rectilíneo situado sobre el eje OZ circula una corriente de 25 A en el sentido positivo de dicho eje. Un electrón pasa a 5 cm, por encima del conductor, con una velocidad de 10^6 m s^{-1}. Calcule la fuerza que actúa sobre el electrón e indique con ayuda de un esquema su dirección y sentido, en los siguientes casos:

a) Si el electrón se mueve en el sentido negativo del eje OY.
b) Si se mueve paralelamente al eje OX. ¿Y si se mueve paralelamente al eje OZ?

e = 1,6 · 10^{-19} C ; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N A^{-2}

SOLUC: a) $\vec{F} = 1,6.10^{-17}\,\vec{K}\,N$ b) $\vec{F} = 0\,N$ Si se mueve en sentido positivo del eje z: $\vec{F} = 1,6.10^{-17}\,\vec{j}\,N$

Problema 26º Por un conductor rectilíneo muy largo, apoyado sobre un plano horizontal, circula una corriente de 150 A.

a) Dibuje las líneas del campo magnético producido por la corriente y calcule el valor de dicho campo en un punto situado en la vertical del conductor y a 3 cm de él.
b) ¿Qué corriente tendría que circular por un conductor, paralelo al anterior y situado a 0,8 cm por encima de él, para que no cayera, si la masa por unidad de longitud de dicho conductor es de 20 g m^{-1}?

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T m A^{-1} ; g = 10 m s^{-2}

SOLUC: a) Si el conductor está situado en el eje x y la corriente circula hacia la derecha: $\vec{B} = 10^{-3}\,\vec{K}\,T$ b) 53,3 A

TEMA 5. INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

INTRODUCCIÓN

En el tema anterior hemos visto que las corrientes eléctricas (cargas eléctricas en movimiento), generan a su alrededor un campo magnético. En este tema nos planteamos si un campo magnético es capaz de generar una corriente eléctrica. La respuesta es que sí pero, bajo ciertas condiciones.

1. FLUJO MAGNÉTICO A TRAVÉS DE UNA SUPERFICIE

Cuando una superficie **S** se coloca en el interior de un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$, esta superficie es atravesada por un cierto nº de líneas de fuerza. En Física existe una magnitud física cuyo valor es directamente proporcional al nº de líneas de fuerza que atraviesa una determinada superficie.

Supongamos un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$, y una superficie plana **S**, colocada en el interior de dicho campo. Se define el **flujo magnético** del campo $\vec{B}$, a través de la superficie plana S, como el producto escalar de los vectores campo magnético $\vec{B}$ y superficie $\vec{S}$.

$$\boxed{\phi = \vec{B}.\vec{S} = |\vec{B}|.|\vec{S}|.\cos(\vec{B},\vec{S})} \quad [5.1]$$

El vector superficie $\vec{\mathbf{S}}$ es un vector perpendicular a la superficie y de módulo el valor del área de la misma.

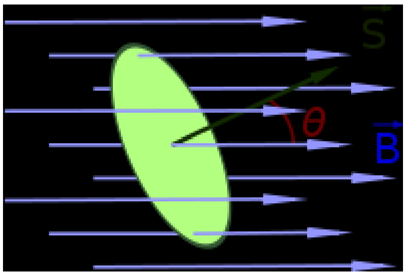


Figura 5.1

De la definición de flujo magnético a través de una superficie, podemos deducir las siguientes características:

1ª.- El flujo magnético es una magnitud física escalar puesto que se define mediante el producto escalar de dos vectores.

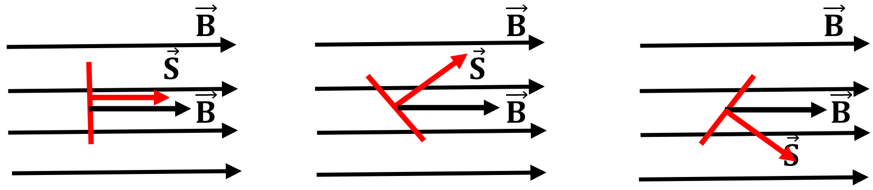
2ª.- La unidad de flujo magnético es la unidad de campo magnético por la unidad de superficie que, en el SI de unidades sería $T.m^2$. A esta unidad se le denomina weber (Wb).

$$1Wb = 1\ T{\cdot}m^2$$

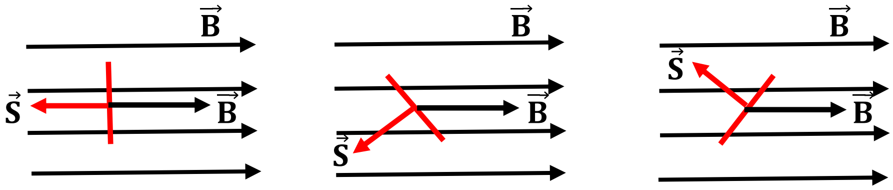
3ª.- Si observamos la expresión del flujo, podemos ver que depende de tres factores: la intensidad del campo $|\vec{\mathbf{B}}|$, el tamaño de la superficie $|\vec{\mathbf{S}}|$, y la orientación de la superficie respecto al campo magnético $\mathbf{cos}(\vec{\mathbf{B}},\vec{\mathbf{S}})$. Por tanto, si queremos modificar el flujo magnético a través de una superficie, podemos modificar cualesquiera de estos tres factores.

4ª.- El flujo magnético puede ser positivo, negativo o cero.

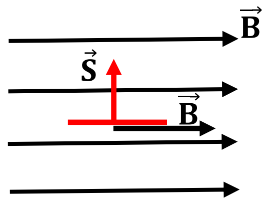
- El flujo a través de una superficie es positivo si **cos**$(\vec{B},\vec{S})$ **> 0,** y esto implica que los vectores $\vec{B}$ y $\vec{S}$ formen un ángulo agudo. Desde el punto de vista físico esto significa que hay un nº neto de líneas de fuerza que son salientes de la superficie.



- El flujo a través de una superficie es negativo si **cos**$(\vec{B},\vec{S})$ **< 0,** y esto implica que los vectores $\vec{B}$ y $\vec{S}$ formen un ángulo mayor de 90º. Desde el punto de vista físico esto significa que hay un nº neto de líneas de fuerza que son entrantes a la superficie.



- El flujo a través de una superficie es nulo si **cos**$(\vec{B},\vec{S})$ **= 0,** y esto implica que los vectores $\vec{B}$ y $\vec{S}$ sean perpendiculares, es decir, que la superficie este colocada paralelamente a las líneas de fuerza. Desde el punto de vista físico esto significa que la superficie no es atravesada por ninguna línea de fuerza o que el nº de líneas que atraviesan la superficie en ambos sentidos es el mismo.



5ª.- El flujo es máximo y positivo cuando **cos**$(\vec{B},\vec{S})$ **= 1** , es decir, el nº de líneas de fuerza que atraviesa la superficie es máximo y salientes. Si **cos**$(\vec{B},\vec{S})$ **= -1,** El flujo es máximo y negativo, es decir, el nº de líneas de fuerza que atraviesa la superficie es máximo pero entrantes.

6ª.- Si la superficie es cerrada, el flujo a través de ella es cero, ya que la superficie es atravesada en ambos sentidos por el mismo nº de líneas de campo.

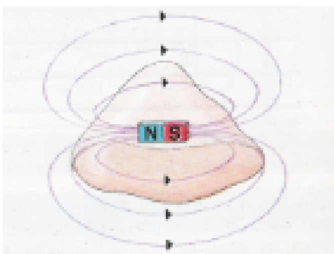


Figura 5.2

7ª.- La definición que hemos dado es para un campo magnético uniforme y una superficie plana. Pero, y si el campo no es uniforme y/o la superficie no es plana.

En estos casos se divide la superficie en infinitas superficies elementales de modo que cada una de estas superficies infinitesimales puede ser considerada como plana y el campo magnético constante en cada una de ellas. Calcularíamos entonces el flujo elemental **dϕ** realizado en cada superficie elemental mediante el producto escalar $d\phi = \vec{B}.d\vec{S}$ y sumaríamos todos estos flujos para obtener el flujo total a través de toda la superficie. Esta sumatoria se realiza mediante una operación matemática denominada integral y se escribe así:

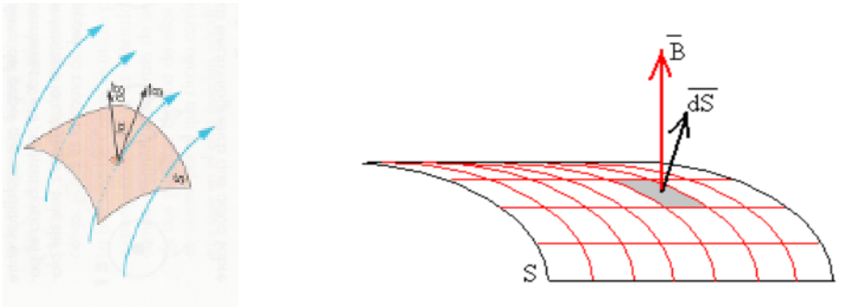
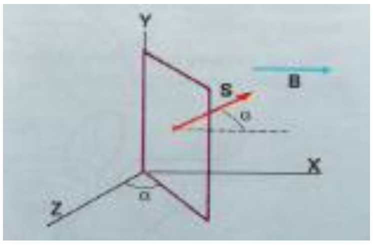


Figura 5.3

$$\boxed{\phi = \int_A^B d\phi = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{S}} \quad [5.2]$$

Ejemplo 1º

Una espira cuadrada de 10 cm de lado, inicialmente situada el plano YZ, puede girar en torno a uno de sus lados que está situado en el eje y, tal y como se indica en la figura. En esa región existe un campo magnético uniforme de 0,1 T, en sentido positivo del eje x.



a) Calcula el valor del flujo magnético a través de la superficie de la espira para cuando la espira ha girado los siguientes ángulos: 0º, 30º, 60º, 90º, 120º y 180º.

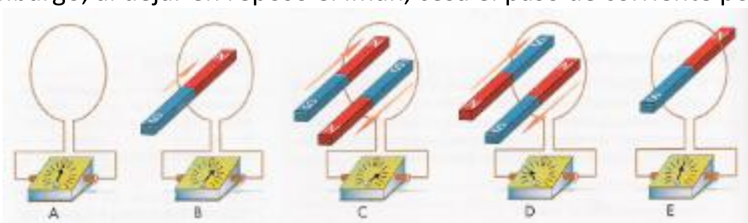
b) Si suponemos que la espira con una velocidad angular de w = π rad/s, calcula la expresión que proporcionaría el valor del flujo magnético en cualquier instante.

2. EXPERIENCIAS DE FARADAY: INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

En el tema anterior, vimos cómo una corriente eléctrica genera a su alrededor un campo magnético. El científico inglés Michael Faraday y el físico estadounidense Joseph Henry demostraron por separado en 1832 y 1831, respectivamente, con sus experiencias, cómo los campos magnéticos, en determinadas circunstancias, son capaces de generar corrientes eléctricas. Analicemos algunas de ellas.

Primera experiencia

Al acercar o alejar un imán a una espira conectada a un galvanómetro (aparato que detecta el paso de corriente eléctrica en un circuito), se observa que éste mide el paso de corriente eléctrica por la espira. Sin embargo, al dejar en reposo el imán, cesa el paso de corriente por la espira.



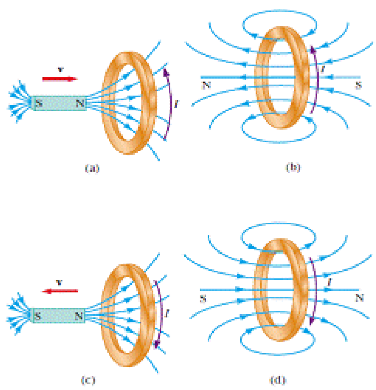


Figura 5.4

Segunda experiencia

Si en la primera experiencia se sustituye el imán por una espira por la que pasa una determinada corriente eléctrica y se acerca o se aleja a la espira conectada al galvanómetro, éste detectará paso de corriente eléctrica en esta última espira. Si las espiras se mantiene en reposo una respecto a la otra, no aparecerá corriente en la espira con galvanómetro.

Figura 5.5

Tercera experiencia

Al enfrentar dos circuitos, uno de ellos conectado a un generador de corriente y a un interruptor (bobina primaria) ,y cerrar y abrir alternativamente el interruptor, se observa la aparición de corriente eléctrica en el otro circuito (bobina secundaria). No aparece corriente en este segundo circuito si el interruptor se mantiene cerrado o abierto.

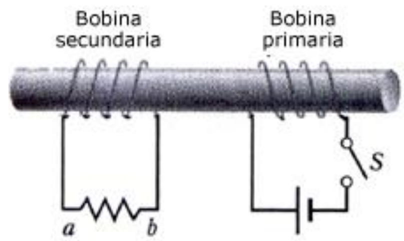


Figura 5.6

Inducción electromagnética

En todas las experiencias anteriores, hay un hecho en común: la **variación del flujo magnético** que atraviesa el circuito en el que aparece la corriente eléctrica.

Se denomina **inducción electromagnética**, al fenómeno que consiste en la creación de una corriente eléctrica, denominada **corriente inducida,** en un circuito (**inducido**) mediante un campo magnético. Para que este fenómeno se produzca, no basta con la sola utilización de un campo magnético, es necesario que exista una variación del flujo magnético a través del circuito en el que queremos inducir la corriente.

3. LEY DE FARADAY-LENZ

Esta ley caracteriza (cuantifica) el fenómeno de la inducción electromagnética y permite determinar el valor y el sentido de la corriente inducida que aparece en un determinado circuito. Para que aparezca dicha corriente es necesario generar la energía para ello. Se llama **fuerza electromotriz (fem) inducida** (**ε**) a la energía comunicada a la unidad de carga eléctrica que circula por el inducido. Su unidad en el S.I. es el voltio (V).

Ley de Faraday

Permite calcular el valor de la fem inducida y su enunciado es el siguiente:

La fuerza electromotriz inducida en un circuito es proporcional a la rapidez con que varía el flujo magnético que lo atraviesa.

$$\varepsilon = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right| \quad [5.3]$$

El valor absoluto permite obtener el valor de la fem inducida sin signo independientemente de que el flujo magnético aumente o disminuya.

- **Observaciones a la ley de Faraday**
  - Si el flujo magnético varía uniformemente a lo largo de un determinado intervalo de tiempo (Δt) o bien sólo podemos conocer los valores inicial y final del mismo, el valor de la fem se determinará con la expresión:

$$\varepsilon = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| \quad [5.4]$$

  - Como el flujo depende de tres factores (valor del campo magnético, superficie del circuito inducido y ángulo formado por el campo y la normal a la superficie del circuito), la variación de cualquiera de ellos permite que se genere corriente en el inducido.
  - El mayor o menor valor de la fem inducida no depende de lo grande o pequeño que sea el flujo magnético, depende de la mayor o menor rapidez en la variación del flujo, independientemente de si este es grande o pequeño.
  - Si el inducido consiste en una bobina (enrollamiento de N espiras), el valor de la fem será:

$$\varepsilon = N\left|\frac{d\Phi}{dt}\right| \quad \text{ó} \quad \varepsilon = N\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|$$

  - Si R es la resistencia óhmica del circuito inducido, la intensidad de corriente inducida se podrá determinar por medio de la ley de Ohm:

$$I = \frac{\varepsilon}{R}$$

Ley de Lenz

Permite determinar el sentido de la corriente inducida y su enunciado es el siguiente:

El sentido de la corriente inducida es tal que se opone con sus efectos (generación de un campo magnético inducido), a la causa que la produce.
Esto significa que el sentido de la corriente inducida es tal que su campo magnético se opondrá a los aumentos o disminuciones de flujo que la han originado.

- **Observaciones a la ley de Lenz**
    - Si el flujo magnético inductor aumenta, la corriente inducida producirá un campo magnético que tiende a oponerse al efecto del campo inductor, por lo que tendrá sentido opuesto a éste (ver esquema superior de la figura 5.4).
    - Si el flujo magnético inductor disminuye, la corriente inducida producirá un campo magnético que tiende a oponerse al efecto del campo inductor, por lo que tendrá el mismo sentido que éste (ver esquema inferior de la figura 5.4).

Ley de Faraday-Lenz

Consiste en la aplicación conjunta de la ley de Faraday y la ley de Lenz, siendo su expresión:

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}} \qquad [5.5]$$

donde el signo “-“ expresa la oposición de la fem inducida a la variación del flujo magnético que la genera.

Ejemplo 2º
Una bobina está formada por 100 espiras rectangulares de 20x30 cm de lado, y se encuentra situada perpendicularmente a un campo magnético variable de valor $B = t^2 + 4t$ T

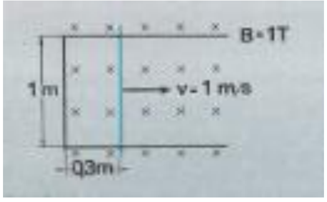
a) Calcula el flujo magnético a través de una de las espiras de la bobina en función del tiempo.
b) Calcula el flujo magnético a través de la bobina en función del tiempo.
c) Calcula la fem inducida en la bobina.
d) Dibuja la gráfica del flujo magnético y de la fem inducida en la bobina en función del tiempo.

Ejemplo 3º
Una bobina está formada por 500 espiras circulares de 50 cm de radio cada una, y se encuentra en el seno de un campo magnético perpendicular al plano de las espiras. El campo magnético inicialmente vale 1 T y disminuye linealmente hasta anularse en 10 s.

a) Calcula la expresión del campo magnético en función del tiempo.
b) Calcula el flujo magnético a través de la bobina en función del tiempo.
c) Calcula la fem inducida en la bobina. ¿Habría otra forma de calcular la fem inducida? ¿Cuál?
d) Razona el sentido de la corriente eléctrica inducida.

Ejemplo 4º

Una espira rectangular está colocada perpendicularmente a un campo magnético uniforme de 1 T. La espira posee un lado móvil que se desplaza con una velocidad constante de 1 m/s, debido a un agente externo, tal y como se indica en la figura:



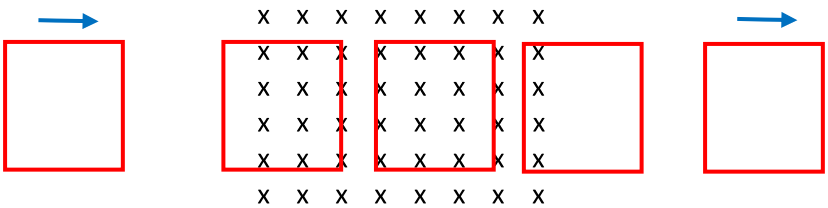
Calcula: a) La expresión instantánea del flujo magnético que atraviesa la espira.
b) La fem inducida en la espira.
c) El valor de la corriente eléctrica inducida si la resistencia de la espira es de 2 Ω.
d) El sentido de la corriente inducida.

Ejemplo 5º

Una espira cuadrada de 20 cm de lado se aproxima con velocidad constante hacia una región en la que existe un campo magnético uniforme B, perpendicular a la espira.

a) Razona cuando y porqué se producirá inducción electromagnética en la espira desde que se acerca al campo, penetra en él y lo abandona.

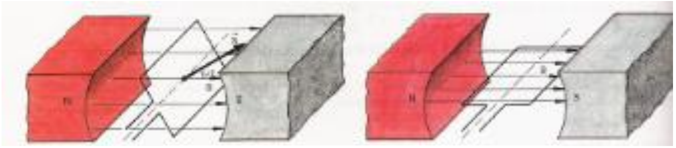
b) Cuando se produzca inducción electromagnética, razona el sentido de la corriente inducida.



4. GENERACIÓN DE CORRIENTE ALTERNA

La corriente alterna consiste en la variación periódica tanto de la fem inducida como de la intensidad de corriente que aparece en el circuito inducido.

Una forma de generarla consiste en disponer, dentro de un campo magnético uniforme B, una espira que gira con velocidad angular ω constante (MCU) alrededor de un determinado eje (figura 5.7).



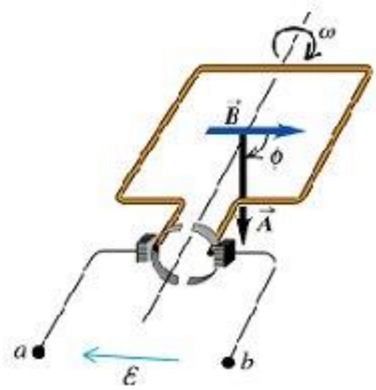


Figura 5.7

En estas condiciones, el valor del ángulo θ que forma el campo magnético con la normal a la espira, varía con el tiempo según la expresión $\theta = \theta_0 + \omega\cdot t$, donde θ_0 es el ángulo que forman inicialmente el campo y la normal a la espira. Si suponemos que inicialmente los vectores campo magnético y superficie formaban 0º, podemos, entonces, escribir la expresión del flujo magnético a través de la espira de la siguiente forma:

$$\Phi(t) = \vec{B}.\vec{S} = |\vec{B}|\,.\,|\vec{S}|\,.\cos(\vec{B},\vec{S}) = B\cdot S\cdot \cos(\omega\cdot t)$$

Si se trata de una bobina formada por N espiras, todas de la misma superficie, el flujo instantáneo a través de la bobina sería:

$$\boxed{\Phi(t) = N.B.S\cdot\cos(\omega\cdot t)} \quad [5.6]$$

Aplicando la ley de Faraday-Lenz, la fem inducida instantánea será:

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = N.B.S.\omega\cdot \text{sen}(\omega\cdot t)$$

Llamando fem máxima ε_0 al término N.B.S.ω, resulta:

$$\boxed{\varepsilon(t) = N.B.S.\ \omega\ .\ \text{sen}(\omega\cdot t) = \varepsilon_0\cdot\ \text{sen}(\omega\cdot t)} \quad [5.7]$$

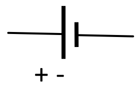
Aplicando la ley de Ohm, la expresión de la corriente inducida queda así:

$$\boxed{I(t) = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{N.B.S.\omega\text{sen}(\omega\cdot t)}{R} = I_0\cdot\ \text{sen}(\omega\cdot t)} \quad [5.8]$$

donde I_0 es la intensidad máxima ($I_0 = \frac{\varepsilon_0}{R}$).

Como puede observarse en las expresiones instantáneas de la fem y de la intensidad, estás varían periódicamente con el tiempo, y por tanto, la corriente eléctrica inducida en el dispositivo anterior es una corriente alterna y, al dispositivo anterior se le denomina **GENERADOR DE CORRIENTE ALTERNA** o **ALTERNADOR.**

Recuerda que para una pila o generador de corriente continua (c. c) se utiliza un símbolo que consiste en dos pequeñas líneas paralelas de distinta longitud, para un generador de c. a. o alternador se utiliza también un símbolo y es el siguiente:



Generador de cc o pila

Generador de ca o alternador

Con la siguiente tabla de valores podemos representar gráficamente ambas magnitudes físicas:

t *(s)*	$\omega.t = \frac{2\pi}{T}.t\,(rad)$	**sen(ω·t)**	**ε(t) = ε₀·sen (ω·t)** *(V)*	**I(t) = I₀·sen (ω·t)** *(A)*
0	0	0	0	0
T/4	$\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$	1	ε_0	I_0
T/2	Π	0	0	0
3T/4	3π/2	-1	$-\varepsilon_0$	$-I_0$
T	2π	0	0	0

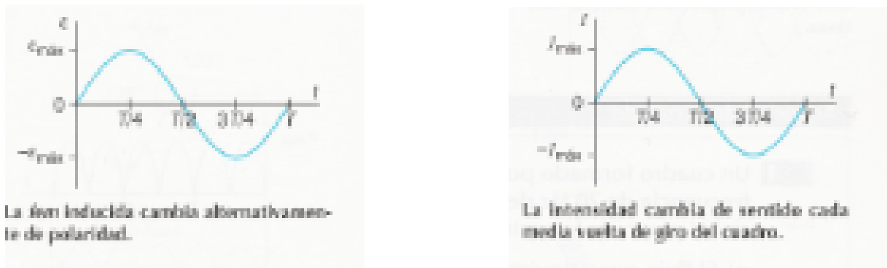


Figura 5.8

Como podemos observar el signo de la fem cambia dos veces en un periodo, por tanto, el sentido de la corriente eléctrica cambia también dos veces en un periodo.

Podría pensarse que este cambio en el sentido de la intensidad de la c. a. supone que los electrones se desplazan a lo largo del conductor en uno y otro sentido alternativamente, sin embargo, lo que en realidad ocurre, es que los electrones del conductor se ponen a vibrar en torno a una posición fija.

Ejemplo 6º

Una bobina de 1000 espiras circulares de 5 cm de radio cada una, colocada perpendicularmente a un campo magnético uniforme y horizontal de 0,2 T, gira alrededor de un eje vertical a razón de 1200 rpm.

a) Calcula las expresiones instantáneas del flujo, de la fem inducida y de la intensidad en la bobina, si su resistencia es de 20 Ω.
b) Calcula el valor de las tres magnitudes anteriores para t = 1s.
c) Representa gráficamente al flujo, a la fem inducida y a la intensidad en función del tiempo.

Ejemplo 7º

Calcula a qué velocidad angular debería de girar una bobina de 10.000 espiras cuadradas de 20 cm de lado en el seno de un campo magnético de 1 T para que produzca una fem máxima de 220 V. Exprésala en rpm.

5. TRANSFORMADORES

La corriente alterna ha de ser transportada desde donde se produce hasta donde se utiliza. En este transporte se producen pérdidas energéticas por efecto Joule en los cables conductores por los que circula. En concreto la potencia disipada en un conductor de resistencia R por el que circula una c. a. de intensidad I es:

$$P = I^2.R$$

Si se quieren reducir las pérdidas energéticas puede elegirse entre dos opciones: disminuir la resistencia del cable conductor que la transporta, o disminuir la intensidad que circula por el mismo.

La primera opción supone aumentar el grosor del conductor (recordemos que la resistencia de un conductor viene dada por la expresión: $R = \rho \frac{L}{S}$). Esto implica un mayor gasto en la instalación, al aumentar la cantidad de metal a utilizar y ser mayor el peso que tendrían que soportar las torres de sujeción.

La segunda opción, la disminución de la intensidad que circula, puede conseguirse aumentando la ddp en los cables de conducción. Esto se explica porque la potencia que transporta (energía por unidad de tiempo) una corriente eléctrica viene dada por:

$$P = V.I$$

De modo que para un cierto valor de la potencia, cuando menor sea la intensidad, mayor tendrá que ser la ddp.

Esta segunda opción obliga a transportar la c. a. a un potencial muy elevado. En las centrales eléctricas la c. a. se produce a unos 20.000 V y en los cables se transporta hasta a 400.000 V. Esto exige disponer de un dispositivo que sea capaz de aumentar la tensión de la c. a. a la salida de las centrales eléctricas, y que luego reduzca la tensión al llegar a los lugares de consumo (p. e. 220 V en los hogares). Este dispositivo es el transformador de c. a.

Un transformador es un dispositivo que consiste de un núcleo metálico (generalmente de hierro) al que se enrollan dos conductores formando dos circuitos: un circuito primario con N_1 espiras (arrollamiento primario), y un circuito secundario con N_2 espiras (arrollamiento secundario) (figura 5.9).

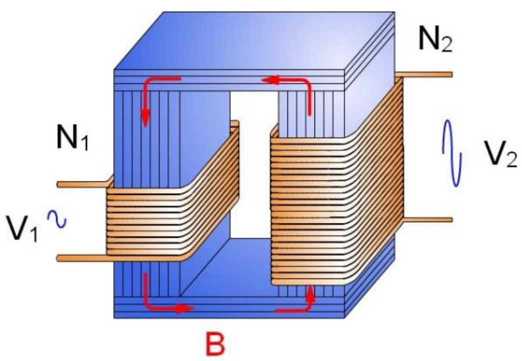


Figura 5.9

Al conectar el circuito primario a una fuente de corriente alterna de voltaje máximo V_1, ésta genera un campo magnético variable cuyas líneas de campo son conducidas a lo largo del núcleo de hierro hasta atravesar las espiras del circuito secundario. Como la intensidad de la c. a. del primario es variable con el tiempo, el campo magnético que crea también lo será, y por tanto, el flujo magnético a través del secundario, dándose la condición necesaria para que en este último arrollamiento se produzca el fenómeno de la inducción electromagnética, es decir, en el secundario aparecerá una corriente eléctrica inducida que también será alterna.

Puede demostrarse que la relación entre la tensión de entrada V_1 y la tensión de salida V_2, es la siguiente:

$$\boxed{\frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}} \qquad [5.9]$$

La última expresión nos indica que el voltaje en cada circuito es directamente proporcional al número de espiras que lo forman. Este hecho permite **transformar** la corriente alterna de manera que:

- Si el arrollamiento secundario tiene mas vueltas que el primario, entonces la tensión a la salida del transformador es mayor que a la entrada, es decir, el transformador actúa como un elevador de tensión:

  Si $N_2 > N_1$, entonces $V_2 > V_1$ y hablaremos de **elevador de tensión ó transformador de alta**.

- Si el arrollamiento secundario tiene menos vueltas que el primario, entonces la tensión a la salida del transformador es menor que a la entrada, es decir, el transformador actúa como un reductor de tensión:

  Si $N_2 < N_1$, entonces $V_2 < V_1$ y hablaremos de **reductor de tensión ó transformador de baja**.

De la misma forma, si suponemos comportamiento ideal del transformador, no habrá pérdida de potencia cumpliéndose:

$$P_1 = P_2 \Rightarrow V_1 \cdot I_1 = V_2 \cdot I_2 \Rightarrow \frac{I_1}{N_2} = \frac{I_2}{N_1}$$

donde observamos que la intensidad de corriente en cada circuito es inversamente proporcional al número de espiras en cada uno. Por tanto, un transformador elevador de tensión será reductor de intensidad y, por el contrario, un transformador reductor de tensión será elevador de intensidad.

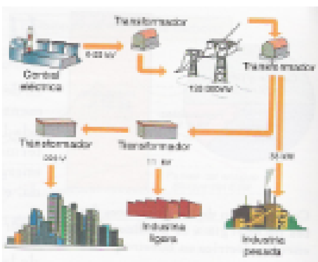


Figura 5.10

IMPORTANTE:

Un transformador no puede ser utilizado en cc, ya que, si al primario llega una cc, su campo magnético no produciría en el secundario un flujo variable con el tiempo y, por tanto, en este arrollamiento no se produciría el fenómeno de la inducción electromagnética, es decir, no aparecería corriente inducida en el secundario.

Ejemplo 8º

Un transformador de c. a. está formado por un arrollamiento de 100 espiras y otro de 1000. Calcula cual será la tensión de salida si se conecta de una u otra forma a una tensión alterna de 220 V.

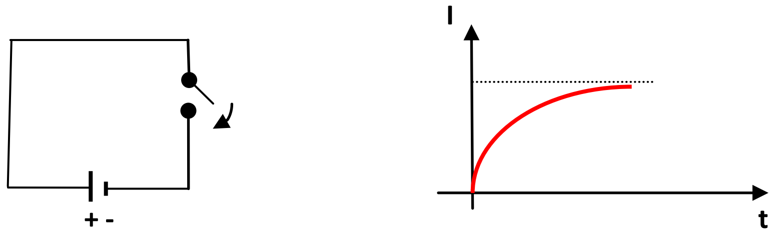
6. AUTOINDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

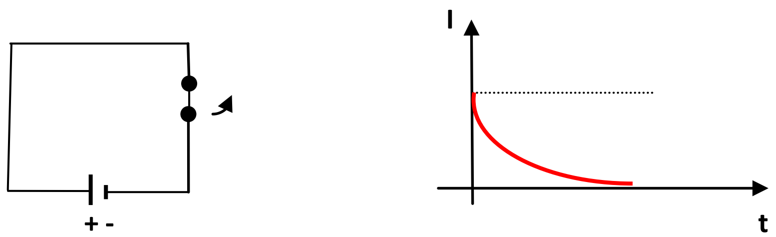
Hasta ahora, en los fenómenos de inducción que hemos estudiado, el campo magnético que utilizábamos para producir el flujo variable en el circuito inducido era externo a este circuito, es decir, utilizábamos como fuente del campo magnético a un imán o a la corriente eléctrica del circuito inductor. Pero, ¿puede un circuito por el que circula una corriente eléctrica producirse a sí mismo fenómenos de inducción, es decir, puede un circuito ser al mismo tiempo el inductor y el inducido? La respuesta es que sí, y al fenómeno ahora se llamaría **AUTOINDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA**. Veámoslo.

Imaginemos un circuito por el que circula una corriente eléctrica variable (p. e. una c. a.). Por ser variable la intensidad de la corriente, creará a su alrededor un campo magnético variable con el tiempo. Este campo magnético variable producirá un flujo variable a través de la superficie del propio circuito, y por tanto, según Henry y Faraday, se dan las condiciones para que se produzca en el propio circuito fenómenos de inducción electromagnética, es decir, además de la corriente eléctrica que ya había en el circuito, aparece una segunda corriente, una corriente extra, la corriente inducida (corriente autoinducida).

Como hemos comprobado en el razonamiento anterior, para que se produzca el fenómeno de autoinducción en un circuito, es necesario que circule por él una corriente eléctrica variable. Según esto podría pensarse que el fenómeno de la autoinducción sólo se presenta en circuitos de c. a. Sin embargo, también se produce en los circuitos de c. c. durante un breve periodo de tiempo cuando se conectan o desconectan dichos circuitos.

Imaginemos un circuito abierto de c.c. Al cerrar el interruptor, varía la intensidad de la corriente que circula por él, que pasa de 0 a un valor I en un breve intervalo de tiempo Δt. En este intervalo de tiempo es cuando se produce la autoinducción, y desaparece cuando la intensidad se estabiliza. Lo mismo sucede cuando, una vez conectado, se desconecte el circuito, porque también habrá un breve intervalo de tiempo en el que la intensidad variará para pasar del valor I al valor 0. Estas corrientes autoinducidas se denominan extracorrientes de cierre y de apertura.





7. ANÁLOGÍAS Y DIFERENCIAS ENTRE EL CAMPO ELECTROSTÁTICO Y EL CAMPO MAGNÉTICO

Si analizamos las expresiones del campo eléctrico y del campo magnético creado por una carga puntual, observamos diferentes analogías y diferencias:

$\boxed{\vec{E} = K \frac{Q_1}{r^2} \vec{u_r}}$ (vector campo) $\boxed{E = K \frac{|Q_1|}{r^2}}$ (módulo del vector campo)

$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{v} \times \vec{u_r}}$ (vector campo) $\boxed{B = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{|Q|}{r^2} \cdot v}$ (módulo del vector campo)

ANÁLOGIAS

1ª.- Los dos campos son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia que separa cada punto de la carga fuente.

2ª.- Las fuerzas de interacción en ambos campos pueden ser de atracción o de repulsión dependiendo del signo de la cargas eléctricas que interaccionan (campo eléctrico) o de los polos que interaccionan (campo magnético).

3ª.- No son fuerzas por contacto, sino interacciones a distancia que actúan tanto en el vacío como en presencia de medios materiales. La presencia de una carga o de una carga en movimiento, produce una "deformación" que dota al espacio de cierta propiedad en cada uno de sus puntos, creándose, de este modo, los campos correspondientes. Esta "deformación" del espacio sólo se pone de manifiesto al situar en esos puntos a una carga o a una carga testigo en movimiento.

4ª.- En ambos campos el medio juega un importante papel a través de la constante eléctrica K, em el campo eléctrico, y de la permeabilidad magnética μ en el campo magnético.

5ª.- Ambos campos presentan fenómenos de inducción.

DIFERENCIAS

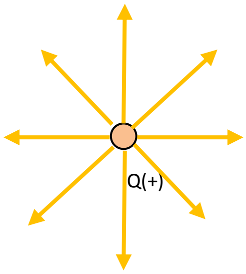
1ª.- Una carga en reposo o en movimiento puede crear un campo eléctrico. Sin embargo, una carga tiene que estar en movimiento para crear un campo magnético.

2ª.- Mientras que el campo eléctrico puede actuar sobre cargas en reposo o en movimiento, el campo magnético sólo puede hacerlo sobre cargas en movimiento.

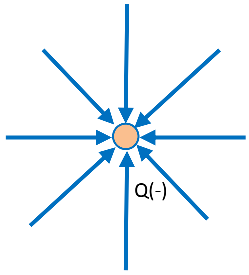
3ª.- El campo eléctrico es central ya que su dirección es la de la recta que une cada punto con la carga que crea el campo. Sin embargo el campo magnético no lo es, es perpendicular a la dirección radial y a la velocidad de la carga que lo crea.

4ª.- El campo eléctrico es conservativo, pero el campo magnético no lo es, es decir, mientras que al campo eléctrico le podemos asociar una energía potencial y un potencial, al campo magnético no.

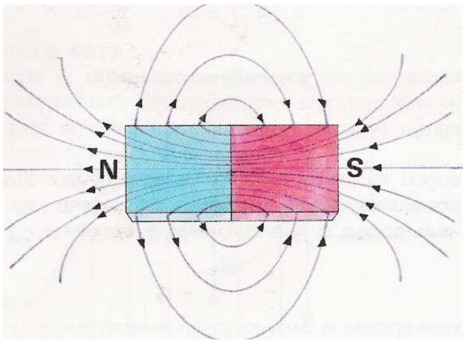
5ª.- Las líneas de campo eléctrico son abiertas, pero las del campo magnético son cerradas.



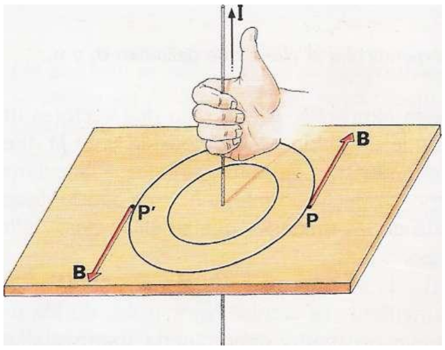
Líneas de fuerza de una carga puntual +



Líneas de fuerza de una carga puntual -



Líneas de fuerza de un imán



Líneas de fuerza de una corriente eléctrica rectilínea

6ª.- Mientras que en el campo eléctrico las cargas positivas y negativas se pueden aislar entre sí (monopolos eléctricos), en el campo magnético el polo norte y el polo sur siempre aparecen juntos (dipolo magnético), es decir, no se pueden separar, no hay monopolos magnéticos.

7ª.- El campo eléctrico es máximo en el vacío. Sin embargo el campo magnético no es máximo en el vacío. En los medios paramagnéticos y ferromagnéticos el campo magnético es mayor que en el vacío, pero en los medios diamagnéticos es menor.

CUESTIONES

Cuestión 1ª Una espira atraviesa una región del espacio en la que existe un campo magnético uniforme, vertical y hacia arriba. La espira se mueve en un plano horizontal. a) Explique si circula corriente o no por la espira cuando: i) está penetrando en la región del campo; ii) mientras se mueve en dicha región; iii) cuando está saliendo. b) Indique el sentido de la corriente, en los casos en que exista, mediante un esquema.

Cuestión 2ª Razone si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones: a) La fuerza electromotriz inducida en una espira es proporcional al flujo magnético que la atraviesa. b) Un transformador eléctrico no puede utilizarse con corriente continua.

Cuestión 3ª a) Comente la siguiente afirmación: Si el flujo magnético a través de una espira varía con el tiempo, se induce en ella una fuerza electromotriz. b) Explique diversos procedimientos para lograr la situación anterior.

Cuestión 4ª a) Escriba la expresión de la fuerza electromotriz inducida en una espira bajo la acción de un campo magnético y explique el origen y las características de dicha fuerza electromotriz. b) Si la espira se encuentra en reposo, en un plano horizontal, y el campo magnético es vertical y hacia arriba, indique en un esquema el sentido de la corriente que circula por la espira: i) si aumenta la intensidad del campo magnético; ii) si disminuye dicha intensidad.

Cuestión 5ª Justifique razonadamente, con la ayuda de un esquema, el sentido de la corriente inducida en una espira en cada uno de los siguientes supuestos: a) la espira está en reposo y se le acerca, perpendicularmente al plano de la misma, un imán por su polo sur; b) la espira está penetrando en una región en la que existe un campo magnético uniforme, vertical y hacia arriba, manteniéndose la espira horizontal.

Cuestión 6ª Una espira se mueve en un plano horizontal y penetra en un campo magnético uniforme vertical. a) Explique las características de la corriente inducida en la espira al entrar en la región del campo, al moverse en él y al abandonarlo. b) Razone en qué etapas del trayecto descrito habría que comunicarle una fuerza externa a la espira para que avanzara con velocidad constante.

Cuestión 7ª Conteste razonadamente a las siguientes preguntas:

c) Si no existe flujo magnético a través de una superficie, ¿puede asegurarse que no existe campo magnético en esa región?
d) La fuerza electromotriz inducida en una espira, ¿es más grande cuanto mayor sea el flujo magnético que la atraviesa?

Cuestión 8ª Una espira cuadrada está cerca de un conductor, recto e indefinido, recorrido por una corriente I. La espira y el conductor están en un mismo plano. Con ayuda de un esquema, razone en qué sentido circula la corriente inducida en la espira: a) Si se aumenta la corriente en el conductor. b) Si, dejando constante la corriente en el conductor, la espira se aleja de éste manteniéndose en el mismo plano.

Cuestión 9ª Considere las dos experiencias siguientes: i) un imán frente a una espira con un amperímetro y ii) la espira con amperímetro frente a otra espira con un generador de corriente eléctrica y un interruptor:

a) Copie y complete el cuadro siguiente:

	¿Existe **B** en la espira?	¿Varía el flujo magnético a través de la espira?	¿Existe corriente inducida en la espira?
Imán acercándose			
Imán quieto			
Imán alejándose			
Interruptor abierto			
Interruptor cerrado			
Al abrir o cerrar el interruptor			

A partir de los resultados del cuadro anterior razone, con la ayuda de esquemas, la causa de la aparición de corriente inducida en la espira.

Cuestión 10ª a) Explique el fenómeno de inducción electromagnética y enuncie la ley de Faraday-Henry. b) Una espira circular se encuentra situada perpendicularmente a un campo magnético uniforme. Razone qué fuerza electromotriz se induce en la espira, al girar con velocidad angular constante en torno a un eje, en los siguientes casos: i) el eje es un diámetro de la espira; ii) el eje pasa por el centro de la espira y es perpendicular a su plano.

Cuestión 11ª a) Enuncie la ley de Faraday-Lenz y razone si con un campo magnético constante puede producirse fuerza electromotriz inducida en una espira.
b) Un conductor rectilíneo se conecta a un generador de corriente continua durante un cierto tiempo y después se desconecta. Cerca del conductor se encuentra una espira. Razone, ayudándose de un esquema, si en algún instante se induce fuerza electromotriz en la espira y explique sus características.

Cuestión 12ª a) Una espira circular gira en torno a uno de sus diámetros en un campo magnético uniforme. Razone si se induce fuerza electromotriz en la espira si: i) el campo magnético es paralelo al eje de rotación; ii) es perpendicular. b) Cuando un imán se acerca a una espira se genera en ella una fuerza electromotriz. Razone cómo cambiaría esa fuerza electromotriz si: i) el imán se alejara de la espira; ii) se inviertieran los polos del imán; iii) el imán se mantuviera fijo.

Cuestión 13ª b) Una espira, contenida en el plano horizontal XY y moviéndose en la dirección del eje X, atraviesa una región del espacio en la que existe un campo magnético uniforme, dirigido en el sentido positivo del eje Z. Razone si se induce corriente eléctrica en la espira e indique el sentido de la misma en cada uno de los siguientes casos: i) cuando la espira penetra en el campo; ii) cuando se mueve en su interior; iii) cuando sale del campo magnético.

Cuestión 14ª Dos espiras circulares “a” y “b” se hallan enfrentadas con sus planos paralelos. i) Por la espira “a” comienza a circular una corriente en sentido horario. Explique con la ayuda de un esquema el sentido de la corriente inducida en la espira “b”. ii) Cuando la corriente en la espira “a” alcance un valor constante, ¿qué ocurrirá en la espira “b”? Justifique la respuesta.

PROBLEMAS

Problema 1º Una espira cuadrada de 5 cm de lado se encuentra en el interior de un campo magnético uniforme, de dirección normal al plano de la espira y de intensidad variable con el tiempo: $B = 2t^2$ (T).

a) Deduzca la expresión del flujo magnético a través de la espira en función del tiempo.
b) Represente gráficamente la fuerza electromotriz inducida en función del tiempo y calcule su valor para t = 4 s.

SOLUC: a) $\phi(t) = 5.10^{-3}t^2$ Wb b) $\varepsilon(t = 4\ s) = 0{,}04$ V

Problema 2º Una espira cuadrada de 10 cm de lado, inicialmente horizontal, gira a 1200 revoluciones por minuto, en torno a uno de sus lados, en un campo magnético uniforme vertical de 0,2 T.

a) Calcule el valor máximo de la fuerza electromotriz inducida en la espira y represente, en función del tiempo, el flujo magnético a través de la espira y al fuerza electromotriz inducida.
b) ¿Cómo se modificaría la fuerza electromotriz inducida en lal espira si se redujera la velocidad de rotación a la mitad? ¿Y si se invirtiera el sentido del campo magnético?

SOLUC: a) $\varepsilon_{máx.} = 0{,}25$ V b) ¿?

Problema 3º Una espira circular de 10 cm de diámetro, inmóvil, está situada en una región en la que existe un campo magnético, perpendicular a su plano, cuya intensidad varía de 0,5 a 0,2 T en 0,1 s.

a) Dibuje en un esquema la espira, el campo y el sentido de la corriente inducida, razonando la respuesta.
b) Calcule la fuerza electromotriz inducida y razone cómo cambiaría dicha fuerza electromotriz si la intensidad del campo aumentase en lugar de disminuir.

SOLUC: b) $\varepsilon = 0{,}024$ V

Problema 4º Una espira de 20 cm^2 se sitúa en un plano perpendicular a un campo magnético uniforme de 0,2 T.

a) Calcule el flujo magnético a través de la espira y explique cómo varía el valor del flujo al girar la espira un ángulo de 60º.
b) Si el tiempo invertido en el giro es de 2×10^{-3} s, ¿cuánto vale la fuerza electromotriz media inducida en la espira? Explique que habría ocurrido si la espira se hubiese girado en sentido contrario.

SOLUC: a) $\phi_0 = 4.10^{-4}$ Wb $\phi_f = 2.10^{-4}$ Wb b) $\varepsilon = 0{,}1$ V

Problema 5º Una espira cuadrada de 2 m de lado está situada perpendicularmente a un campo magnético uniforme de 0,5 T.

a) Explique razonadamente si, en estas circunstancias, se induce corriente eléctrica en la espira.
b) Determine la fuerza electromotriz media inducida en la espira si, en 0'1 s, gira 90º en torno a un eje perpendicular al campo.

SOLUC: b) $\varepsilon = 20$ V

Problema 6º Una espira cuadrada, de 30 cm de lado, se mueve con una velocidad constante de 10 m s^{-1} y penetra en un campo magnético de 0,05 T perpendicular al plano de la espira.

a) Explique, razonadamente, qué ocurre en la espira desde que comienza a entrar en la región del campo hasta que toda ella está en el interior del campo. ¿Qué ocurriría si la espira, una vez en el interior del campo, saliera del mismo?

b) Calcule la fuerza electromotriz inducida en la espira mientras está entrando en el campo.

SOLUC: b) ε = -0,15 V

Problema 7º El flujo de un campo magnético que atraviesa cada espira de una bobina de 250 vueltas, entre t = 0 y t = 5 s, está dado por la expresión:

$$\Phi(t) = 3 \cdot 10^{-3} + 15 \cdot 10^{-3}\, t^{2} \text{ (S.I.)}$$

a) Deduzca la expresión de la fuerza electromotriz inducida en la bobina en ese intervalo de tiempo y calcule su valor para t = 5 s.
b) A partir del instante t = 5 s el flujo magnético comienza a disminuir linealmente hasta anularse en t = 10 s. Represente gráficamente la fuerza electromotriz inducida en la bobina en función del tiempo, entre t = 0 y t = 10 s.

SOLUC: a) $\varepsilon(t)$ = -7,5 t V $\varepsilon(t = 5\ s)$ = -37,5 t V

Problema 8º Una espira circular de 45 mm de radio está situada perpendicularmente a un campo magnético uniforme. Durante un intervalo de tiempo de $120 \cdot 10^{-3}$ s el valor del campo aumenta linealmente de 250 mT a 310 mT.

a) Calcule el flujo del campo magnético que atraviesa la espira durante dicho intervalo y la fuerza electromotriz inducida en la espira.
b) Dibuje en un esquema el campo magnético y el sentido de la corriente inducida en la espira. Explique el razonamiento seguido.

SOLUC: a) $\phi(t) = 3{,}18.10^{-3}\, t + 1{,}6.10^{-3}$ Wb $\varepsilon = -3{,}18.10^{-3}$ V

Problema 9º Un campo magnético, cuyo módulo viene dado por:

$$B = 2 \cos (100\, t) \text{ (S. I.)},$$

forma un ángulo de 45° con el plano de una espira circular de radio R = 12 cm.

a) Calcule la fuerza electromotriz inducida en la espira en el instante t =2 s.
b) ¿Podría conseguirse que fuera nula la fuerza electromotriz inducida girando la espira? Razone la respuesta.

SOLUC: a) $\varepsilon(t = 2\ s)$ = - 5,5 V

Problema 10º Una espira de 10 cm de radio se coloca en un campo magnético uniforme de 0,4 T y se la hace girar con una frecuencia de 20 Hz. En el instante inicial el plano de la espira es perpendicular al campo.

a) Escriba la expresión del flujo magnético que atraviesa la espira en función del tiempo y determine el valor máximo de la f.e.m. inducida.
b) Explique cómo cambiarían los valores máximos del flujo magnético y de la f.e.m. inducida si se duplicase el radio de la espira. ¿Y si se duplicara la frecuencia de giro?

SOLUC: a) $\phi(t) = 0{,}004\pi \cos (40\pi\, t)$ Wb $\varepsilon_{máx.}$ = 1,58 V b) ¿?

Problema 11º Sea un solenoide de sección transversal $4 \cdot 10^{-4}$ m^2 y 100 espiras. En el instante inicial se aplica un campo magnético, perpendicular a su sección transversal, cuya intensidad varía con el tiempo según B = 2 t + 1 T, que se suprime a partir del instante t = 5 s.

a) Explique qué ocurre en el solenoide y represente el flujo magnético a través del solenoide en función del tiempo.
b) Calcule la fuerza electromotriz inducida en el solenoide en los instantes t = 3 s y t = 10 s.

SOLUC: a) $\varphi(t) = \begin{cases} 8.10^{-2}t + 4.10^{-2}Wb & si \quad 0 < t \leq 5 \\ 0 & si \quad t > 5 \end{cases}$ b) ε(t = 3 s) = -8.10^{-2} V ε(t = 10 s) = 0 V

Problema 12º Cuando una espira circular, situada en un campo magnético uniforme de 2 T, gira con velocidad angular constante en torno a uno de sus diámetros perpendicular al campo, la fuerza electromotriz inducida es:

$$\varepsilon\ (t) = -10\ \text{sen}\ (20\ t)\ (\text{S.I.})$$

a) Deduzca la expresión de la f.e.m. inducida en una espira que gira en las condiciones descritas y calcule el diámetro de la espira y su periodo de revolución.
b) Explique cómo variarían el periodo de revolución y la f.e.m. si la velocidad angular fuese la mitad.

SOLUC: a) ε(t) = ± B.S.ω. cos (ωt) diámetro = 56 cm T = π/10 s b) ¿?

TEMA 6. MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (MAS)

1. MOVIMIENTOS PERIÓDICOS, OSCILATORIOS, VIBRATORIOS Y VIBRATORIOS ARMÓNICOS SIMPLES

Un movimiento es **periódico** si se repite a intervalos regulares de tiempo, es decir, cuando los valores de las variables cinemáticas de la partícula (posición, velocidad y aceleración) se repiten a intervalos regulares de tiempo. Son movimientos periódicos: el MCU, cualquier movimiento de rotación de los planetas alrededor del sol y de los satélites alrededor de sus planetas, las oscilaciones de un péndulo, el movimiento de un cuerpo unido a un muelle, el movimiento de los electrones en ca, el pistón del motor de un coche, el niño columpiándose, …

Un movimiento **periódico es oscilatorio** cuando la trayectoria se recorre en los dos sentidos. Son movimientos oscilatorios las oscilaciones de un péndulo, el movimiento de un cuerpo unido a un muelle, el movimiento de los electrones en c. a., el pistón del motor de un coche, el niño columpiándose.

Los **movimientos oscilatorios pueden ser amortiguados y no amortiguados o libre**. Un movimiento oscilatorio es no amortiguado o libre si permanece igual a lo largo del tiempo, y es amortiguado si desaparece al cabo de un cierto tiempo. En la mayoría de los casos los movimientos oscilatorios son amortiguados (pensemos en un niño columpiándose), pero, podemos mantener el movimiento indefinidamente si lo forzamos, proporcionándole energía continuamente. Nosotros estudiaremos un tipo de movimiento oscilatorio no amortiguado.

Un movimiento **oscilatorio es vibratorio** cuando la trayectoria que se recorre en los dos sentidos es recta y el punto de equilibrio se encuentra en el centro de la trayectoria. Son movimientos vibratorios el movimiento de un cuerpo unido a un muelle, el movimiento de los electrones en ca, el pistón del motor de un coche, el niño columpiándose.

El movimiento de un péndulo realmente no es vibratorio, salvo que la longitud del hilo sea muy larga y las oscilaciones muy pequeñas, y, entonces, la trayectoria del cuerpo que hay unido al hilo se podría aproximar a una rectilínea.

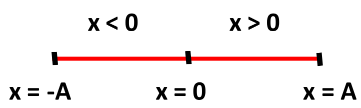
El movimiento vibratorio mas sencillo es el **movimiento armónico simple (MAS)**, que es aquel movimiento vibratorio en el que la posición, velocidad y aceleración se pueden describir mediante las funciones seno y/o coseno.

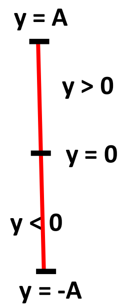
2. MAGNITUDES CARACTERÍSTICAS DEL MOVIMIENTO VIBRATORIO ARMÓNICO SIMPLE (MAS)

En el movimiento armónico simple se definen las siguientes magnitudes físicas:

- **<u>Elongación</u> (x o y)**: es la posición de la partícula respecto a la posición de equilibrio, es decir, respecto al centro de la trayectoria. Se mide en m en el SI de unidades, y la representamos por la letra x si el movimiento se realiza en la horizontal, o por la letra y si se realiza en la vertical.
  La elongación será positiva cuando la partícula se encuentre en la parte positiva de la trayectoria, y negativa cuando esté en la parte negativa de la trayectoria.
  La elongación o posición será una función del tiempo x(t) o y(t).

- **<u>Amplitud</u> (A):** es la elongación máxima, es decir, la máxima separación de la posición de equilibrio, o sea, la distancia que hay del extremo de la trayectoria a su centro. La representamos por la letra A y se mide también en m.





- **<u>Periodo</u> (T):** es el valor del intervalo de tiempo que emplea la partícula en volver a repetir su estado de movimiento, es decir, en dar una oscilación completa. Se expresa en segundos (s) en el SI.
- **<u>Frecuencia</u> (f)**: es el número de veces que la partícula repite un mismo estado de movimiento por unidad de tiempo, es decir, el número de oscilaciones por unidad de tiempo. Se expresa en hercios (Hz) en el SI.
  Ambas magnitudes están relacionadas por medio de la expresión:

$$f = \frac{1}{T} \quad [6.1]$$

- **<u>Frcuencia angular ó pulsación</u> (ω):** es la rapidez con que cambia el estado de movimiento de la partícula. Se expresa en rad·s^{-1} en el SI. La relación con el periodo y la frecuencia del MAS es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad [6.2]$$

3. DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA DEL MAS

3.1 Ecuación del movimiento, elongación o posición

La ecuación de la **elongación o ecuación de la posición o ecuación del movimiento** (x ó y) de una partícula que describe un MAS, viene dada por:

$$\boxed{x(t) \text{ ó } y(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)} \quad [6.3]$$

donde

- A es la amplitud del movimiento es decir, el máximo desplazamiento de la partícula de su posición de equilibrio. Se expresa en metros (m) en el SI.
- ω es la frecuencia angular del movimiento. Se expresa en $rad \cdot s^{-1}$ en el SI.

A la expresión **$(\omega \cdot t + \varphi_0)$** se conoce como **FASE** del movimiento, y es un ángulo medido en radianes en el SI.

A **φ_0** se le denomina **FASE INICIAL,** y es el valor de la fase en el instante t = 0. El valor de la fase inicial depende de las condiciones iniciales del movimiento, es decir, de la posición y de la velocidad de la partícula en el instante inicial. Así:

- Si x (t = 0) = 0, es decir, si en el instante inicial la partícula se encuentra en la posición de equilibrio, la ecuación del movimiento será una de estas dos:

  $$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \quad \text{ó} \quad x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \pi)$$

  La primera ecuación indicaría que la partícula se encuentra inicialmente en la posición de equilibrio y moviéndose hacia la parte positiva de la trayectoria (velocidad inicial positiva), y la segunda que se mueve hacia la parte negativa de la trayectoria (velocidad inicial negativa)

- Si x (t = 0) = A, es decir, si en el instante inicial la partícula se encuentra en el extremo positivo de la trayectoria, la ecuación será:

  $$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \pi/2) = A \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

- Si x (t = 0) = -A, es decir, si en el instante inicial la partícula se encuentra en el extremo negativo de la trayectoria, la ecuación será:

  $$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + 3\pi/2) = -A \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

- <u>Observaciones a la ecuación de la posición</u>

La ecuación [6.3] también se puede expresar con la función coseno, pero, la fase inicial de la función seno es diferente de la de la función coseno para describir la misma situación inicial.

3.2 Velocidad de vibración

La ecuación de la velocidad se determina derivando la posición con respecto al tiempo. Tomando para ésta la ecuación [6.3] resulta:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi 0)] \Rightarrow \boxed{v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)} \quad [6.4]$$

- <u>Observaciones a la ecuación de la velocidad</u>

- El valor máximo de la velocidad es A·ω, y se alcanza en aquellos instantes de tiempo para los que cos $(\omega \cdot t + \varphi_0) = \pm 1$.
- La velocidad alcanza su valor máximo cuando la partícula pasa por la posición de equilibrio, x = 0.

3.3 Aceleración de vibración

La ecuación de la aceleración se determina derivando la velocidad con respecto al tiempo. Tomando para ésta la ecuación [2.4] resulta:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}[A.\omega.\cos(\omega \cdot t + \varphi_0)] \Rightarrow \boxed{a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0) = -\omega^2 \cdot x(t)} \quad [6.5]$$

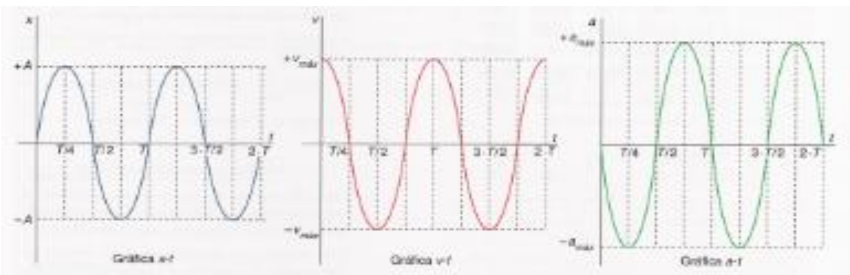
- Observaciones a la ecuación de la aceleración
  - El valor máximo de la aceleración es $A \cdot \omega^2$, y se alcanza en aquellos instantes de tiempo para los que sen $(\omega \cdot t + \varphi_0) = \pm 1$.
  - La aceleración máxima se alcanza en los extremos de la trayectoria.
  - Se puede comprobar fácilmente que la aceleración de un MAS es directamente proporcional a la posición pero de signo contrario:

$$a(t) = -\omega^2 \cdot x(t) \quad [6.6]$$

Gráficas de la elongación (x), velocidad (v) y aceleración (a)

Podemos construir una tabla de valores y representar gráficamente la posición, velocidad y aceleración para una partícula con MAS. Se ha considerado el caso en el que el oscilador inicia el movimiento en la posición de equilibrio con velocidad positiva, es decir $\varphi_0 = 0$.

t (s)	$\omega.t = \frac{2\pi}{T}.t_{(rad)}$	**sen(ω·t)**	**cos(ω·t)**	**x(t) = A·sen (ω·t)** *(m)*	**v(t) = A. ω ·cos (ω·t)** *(m/s)*	**a(t) =- A· ω² .sen (ω·t)** *(m/s²)*
0	0	0	1	0	A ω	0
T/4	$\frac{2\pi}{T}.\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$	1	0	A	0	-A ω^2
T/2	$\frac{2\pi}{T}.\frac{T}{2} = \pi$	0	-1	0	- A ω	0
3T/4	$\frac{2\pi}{T}.\frac{3T}{4} = \frac{3\pi}{2}$	-1	0	-A	0	A ω^2
T	$\frac{2\pi}{T}.T = 2\pi$	0	1	0	A ω	o



x = -A	**x < 0**	**x = 0**	**x > 0**	**x = A**
v = 0	**v (+ ó -)**	**v = ± Aω**	**v (+ ó -)**	**v = 0**
a = Aω²	**a > 0**	**a = 0**	**a < 0**	**a = -Aω²**

Ejemplo 1º

Un cuerpo realiza un MAS de 8 cm de amplitud y 20 Hz de frecuencia. Considerando nula la fase inicial, escribe las ecuaciones instantáneas de la elongación, velocidad y aceleración. Dibuja las gráficas x–t, v–t y a–t.

Ejemplo 2º

La ecuación de un MAS es **$x(t) = 0{,}1.\mathrm{sen}(0{,}4\pi t + \pi/2)$** en unidades SI.

a) Calcula las magnitudes características del movimiento.
b) Dibuja las gráficas x–t, v–t y a–t.
c) Calcula la posición, velocidad y aceleración de la partícula a los 2 s.

Ejemplo 3º

Un cuerpo que realiza un MAS tarda 2 s en hacer 10 oscilaciones completas. Si en el instante inicial se encuentra en reposo en la posición x = 0,2 m, calcula:

a) La ecuación de su movimiento.
b) La velocidad y aceleración máximas.

Ejemplo 4º

La frecuencia de un MAS es de 0,5 Hz. Si en el instante inicial se encuentra en la posición de equilibrio con una velocidad de 22 m/s, calcula la ecuación de su movimiento.

Ejemplo 5º

La ecuación de un MAS es **$x(t) = 0{,}1.\cos(0{,}4\pi t)$** en unidades SI.

a) Calcula las magnitudes características del movimiento.
b) Dibuja las gráficas x–t, v–t y a–t.
c) Calcula la posición, velocidad y aceleración de la partícula a los 2 s.

4. DEFINICIÓN CINEMÁTICA Y DEFINICIÓN DINÁMICA DE UN MAS

En la pregunta anterior hemos obtenido la relación que existe entre la aceleración de vibración y la elongación en un MAS:

$$\boxed{a = -\omega^2 \cdot x \text{ ó } -\omega^2 \cdot y}$$

Esta ecuación nos sirve para definir cinemáticamente a un MAS, y es la siguiente:

Siempre que en un movimiento la aceleración sea, en todo momento, directamente proporcional a la posición y de signo contrario, diremos que se trata de un MAS.
La constante de proporcionalidad coincide con el cuadrado de la frecuencia angular o pulsación del MAS.

Si aplicamos el Principio Fundamental de la Dinámica ó Segunda Ley de Newton al MAS, obtenemos la siguiente relación entre la fuerza y la posición:

$$F = m.a = m.(-\omega^2.x) = -m.\ \omega^2.x \ \ (\text{ó } -m.\ \omega^2.y)$$

$$\boxed{F = -m.\ \omega^2.x} \quad [6.7]$$

La relación obtenida nos sirve para definir dinámicamente a un MAS, y es la siguiente:

Siempre que en un movimiento la fuerza sea, en todo momento, directamente proporcional a la posición y de signo contrario, diremos que se trata de un MAS.
La constante de proporcionalidad coincide con el producto de la masa por el cuadrado de la frecuencia angular o pulsación del MAS.

Ejemplo 6º

Una partícula de masa m se mueve con una aceleración que cumple la relación $a = -4\pi^2x$. Si en el instante inicial la partícula se encuentra a 40 cm de la posición de equilibrio y en reposo.

a) Calcula las magnitudes características del movimiento.
b) Calcula la ecuación del movimiento y las expresiones instantáneas de la velocidad y aceleración de vibración.
c) Dibuja las gráficas x–t, v–t y a–t.
d) Calcula la posición, velocidad y aceleración de la partícula a los 2 s.

Ejemplo 7º

La fuerza que actúa sobre una partícula de 200 g de masa cumple la siguiente relación $F = -3{,}2\pi^2x$. Si en el instante inicial la partícula tiene velocidad máxima:

a) Calcula las magnitudes características del movimiento.
b) Calcula la ecuación del movimiento y las expresiones instantáneas de la velocidad y aceleración de vibración.
c) Dibuja las gráficas x–t, v–t y a–t.
d) Calcula la posición, velocidad y aceleración de la partícula a los 5 s.

5. OSCILACIONES EN UN MUELLE

Un caso particular corresponde a la fuerza recuperadora ejercida por un muelle. Recordemos que cuando desplazamos a un cuerpo unido a un muelle de su posición de equilibrio, para soltarla a continuación, la fuerza que ejerce el muelle es una fuerza recuperadora que viene dada por la Ley de Hooke:

$$F = - K \cdot x$$

Donde x representa la distancia a la posición de equilibrio, y K es la denominada constante elástica del muelle que se mide en N/m.

Como vemos la fuerza recuperadora de un muelle es directamente proporcional a la posición y de signo contrario. Según la definición dinámica de un MAS se trata de un MAS.

Además la constante elástica del muelle coincide con el producto de la masa por el cuadrado de la pulsación:

$$\boxed{K = m\omega^2} \qquad [6.8]$$

De esta expresión podemos deducir la pulsación, el periodo y la frecuencia de las oscilaciones en un muelle:

$$m\omega^2 = K \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}} \qquad [6.9]$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}} \qquad [6.10]$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}} \qquad [6.11]$$

Como vemos la frecuencia angular del oscilador, el periodo y la frecuencia sólo dependen de las características físicas del oscilador: la constante recuperadora del muelle (K) y la masa del oscilador (m).

Ejemplo 8º

Un muelle que cuelga del techo se alarga 5 cm cuando se cuelga de él a un cuerpo de 10 Kg. Si a continuación se tira del muelle 2 cm más y se suelta el cuerpo comienza a oscilar. Calcular:

a) La constante elástica del muelle.
b) El periodo, frecuencia y pulsación de las oscilaciones del cuerpo. ¿Dependerían los resultados anteriores de la amplitud del movimiento?
c) La ecuación del movimiento y las expresiones instantáneas de la velocidad y aceleración de vibración.
d) Calcula la posición, velocidad y aceleración de la partícula a los 5 s.

6. EL PÉNDULO SIMPLE

Un péndulo simple consta de una masa suspendida de un punto fijo por un hilo inextensible de masa despreciable.

Al separar el péndulo de la vertical, la masa oscila en torno a la posición central y, en ausencia de rozamientos, habría un continuo intercambio de energía de cinética a potencial y viceversa.

Sobre el péndulo actúan dos fuerzas, la tensión de la cuerda y el peso. Si aplicamos el Principio Fundamental de la Dinámica, vemos que la componente normal del peso se anula con la tensión del hilo en cada punto de la trayectoria. La componente tangencial del peso es la fuerza que produce el movimiento y vale: $\mathbf{P_t = mg\ sen\,\alpha}$. Como vemos, aunque $\mathbf{P_t}$ se opone al desplazamiento en cada punto de la trayectoria, no es proporcional al desplazamiento porque la trayectoria no es rectilínea.

Según el dibujo: $x = l.\,\text{sen}\,\alpha$

Y si α está expresado en radianes: $s = l.\ \alpha$

Pero ocurre que si un ángulo es pequeño y expresado en radianes, el valor de dicho ángulo y su seno coinciden aproximadamente, $\alpha = \text{sen}\,\alpha$

Entonces, para desviaciones pequeñas del hilo del péndulo, podríamos hacer tal aproximación, lo que supondría que **x = s**, es decir, consideramos que la trayectoria que sigue la masa es aproximadamente rectilínea.

$$P_t = m.g.\text{sen}\,\alpha = m.g.\frac{x}{l} = \frac{m.g}{l}.x$$

y como P_t se opone al desplazamiento:

$$P_t = -\,m.g.\text{sen}\,\alpha = -\,m.g.\frac{x}{l} = -\,\frac{m.g}{l}.x$$

Por tanto, si la amplitud del movimiento es pequeña (ángulo de oscilación pequeño), la masa del péndulo se ve sometida a una fuerza que es directamente proporcional a su elongación pero de sentido contrario, y esto la definición dinámica de un MAS. Además la constante de proporcionalidad es:

$$K = \frac{m.g}{l}$$

Y de aquí podemos despejar el periodo de oscilación del péndulo, válida sólo para desplazamientos pequeños comparados con la longitud del péndulo.

$$\left.\begin{array}{l} K = m.\omega^2 \\ K = \dfrac{m.g}{l} \end{array}\right\} \Rightarrow m.\omega^2 = \frac{m.g}{l} \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{l} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} \qquad [6.12]$$

De esta expresión deducimos aspectos muy interesantes:

$$\boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

- El periodo de oscilación de un péndulo simple no depende de la masa m que hay unida al hilo, ni de la amplitud de las oscilaciones.

- El periodo depende sólo de la longitud del hilo y del valor del campo gravitatorio.

- La expresión nos permitiría calcular experimentalmente y de forma sencilla el valor del campo gravitatorio g. Solo necesitaríamos medir la longitud del hilo y un cronómetro para medir el periodo de las oscilaciones.

7. ENERGÍA DEL OSCILADOR ARMÓNICO

La fuerza ejercida sobre un oscilador armónico y que cumple la ley de Hooke, es conservativa, de lo que se deduce que la energía mecánica (total) del oscilador se mantiene constante a lo largo de las distintas oscilaciones. Esto quiere decir que en cada oscilación se produce una continua transformación de energía potencial elástica en energía cinética. Veamos las expresiones de dichas energías tanto en función del tiempo como en función de la posición.
Un cuerpo que describe un MAS tiene energía cinética y energía potencial elástica

Energía cinética

La energía cinética de un oscilador armónico vale:

$$E_c = \frac{1}{2}m\cdot v^2$$

donde m es la masa del oscilador y v el valor de su velocidad instantánea. Tomando la ecuación [6.4] resulta:

$$E_c = \frac{1}{2}m\cdot\omega^2\cdot A^2\cdot\cos^2(\omega\cdot t+\varphi_0) \Rightarrow \{K = m\cdot\omega^2\} \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}K\cdot A^2\cdot\cos^2(\omega\cdot t+\varphi_0) \quad [6.12]$$

En los extremos de la trayectoria la energía cinética vale 0 puesto que allí la partícula tiene velocidad 0. La energía cinética de la partícula es máxima cuando pasa por el centro de la trayectoria, puesto que en ese punto la velocidad es máxima, y vale:

$$\boxed{E_{cmáx} = \frac{1}{2}m\cdot\omega^2\cdot A^2 = \frac{1}{2}K\cdot A^2} \quad [6.13]$$

Energía potencial elástica

La energía potencial elástica de un oscilador armónico sujeto a un muelle de constante K tiene la expresión:

$$E_p = \frac{1}{2}K\cdot x^2 \qquad [6.14]$$

donde x es la posición del oscilador con respecto a su posición de equilibrio. Tomando la ecuación [6.3] resulta:

$$E_p = \frac{1}{2}K\cdot A^2\cdot \text{sen}^2\,(\omega\cdot t + \varphi_0) \qquad [6.15]$$

En el centro de la trayectoria la energía potencial es 0, puesto que en este punto la elongación es nula. En los extremos de la trayectoria la energía potencial elástica de un oscilador armónico es máxima, puesto que en ellos la elongación es máxima, y vale:

$$\boxed{E_{p.\,máx} = \frac{1}{2}K\cdot A^2} \qquad [6.16]$$

Que como vemos coincide con la energía cinética máxima.

Energía mecánica

Si el movimiento es no amortiguado, es decir, ausencia de rozamiento, entonces no habría trabajo de fuerzas no conservativas y se cumpliría el PCEM, es decir, la energía mecánica de la partícula permanecería constante en cualquier punto de la trayectoria y en las sucesivas oscilaciones. Esto quiere decir que en cada oscilación se produce una continua transformación o intercambio de energía potencial elástica en energía cinética y viceversa.

Como la energía mecánica es la suma de la energía cinética y la energía potencial elástica del oscilador. Así, al realizar dicha suma con las ecuaciones [6.12] y [6.15] resulta:

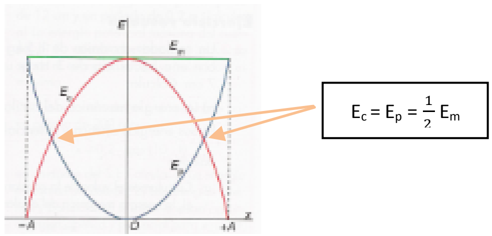
$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}K\cdot A^2\cdot \cos^2\,(\omega\cdot t + \varphi_0) + \frac{1}{2}\,K\cdot A^2\cdot \text{sen}^2\,(\omega\cdot t + \varphi_0) = \frac{1}{2}K\cdot A^2$$

$$\boxed{E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}K\cdot A^2} \qquad [6.16]$$

con la que se comprueba que la energía mecánica del oscilador es constante una vez fijados los valores de la constante recuperadora, K, y la amplitud, A.

Gráfica energética del oscilador armónico

En esta gráfica se han representado las variaciones de energía cinética y potencial del oscilador armónico a lo largo de una oscilación en función de la posición x. En ella se observa cómo se produce una transformación continua de una forma de energía en otra, de forma que la energía mecánica se mantiene constante.



x = -A	x < 0	x = 0	x > 0	x = A
v = 0	v (+ ó -)	v = ± Aω	v (+ ó -)	v = 0

$E_c = 0$ **$E_{c.máx.} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}KA^2$** **$E_c = 0$**

$E_{p.\ máx.} = \frac{1}{2}KA^2$ **$E_p = 0$** **$E_{p.\ máx.} = \frac{1}{2}KA^2$**

Podemos destacar en la gráfica que hay dos puntos simétricos a un lado y otro de la posición de equilibrio, en los que la partícula tiene la misma energía cinética que potencial, y que podemos localizar del modo siguiente:

$$E_c = E_p = \frac{1}{2} E_m \ \Rightarrow \ \frac{1}{2} K \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} K \cdot A^2 \ \Rightarrow \ x^2 = \frac{1}{2} A^2 \ \Rightarrow \ x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot A \ \Rightarrow$$

$$\boxed{x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot A} \quad [6.17]$$

que como observamos son puntos que se encuentran mas cerca de los extremos que del centro de la trayectoria.

<u>Ejemplo 9º</u>

La ecuación de un oscilador armónico de 0,15 Kg de masa es x(t) = 0,2 sen(30t). Si las magnitudes están medidas en unidades del SI, calcula:

a) La constante recuperadora del oscilador.
b) Los valores de sus energías cinética, potencial y total a los 0,6s.

<u>Ejemplo 10º</u>

Un bloque de 400 g unido a un muelle de constante elástica K = 80 N/m, oscila con una amplitud de 5 cm. Calcula las energías cinética, potencial y mecánica del bloque cuanto se encuentra a 2 cm de la posición de equilibrio.

CUESTIONES

Cuestión 1ª Una partícula describa un movimiento armónico simple de amplitud A y frecuencia f. a) Represente gráficamente la posición y la velocidad de la partícula en función del tiempo y explique las analogías y diferencias entre ambas representaciones. b) Explique cómo varían la amplitud y la frecuencia del movimiento y la energía mecánica de la partícula al duplicar el periodo de oscilación.

Cuestión 2ª Un movimiento armónico simple viene descrito por la expresión:

$$x(t) = a \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$$

b) Indique el significado físico de cada una de las magnitudes que aparecen en ella.
c) Escriba la velocidad y la aceleración de la partícula en función del tiempo y explique si ambas magnitudes pueden anularse simultáneamente.

Cuestión 3ª a) Explique las variaciones energéticas que se dan en un oscilador armónico durante una oscilación. ¿Se conserva la energía del oscilador? Razone la respuesta. b) Si se duplica la energía mecánica de un oscilador armónico, ¿cómo varía la amplitud y la frecuencia de las oscilaciones? Razone la respuesta.

Cuestión 4ª Indique si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando las respuestas: a) Si la aceleración de una partícula es proporcional a su desplazamiento respecto de un punto y de sentido opuesto, el movimiento de la partícula es armónico simple. b) En un movimiento armónico simple la amplitud y la frecuencia aumentan si aumenta la energía.

Cuestión 5ª a) Represente gráficamente las energías cinética, potencial y mecánica de una partícula que vibra con movimiento armónico simple. b) ¿Se duplicaría la energía mecánica de la partícula si se duplicase la frecuencia del movimiento armónico simple? Razone la respuesta.

Cuestión 6ª a) Demuestre que en un oscilador armónico simple la aceleración es proporcional al desplazamiento pero de sentido contrario. b) Una partícula realiza un movimiento armónico simple sobre el eje OX y en el instante inicial pasa por la posición de equilibrio. Escriba la ecuación del movimiento y razone cuándo es máxima la aceleración.

Cuestión 7ª a) Describa el movimiento armónico simple y comente sus características cinemáticas y dinámicas.

b) Una masa oscila verticalmente suspendida de un muelle. Describa los tipos de energía que intervienen y sus respectivas transformaciones.

Cuestión 8ª a) Describa el movimiento armónico simple y comente sus características dinámicas.

b) Un oscilador armónico simple está formado por un muelle de masa despreciable y una partícula de masa, m, unida a uno de sus extremos. Se construye un segundo oscilador con un muelle idéntico al del primero y una partícula de masa diferente, m'. ¿Qué relación debe existir entre m' y m para que la frecuencia del segundo oscilador sea el doble que la del primero?

Cuestión 9ª a) Describa el movimiento armónico simple y comente sus características cinemáticas.

b) Una partícula de masa m está unida a un extremo de un resorte y realiza un movimiento armónico simple sobre una superficie horizontal. Determine la expresión de la energía mecánica de la partícula en función de la constante elástica de resorte, k, y de la amplitud de la oscilación, A.

PROBLEMAS

Problema 1º Al suspender un cuerpo de 0,5 kg del extremo libre de un muelle que cuelga verticalmente, se observa un alargamiento de 5 cm. Si a continuación, se tira hacia abajo del cuerpo, hasta alargar el muelle 2 cm más, y se suelta, comienza a oscilar.

a) Haga un análisis energético del problema y escriba la ecuación del movimiento de la masa.
b) Si, en lugar de estirar el muelle 2 cm, se estira 3 cm, ¿cómo se modificaría la ecuación del movimiento del cuerpo?

SOLUC: a) $y(t) = 0{,}02$ sen $(14t + 3\pi/2)$ UI b) $y(t) = 0{,}03$ sen $(14t + 3\pi/2)$ UI

Problema 2º Sobre una superficie horizontal se dispone un cuerpo de 0,5 kg, unido a uno de los extremos de un muelle que está fijo por el otro. Cuando se tira del cuerpo hasta alargar el muelle 10 cm y se suelta, comienza a oscilar con un período de 2 s.

a) Haga un análisis energético del problema y calcule los valores de las energías cinética y potencial en los puntos extremos de la oscilación y en el punto de equilibrio.
b) Represente la posición del cuerpo en función del tiempo. ¿Cómo cambiaría dicha representación si la masa del cuerpo fuera de 2 kg?

SOLUC: a) Extremos: $E_c = 0$ J $E_p = 0{,}025$ J Punto de equilibrio: $E_c = 0{,}025$ J $E_p = 0$ J b) ¿?

Problema 3º Una partícula de 0,5 kg, que describe un movimiento armónico simple de frecuencia $\frac{5}{\pi}$ Hz, tiene inicialmente una energía cinética de 0,2 J y una energía potencial de 0,8 J.

a) Calcule la posición y la velocidad iniciales, así como la amplitud de la oscilación y la velocidad máxima.
b) Haga un análisis de las transformaciones de energía que tienen lugar en un ciclo completo. ¿Cuál sería el desplazamiento en el instante en que las energías cinética y potencial son iguales?

SOLUC: a) $x_0 = x(t = 0) = \pm 0{,}18$ m $v_0 = v(t = 0) = \pm 0{,}9$ m/s A = 0,2 m $v_{máx.} = \pm 2$ m/s b) $x = \pm 0{,}14$ m

Problema 4º Una partícula de 2 g oscila con movimiento armónico simple de 4 cm de amplitud y 8 Hz de frecuencia y en el instante t = 0 se encuentra en la posición de equilibrio.

a) Escriba la ecuación del movimiento y explique las variaciones de energías cinética y potencial de la partícula durante un periodo.
b) Calcule las energías cinética y potencial de la partícula cuando la elongación es de 1 cm.

SOLUC: a) $x(t) = 0{,}04$ sen $(16\pi t)$ UI b) $E_c = 3{,}75.10^{-3}$ J $E_p = 2{,}5.10^{-4}$ J

Problema 5º Una partícula describe un movimiento armónico simple, entre dos puntos A y B que distan 20 cm, con un periodo de 2 s.

a) Escriba la ecuación de dicho movimiento armónico simple, sabiendo que para t = 0 la partícula se encuentra en el punto medio del segmento AB.
b) Explique cómo varían las energías cinética y potencial durante una oscilación completa.

SOLUC: a) $x(t) = 0{,}1$sen (πt) UI

Problema 6º Un resorte vertical se alarga 2 cm cuando se cuelga de su extremo inferior un cuerpo de 10 kg. Se desplaza dicho cuerpo hacia abajo y se suelta, de forma que el sistema comienza a oscilar con una amplitud de 3 cm.

a) Calcule la constante recuperadora del resorte y el período del movimiento.

b) Haga un análisis de las transformaciones energéticas que tienen lugar en una oscilación completa y calcule el valor de las energías cinética y potencial elástica cuando el desplazamiento es de 1,3 cm.
g = 10 m s^{-2}

SOLUC: a) x(t) = 0,11 sen (20t) UI

Problema 7º Una partícula de 50 g vibra a lo largo del eje X, alejándose como máximo 10 cm a un lado y a otro de la posición de equilibrio (x = 0). El estudio de su movimiento ha revelado que existe una relación sencilla entre la aceleración y la posición que ocupa en cada instante: $a = -16\,\pi^2 x$.

a) Escriba las expresiones de la posición y de la velocidad de la partícula en función del tiempo, sabiendo que este último se comenzó a medir cuando la partícula pasaba por la posición x = 10 cm.
b) Calcule las energías cinética y potencial de la partícula cuando se encuentra a 5 cm de la posición de equilibrio.

SOLUC: a) x(t) = 0,11 sen (4πt + π/2)) UI v(t) = 0,4π cos (4πt + π/2)) UI b) $E_c = 2{,}96.10^{-2}$ J $E_p = 9{,}87.10^{-3}$ J

Problema 8º Una partícula de 0,2 kg describe un movimiento armónico simple a lo largo del eje x, de frecuencia 20 Hz. En el instante inicial la partícula pasa por el origen, moviéndose hacia la derecha, y su velocidad es máxima. En otro instante de la oscilación la energía cinética es 0,2 J y la energía potencial es 0,6 J.

a) Escriba la ecuación de movimiento de la partícula y calcule su aceleración máxima.
b) Explique, con ayuda de una gráfica, los cambios de energía cinética y de energía potencial durante una oscilación.

SOLUC: a) x(t) = 0,023 sen (40πt) UI $a_{máx.} = \pm 355{,}3$ m/s^2

Problema 9º Un bloque de 0,5 kg cuelga del extremo inferior de un resorte de constante elástica k = 72 N m^{-1}. Al desplazar el bloque verticalmente hacia abajo de su posición de equilibrio comienza a oscilar, pasando por el punto de equilibrio con una velocidad de 6 m s^{-1}.

a) Razone los cambios energéticos que se producen en el proceso.
b) Determine la amplitud y la frecuencia de oscilación.

SOLUC: b) A = 0,5 m f = 6/π Hz

Problema 10º Un cuerpo realiza un movimiento vibratorio armónico simple.

a) Escriba la ecuación de movimiento si la aceleración máxima es $5\pi^2$ cm s^{-2}, el periodo de las oscilaciones 2 s y la elongación del cuerpo al iniciarse el movimiento 2,5 cm.
b) Represente gráficamente la elongación y la velocidad en función del tiempo y comente la gráfica.

SOLUC: a) y(t) = 0,05 sen (πt + π/6) UI

TEMA 7. ONDAS O MOVIMIENTO ONDULATORIO

1. DEFINICIÓN DE ONDA O MOVIMIENTO ONDULATORIO. CLASIFICACIÓN DE LAS ONDAS.

Un movimiento ondulatorio se origina cuando en un punto determinado del espacio se produce una perturbación en el estado físico del mismo que, a continuación, pasa a propagarse en el espacio para percibirse más tarde en otros puntos del mismo. Dicha perturbación supone una transferencia de energía al medio que pasa a transmitirse a los distintos puntos del medio sin que éstos modifiquen sustancialmente su posición original tras pasar la perturbación por ellos. Por tanto:

Una onda o movimiento ondulatorio consiste en la propagación de una perturbación de unos puntos a otros del espacio, y esto supone un transporte de energía y cantidad de movimiento de unos puntos a otros del medio sin que exista un transporte neto de materia.

Así pues:

- Si dejamos caer una piedra en el centro de un estanque, la energía cinética de aquélla se transmite al agua produciendo una perturbación en las partículas de ésta que las hará desplazar verticalmente de su posición de equilibrio, desplazamiento que se propagará sucesivamente al resto de las partículas superficiales del agua produciendo un movimiento ondulatorio.
- Si movemos hacia arriba y hacia abajo el extremo de una cuerda, estaremos transfiriendo energía a la misma perturbando las condiciones físicas de la cuerda que se traducirá en un movimiento ondulatorio que se transmitirá a lo largo de aquélla.
- Si golpeamos un objeto, las vibraciones de éste pueden transmitirse al aire cuyas partículas vibrarán del mismo modo, transmitiendo dichas vibraciones de unas partículas a otras del medio lo que originará el sonido.
- La luz que se produce en un foco (bombilla, sol, etc) también se propaga a lo largo del espacio, viajando incluso largas distancias, como es el caso de las estrellas, entre ellas nuestro sol

En los dos primeros ejemplos la perturbación que se produce en el foco y que después se propaga al resto del medio son variaciones en las posiciones de las moléculas del agua o de la cuerda, respectivamente.

En el tercer ejemplo la perturbación consiste en pequeñas variaciones de presión en el aire.

En caso de la luz la perturbación que se propaga es un campo electromagnético variable, es decir, dos campos variables de fuerzas simultáneamente: un campo eléctrico $\vec{E}$ y un campo magnético $\vec{B}$. Por esta razón a estas ondas se les denomina **ondas electromagnéticas** (o. e. m.). Además de la luz, también son o. e. m. las ondas de radio y TV, los rayos X, los rayos ϒ, etc.

En un movimiento ondulatorio podemos distinguir entre pulso y onda:

Pulso: es el resultado de la propagación de una perturbación instantánea producida en un determinado punto del medio.

Onda: es el resultado de la propagación de una perturbación continua producida en un punto del medio.

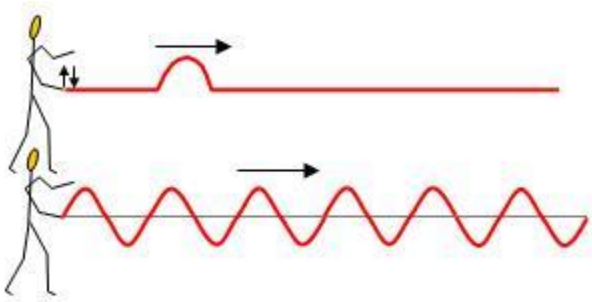


figura 7.1 Distinción entre pulso (arriba) y onda (abajo)

Por todo lo anteriormente expuesto, la función matemática (**ecuación** o **función de onda**) que se utilice para describir la propiedad física que se perturba en un movimiento ondulatorio dependerá en cualquier caso de dos variables: la posición del punto al que llega la perturbación y el instante de tiempo considerado.

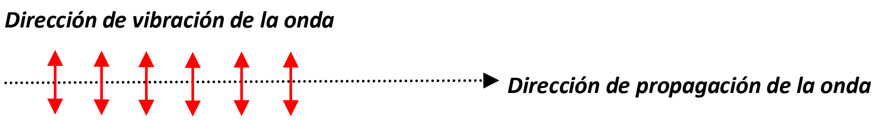
- **CLASIFICACIÓN DE LAS ONDAS**

Las ondas se pueden clasificar atendiendo a diferentes criterios.

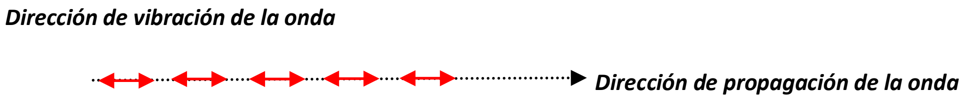
A) Según la relación entre la dirección de propagación y la dirección de vibración

Distinguimos entre:

- **<u>Ondas transversales</u>:** son aquéllas en las que las partículas del medio se desplazan en dirección perpendicular a la de propagación de la onda. Ejemplos: ondas transversales en una cuerda tensa, olas superficiales en el agua, o. e. m.,…



- **<u>Ondas longitudinales</u>:** son aquéllas en las que las partículas del medio se desplazan en la misma dirección que la de propagación de la onda. Ejemplos: ondas longitudinales en un muelle, ondas sonoras, …



B) Según la forma de energía que se transmite

Distinguimos entre:

- **<u>Ondas mecánicas</u>:** son aquéllas en las que se transmite energía mecánica (cinética y potencial) de unos puntos a otros del medio, para lo cual se hace necesario un medio material para que su propagación. Ejemplos: ondas en una cuerda tensa, ondas sonoras, …

- **Ondas electromagnéticas:** son aquéllas que se pueden propagar por el vacío, es decir, no necesitan de loa presencia de un medio material para propagarse. Las o. e. m. son las únicas que pueden hacerlo. En ellas lo que se transmite es energía electromagnética consecuencia de la propagación simultánea de sendos campos eléctrico y magnético, para lo cual no se hace necesario un medio material, pudiendo propagarse por el vacío. Ejemplos: ondas de radio y TV, luz, rayos X, …

C) Según el número de dimensiones en que se propaga la energía

Distinguimos entre:

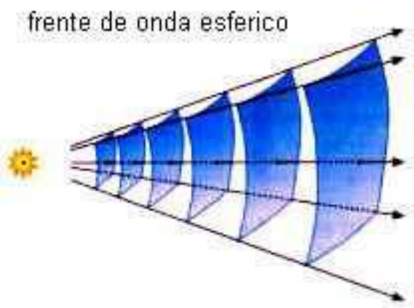
- **Ondas unidimensionales:** son aquéllas que la energía se propaga en una única dirección. Ejemplos: ondas en una cuerda tensa, ondas en un muelle, …

- **Ondas bidimensionales:** son aquéllas en las que la energía se propaga en un plano. Ejemplo: ondas superficiales en el agua, en una lámina metálica, …

- **Ondas tridimensionales:** son aquéllas en las que la energía se propaga en las tres direcciones del espacio. Ejemplos: ondas sonoras, luz, …

D) Según la forma de la onda al avanzar

Según sea la forma del frente de onda, las ondas pueden ser circulares, esféricas, planas, elípticas, etc.



frente de onda circular

2. ONDAS ARMÓNICAS Y MAGNITUDES CARACTERÍSTICAS DE LAS ONDAS ARMÓNICAS

Una onda se dice que es armónica cuando la perturbación que se produce en el foco es de tipo armónico simple, es decir, cuando la perturbación que se produce en el foco se puede describir mediante las funciones seno y/o coseno y, por tanto, la onda también se podrá describir mediante las funciones seno y/o coseno.

Las magnitudes características de una onda armónica son:

Perturbación

Es la magnitud física que se perturba en el foco y que se transmite de unos puntos a otros del espacio. En el caso de las ondas en una cuerda o en la superficie del agua, la perturbación es una elongación, es decir, desplazamientos de los puntos de la cuerda y de las moléculas de la superficie del agua de su posición de equilibrio. En el caso del sonido, la perturbación que se propaga son pequeñas variaciones de presión del aire. En el caso de las oem, la perturbación consiste en dos campos de fuerzas variables, un campo eléctrico y un campo magnético.

La perturbación la representaremos por la letra y, y será función de dos variable, la distancia al foco y el tiempo, y(x, t), ya que el valor de la perturbación dependerá de cada punto de la onda y de cada instante.

Las unidades de la perturbación serán las mismas que las de la magnitud física cuya variación se propaga a lo largo de la onda:

- En el caso de las ondas en una cuerda o en la superficie del agua, la perturbación se medirá en m en el SI.
- Para el sonido la perturbación se medirá en unidades de presión: Pascales en el SI o cualquier otra unidad de presión: atm, mmHg, bares, etc.
- En la luz o cualquier otra oem se medirá en N/C para el campo eléctrico, y en T para el campo magnético.

Amplitud (A)

Es la máxima elongación con la que vibran las partículas del medio. Se representa por la letra A, y se mide en las mismas unidades que la perturbación y.

Velocidad de vibración

La **velocidad de oscilación o de vibración (v)** es la derivada de la perturbación respecto al tiempo y y su valor también depende de la distancia al foco y del tiempo:

$$v(x,t) = \frac{dy(x,t)}{dt}$$

Periodo (T)

Es el tiempo que emplea una partícula del medio en realizar una oscilación alrededor de su posición de equilibrio. Se mide en s en el SI de unidades.

Frecuencia (f)

Es el número de oscilaciones que realiza una partícula del medio en la unidad de tiempo. Por tanto:

$$f = \frac{1}{T} \quad [7.1]$$

Se mide en Hz = s^{-1} en el SI de unidades

Frecuencia angular o pulsación (ω)

Es el número de periodos contenidos en 2π unidades de tiempo. Por tanto:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f \quad [7.2]$$

Se mide en rad/s = rad.s^{-1} en el SI de unidades.

Longitud de onda (λ)

Es la distancia mínima entre dos puntos del medio con el mismo estado de vibración. Se representa por la letra **λ,** y se mide en m en el SI de unidades.

La longitud de onda coincide con la distancia que recorre la onda en un intervalo de tiempo igual al periodo.

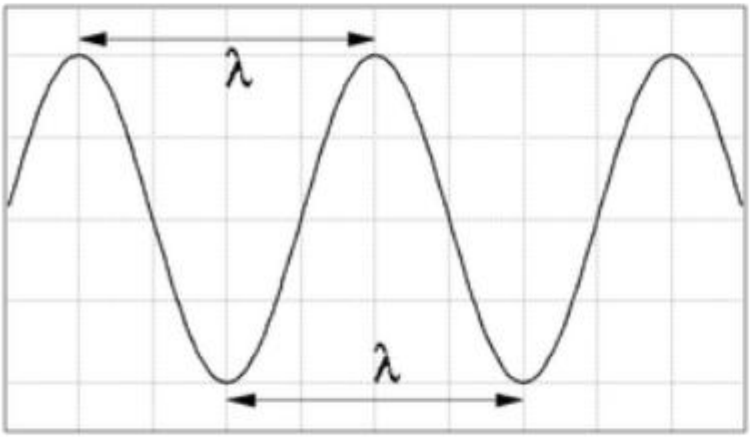


Figura 7.2 Longitud de onda

Número de onda (k)

Es el número de longitudes de onda contenidos en 2π unidades de longitud. Por tanto:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad [7.3]$$

Se mide en rad/m = rad.m^{-1} en el SI de unidades.

Velocidad de propagación o velocidad de fase (v_p)

Es la rapidez con que avanza la onda, y por tanto, la rapidez con la que la energía se transmite de unos puntos a otros del medio.

$$\boxed{v_p = \frac{\text{espacio recorrido por la onda}}{\text{tiempo empleado}} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f} \quad [7.4]$$

No hay que confundir la velocidad de propagación o velocidad de fase de una onda con la velocidad de vibración.

La velocidad de propagación de la onda también se puede expresar del siguiente modo:

$$v_p = \frac{\text{espacio recorrido por la onda}}{\text{tiempo empleado}} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\frac{2\pi}{k}}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega}{k} \quad [7.5]$$

Para las oem en el vacio esta velocidad se representa por la letra c y vale 3.10^{8} m/s

v_p de la luz en el vacío = c = 3.10^{8} m/s

Para el resto de los medios, esta velocidad depende exclusivamente de las características del medio: elasticidad y rigidez. En medios homogéneos e isótropos, su valor es el mismo en todas las direcciones.

Como ejemplo damos la expresión de la velocidad de propagación de una onda a lo largo de una cuerda tensa:

$$v_p = \sqrt{\frac{T}{\eta}} \quad [7.6]$$

donde T es la tensión de la cuerda en N y η su densidad lineal en $kg\cdot m^{-1}$.

3. DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA DE UNA ONDA ARMÓNICA: ECUACIÓN DE ONDA

Las **ondas armónicas** son aquéllas que consisten en la propagación a lo largo de un medio de un movimiento oscilatorio armónico simple producido en un determinado punto llamado **foco**.

Ecuación de onda armónica

Vamos a centrar nuestro estudio en las ondas armónicas unidimensionales. Para ello supongamos que la dirección de propagación es el eje OX por lo cual la posición de una partícula vendrá dada por una sola coordenada, x, con respecto al origen, en el cual suponemos situado el foco de la perturbación. Supongamos también que la onda es transversal de modo que el desplazamiento de las partículas del medio se realiza en dirección OY. Se tratará, por tanto, de deducir la expresión de dicho desplazamiento o **elongación**, y, en función de la posición x y del tiempo t:

$$y = f(x, t)$$

Para deducir la ecuación de este tipo de ondas, partimos de la ecuación del movimiento armónico simple originado en el foco (x = 0) en el caso en que en el instante inicial la perturbación valga 0:

$$y (0, t) = A \cdot \text{sen} (\omega \cdot t)$$

Transcurrido un tiempo t' la perturbación alcanzará la partícula situada en la posición x, por lo que el estado del movimiento de ésta será el mismo que el del foco en el instante t-t'. Así podemos escribir:

$$y (x, t) = A \cdot \text{sen} [\omega \cdot (t - t')]$$

Si v_p es la velocidad con que se propaga el movimiento ondulatorio, podemos escribir $t' = \frac{x}{v_p}$ por lo que resulta:

$$y (x, t) = A \cdot \text{sen} [\omega \cdot (t - \frac{x}{v_p})]$$

Operando paréntesis y utilizando la ecuación [7.5], deducimos:

$$y (x, t) = A \cdot \text{sen} (\omega \cdot t - k \cdot x) \qquad [7.7]$$

La ecuación [7.7] constituye la ecuación de onda armónica que nos indica el desplazamiento o elongación, y, de la partícula del medio situada en la posición x en el instante de tiempo t.

Observaciones a la ecuación de onda armónica

1. La expresión entre paréntesis ($\omega \cdot t - k \cdot x$) constituye la fase φ del movimiento ondulatorio e indica el estado de movimiento de la partícula situada en la posición x en un instante de tiempo t. A dicha expresión se le añadirá una fase inicial φ_0 cuyo valor dependerá de las condiciones iniciales del movimiento; en tal caso la ecuación [7.7] puede escribirse de la siguiente forma:

$$\boxed{y (x, t) = A \cdot \text{sen} (\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0)} \quad \textbf{[7.8]}$$

2. La ecuación de onda también puede expresarse en función del coseno. La elección de una u otra función trigonométrica dependerá de las condiciones iniciales del movimiento que permitan considerar $\varphi_0 = 0$.

3. El signo "-" de la fase indica que la onda se propaga en sentido positivo del eje OX; si se propagase en sentido contrario basta con cambiar dicho signo por un "+".

4. Teniendo en cuenta las relaciones entre las magnitudes de una onda, la ecuación de onda armónica también se puede expresar de la forma:

$$\boxed{y(x,t) = A \cdot \mathrm{sen}\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]} \quad [7.8]$$

que también puede expresarse en función del coseno pero, con una fase inicial diferente.

5. La **velocidad de oscilación o de vibración (v)** de una determinada partícula en un determinado instante (velocidad instantánea de una partícula con la que se desplaza en torno a su posición de equilibrio) se determina derivando la ecuación de onda con respecto al tiempo, considerando constante la posición x de la partícula:

$$v = \frac{dy}{dt}$$

4. DOBLE PERIOCIDAD DE LA FUNCIÓN DE ONDA

La ecuación de una onda armónica o función de onda depende de dos variables, la posición y el tiempo:

$$y\ (x,\ t) = A \cdot sen\ (\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0)$$

La ecuación de onda armónica es doblemente periódica ya que:

Si en la ecuación de onda fijamos la posición, la ecuación de onda nos describe el estado de vibración de ese punto de la onda. Si se trata de una cuerda, nos describiría el estado de movimiento o MAS de ese punto de la cuerda.

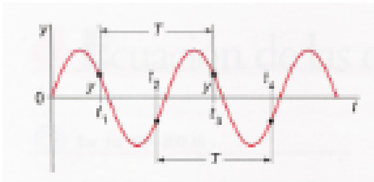


Figura 7.3 Periodicidad temporal de la función de onda

Como se puede observar, el estado de movimiento de una partícula del medio se repite cada vez que transcurra un intervalo de tiempo que sea igual a un múltiplo entero del periodo, n·T (n = 1, 2, 3, …). Este hecho se conoce como **periodicidad temporal**. Matemáticamente:

$$y\ (x,\ t + nT) = y\ (x,\ t)$$

De igual modo, si fijamos el tiempo, la ecuación de onda nos describe el estado de vibración de todos los puntos de la onda en ese instante. Si se trata de una cuerda, nos describiría el valor de la elongación de todos los puntos de la cuerda en ese instante.

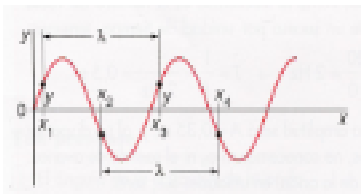


Figura 7.4 Periodicidad espacial de la función de onda

Como se puede observar, el estado de movimiento de dos partículas separadas por una distancia igual a un múltiplo entero de longitudes de onda, n·λ (n = 1, 2, 3, …), es el mismo. Este hecho se conoce como **periodicidad espacial**. Matemáticamente:

$$y\ (x + n\lambda,\ t) = y\ (x,\ t)$$

5. VELOCIDAD DE VIBRACIÓN Y ACELERACIÓN DE VIBRACIÓN EN UNA ONDA

Consideremos una onda armónica monodimensional que se propaga por el eje x en sentido positivo:

$$y\ (x, t) = A\cdot \text{sen}\ (\omega\cdot t - k\cdot x + \varphi_0)$$

La velocidad de vibración instantánea de cualquier punto de la onda es la derivada de la ecuación de la onda respecto al tiempo:

$$\boxed{v(x,t) = \frac{dy(x,t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[A\cdot \text{sen}\left(\omega\cdot t - k\cdot x + \varphi_0\right)\right] = A\cdot\omega\cdot\cos\left(\omega\cdot t - k\cdot x + \varphi_0\right)} \quad [7.9]$$

La aceleración de vibración instantánea de cualquier punto de la onda es la derivada de la velocidad de vibración de la onda respecto al tiempo:

$$\boxed{a(x,t) = \frac{dv(x,t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[A\cdot\omega\cdot\cos\left(\omega\cdot t - k\cdot x + \varphi_0\right)\right] = -A\cdot\omega^2\cdot \text{sen}\left(\omega\cdot t - k\cdot x + \varphi_0\right)}$$

[7.10]

Ejemplo 1º

La ecuación de una onda armónica sinusoidal que se propaga por el eje x y en sentido positivo viene dada por la siguiente expresión en unidades del SI:

$$y\ (x, t) = 0{,}4\cdot \text{sen}\ (10\pi t - 2\pi x)$$

Calcula:

a) frecuencia, periodo, longitud de onda y velocidad de fase o propagación de dicha onda.
b) El estado de vibración instantáneo de un punto de la onda situado a 25 cm del foco. Representa la gráfica y – t.
c) El estado de vibración de cualquier punto de la onda a los o,2 s. Representa la gráfica y – x.
d) La velocidad de vibración de la onda en cualquier punto y en cualquier instante.
e) La velocidad de vibración instantánea del punto de la onda situado a 50 cm del foco.
f) La velocidad de vibración de cualquier punto de la onda a los 4 s.
g) La velocidad de vibración del punto situado a 50 cm del foco a los 2s.
h) La aceleración de vibración instantánea de cualquier punto de la onda.
i) La aceleración de vibración de instantánea de un punto de la onda situado a 2 m del foco.
j) La aceleración de vibración de cualquier punto de la onda a los 3 s.
k) La aceleración de vibración del punto de la onda situado 1 m del foco a los 0,5 s.

Ejemplo 2º

En el centro de una piscina circular de 10 m de radio dejamos caer una piedra que da origen a una onda armónica de la superficie del agua. La longitud de onda de este movimiento es de 0,75 m y la onda tarda 10 s en llegar a la orilla. Calcular:

a) La velocidad de propagación o velocidad de fase.
b) El periodo y la frecuencia.
c) El nº de ondas y la frecuencia angular.
d) La amplitud de la onda, sabiendo que al cabo de 0,25 s de producirse la perturbación, la elongación en el centro de la piscina es de 4 cm.
e) La ecuación de onda.
f) La elongación de un punto situado a 6 cm del foco emisor al cabo de 12 s.
g) La velocidad de vibración de ese punto en ese instante.

Ejemplo 3º

La ecuación de una onda armónica transversal en una cuerda es: $y(x, t) = 1{,}5\cdot\cos(0{,}5\pi x - 30\pi t)$, donde x e y se miden en m, y t en s. Calcula:

a) La frecuencia angular y el nº de ondas.
b) La longitud de onda, el periodo, la frecuencia y la velocidad de propagación o velocidad de fase.
c) La velocidad de vibración instantánea de cualquier punto de la cuerda.
d) La velocidad de vibración que tiene el punto de la cuerda sitaudo a 5 m del foco a los 10 s.

Ejemplo 4º

Una onda transversal de 3m de amplitud se propaga de derecha a izquierda a una velocidad de 100 m/s. Si la longitud de onda es de 10 m, calcula:

a) La ecuación de onda.
b) La velocidad transversal máxima de un punto del medio.
c) La aceleración transversal máxima de un punto del medio.

6. DIFERENCIA DE FASE ESPACIAL Y DIFERENCIA DE FASE TEMPORAL

En una onda armónica se llama fase al ángulo de la función seno o coseno:

$$y\ (x, t) = A\cdot \text{sen}\ (\omega\cdot t - k\cdot x + \varphi_0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{FASE DE LA ONDA: } (\omega\cdot t - k\cdot x + \varphi_0)}$$

A) Diferencia de fase espacial

Es la diferencia de fase entre dos puntos distintos de la onda en el mismo instante y vale

$$\text{diferencia de fase espacial} = (\omega\cdot t - k\cdot x_1 + \varphi_0) - (\omega\cdot t - k\cdot x_2 + \varphi_0) = k(x_2 - x_1)$$

$$\boxed{\text{diferencia de fase espacial} = k(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot d} \quad [7.11]$$

siendo d la distancia que separa a los dos puntos de la onda.

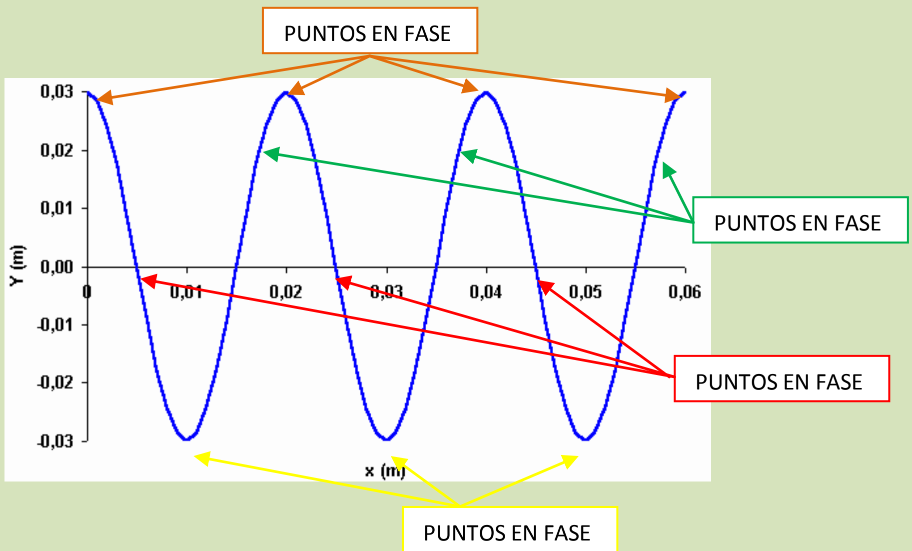
Se dice que <u>**DOS PUNTOS DE LA ONDA ESTÁN EN FASE**</u> cuando la diferencia entre sus fases es un múltiplo entero de 2π radianes, es decir:

$$\text{dif. de fase espacial} = k(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot d = n.2\pi \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

De la expresión anterior puede deducirse que para que dos puntos estén en fase, la separación entre ellos tiene que ser un múltiplo entero de longitudes de onda.

$$\frac{2\pi}{\lambda}\cdot d = n.2\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = n.\lambda} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

LA INTERPRETACIÓN FÍSICA de puntos en fase de una onda supone que, en cualquier instante, los puntos tienen el mismo valor de la perturbación (elongación si se trata de una onda en una cuerda), la misma velocidad de vibración y el mismo valor de la aceleración de vibración. Puede observarse en la siguiente figura:



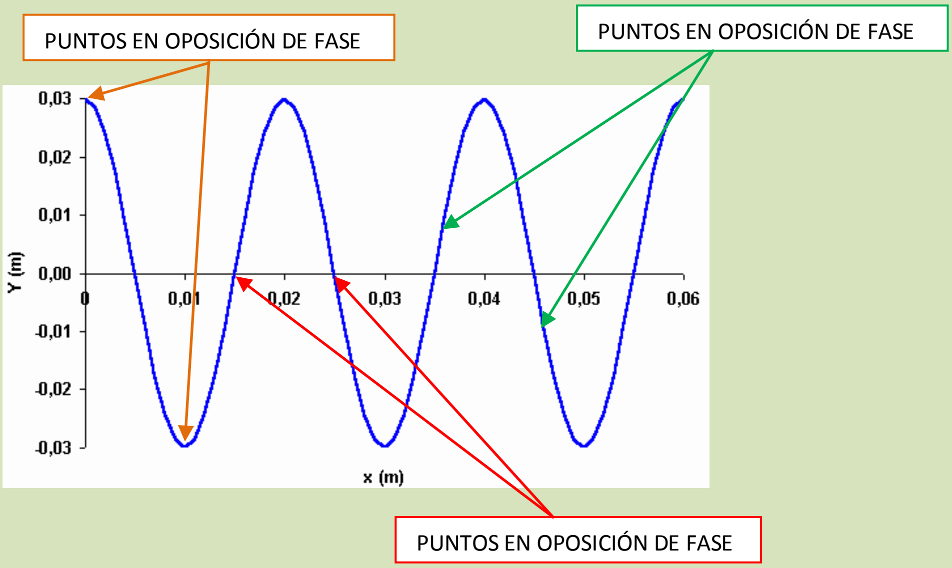
Se dice que **DOS PUNTOS DE LA ONDA ESTÁN EN OPOSICIÓN DE FASE** cuando la diferencia entre sus fases es un múltiplo impar de π radianes, es decir:

$$\text{dif. de fase espacial} = k(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot d = (2n+1).\pi \quad (n = 0, 1, 2, ...)$$

De la expresión anterior puede deducirse que para que dos puntos estén en oposición de fase, la separación entre ellos tiene que ser un múltiplo impar de semilongitudes de onda.

$$\frac{2\pi}{\lambda}\cdot d = (2n+1).\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = (2n+1).\frac{\lambda}{2}} \quad (n = 0, 1, 2, ...)$$

La **INTERPRETACIÓN FÍSICA DE PUNTOS EN OPOSICIÓN DE FASE** de una onda supone que, en cualquier instante, los puntos tienen valores opuestos de la perturbación (elongación si se trata de una onda en una cuerda), de la velocidad de vibración y de la aceleración de vibración. Puede observarse en la figura siguiente:



B) Diferencia de fase temporal

Es la diferencia de fase de un mismo punto de la cuerda en dos instantes de tiempo diferentes y vale

$$\text{diferencia de fase temporal} = (\omega \cdot t_2 - k \cdot x + \varphi_0) - (\omega \cdot t_1 - k \cdot x + \varphi_0) = \omega(t_2 - t_1)$$

$$\boxed{\text{diferencia de fase temporal} = \omega(t_2 - t_1) = \frac{2\pi}{T}(t_2 - t_1) = \frac{2\pi}{T}\cdot t} \quad [7.12]$$

siendo t el tiempo transcurrido entre los dos instantes de tiempo.

Ejemplo 5º

El periodo de un movimiento ondulatorio que se propaga por el eje x en sentido positivo es 3.10^{-3} s. La distancia entre dos puntos consecutivos cuya diferencia de fase es de π/2 rad es de 30 cm. Calcula:

a) La longitud de onda.
b) La velocidad de propagación.
c) La distancia entre dos puntos consecutivos cuya diferencia de fase es de 3π/2 rad.

Ejemplo 6º

La ecuación de una onda plana es: $y(x,t) = 3 \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{10}\right)\right]$ en unidades del SI. Calcula:

a) El periodo y la longitud de onda.
b) La velocidad de propagación o velocidad de fase.
c) La diferencia de fase entre dos puntos que distan entre sí 40 m.

Ejemplo 7º

Una onda de 500 ciclos/s tiene una velocidad de fase de 350 m/s.

a) ¿Qué diferencia de fase hay entre dos puntos de la onda separados 35 cm?
b) ¿Cuál es la diferencia de fase entre dos desplazamientos que ocurren en un cierto punto con un intervalo de 10^{-3} s?

7. ENERGÍA E INTENSIDAD DE UNA ONDA: ATENUACIÓN Y ABSORCIÓN DE ONDAS

Recordemos que una onda o movimiento ondulatorio consiste en la propagación de una perturbación de unos puntos a otros sin transporte neto de materia pero sí de energía. En esta pregunta vamos a estudiar los aspectos energéticos de una onda.

Se puede demostrar que la energía de una onda es directamente proporcional al cuadrado de su frecuencia y al cuadrado de su amplitud:

$$E \propto f^2 . A^2$$

Sin embargo, para describir energéticamente a una onda, se suele utilizar una nueva magnitud física denominada **intensidad de onda**. La intensidad de onda en un punto es la energía que atraviesa por unidad de tiempo la unidad de superficie colocada perpendicularmente a la dirección de propagación, es decir, es una medida del flujo de energía que transporta la onda por unidad de tiempo y unidad de superficie. Se representa por la letra I y se mide en $J/s.m^2$. Por definición, la intensidad de una onda también es directamente proprocional al cuadrado de la frecuencia y al cuadrado de la amplitud de la onda.

$$I \propto E \propto f^2 . A^2$$

Es un hecho experimental que la intensidad de una onda se debilita a medida que se propaga. En la mayoría de los casos, esta disminución de intensidad, se debe a una disminución en su amplitud ya que su frecuencia no suele modificarse.

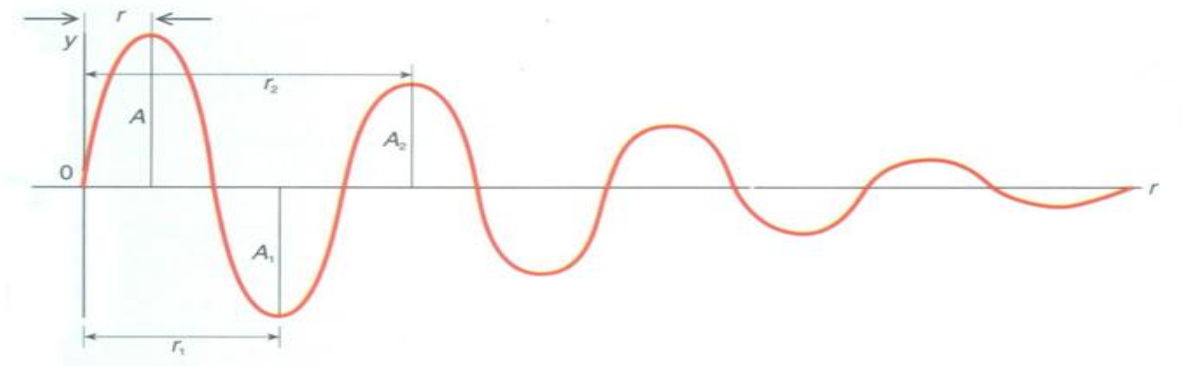


Figura 7.5 Disminución de la intensidad de una onda al propagarse

El debilitamiento o disminución de intensidad puede darse por dos fenómenos diferentes: la atenuación y la absorción.

A) ATENUACIÓN

La atenuación de una onda consiste en la disminución de su intensidad a medida que se propaga pero, no por pérdidas energéticas, sino porque la energía que transporta la onda se reparte cada vez entre mas puntos del medio a medida que se propaga.

Piensa, por ejemplo, en una onda circular o en una onda esférica. A medida que la onda se propaga, su frente de onda se va agrandando y la energía emitida por el foco tiene que ser repartida cada vez entre un mayor nº de puntos del medio (véase la figura)

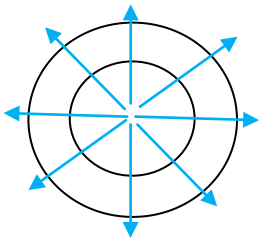


Figura 7.6 Atenuación de una onda circular y esférica

Supongamos un foco puntual emisor de ondas que emite con una potencia P_e. A cierta distancia del foco, la intensidad de la onda vendrá dada por:

$$\boxed{I = \frac{P_e}{4\pi r^2}} \quad [7.13]$$

siendo $4\pi r^2$ la superficie de una esfera de radio r centrada en el foco emisor.

Como puede observarse, debido al fenómeno de atenuación, la intensidad de una onda disminuye con el cuadrado de la distancia al foco emisor.

Teniendo en cuenta la relación anterior y, puesto que la intensidad de una onda es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud, podemos encontrar la relación entre las amplitudes de la onda en dos puntos del medio situados a distinta distancia del foco:

$$\left.\begin{array}{l} I_1 = \dfrac{P_e}{4\pi r_1^2} \\ I_2 = \dfrac{P_e}{4\pi r_2^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{A_1^2}{A_2^2} = \frac{\dfrac{P_e}{4\pi r_1^2}}{\dfrac{P_e}{4\pi r_2^2}} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \Rightarrow \boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1}} \quad [7.14]$$

Como puede observarse, debido al fenómeno de atenuación, la relación entre las amplitudes de la onda en dos puntos es inversa a sus respectivas distancias al foco emisor.

Ejemplo 8º

Un foco sonoro emite con una potencia de 20 w.

a) Calcula la intensidad sonora en dos puntos situados a 10 m y a 20 m del foco.
b) ¿Cuál es la relación que existe entre las amplitudes de la onda en ambos puntos?

Ejemplo 9º

El Sol tiene una potencia aproximada de emisión de $2,7.10^{20}$ Mw.

a) ¿Qué intensidad luminosa recibimos sobre la superficie terrestre?
b) ¿Y en Marte? ¿A qué se debe esa diferencia?

DATOS: $d_{T\text{-}S} = 1,5.10^{11}$ m $d_{M\text{-}S} = 2,28.10^{11}$ m

SOLUC: a) *955 w/m² b) 417 w/m²*

B) ABSORCIÓN

La absorción de una onda consiste en la disminución de intensidad que experimenta una onda a medida que avanza, debido a las pérdidas energéticas por las fricciones de unas partículas del medio con otras, es decir, parte de la energía que transporta la onda se va quedando por el camino a medida que avanza la onda por el medio absorbente.

Puede demostrarse que la disminución de la intensidad de una onda por absorción viene dada por la siguiente ley:

$$\boxed{I = I_0 \cdot e^{-\beta . x}} \quad [7.15]$$

Donde:

I_0 es la intensidad inicial de la onda.

I es la intensidad que tiene la onda cuando ha recorrido una distancia x en el medio absorbente.

β es una constante característica de cada medio para cada onda y se denomina **coeficiente de absorción.** Se mide en m^{-1} en el SI de unidades.

La ley de la absorción de ondas, $I = I_0 \cdot e^{-\beta . x}$, es una ley de decrecimiento exponencial que si la representamos gráficamente en función de la distancia recorrida, x, en el medio absorbente quedaría del siguiente modo:

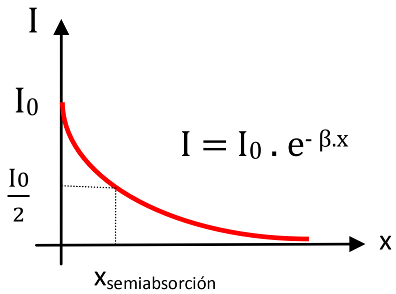


Figura 7.7 Decrecimiento exponencial de la intensidad de una onda por absorción

A la distancia que ha de recorrer la onda en el medio absorbente para que su intensidad disminuya a la mitad, es decir, para que disminuya un 50%, se denomina **espesor de semiabsorción**, y se calcula del siguiente modo:

$$I = I_0 \cdot e^{-\beta . x} \Rightarrow \frac{I_0}{2} = I_0 \cdot e^{-\beta . x_{sem}} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\beta . x_{sem}} \Rightarrow Ln\frac{1}{2} = Ln(e^{-\beta . x_{sem}}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ln\frac{1}{2} = -\beta . x_{sem.} Ln(e) \Rightarrow Ln\frac{1}{2} = -\beta . x_{sem.} \Rightarrow -Ln2 = -\beta . x_{sem.} \Rightarrow$$

$$\boxed{x_{sem.} = \frac{Ln2}{\beta}} \quad [7.16]$$

OBSERVACIÓN

Generalmente las ondas sufren ambos fenómenos, es decir, la disminución de su intensidad, mientras se propaga, se debe tanto a la atenuación como a la absorción. Sin embargo:

- las ondas planas no sufren atenuación ya que su energía se reparte entre el mismo número de puntos a medida que avanza su frente de onda.

- Las oem no sufren absorción cuando viajan por el vacío puesto que no habrá pérdidas energéticas por rozamientos.

Ejemplo 10º

Una onda está representada por la ecuación: $y(x,t) = 2 \cdot \cos\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{4} + \frac{x}{160}\right)\right]$ donde x e y vienen dados en cm y t en s.

a) Indica las características de la onda descrita por la ecuación anterior.
b) Las magnitudes características de la onda.
c) La diferencia de fase para dos posiciones de la misma partícula del medio cuando el intervalo de tiempo transcurrido es de 2 s.
d) La diferencia de fase de dos puntos de la onda separados 120 cm.

Ejemplo 11º

La intensidad de una onda plana se reduce en un 25% al atravesar 5 cm de un material absorbente. Calcula:

a) El coeficiente de absorción del medio.
b) La distancia que ha de recorrer la onda en dicho medio para que su intensidad se reduzca a la mitad.

Ejemplo 12º

Un movimiento ondulatorio que se propaga por un medio absorbente reduce su intensidad a la mitad después de recorrer una distancia de 6,93 cm.

a) ¿Qué distancia debería recorrer para reducir su intensidad a un 10% de su valor inicial?
b) ¿Qué distancia debería recorrer para reducir su intensidad un 10% de su valor inicial?

8. PRINCIPIO DE HUYGENS

Es un método geométrico que el científico holandés C. Huygens propuso en 1678 para explicar la naturaleza ondulatoria de la luz. Esta construcción es válida para cualquier tipo de ondas y permite, además, explicar cómo se propaga la energía a través del medio.

Antes de pasar a explicar este principio, debemos tener claros dos conceptos:

Frente de onda: lugar geométrico del espacio formado por puntos en fase. En medios homogéneos e isótropos, los frentes de onda son esféricos. En dichos medios, serán planos cuando los puntos se encuentren muy alejados del foco; en este último caso hablamos de ondas planas.
Rayo: segmento orientado que indica la dirección y el sentido de propagación de la onda. Los rayos son perpendiculares a los frentes de onda en cada uno de sus puntos.

El principio de Huygens afirma:

"Todo punto de un frente de onda es centro emisor de nuevas ondas elementales cuya envolvente es el nuevo frente de onda"

En la figura 7.8, los puntos del frente de onda en t_0 = 0 son centros emisores de ondas elementales cuya envolvente forma el frente de onda en t.

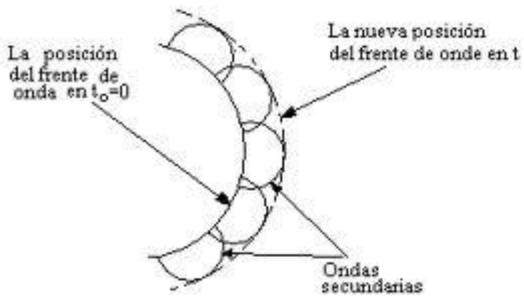


Figura 7.8

Este principio permite explicar fenómenos ondulatorios como la reflexión, la refracción, la difracción y las interferencias.

9. INTERFERENCIAS DE ONDAS

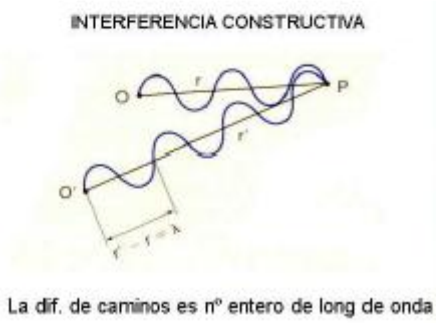
Se denomina interferencias de ondas al fenómeno que tiene lugar cuando dos o mas ondas coinciden en un punto, es decir, las interferencias son fenómenos producidos por el encuentro de dos o más movimientos ondulatorios que, partiendo del mismo foco o de focos distintos, llegan simultáneamente a un mismo punto del medio en que se propagan.

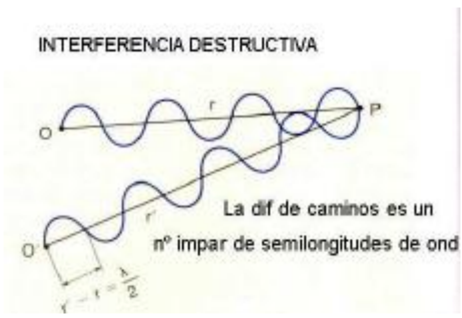
Este fenómeno es característico de las ondas, como lo demuestra el hecho de que después del encuentro, es decir, rebasados los puntos de interferencia, la amplitud, la frecuencia y la velocidad de propagación de cada onda son las mismas que tendrían si no se hubieran encontrado, es decir, cada onda continúa su camino como si nada hubiese ocurrido (démonos cuenta que esto no le ocurre a las partículas después de haber chocado).

El hecho de que las ondas actúen independientemente una de otra significa que el movimiento de cualquier partícula del medio, en un momento dado, es simplemente la suma o **superposición** de los movimientos que le darían las ondas individuales tomadas por separado. Este hecho constituye el **principio de superposición para ondas** según el cual:

$$y = y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

En general cuando dos ondas interfieran en un punto la **interferencia será constructiva** cuando la perturbación resultante sea mayor que las perturbaciones iniciales, y será **destructiva** cuando la onda resultante sea menor que las iniciales.





El caso más importante de interferencias consiste en la coincidencia en un mismo punto de ondas **coherentes**, es decir, ondas con las mismas características (amplitud, frecuencia y longitud de onda). En estos casos, se pueden presentar dos situaciones extremas:

- **Interferencia totalmente constructiva**
  Se produce cuando las ondas llegan en fase al punto de interferencia con lo que la amplitud de la onda resultante, A_r, es el doble de la que tienen las ondas individuales, A, es decir: $A_r = 2A$. Este caso se dará siempre que la diferencia entre las distancias a los respectivos focos sea un múltiplo entero de longitudes de onda:

$$x_2 - x_1 = n \cdot \lambda$$

- **Interferencia totalmente destructiva**
  Se produce cuando las ondas llegan en oposición de fase al punto de interferencia con lo que la amplitud de la onda resultante, A_r, es nula, es decir, $A_r = 0$, produciéndose una anulación del movimiento ondulatorio. Este caso se dará siempre que la diferencia entre las distancias a los respectivos focos sea un múltiplo impar de semilongitudes de onda:

$$x_2 - x_1 = (2n - 1)\cdot\lambda/2$$

En el aula se están produciendo interferencias tanto luminosas como sonoras. Sin embargo ni nuestros ojos ni nuestros oídos son capaces de detectar dichas interferencias, es decir, no detectamos puntos donde se intensifique mas la luz o el sonido (interferencias constructivas), y otras zonas donde disminuya la intensidad luminosa o sonora (interferencias destructivas). En efecto en cualquier punto del aula coinciden ondas luminosas (interferencias luminosas) y ondas sonoras (interferencias sonoras), pero la diferencia de fase de las ondas que interfieren en un punto dado no es constante, varía con el tiempo y varía tan rápidamente que las interferencias no son estables y, ni nuestro ojo ni nuestro oído son capaces de detectar dichas fluctuaciones.

C0NDICIONES DE INTERFERENCIA

Para que las interferencias sean estables, detectables y utilizables es necesario que los focos que emiten las ondas sean **coherentes**, es decir, que la ondas emitidas por ellos mantengan una diferencia de fase constante y esto se consigue cuando las ondas que interfieren tienen igual frecuencia e igual longitud de onda (es lo que se llama ondas monocromáticas en el caso de las ondas luminosas).

Si además tienen igual amplitud pueden producirse punto de interferencia totalmente constructiva y otros de interferencia totalmente destructiva.

Un procedimiento para obtener interferencias luminosas es el que llevó a cabo el físico inglés T. Young en 1801, llamado **experimento de la doble rendija** con el que se consiguen dos haces luminosos coherentes cuyas interferencias se producen en una pantalla F, apreciándose en ella una franja central brillante y otras oscuras y brillantes paralelas a la primera.

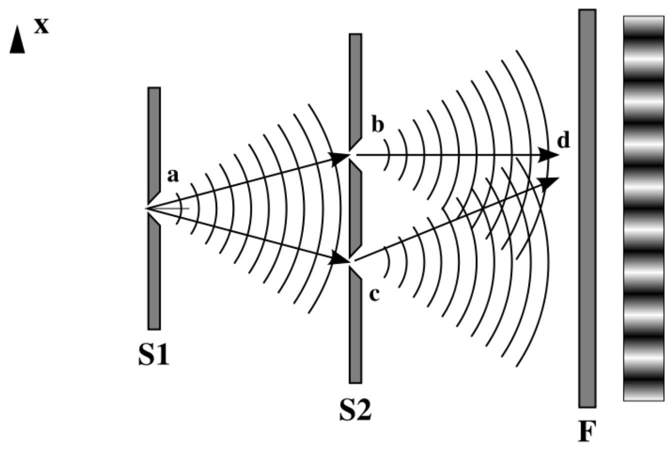


Figura 7.9 Interferencias de Young

10. ONDAS ESTACIONARIAS

10.1. Definición de onda estacionaria

Una **onda estacionaria** es un caso particular de interferencias y es el resultado de la interferencia de dos ondas idénticas que se propagan en la misma dirección y sentidos opuestos dentro de un medio limitado.

Una forma sencilla de conseguir una onda estacionaria consiste en someter a un MAS al extremo libre de una cuerda que está sujeta a un punto fijo por el otro extremo. La agitación producida en el extremo libre se propagará como una onda a lo largo de la cuerda de modo que cuando llegue al extremo libre de la cuerda se reflejará produciéndose una onda de las mismas características que la incidente pero que viaja en sentido contrario a la incidente e interfiriendo con ella.

También es el caso de cuerda de una guitarra: las ondas que se forman en dicha cuerda al pulsarla se reflejan en los extremos fijos de tal manera que en todo momento existen ondas moviéndose en ambos sentidos dando lugar a una onda estacionaria.

En general una onda estacionaria puede conseguirse cuando dos o más ondas se confinan en una región del espacio mediante fronteras, estas ondas se reflejan hacia delante y hacia atrás en dichas fronteras, como por ejemplo la cuerda de una guitarra que está sujeta por ambos extremos, o un tubo sonoro.

Estas ondas se llaman estacionarias porque el perfil de la onda no se desplaza debido a la existencia de puntos fijos para los cuales la amplitud es nula, como demostraremos a continuación.

10.2. Resultados experimentales

Cuando se realiza experimentalmente la onda estacionaria agitando el extremo libre de una cuerda que está sujeta por el otro extremo, se observa lo siguiente:

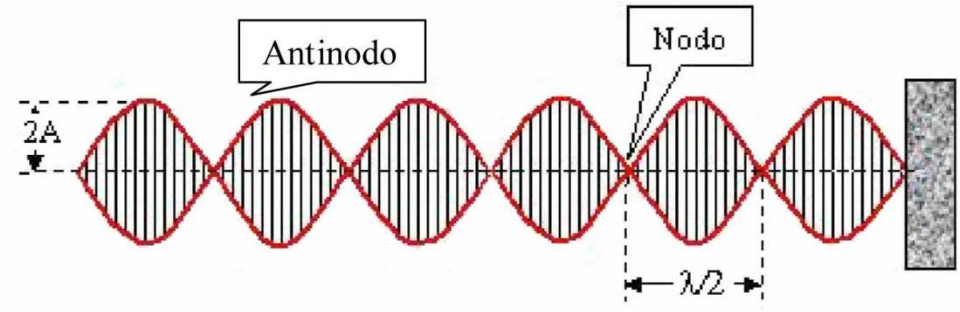


Figura 7.10 Onda estacionaria

1º.- Existen puntos de la cuerda que no vibran. A estos puntos se les denomina **NODOS**. En estos puntos las ondas interfieren en oposición de fase y producen una interferencia totalmente destructiva.

2º.- El resto de los puntos de la cuerda vibran todos con un MAS de igual frecuencia pero de distinta amplitud.

3º.- Entre cada dos nodos hay un punto que vibra con máxima amplitud. A estos puntos se les llama **VIENTRES O ANTINODOS**. En estos puntos las ondas han interferido en fase y producen una onda totalmente constructiva, siendo la amplitud de vibración el doble de la amplitud de las ondas que interfieren.

4º.- Todos los puntos de cuerda alcanzan la posición de equilibrio simultáneamente.

5º.- La separación entre dos nodos o dos vientres consecutivos es de media longitud de onda.

6º.- La separación entre un nodo y un vientre consecutivo es de un cuarto de longitud de onda.

7º.- El nº de nodos y de vientres depende de la frecuencia de agitación, aumentando con esta. Además la onda estacionaria sólo se consigue para determinadas frecuencias.

10.3. Descripción matemática de una onda estacionaria

Estudiemos el fenómeno cuantitativamente:

Sea y_1 (x, t) = A·sen (ω·t – k·x) la onda que se propaga en una cuerda. Al llegar a uno de los extremos fijos de la misma, la onda se refleja dando lugar a otra de ecuación:

$$y_2 (x, t) = -A·\text{sen} (\omega·t + k·x)$$

La onda resultante en cualquier punto de su interferencia la calculamos aplicando el principio de superposición de ondas:

$$y (x, t) = y_1 (x, t) + y_2 (x, t) = A·\text{sen} (\omega·t - k·x) + A·\text{sen} (\omega·t + k·x)$$

Aplicando la relación trigonométrica de la suma de los senos de dos ángulos:

$$\text{sen}\, A + \text{sen}B = 2\cos\frac{A-B}{2}\text{sen}\frac{A+B}{2}$$

resulta la ecuación de onda estacionaria:

$$\boxed{y (x, t) = 2\, A \cos (k·x)\ \ \text{sen} (\omega·t)} \quad [7.17]$$

La perturbación resultante corresponde a la de un MAS de frecuencia ω y de amplitud variable ya que la amplitud de cada punto de la cuerda depende de su distancia al foco y vale:

$$\boxed{A_r = 2\, A \cos (k·x)} \quad [7.18]$$

Podemos escribir por tanto:

$$\boxed{y (x, t) = A_r\, \text{sen} (\omega·t)} \quad [7.19]$$

Habrá por tanto puntos de amplitud máxima (A_r = 2 A) llamados **vientres** o **antinodos** y puntos de amplitud nula (A_r = 0) llamados **nodos**. Si analizamos la expresión de la amplitud resultante, podemos localizar a los vientres y a los nodos:

- Posición de los vientres

$A_r = \pm 2\,A \;\Rightarrow\; \cos (k·x) = \pm 1 \;\Rightarrow\; k·x = 0, \pi, 2\,\pi, 3\,\pi, \ldots\text{rad} \;\Rightarrow\; k·x = n·\pi \;\Rightarrow\; \frac{2\pi}{\lambda} x = n·\pi \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; x = n\,\frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

La distancia entre dos vientres consecutivos es media longitud de onda.

- Posición de los nodos

$A_r = 0 \;\Rightarrow\; \cos (k·x) = 0 \;\Rightarrow\; k·x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots \text{ rad} \;\Rightarrow\; k·x = (2n + 1)·\pi/2 \;\Rightarrow\; \frac{2\pi}{\lambda} x = (2n + 1)·\pi/2 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; x = (2n + 1)\,\frac{\lambda}{4} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

La distancia entre dos nodos consecutivos es media longitud de onda.

10.4. Estudio de las ondas estacionarias en una cuerda fija por los dos extremos

Supongamos que la cuerda está dispuesta horizontalmente a lo largo del eje OX. Podemos tomar el origen x = 0 en uno de los extremos de la cuerda por lo que, si L es la longitud de ésta, el otro extremo estará en la posición x = L. Puesto que ambos extremos de la cuerda están fijos, las condiciones de frontera o de contorno nos llevan a decir que ambos puntos serán nodos. Así pues, la longitud de la cuerda será múltiplo entero de media longitud de onda:

$$L = n\frac{\lambda}{2}$$

Sabiendo que $v_p = \lambda \cdot f$, resulta:

$$L = n\frac{v_p}{2f} \Rightarrow f = n\frac{v_p}{2L}$$

La expresión anterior nos indica que las posibles frecuencias o modos de vibración de los puntos de la cuerda es múltiplo entero de un determinado valor llamado **frecuencia fundamental**, f_1:

$$f_1 = \frac{v_p}{2L}$$

El resto de frecuencias posibles reciben el nombre de **armónicos**.

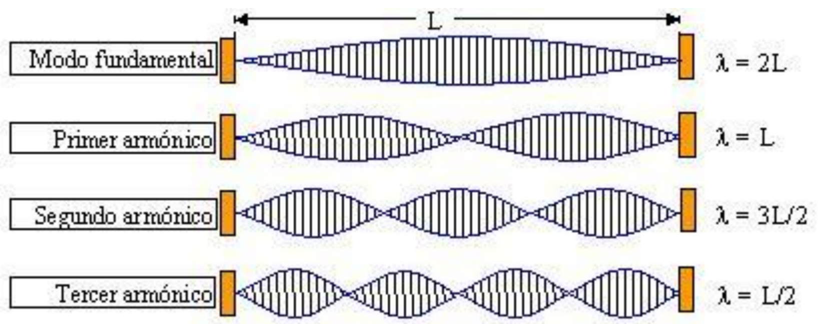


Figura 7.11 Primeros armónicos en la onda estacionaria de una cuerda sujeta por ambos extremos

El número de nodos dependerá del armónico en que esté vibrando la cuerda y éste, a su vez, dependerá de la velocidad de propagación que, para una cuerda dada, dependerá de la tensión a la que se someta: a mayor tensión, mayor frecuencia. Por esta razón, las cuerdas de una guitarra se afinan variando la tensión de las mismas.

10.5. Diferencias entre ondas estacionarias y ondas viajeras

- Las ondas estacionarias no son ondas propiamente dichas ya que en ellas no se transmite energía de unos puntos a otros del medio ya que lo impiden los nodos que están continuamente en reposo.
- La amplitud de las oscilaciones de los puntos del medio en una onda estacionaria depende de la posición de aquéllos mientras que en una onda viajera que se propaga sin perder energía, la amplitud de las oscilaciones es la misma para todos los puntos del medio.
- En una onda viajera todos los puntos por los que pasa estarán siempre oscilando, mientras que en una onda estacionaria hay puntos (nodos) que no oscilan una vez formada la misma.

Ejemplo 13º

La ecuación de una onda en una cuerda viene dada por la siguiente expresión:

$$y(x,t) = 3\cos(0{,}5\pi x)\ \ \mathrm{sen}(50\pi t)$$

donde x e y se miden en cm y t en s.

a) Características de la onda descrita por la expresión anterior.
b) Determina la amplitud y la velocidad de las ondas cuya interferencia da lugar a la onda anterior.
c) Velocidad de vibración instantánea de los puntos de la cuerda.
d) Calcula la velocidad con la que se mueve un punto de la cuerda situado a 3 cm. Comenta el resultado.
e) Calcula la velocidad con la que se mueve un punto de la cuerda situado a 4 cm en el instante 2 s. Comenta el resultado.

Ejemplo 14º

La ecuación de una onda en una cuerda de longitud L sujeta por ambos extremos viene dada, en unidades SI, por la siguiente expresión:

$$y(x,t) = 0{,}05\ \mathrm{sen}(2\pi x)\ \ \cos(50\pi t)$$

a) Característica de la onda descrita por dicha expresión.
b) Velocidad de vibración instantánea de los puntos de la cuerda.
c) Si la ecuación anterior corresponde a la frecuencia fundamental, ¿cuál es la longitud de la cuerda?

11. REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN. LEYES DE LA REFLEXIÓN Y DE LA REFRACCIÓN

Cuando una onda se propaga por un medio y encuentra en su camino otro medio de distinta naturaleza, generalmente lo que ocurre es que una parte de la onda cambia de dirección de propagación en el primer, y la otra parte de la onda atraviesa al segundo medio, propagándose por él. Al primer fenómeno se le llama reflexión y al segundo refracción.

11.1 REFLEXIÓN

Se define como el cambio de dirección dentro del mismo medio que experimentan las ondas al incidir sobre la superficie de separación (interfase) entre dos medios.

Se explica por medio del principio de Huygens según el cual los puntos de la interfase son centros emisores de ondas elementales que se propagan por el mismo medio cambiando de dirección. Por tanto, la onda reflejada tendrá la misma velocidad de propagación, frecuencia, periodo y longitud de onda que la onda incidente.

Leyes de Snell de la reflexión

1. Los rayos incidente y reflejado, así como la normal, están en el mismo plano.
2. El ángulo de incidencia (i) y el ángulo de reflexión (r) son iguales.

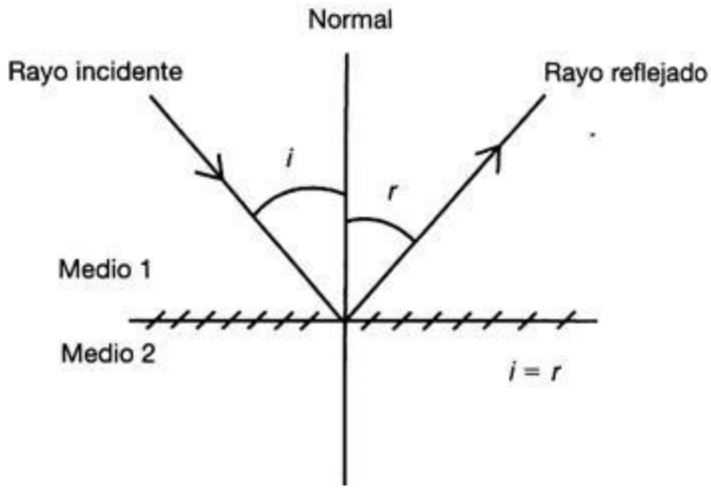


Figura 7.12 Ley de Snell de la reflexión

Observa que si la onda incide perpendicularmente a la superficie de separación (i = 0º), la onda reflejada tendrá la misma dirección que la incidente pero de sentido contrario (r = 0º).

11.2 REFRACCIÓN

Consiste en el cambio de dirección de propagación de una onda cuando llega a la superficie de separación entre dos medios distintos para seguir propagándose por el segundo medio.

Se explica con el principio de Huygens según el cual los puntos de la interfase son centros emisores de ondas elementales que continúan propagándose por el segundo medio, cambiando de dirección y de velocidad de propagación, ya que las características de éste son diferentes a las del primer medio.

La frecuencia de la onda refractada es la misma que la de la onda incidente ya que los puntos de la interfase emiten ondas elementales con la misma frecuencia con la que el foco emitió la onda incidente (la frecuencia es una invariante).

Dado que $v_p = \lambda \cdot f$, al cambiar la velocidad de propagación y mantenerse invariante la frecuencia, la longitud de onda de la onda refractada cambiará con respecto a la de la onda incidente según lo haga la velocidad de propagación.

Leyes de Snell de la refracción

1. Los rayos incidente y refractado, así como la normal, están en el mismo plano.
2. El cociente entre los senos de los ángulos de incidencia (i) y de refracción (t) es igual al cociente entre las velocidades de propagación en los respectivos medios 1 y 2.

$$\frac{\text{sen i}}{\text{sen t}} = \frac{v_1}{v_2}$$

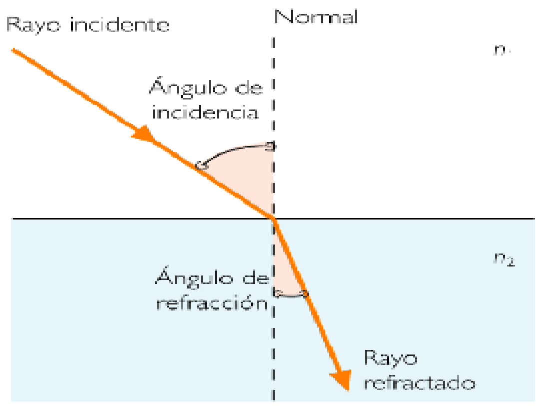


Figura 7.13 Ley de Snell de la refracción

Si se trata de una oem como es la luz, la Ley de Snell de la refracción se puede poner en función de una nueva magnitud física llamada índice de refracción.

Índice de refracción

Para la luz, cada medio está caracterizado por un parámetro llamado **índice de refracción absoluto n**, que se define como la razón entre la velocidad de propagación de la luz en el vacío c y la velocidad v de propagación en dicho medio:

$$n = \frac{c}{v}$$

De la definición de índice de refracción de la luz en un medio se deducen las siguientes consecuencias:

- Es una magnitud adimensional ya que es el cociente de dos velocidades.
- En el vacio el índice de refracción vale 1 ($n_o = 1$).
- En cualquier otro medio el índice de refracción de la luz es mayor que 1 ($n > 1$), ya que la velocidad de propagación de la luz es máxima en el vacío, y por tanto, el denominador siempre será menor que el numerador.
- Podemos expresar el índice de refracción de la luz en un medio en función de la longitud de onda:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_0 \cdot f}{\lambda \cdot f} \Rightarrow n = \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

donde λ_0 es la longitud de onda de la luz en el vacío y λ es la longitud de onda de la luz en un determinado medio.

Se dice que un medio es más **refringente** que otro cuando posee mayor índice de refracción.

En función del índice de refracción la Ley de Snell de la refracción puede expresarse del modo siguiente:

$$\boxed{\frac{\text{sen i}}{\text{sen t}} = \frac{v_1}{v_2}} \Rightarrow \frac{\text{sen i}}{v_1} = \frac{\text{sen t}}{v_2} \Rightarrow \frac{\text{c.sen i}}{v_1} = \frac{\text{c.sen t}}{v_2} \Rightarrow \boxed{n_1 \cdot \text{sen } i = n_2 \cdot \text{sen t}}$$

De la Ley de Snell de la refracción puede deducirse lo siguiente:

- Si una onda pasa de un medio a otro de menor velocidad (en el caso de la luz, de un medio a otro mas refringente), entonces el ángulo de refracción es menor que el de incidencia, es decir, el rayo refractado se acerca a la normal:

$$\boxed{\text{Si } v_1 > v_2 \ (n_1 < n_2) \Rightarrow \text{sen i} > \text{sen t} \Rightarrow i > t \Rightarrow \text{la onda refractada se acerca a la normal.}}$$

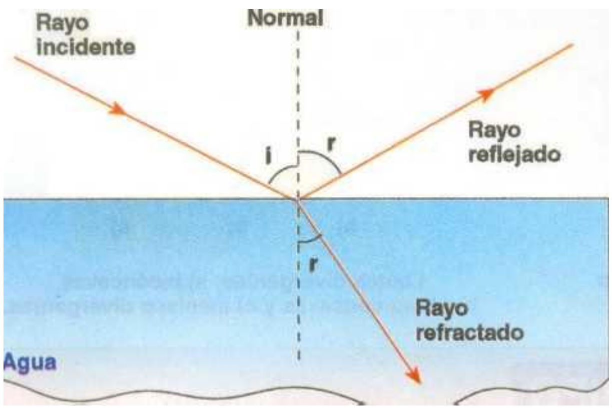


Figura 7.14 Refracción de la luz de un medio (aire) a otro mas refringente (agua)

- Si una onda pasa de un medio a otro de mayor velocidad (en el caso de la luz, de un medio a otro menos refringente), entonces el ángulo de refracción es mayor que el de incidencia, es decir, el rayo refractado se aleja de la normal, acercándose a la superficie de separación :

Si $v_1 < v_2$ ($n_1 > n_2$) ⇨ sen i < sen t ⇨ $i < t$ ⇨ la onda refractada se aleja de la normal.

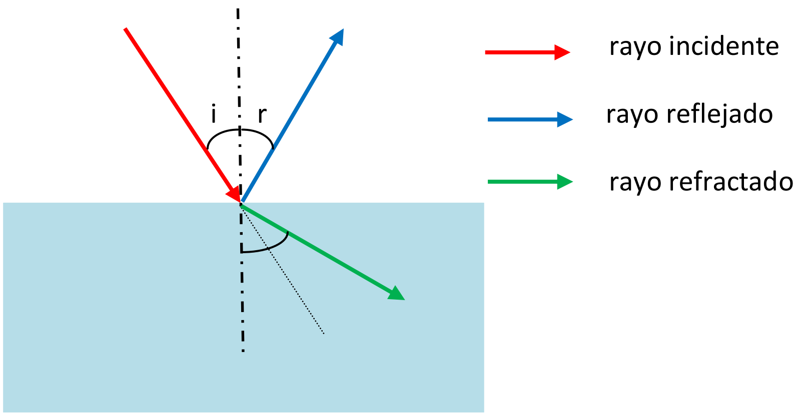


Figura 7.15 Refracción de la luz de un medio a otro menos refringente

Observa que, independientemente del valor del índice de refracción entre los dos medios, si la onda incide perpendicularmente a la superficie de separación (i = 0º), la onda refractada tendrá la misma dirección y sentido que la incidente (t = 0º): n_1 *sen i =* n_2 *sen t* ⇨ n_1 *sen 0º =* n_2 *sen t* ⇨ $n_1 \cdot 0 = n_2$ *sen t* ⇨ *0 =* n_2 *sen t* ⇨   ⇨ *sen t = 0* ⇨ *t = 0º*

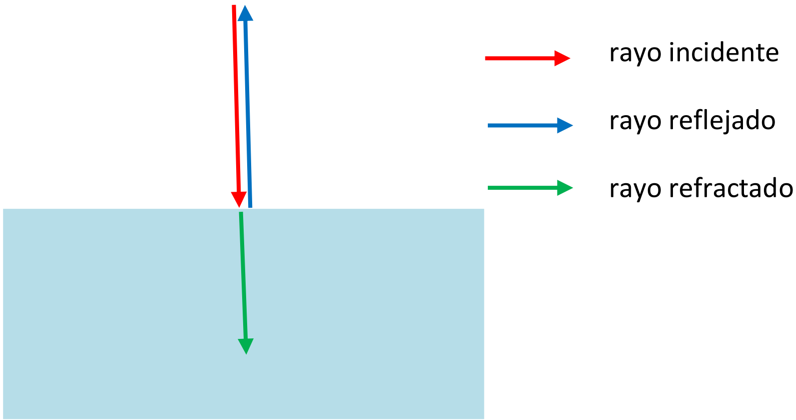


Figura 7.16 Reflexión y refracción con ángulo de incidencia de 0º

12. REFLEXIÓN TOTAL Y ÁNGULO LÍMITE. APLICACIONES

En el segundo de los casos anteriores ($v_1 < v_2$ o $n_1 > n_2$ si se trata de una oem), a medida que aumentamos el ángulo de incidencia, también aumentará el de refracción, siendo el valor de este último mayor. Para un cierto ángulo de incidencia, llamado **ángulo límite o crítico i_L**, el ángulo de refracción *t* vale 90°, dándose en este caso la llamada **refracción rasante**.

Para ángulos de incidencia *i* mayores que el ángulo límite (**$i > i_L$**), la luz se refleja totalmente, fenómeno que se conoce como **reflexión total**.

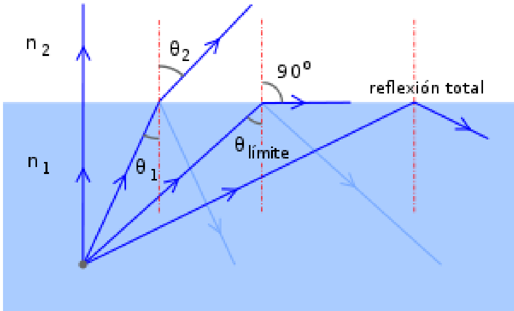


Figura 7.17 Reflexión total y ángulo límite

La determinación del ángulo límite se hace con la segunda ley de la refracción haciendo t = 90°:

$$n_1 \cdot \text{sen } i_L = n_2 \cdot \text{sen } 90° \quad \Rightarrow \quad \text{sen } i_L = \frac{n_2}{n_1} \quad \Rightarrow \quad i_L = \text{arcsen} \frac{n_2}{n_1}$$

Démonos cuenta que para ángulos inferiores al ángulo límite se produce reflexión y refracción y esto supone que la energía de la onda incidente se reparte entre la onda reflejada y la onda refractada. Pero cuando se incida con un ángulo superior al ángulo límite ´solo se produce reflexión y, por tanto, la luz reflejada tiene prácticamente la misma energía que la incidente.

Una aplicación actual de la reflexión total son las fibras ópticas, que se utilizan para la transmisión de ondas electromagnéticas a largas distancias.. La fibra es un cable flexible de material transparente y elevado índice de refracción en el que la luz incide siempre en sus caras internas con un ángulo mayor que el ángulo límite. De esta forma la luz va experimentando sucesivas reflexiones internas y puede dirigirse y transmitirse a largas distancias sin apenas pérdidas energéticas (ver figura).

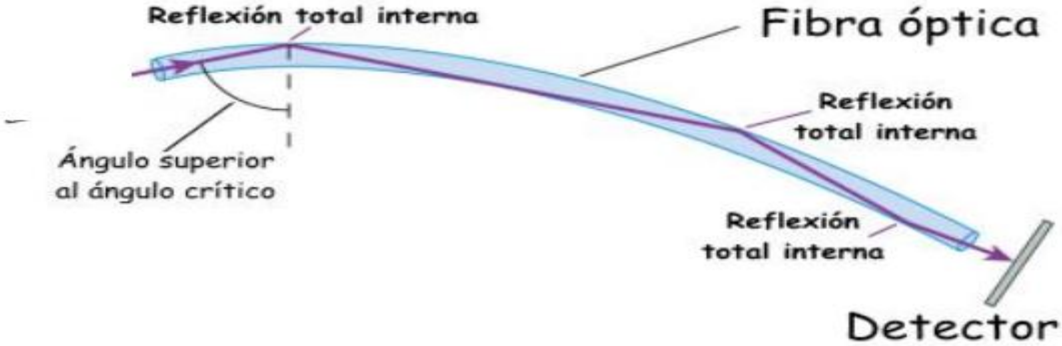


Figura 7.18 Múltiples reflexiones totales en las caras internas de una fibra óptica

Ejemplo 15º

Un rayo luminoso incide sobre una de las caras de una lámina de vidrio de caras plano-paralelas de 10 cm de espesor con un ángulo de 30º. Sabiendo que el índice de refracción de la luz en el aire es 1 y en la lámina de vidrio es 1,5:

a) Traza la trayectoria del rayo luminoso desde que incide en la primera del prisma t hasta que sale por la otra.
b) Calcula el ángulo con el que emerge la luz por la segunda cara del prisma. Comenta el resultado.
c) Calcula el tiempo que tarda el rayo luminoso en atravesar la lámina de vidrio.

Ejemplo 16º

Un espejo se encuentra en el fondo de una piscina de 2m de profundidad que está llena de agua (n = 1,33). Un rayo luminoso incide con un ángulo de 30º sobre la superficie del agua de la piscina.

a) Traza la trayectoria que sigue el rayo luminoso desde que incide en la superficie del agua y hasta que emerge de nuevo al aire.
b) Calcula el ángulo con el que emerge del agua al aire.
c) Calcula cuanto tiempo tarda el rayo en salir del agua.

Ejemplo 17º

a) Calcula el ángulo límite para un rayo luminoso que pasa del vidrio (n = 1,5) al aire (n = 1).
b) Analiza que pasa con ángulos mayores o menores que el ángulo límite.
c) Calcula el ángulo de refracción de un rayo luminoso que pasa del vidrio al aire con un ángulo de incidencia de 60º.

Ejemplo 18º

Un rayo luminoso incide del aire al agua. Determina cuál tiene que ser el ángulo de incidencia para que el rayo reflejado y refractado formen entre sí un ángulo de 90º.

Ejemplo 19º

No sé si eres consciente de que la profundidad real de una piscina siempre es mayor que la profundidad aparente. ¿Podrías explicar este fenómeno con la ayuda de un esquema de trayectoria de rayos luminosos y basándote en la Ley de Snell de la refracción?

13. DIFRACCIÓN

La difracción es el fenómeno que se produce cuando la onda se encuentra en su camino con un obstáculo u orificio cuyas dimensiones sean del orden de su longitud de onda. Este fenómeno es exclusivo de las ondas y consiste en que su frente de ondas sufre una distorsión de modo que la onda bordea el orificio o el obstáculo y llega a puntos donde parecía imposible que pudiera llegar.

En el siguiente esquema se representa lo que le ocurre al frente de ondas de una onda plana que se encuentra una abertura en su camino:

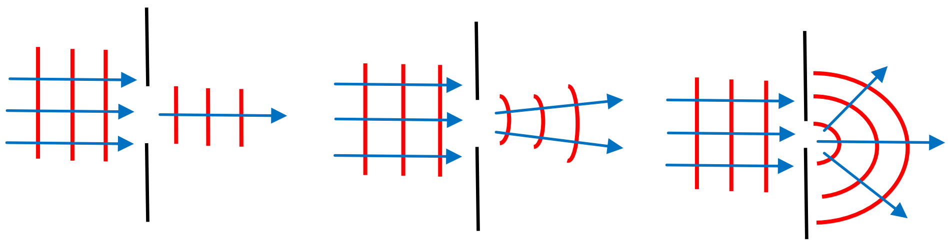


Figura 7.19 Difracción de una onda plana en una rendija

Cuando la abertura es suficientemente grande con respecto a la longitud de onda, las ondas que alcanzan la rendija no se distorsionan y continúan su trayectoria rectilínea. Al reducir el tamaño de la abertura, el frente de ondas comienza a distorsionarse y a propagarse en otras direcciones. Cuando la rendija se hace de un tamaño semejante al de la longitud de onda, el frente de onda se distorsiona totalmente y la onda bordea las esquinas del orificio propagándose en todas direcciones.

En las dos imágenes siguientes se quiere poner de manifiesto como, después de la abertura, la onda se propaga en otras direcciones diferentes a la inicial.

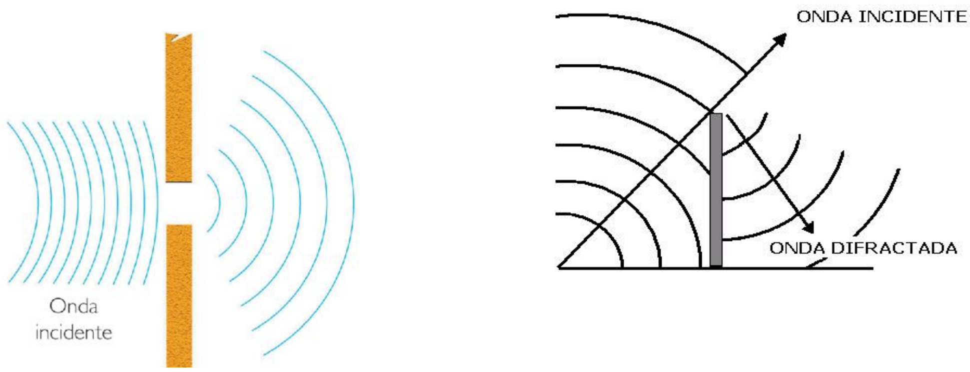


Figura 7.20 Explicación de la difracción mediante el principio de Huygens

El fenómeno se puede explicar con el principio de Huygens según el cual los puntos del obstáculo u orificio se convierten en centros emisores de nuevos frentes de ondas, logrando que la onda bordee el obstáculo o siga propagándose por detrás del orificio.

Este es un fenómeno típicamente ondulatorio que ha servido históricamente para demostrar si un determinado fenómeno tiene carácter ondulatorio o no. Por ejemplo, sirvió para demostrar el carácter ondulatorio de la luz y, posteriormente, también de los electrones.

Además, sirve para determinar el orden de longitud de la longitud de onda de una onda, pues es del mismo orden que el tamaño del orificio u obstáculo que le produce la difracción.

Este fenómeno es el que el sonido pueda bordear los obstáculos, es decir, explica que podamos oír los sonidos aunque el foco sonoro emisor está detrás de una esquina. Esto es así porque el sonido tiene longitudes de onda comprendidas entre unos cm y varios metros, que son las dimensiones de los obstáculos. Sin embargo el sonido no puede salvar obstáculos como un edificio o una montaña, ya que estos obstáculos tienen dimensiones que exceden el rango de sus longitudes de onda.

Podríamos preguntarnos por qué no vemos a los objetos detrás de las esquinas. La razón estriba en que la longitud de onda de la luz visible es muy pequeña comparada con las dimensiones de los obstáculos.

14. DISPERSIÓN

La dispersión de la luz es el fenómeno que se produce cuando un haz de luz blanca incide sobre una de las caras de un prisma óptico y consiste en que la luz blanca, al atravesar el prisma óptico, se descompone en los distintos colores que la forman.

La formación del arcoíris se debe a la dispersión de la luz solar cuando incide sobre las gotas de agua de la lluvia suspendidas en el aire que actúan como un prisma óptico.

Para explicar el fenómeno de la dispersión de la luz debemos tener en cuenta lo siguiente:

- Por lo general, el índice de refracción de un medio transparente es función de la longitud de onda de la luz que se propaga por él; concretamente disminuye con la longitud de onda. Este tipo de medios se llaman **dispersivos**.
- Como consecuencia de lo anterior, si un haz de rayos de luz de distintas longitudes de onda incide sobre un material refractante, cada radiación monocromática, según la Ley de Snell de la refracción, se desviará con un ángulo diferente.
- Como la luz blanca está formada por una mezcla de radiaciones de diferentes longitudes de onda, al hacer incidir dicha luz en una de las caras de un prisma óptico (sistema formado por dos superficies planas refractantes, las caras del prisma, que forman un ángulo diedro llamado ángulo refringente del prisma), se descompone en las distintas radiaciones monocromáticas ya que cada una de éstas se refracta con ángulos diferentes, emergiendo separadas por la otra cara del prisma. Si recogemos dichas radiaciones en una pantalla, observaremos una sucesión continua de colores llamada **espectro de la luz blanca**.

Figura 7.21 Dispersión de la luz en un prisma óptico

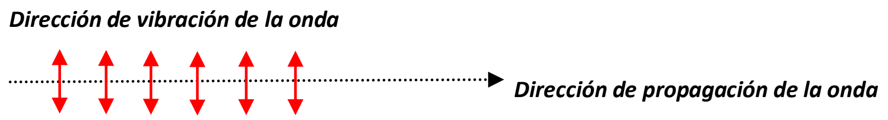
El prisma óptico origina un ángulo de desviación δ distinto para cada radiación monocromática, siendo la luz roja la que sufre la menor desviación y la luz violeta la que sufre la mayor desviación.

El color de cada radiación monocromática depende de su frecuencia y debido a que ésta no cambia en la refracción, el color tampoco lo hará cuando incida sobre un medio refractante.

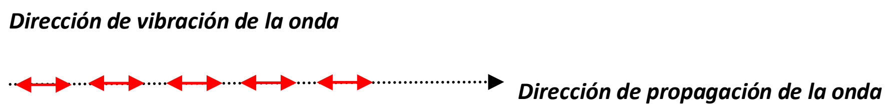
15. POLARIZACIÓN

Recuerda que una de las posibles clasificaciones de las ondas era atendiendo a como eran entre sí las direcciones de propagación y de vibración de la onda: si ambas direcciones coincidían, las ondas son longitudinales, pero, si ambas direcciones son perpendiculares, las ondas son transversales.

Onda transversal



Onda longitudinal



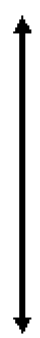
En las longitudinales sólo hay una dirección de vibración, que es la de propagación de la onda. Sin embargo en las ondas transversales hay infinitas posibles direcciones de vibración: todas las que están contenidas en el plano perpendicular a la dirección de propagación.

Cuando la onda transversal se propaga vibrando en todas las posibles direcciones de vibración, se dice que **la onda transversal no está polarizada**. Pero, si por algún mecanismo, conseguimos seleccionar una sola dirección de vibración de todas las posibles, decimos que **la onda transversal está polarizada**.

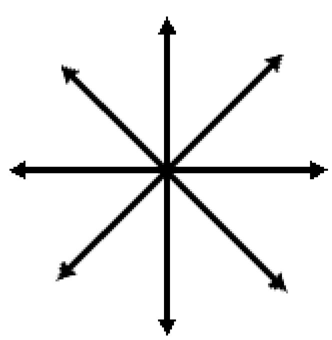
Una onda longitudinal no se puede polarizar porque ya lo está, ya que sólo vibra en una única dirección, la dirección de propagación. Por tanto el sonido no se puede polarizar puesto que ya lo está al ser una onda longitudinal.

El fenómeno de la polarización tiene especial importancia en las oem y, de hecho, la polarización de la luz sirvió para demostrar que se trata de ondas transversales, es decir, las oscilaciones de los campos eléctrico y magnético son perpendiculares a la dirección de propagación.

La luz natural no está polarizada, es decir, los campos eléctrico y magnético vibran aleatoriamente en todas las direcciones permitidas. Pero, existen diversos mecanismos para polarizar la luz. De entre ellos destacamos los dos siguientes: Polarización por absorción y polarización por reflexión.



Luz polarizada



Luz no polarizada

Polarización por absorción:

Existen diversas sustancias denominadas polaroides que tienen la particularidad de actuar como filtro ya que absorben la luz que vibra en todas las direcciones excepto la que vibra en una dirección determinada (dirección de polarización o eje de transmisión), tal y como se representa en la figura.

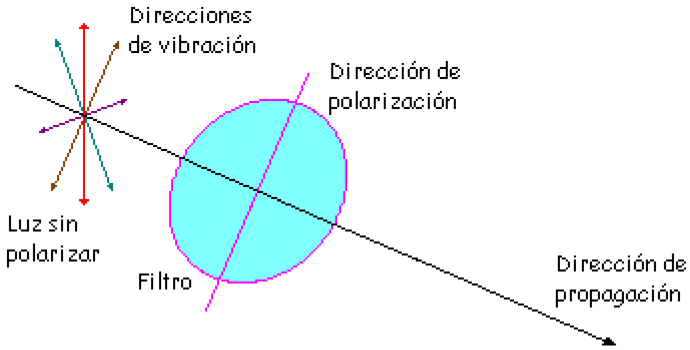


Figura 7.22 Polarización de luz natural por absorción

Démonos cuenta que si colocamos a continuación otro polarizador con su eje de transmisión perpendicular al que le precede, absorberá toda la luz que le llegue y, detrás de él no habrá luz.

Polarización por reflexion:

Sabemos que cuando una onda luminosa incide sobre la superficie de separación de dos medios, una parte de la onda se refleja y otra parte se refracta. Pues bien, la luz reflejada está parcialmente polarizada.

Ocurre que cuando el rayo reflejado y el refractado forman un ángulo de 90º, la luz reflejada está totalmente polarizada.

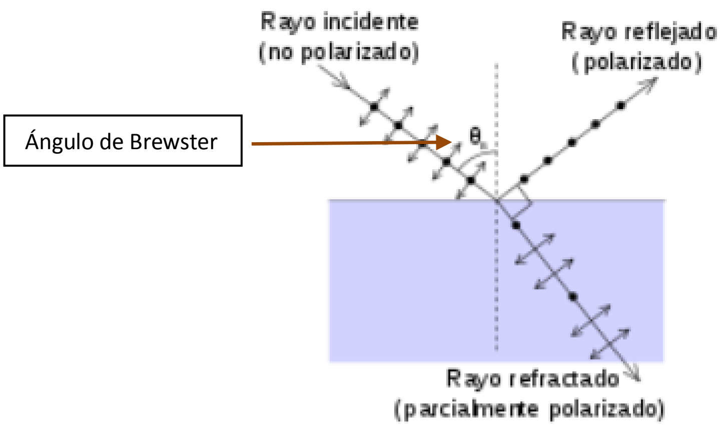


Figura 7.23 Polarización de luz natural por reflexión

El ángulo de incidencia para el cual los rayos reflejado y refractado forman 90º y por tanto la luz reflejada está totalmente polarizada, se denomina **<u>ángulo de Brewster</u>**.

Ejemplo 20º

El índice de refracción del vidrio es 1,5. Calcula los ángulos de incidencia y de refracción cuando la luz reflejada por una superficie de vidrio está totalmente polarizada.

SOLUC: 56,3º y 33,7º

Ejemplo 21º

¿A qué ángulo por encima de la horizontal debe estar el Sol para que la luz reflejada por la superficie de un lago tranquilo esté completamente polarizada? (*índice de refracción del agua 1,33).*

SOLUC: 36,94º

16. EL EFECTO DOPPLER Y SUS APLICACIONES

El **efecto Doppler** es el fenómeno por el cual la frecuencia de las ondas *percibida* por un observador varía cuando el foco emisor o el propio observador se desplazan uno respecto al otro, es decir, el efecto Doppler consiste en el aparente cambio de frecuencia que percibe el receptor de una onda cuando hay un movimiento relativo entre el foco emisor de dicha onda y el receptor de ella.

Este fenómeno fue observado por primera vez en las ondas sonoras por el físico austriaco Christian Andreas Doppler (1803 - 1853), en el año 1842, al notar como el tono (frecuencia) del silbido de una locomotora se hacía más agudo al acercarse y más grave cuando se alejaba.

En la primera figura se puede observar que si no hay movimiento relativo entre el foco y los observadores, estos perciben la onda emitida con la misma frecuencia con la que es emitida. Pero en la segunda imagen se pone de manifiesto que cuando el foco se mueve respecto a los observadores, la frecuencia percibida por estos es diferente de la que tiene realmente la onda emitida por el foco. El observador que ve acercarse el foco recibe las ondas a una mayor frecuencia de la real, mientras que al observador que ve alejarse el foco le ocurre al contrario.

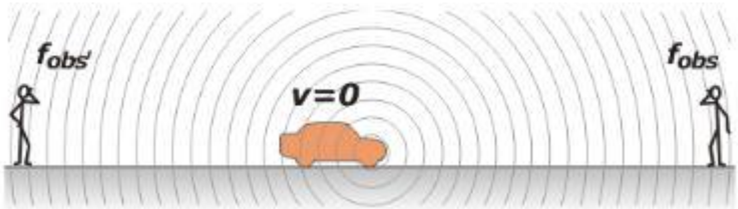


Figura 7.24 Sin movimiento relativo foco-receptor, NO se produce el efecto Doppler

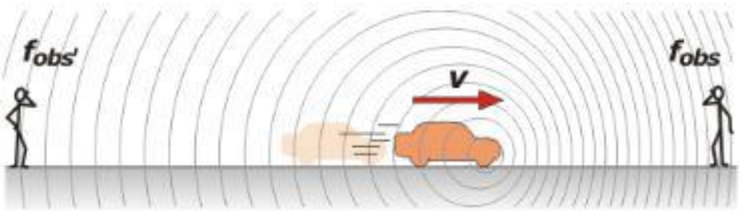


Figura 7.25 Con movimiento relativo foco-receptor, SÍ se produce el efecto Doppler

El **efecto Doppler** se presenta en todos los movimientos ondulatorios. Lo que ocurre es simplemente que los humanos tan solo podemos ver reflejado dicho efecto en la realidad cuando se trata de ondas de sonido.

Seguramente más de una vez hayas escuchado la sirena de un coche o el motor de una moto pasar frente a ti. Cuando el sonido se encuentra a mucha distancia y comienza a acercarse es sumamente agudo hasta que llega a nosotros. Luego cuando continúa su viaje y se va alejando lo que escuchamos es un sonido mucho más grave.

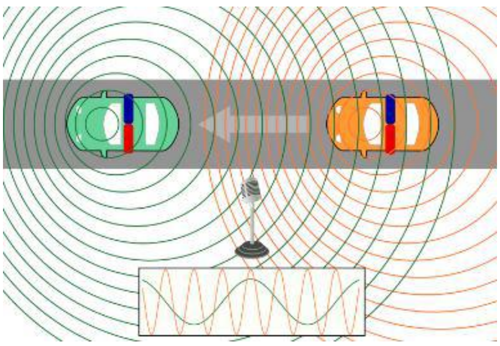


Figura 7.26 Efecto Doppler en el sonido

Como puede observarse en la imagen anterior, aunque los dos vehículos emiten ondas sonoras de igual frecuencia, el micrófono capta el sonido producido por el coche verde, que se aleja del receptor, con una onda de menor frecuencia que la real, es decir, menos intensa y menos aguda. Por otro lado, el coche anaranjado, que va avanzando hacia el receptor, presenta ondas con más frecuencia que la real y por tanto, también más agudas e intensas.

Sin embargo, el efecto Doppler adquiere una especial relevancia en el caso de la luz y en su aplicación en Astrofísica. La frecuencia observada para la luz en el caso de que el foco y el observador se estén aproximando es mayor que la frecuencia observada si estuviesen en reposo relativo, lo cual se traduce en un desplazamiento hacia el azul (*blueshift)* en la frecuencia observada por el receptor (frecuencias más elevadas). Por el contrario si hay un alejamiento relativo entre el foco y el receptor, hay un desplazamiento hacia el rojo (*redshift)* en la frecuencia observada por el receptor (frecuencias más bajas). Precisamente este desplazamiento hacia el rojo de la luz que nos llega de las galaxias es el uno de los argumentos que utilizan los defensores de la teoría de que el universo está en expansión.

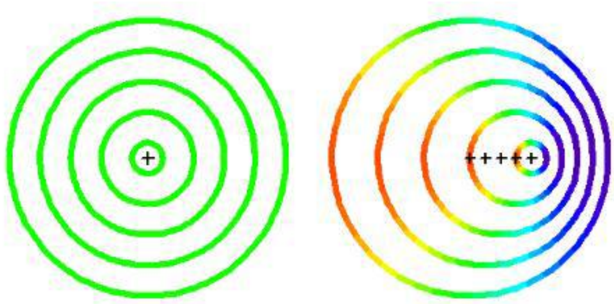


Figura 7.27 Efecto Doppler en la luz: redshift y blueshift

Puede demostrarse que la frecuencia, $\mathbf{f_r}$, medida por un observador en reposo cuando el foco emisor se mueve respecto a aquel con una cierta velocidad, $\mathbf{v_f}$, viene dada por la siguiente expresión:

$$\boxed{f_r = \frac{f_0}{1 \pm \frac{v_f}{v}}}$$

correspondiendo el signo positivo al caso en el que el foco se aleja del receptor y el negativo al caso en el que se acerca a este.

Puede demostrarse que la frecuencia, $\mathbf{f_r}$, medida por un observador en movimiento, $\mathbf{v_r}$, cuando el foco emisor permanece en reposo viene dada por la siguiente expresión:

$$\boxed{f_r = f_0\left(1 \pm \frac{v_r}{v}\right)}$$

correspondiendo el signo positivo al caso en el que el receptor se acerca al foco y el negativo al caso en el que se aleje del foco.

De las expresiones anteriores hemos de destacar que no se obtiene el mismo resultado si es el foco el que se mueve que si es el receptor el que lo hace, es decir, no son equivalentes los movimientos del emisor y del receptor. Además, si tanto el foco como el receptor se mueven las fórmulas anteriores deben de combinarse entre sí.

El efecto Doppler también se aplica en el funcionamiento de los radares. Gracias al efecto Doppler es posible medir la velocidad a la que se desplaza un coche, por ejemplo. Para ello, el radar emite continuamente ondas a una determinada frecuencia *(f_0)* . Dichas ondas se reflejan en los coches, camiones y motocicletas que atraviesan la calzada. Esta reflexión hace que, desde el punto de vista teórico, los automóviles puedan considerarse *focos en movimiento*. El radar, de nuevo, cuenta con un receptor, *en reposo* que mide la frecuencia de la onda reflejada, que será ligeramente distinta *(f)* a la emitida. A partir de las frecuencias f y f_0, y de la velocidad de la onda en el medio, v, el radar "despeja" la velocidad del foco, v_f (el automóvil en movimiento).

Las ecografías están basadas en el mismo principio. La velocidad sanguínea es un parámetro que se ve alterado en las obstrucciones de las válvulas cardiacas. Esta es la base del diagnóstico a través del efecto Doppler. Cuando se emiten ultrasonidos hacia el torrente sanguíneo, los glóbulos rojos o hematíes actúan como elementos reflectores de este, de manera similar a como los coches reflejaban las ondas provenientes del radar. Así, el análisis de la señal recibida arroja luz sobre la velocidad del torrente sanguíneo y sobre posibles patologías asociadas.

Ejemplo 22º

Un ciclista se encuentra descansando al lado de la carretera cuando oye la sirena de una ambulancia. La frecuencia del sonido emitido por la sirena es de 600 Hz y se acerca con una velocidad constante de 72 Km/h. Suponiendo que la velocidad de propagación del sonido en el aire es de 340 m/s, Calcule:

a) La frecuencia del sonido que oye el ciclista mientras la ambulancia se acerca.
b) La frecuencia que escucha el ciclista mientras la ambulancia se aleja.
c) La frecuencia percibida por el ciclista si este monta en su bicicleta y persigue a la ambulancia con una velocidad de 36 Km/h.
d) ¿Qué ocurriría si el ciclista persiguiese a la ambulancia con la misma velocidad de esta, pero a una cierta distancia tras ella?
e) ¿Y si el ciclista se moviese con la misma velocidad que la ambulancia, pero al lado de ella?

SOLUC: a) 637,5 Hz b) 566,7 Hz c) 583,3 Hz d) ¿? f) ¿?

Ejemplo 23º

Calcula la velocidad de un tren y la frecuencia propia de su sislbato, si se observa que cuando el tren se acerca a la estación, la frecuencia percibida del silbato es de 800 Hz y cuando se aleja a la misma velocidad, es de 650 Hz.

SOLUC: 35,17 m/s y 717,24 Hz

Ejemplo 24º

Determina la velocidad, supuesta constante, de un bólido de fórmula I al pasar por la mitad de la recta de tribunas, sabiendo que cuando se acerca, el ruido de su motor se percibe con una frecuencia de 300 Hz y cuando se aleja, de 200 Hz.

SOLUC: 244,8 Km/h

Ejemplo 25º

Una lancha rápida se acerca a un acantilado vertical y el piloto observa que el sonido del motor de su embarcación reflejado por el acantilado varía su tono de 440 Hz a 495 Hz. Considerando que la velocidad del sonido en el aire es de 320 m/s, calcule la velocidad de la lancha.

SOLUC: 18,8 m/s

Ejemplo 26º

Por dos vías rectas paralelas circulan dos trenes en sentidos contrarios. A modo de saludo, los maquinistas hacen sonar las sirenas. Suponiendo que uno de los trenes (A) se mueve a 108 km/h y el otro (B) a 72 km/h y que la sirena de ambos emite a 800 Hz, calcule la frecuencia de los sonidos que perciben los maquinistas de ambos trenes.

SOLUC: El A percibe su sirena con una f = 800 Hz, y la del B la percibe a f = 925 Hz
El B percibe su sirena con una f = 800 Hz, y la del A la percibe a f = 929 Hz

17. EL SONIDO

17.1 Ondas sonoras (ondas acústicas)

Se puede considerar que una onda sonora es una fluctuación de presión que se propaga a través de cualquier medio que es suficientemente elástico para permitir que sus moléculas se acerquen y se separen unas de otras.

Dicha perturbación puede ser detectada por el oído humano o por determinados instrumentos. Para que dicha perturbación pueda ser detectada por el oído humano, la composición espectral de dicha onda debe caer dentro del rango de frecuencias que detecta el oído que está entre 20 y 20000 Hz, dependiendo ese rango de cada persona (muchas personas comienzan a no oír a partir de 15.000 Hz). Las frecuencias más bajas que las audibles se llaman infrasonidos, y a las frecuencias más altas que las audibles se llaman ultrasonidos.

Las ondas sonoras son ondas mecánicas longitudinales: mecánicas porque necesitan un medio material para su propagación (Si hacemos el vacío en una campana de vidrio en la que hay un despertador sonando, a medida que va saliendo el aire el sonido se va apagando hasta que desaparece del todo) y longitudinales el desplazamiento de las partículas respecto de su posición de equilibrio se produce en el mismo sentido de propagación de la perturbación.

Pueden propagarse en medios sólidos, líquidos y gaseosos. La velocidad a la que se propaga el sonido no depende de su intensidad o cualidades, sino únicamente de las propiedades del medio. El sonido se propaga con mayor velocidad en los medios más rígidos, por lo que la velocidad de propagación es mayor en los sólidos que en líquidos y gases.

ESTADO	MEDIO	VELOCIDAD DEL SONIDO (m/s)
Gaseoso	Aire (20ºC)	340
	Hidrógeno (0ºC)	1.286
	Oxígeno (0ºC)	317
	Helio (0ºC)	972
Líquido	Agua (25ºC)	1.493
	Agua de mar (25ºC)	1.533
Sólido	Aluminio	5.100
	Cobre	3.560
	Hierro	5.130
	Plomo	1.322
	Caucho	54
Vacío	Vacío	0

Figura 7.28 Velocidad del sonido en diferentes medios

17.2 Cualidades del sonido

- **Intensidad:** Sensación asociada a la forma en la que recibe el sonido el ser humano. Los sonidos pueden clasificarse en fuertes o débiles, según su intensidad sea elevada o baja. El oído humano puede detectar sonidos cuando la I es de al menos 10^{-12} W/m², denominada ***INTENSIDAD UMBRAL DE AUDICIÓN***. Sonidos con intensidad igual o superior a 1W/m² son audibles, pero provocan dolor en los oídos y se llama ***INTENSIDAD UMBRAL DEL DOLOR***.

- **Tono o altura:** de un sonido indica si este es alto (agudo, muchas vibraciones por segundo, es decir, frecuencia alta) como el de un violín o bajo (grave, pocas vibraciones por segundo, frecuencia baja) como el de un tambor. Cuanto más baja sea la frecuencia más bajo será el tono y viceversa.

- **Timbre:** Permite distinguir entre dos sonidos en los que la intensidad y la frecuencia son iguales, pero que han sido emitidos por focos distintos. Normalmente, los sonidos no son puros, es decir, las ondas no son perfectamente sinusoidales sino que el resultado de varios movimientos periódicos superpuestos a la onda fundamental, que se denominan armónicos o sobretonos. Así, cada sonido procedente de un instrumento musical o persona es una onda compuesta y tiene unas características específicas que lo diferencian de las demás. El timbre depende de la forma de la onda

17.3 Nivel de intensidad sonora

Como el rango de intensidades del oído humano es muy amplio, desde 1 W/m_2 (intensidad umbral) hasta 10^{-12} W/m² (intensidad del dolor), para la medida de la intensidad suele utilizarse una escala logarítmica que se llama ***ESCALA DE NIVEL DE INTENSIDAD SONORA***.

Se define **NIVEL DE INTENSIDAD DE UNA ONDA SONORA** como:

$$\boxed{\beta = Log\left(\frac{I}{I_0}\right)}$$

I es la intensidad de la onda sonora existente.

I_0 es la intensidad umbral, es decir, 10^{-12} W/m², que es la mínima intensidad sonora que detecta el oído humano.

Comentarios:

1º.- En la escala definida anteriormente el nivel de intensidad se mide en decibelios (dB).

2º.- Cuando la intensidad del sonido es igual al umbral de audición, entonces el nivel de intensidad es 0 dB.

$$\boxed{\text{Si } I = 10^{-12} W/m^2 \Rightarrow \beta = 10\,Log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10 Log\left(\frac{10^{-12}}{10^{-12}}\right) = 10 Log(1) = 0\text{ dB} \Rightarrow \text{umbral de audición}}$$

3º.- Cuando la intensidad del sonido es igual al umbral del dolor, 1 W/m^2, entonces el nivel de intensidad es 120 dB.

$$\text{Si } I = 1\,W/m^2 \Rightarrow \beta = 10\,Log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10\,Log\left(\frac{1}{10^{-12}}\right) = 10\,Log(10^{12}) = 120\text{ dB} \Rightarrow \text{umbral del dolor}$$

Llamamos sensación sonora a un factor subjetivo que involucra los procesos fisiológicos y psicológicos que tienen lugar en el oído y en el cerebro. Es lo que nos lleva a clasificar los sonidos en débiles, fuertes, desagradables…. Depende de la intensidad y de la frecuencia. Por ejemplo, una señal de 1000Hz con nivel de intensidad de 40 dB provoca la misma sensación sonora que un sonido de 100 Hz con 62 dB.

17.4 Contaminación acústica y calidad de vida

Los órganos internacionales en materia acústica recomiendan que el sonido ambiental no supere los 55 dB de día y 35 dB de noche. Se considera que hay contaminación sonora cuando el sonido supere los 70 dB durante prolongados intervalos de tiempo.

La exposición prolongada a niveles de alta sonoridad puede acarrear problemas auditivos (perdida irreversible de la capacidad auditiva), irritabilidad, falta de concentración, estrés, fatiga, alteraciones del ritmo respiratorio, problemas digestivos…

El problema es mayor en áreas urbanas (densidad de tráfico elevada) o cerca de los aeropuertos, locales de ocio (discotecas, pubs…), centros de trabajo (industrias..). La contaminación acústica viene contemplada en las normativas de seguridad e higiene en el trabajo.

Las autoridades son las que dictaminan las medidas contra la contaminación acústica:

- Pasivas o Paliativas: tratan de amortiguar la propagación del sonido o su impacto. Ej. Insonorización de locales o viviendas, muros de apantallamiento localizados en vías urbanas, barreras verdes, empleo de cascos antirruido.

Por ejemplo la legislación española obliga a los locales de ocio a aislar su recinto de los locales colindantes por medio de materiales absorbentes para evitar la contaminación acústica que producen. Locales que tienen una I=100 dB transmiten al exterior 65 dB.

- Activas (preventivas): actúan contra los focos emisores del ruido. Silenciadores y filtros para los motores, reducción del tráfico en algunas zonas de los cascos urbanos, fomento del transporte público.

Pero no hay que olvidar la ***MEDIDAS EDUCATIVAS***, es decir, la formación de los ciudadanos de actitud favorable al mantenimiento de un entorno sin contaminación sonora.

Ejemplo 27º

Un foco sonoro puntual de 10 W de potencia emite ondas sonoras que se propagan por igual en todas direcciones. Calcula la intensidad del sonido y el nivel de intensidad en un punto situado a 10 m del foco.

SOLUC: $I = 8.10^{-3}$ W/m^2 $\beta = 99$ dB

Ejemplo 28º

Un altavoz emite el sonido con una potencia de 40 W, el cual se propaga por igual en todas direcciones.

a) Calcula la intensidad sonora a 10 m del altavoz.
b) Calcula el nivel de intensidad en ese punto.
c) ¿A qué distancia dejará de ser audible ese sonido? (despreciando la absorción).
d) ¿A qué se debe esa disminución de intensidad?

SOLUC: a) $I = 3{,}18.10^{-2}$ W/m^2 b) $\beta = 105$ dB c) 1784 Km

Ejemplo 29º

Se produce una explosión en el aire que libera 5000 J en una centésima de segundo. Si la onda sonora originada tiene una longitud de onda de 50 cm y su velocidad de propagación es de 330 m/s, calcular, prescindiendo de la absorción:

a) Frecuencia de la onda sonora.
b) Intensidad y nivel de intensidad de la onda a 50 m de la explosión.
c) Intensidad y nivel de intensidad de la onda a 100 m de la explosión.
d) Relación entre las amplitudes del sonido en esos dos puntos.

SOLUC: a) 660 Hz b) $I = 15{,}92$ W/m^2 $\beta =$ c) $I = 3{,}98$ W/m^2 $\beta =$ d) $A_2 = A_1/2$

18. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Las ondas electromagnéticas (oem) son ondas transversales en las que la perturbación que se propaga está formada por dos campos de fuerzas simultáneos y variables: un campo eléctrico $\vec{E}$y un campo magnético $\vec{B}$, perpendiculares entre sí en fase.

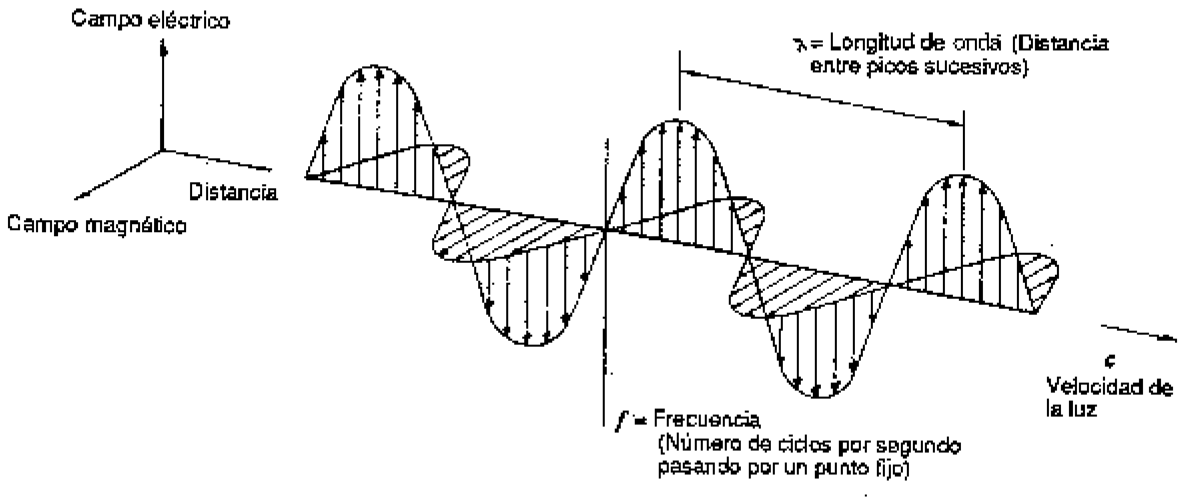


Figura 7.29 Onda electromagnética

Características de las ondas electromagnéticas

- Son originadas por cargas eléctricas aceleradas.
- Consisten en una variación periódica del estado electromagnético del espacio: un campo eléctrico variable produce un campo magnético variable, éste a su vez origina un campo eléctrico y así, sucesivamente, ambos se propagan en el espacio.
- Los campos se propagan en fase, es decir, alcanza sus valores máximos, mínimos y nulos simultáneamente
- No necesitan soporte material para propagarse ya que los campos eléctrico y magnético pueden existir en el vacío.
- En estas ondas, los vectores de los campos eléctrico $\vec{E}$ y magnético $\vec{B}$ varían periódicamente con el tiempo y la posición en planos perpendiculares entre sí. La dirección de propagación es la recta intersección de ambos planos y el sentido viene determinado por el producto vectorial $\vec{E} \times \vec{B}$. Si no hay atenuación, los módulos de ambos campos serán funciones sinusoidales de la posición y del tiempo, como la función de onda armónica. Además, las amplitudes de ambos campos cumplen la siguiente relación:

$$\frac{E_0}{B_0} = v$$

  donde v es la velocidad de la luz en el medio de propagación.
- La relación entre los campos eléctrico $\vec{E}$ y magnético $\vec{B}$ de una oem permite describir a dicha onda mediante una sola ecuación de onda, o bien la del campo eléctrico $\vec{E}$ o la del campo magnético $\vec{B}$:

$$\vec{E} = \vec{E}_0\, sen(\omega t \pm kx + \varphi_0) \quad \text{o bien} \quad \vec{B} = \vec{B}_0\, sen(\omega t \pm kx + \varphi_0)$$

- La velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas depende del medio de propagación según la expresión:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}}$$

donde ε es la constante dieléctrica del medio y μ es la permeabilidad magnética del medio. En el caso particular del vacío, la velocidad de la luz es $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1} y es su valor máximo posible.

- Las ondas electromagnéticas también cumplen las relaciones entre velocidad, longitud de onda y frecuencia estudiadas en el tema de ondas.

Espectro electromagnético

Existen distintos tipos de oem y al conjunto de todas ellas se le denomina espectro electromagnético. El espectro electromagnético es el conjunto de todas las ondas electromagnéticas conocidas, ordenadas según su longitud de onda o su frecuencia.

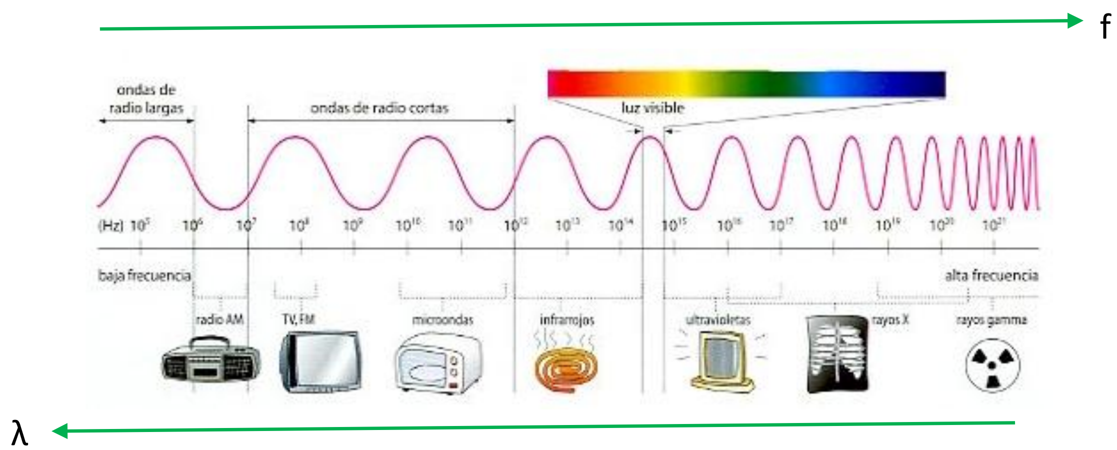


Figura 7.30 Espectro electromagnético

Todas las ondas electromagnéticas tienen en común su naturaleza. No obstante, cada grupo de ondas, caracterizado por un intervalo determinado de longitudes de onda y de frecuencias, tiene su propia forma de producción, y también unas aplicaciones prácticas específicas.

<u>Ondas de radio y TV</u>

Son las oem de menor frecuencia y por tanto de menor energía.

- Origen: circuito eléctricos oscilantes
- Aplicaciones: radio, televisión, telecomunicaciones, …

<u>Microondas</u>

- Origen: circuitos oscilantes de alta frecuencia
- Aplicaciones: telefonía, radar, radioastronomía, hornos, …

Infrarrojos

También se denominan ondas térmicas ya que son producidas por los cuerpos incandescentes.. Son absorbidas con facilidad por la materia y en los seres vivos proporcionan la sensación de calor.

- Origen: radiación térmica de los cuerpos
- Aplicaciones: investigación biológica, médica, química e industrial, fotografía, …

Visible

Es la parte del espectro electromagnético que aprecia el ojo humano y comprende el intervalo de frecuencias entre 4.10^{14} Hz y 8.10^{14} Hz.

Cada frecuencia produce la correspondiente sensación de color. En orden creciente de frecuencia y por tanto de energía son los siguientes colores:

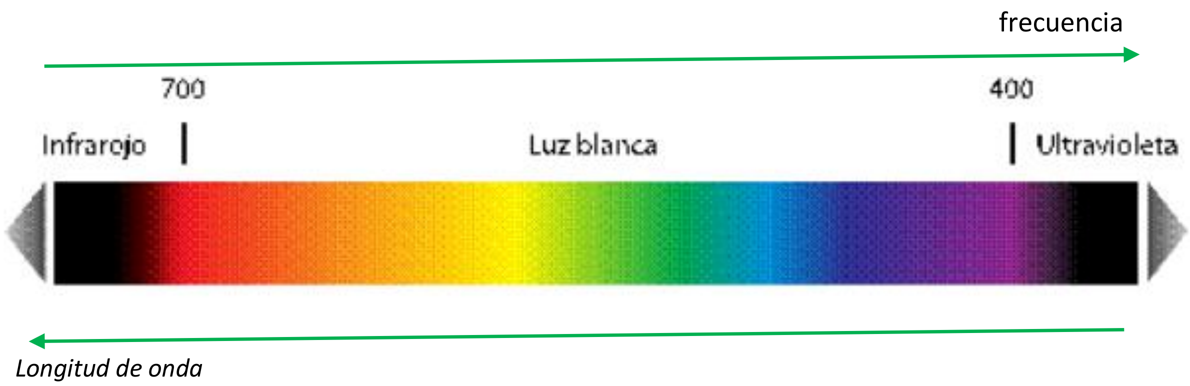


Figura 7.31 Espectro visible en nm

El intervalo de longitudes de onda para el espectro visible en el vacío lo podemos calcular utilizando la relación:

$$c = \lambda . f$$

$$c = \lambda . f \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{3.10^8}{8.10^{14}} = 3{,}75.10^{-7}\, m = 375.10^{-9}\, m = 375 nm = 3750.10^{-10}\, m = 3750\, \overset{o}{A} \\ \lambda_1 = \dfrac{3.10^8}{4.10^{14}} = 7{,}5.10^{-7}\, m = 750.10^{-9}\, m = 750 nm = 7500.10^{-10}\, m = 7500\, \overset{o}{A} \end{cases}$$

Destaquemos que el intervalo de longitudes de onda obtenido para la luz visible, es sólo para el vacío. En cualquier medio el intervalo de longitudes de onda sería distinto, ya que, aunque el intervalo de frecuencias es invariante, la velocidad de propagación de la luz es diferente para cada medio y, por tanto, la longitud de onda de cada frecuencia sería diferente para cada medio.

- Origen: transiciones electrónicas en los átomos
- Aplicaciones: iluminación, láser,…

Ultravioleta

Son oem cuya frecuencia está por encima del visible y por tanto tienen mas energía que la luz visible. Son las responsables del bronceado de la piel.

- Origen: descargas eléctricas en gases y el Sol
- Aplicaciones: medicina, biología, …

Rayos X

Son oem de alta frecuencia y por tanto de alta energía. Pueden atravesar los tejidos de los seres vivos y por ello hay que protegerse de ellas.

- Origen: choques de electrones de alta energía con átomos metálicos provocando su desaceleración
- Aplicaciones: medicina, metalurgia, cristalografía, …

Rayos ϒ

Son las oem de mayor frecuencia y por tanto las de mayor energía. Son absorbidas por los seres vivos produciendo graves efectos sobre ellos cuando se exponen a dosis altas y tiempos prolongados.

- Origen: emisiones nucleares radiactivas
- Aplicaciones: medicina, metalurgia, …

CUESTIONES

Cuestión 1ª a) Explique la periodicidad espacial y temporal de las ondas y su interdependencia. b) Una onda de amplitud A, frecuencia f, y longitud de onda λ, se propaga por una cuerda. Describa el movimiento de una partícula de la cuerda, indicando sus magnitudes características.

Cuestión 2ª a) ¿En qué consiste la refracción de ondas? Enuncie sus leyes. b) ¿Qué características de la onda varían al pasar de un medio a otro?

Cuestión 3ª a) ¿En qué consiste el fenómeno de polarización de las ondas? b) ¿Se puede polarizar el sonido? Razone la respuesta.

Cuestión 4ª a) Haga un análisis cualitativo de las ondas estacionarias indicando cómo se producen, qué las caracteriza y qué las diferencia de las ondas viajeras. b) En una cuerda se forma una onda estacionaria. Explique por qué no se transmite energía a lo largo de la cuerda.

Cuestión 5ª Considere la ecuación: $y(x,t) = A \cos (b x) \text{ sen } (c t)$

c) ¿Qué representan los coeficientes A, b, c?, ¿cuáles son sus unidades?, ¿cuál es el significado del factor $A \cos (b x)$.
b) ¿qué son los vientres y nodos?, ¿qué diferencia hay entre vientres y nodos consecutivos?

Cuestión 6ª Considere la siguiente ecuación de onda: $y(x,t) = A \text{ sen } (bt – cx)$

a) ¿Qué representan los coeficientes A, b, c? ¿Cuáles son sus unidades?
d) ¿Qué interpretación tendría que la función fuera "coseno" en lugar de "seno"? ¿Y que el signo dentro del paréntesis fuera + en lugar de –?

Cuestión 7ª La ecuación de una onda armónica en una cuerda tensa es: $y(x,t) = A \text{ sen } (\omega t - kx)$

a) Indique el significado de las magnitudes que aparecen en dicha expresión.
b) Escriba la ecuación de otra onda que se propague en la misma cuerda, en sentido opuesto, de amplitud mitad y frecuencia doble que la anterior.

Cuestión 8ª a) Explique las diferencias entre ondas longitudinales y ondas transversales. Citar un ejemplo de cada una de ellas. b) Describa cualitativamente el fenómeno de la polarización. ¿Qué tipo de ondas, de las mencionadas anteriormente, pueden polarizarse?

Cuestión 9ª Indique si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando las respuestas: a) La velocidad de propagación de una onda armónica es proporcional a su longitud de onda. b) Cuando una onda incide en la superficie de separación de dos medios, las ondas reflejada y refractada tienen igual frecuencia e igual longitud de onda que la onda incidente.

Cuestión 10ª a) Defina: onda, velocidad de propagación, longitud de onda, frecuencia, amplitud, elongación y fase. b) Dos ondas viajeras se propagan por un mismo medio y la frecuencia de una es doble que la de la otra. Explique la relación entre las diferentes magnitudes de ambas ondas.

Cuestión 11ª a) Explique los fenómenos de reflexión y refracción de una onda. b) ¿Tienen igual frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación la onda incidente, la reflejada y la refractada?

Cuestión 12ª Dos fenómenos físicos vienen descritos por las expresiones siguientes:

$$y = A \text{ sen } b t \qquad\qquad y = A \text{ sen } (b t – c x)$$

en las que "x" e "y" son coordenadas espaciales y "t" el tiempo. a) Explique de qué tipo de fenómeno físico se trata en cada caso e identifique los parámetros que aparecen en dichas expresiones, indicando sus respectivas unidades. b) ¿Qué diferencia señalaría respecto de la periodicidad de ambos fenómenos?

Cuestión 13ª Al arrojar una piedra a un estanque con agua y al pulsar la cuerda de una guitarra se producen fenómenos ondulatorios. Razone qué tipo de onda se ha producido en cada caso y comente las diferencias entre ambas.

Cuestión 14ª a) Razone qué características deben tener dos ondas que se propagan por una cuerda tensa con sus dos extremos fijos, para que su superposición origine una onda estacionaria. b) Explique qué valores de la longitud de onda pueden darse si la longitud de la cuerda es L.

Cuestión 15ª a) Escriba la ecuación de una onda armónica que se propaga a lo largo del eje X e indique el significado de las magnitudes que aparecen en ella. b) Escriba la ecuación de otra onda que se propague en sentido opuesto y que tenga doble amplitud y frecuencia mitad que la anterior. Razone si las velocidades de propagación de ambas ondas es la misma.

Cuestión 16ª Razone si tres haces de luz visible de colores azul, amarillo y rojo, respectivamente: i) tienen la misma frecuencia; ii) tienen la misma longitud de onda; iii) se propagan en el vacío con la misma velocidad. ¿Cambiaría alguna de estas magnitudes al propagarse en el agua?

Cuestión 17ª a) ¿Qué se entiende por interferencia de la luz? b) ¿Por qué no observamos la interferencia de la luz producida por los dos faros de un automóvil?

Cuestión 18ª a) ¿Qué es una onda electromagnética? B) ¿Cambian las magnitudes características de una onda electromagnética que se propaga en el aire al penetrar en un bloque de vidrio? Si cambia alguna, ¿aumenta o disminuye? ¿por qué?

Cuestión 19ª a) Enuncie las leyes de la reflexión y de la refracción de la luz. Explique la diferencia entre ambos fenómenos. b) Compare lo que ocurre cuando un haz de luz incide sobre un espejo y sobre un vidrio de ventana.

Cuestión 20ª a) Las ondas electromagnéticas se propagan en el vacío con velocidad c. ¿Cambia su velocidad de propagación en un medio material? Definir el índice de refracción de un medio. b) Sitúe, en orden creciente de frecuencias, las siguientes regiones del espectro electromagnético: infrarrojo, rayos X, ultravioleta y luz visible. Dos colores del espectro visible: rojo y verde, por ejemplo, ¿pueden tener la misma intensidad? ¿y la misma frecuencia?

Cuestión 21ª a) Los rayos X, la luz visible y los rayos infrarrojos son radiaciones electromagnéticas. Ordénelas en orden creciente de sus frecuencias e indique algunas diferencias entre ellas. b) ¿Qué es una onda electromagnética? Explique sus características.

Cuestión 22ª Dos rayos de luz inciden sobre un punto. ¿Pueden producir oscuridad? Explique razonadamente este hecho.

Cuestión 23ª a) El índice de refracción del agua respecto del aire es $n>1$. Razone cuáles de las siguientes magnitudes cambian, y cómo, al pasar un haz de luz del aire al agua: frecuencia. Longitud de onda, y velocidad de propagación. b) ¿Cómo caracterizarías mejor una onda electromagnética, por su frecuencia o por su longitud de onda?

Cuestión 24ª a) ¿En qué consiste la dispersión de la luz? ¿Depende dicho fenómeno del índice de refracción del medio y/o de la longitud de onda de la luz? b) Explique la dispersión de la luz por un prisma, ayudándote de un esquema.

Cuestión 25ª a) ¿Qué se entiende por refracción de la luz? Explique que es el ángulo límite y, utilizando un diagrama de rayos, indique cómo se determina. b) Una fibra óptica es un hilo transparente a lo largo del cual puede propagarse la luz, sin salir al exterior. Explique por qué la luz "no se escapa" a través de las paredes de la fibra.

Cuestión 26ª Un rayo láser pasa de un medio a otro, de menor índice de refracción. Explique si el ángulo de refracción es mayor o menor que el de incidencia ¿Podría existir reflexión total?

Cuestión 27ª a) Explique en qué consiste la reflexión total. ¿En qué condiciones se produce? b) ¿Por qué la profundidad real de una piscina llena de agua es mayor que la profundidad aparente?

Cuestión 28ª Un rayo de luz pasa de un medio a otro, e n el que se propaga a mayor velocidad.

a) Indique cómo varían la longitud de onda, la frecuencia y el ángulo que forma dicho rayo con la normal a la superficie de separación, al pasar del primero al segundo medio.
b) Razone si el rayo de luz pasará al segundo medio, independientemente de cuál sea el valor del ángulo de incidencia.

Cuestión 29ª Una superficie plana separa dos medios de índices de refracción n_1 y n_2 y un rayo de luz incide desde el medio de índice n1. Razone si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas: a) si $n_1 > n_2$, el ángulo de refracción es menor que el ángulo de incidencia; b) si $n_1 < n_2$, a partir de un cierto ángulo de incidencia se produce el fenómeno de reflexión total.

PROBLEMAS

Problema 1º La ecuación de una onda que se propaga en una cuerda es:

$$y\,(x,t) = 0{,}5 \text{ sen } \pi\,(8t - 4x) \quad \text{(en unidades SI)}$$

a) Determine la velocidad de propagación de la onda y la velocidad de un punto de la cuerda y explicar el significadas de cada una de ellas.
b) Represente gráficamente la posición de los puntos de la cuerda en el instante t = 0, y la elongación en x = 0 en función del tiempo.

SOLUC: a) v = 2 m/s   v(x,t) = 4π cos π(8t – 4x) (UI)

Problema 2º La ecuación de una onda que se propaga por una cuerda tensa es:

$$y\,(x,t) = 4 \text{ sen } \pi(50t - 4x) \quad \text{(en unidades SI)}$$

a) Calcule la amplitud, la longitud de onda y el periodo de dicha onda. ¿Qué significado físico tiene el signo menos que aparece dentro del paréntesis?
b) Determine la velocidad de propagación de la onda. ¿Se mueven los puntos del medio con esa velocidad?

SOLUC: a) A = 4 m   λ = 0,5 m   T = 0,04 s   b) v = 12,5 m/s

Problema 3º Una onda armónica que se propaga por una cuerda en el sentido negativo del eje X tiene una longitud de onda de 25 cm. El foco emisor vibra con una frecuencia de 50 Hz y una amplitud de 5 cm.

a) Escriba la ecuación de la onda explicando el razonamiento seguido para ello.
b) Determine la velocidad y la aceleración máximas de un punto de la cuerda.

SOLUC: a) y(x,t) = 0,05 sen (100πt + 8πx) (UI)   b) $v_{vib.\ máx.} = 5\pi$ m/s $v_{vib.\ máx.} = 500\pi^2$ m/s^2

Problema 4º Un altavoz produce una onda sonora de 10^{-3} m de amplitud y una frecuencia de 200 Hz, que se propaga con una velocidad de 340 m s^{-1}.

a) Escriba la ecuación de la onda, suponiendo que ésta se propaga en una sola dirección.
b) Represente la variación espacial de la onda, en los instantes t = 0 y t = T / 4.

SOLUC: a) y(x,t) = 0,001 sen (400πt – 20/17 πx) (UI)   b) Hay que hacer dos representaciones gráficas: y(x,t =0 s) e y(x,t =0,00125 s)

Problema 5º Una onda armónica de amplitud 0,3 m se propaga por una cuerda con una velocidad de 2 m s^{-1} y longitud de onda de 0,25 m.

a) Escriba la ecuación de la onda en función de x y t.
b) Determine la velocidad de un punto de la cuerda situado en x = 13/16 m, en el instante t = 0,5 s.

SOLUC: a) y(x,t) = 0,3 sen (16πt – 8πx) (UI)   b) v(x = 13/16 m, t = 0,5 s) = 0 m/s

Problema 6º La ecuación de una onda transversal que se propaga por una cuerda es:

$$y\,(x,t) = 0{,}06 \cos 2\pi(4t - 2x) \quad \text{(S.I.)}$$

a) Calcule la diferencia de fase entre los estados de vibración de una partícula de la cuerda en los instantes t = 0 y t = 0,5 s.
b) Haga una representación gráfica aproximada de la forma que adopta la cuerda en los instantes anteriores.

SOLUC: a) 4π rad   b) Hay que hacer dos representaciones gráficas: y(x,t =0 s) e y(x,t =0,5 s)

Problema 7º El periodo de un onda que se propaga a lo largo del eje **x** es de $3 \cdot 10^{-3}$ s, y la distancia entre los dos puntos más próximos cuya diferencia de fase es $\pi/2$ radianes es de 20 cm.

a) Calcule la longitud de onda y la velocidad de propagación.
b) Si el periodo se duplicase, ¿qué le ocurriría a las magnitudes del apartado anterior?

SOLUC: a) $\lambda = 80$ cm $v = 266{,}7$ m/s b) ¿?

Problema 8º Una onda plana viene dada por la ecuación:

$$y\,(x,t) = 2 \cos (100\pi t - 5\pi x) \quad \text{(en unidades SI)}$$

donde **x** e **y** son coordenadas cartesianas.

a) Haga un análisis razonado del movimiento ondulatorio representado por la ecuación anterior y explique si es longitudinal o transversal y cuál es su sentido de propagación.
b) Calcule la frecuencia, el periodo, la longitud de onda y el número de onda, así como el módulo, dirección y sentido de la velocidad de propagación de la onda.

SOLUC: a) ¿? b) $f = 50$ Hz $T = 0{,}02$ s $\lambda = 0{,}4$ m $K = 5\pi$ rad/m $v = 20$ m/s hacia la derecha

Problema 9º La ecuación de una onda es:

$$y\,(x,t) = 4 \,\text{sen}\, (6t - 2x + \pi/6) \qquad \text{(S.I.)}$$

a) Explique las características de la onda y determinar la elongación y la velocidad, en el instante inicial, en el origen de coordenadas.
b) Calcule la frecuencia y la velocidad de propagación de la onda, así como la diferencia de fase entre dos puntos separados 5 m, en un mismo instante.

SOLUC: a) ¿? $y(x = 0, t = 0) = 2$ m $v(x = 0, t = 0) = 20{,}78$ m/s b) $f = 3/\pi$ Hz $v = 3$ m/s d.d. fase = 10 rad

Problema 10º La ecuación de una onda que se propaga en una cuerda es:

$$y(x,t) = 0{,}04 \,\text{sen}\, (6t - 2x + \pi/6) \text{ S.I}$$

a) Explique las características de la onda y determine su amplitud, longitud de onda, período y frecuencia.
b) Calcule la velocidad de propagación de la onda y la velocidad de un punto de la cuerda situado en x = 3 m en el instante t = 1 s.

SOLUC: a) ¿? $A = 0{,}04$ m $\lambda = \pi$ m $T = \pi/3$ s $f = 3/\pi$ Hz b) $v(x = 3 \text{ m}, t = 1 \text{ s}) = 0{,}21$ m/s

Problema 11º La ecuación de una onda en una cuerda es:

$$y\,(x,t) = 10 \cos (\pi/3)x \,\text{sen}\, 2\pi t \quad \text{(en unidades SI)}$$

a) Explique las características de la onda y calcular su periodo y su longitud de onda. ¿Cuál es la velocidad de propagación?
b) Determine la velocidad de una partícula situada en el punto x = 1,5 m, en el instante t = 0,25 s. Explique el resultado.

SOLUC: a) ¿? $T = 1$ s $\lambda = 6$ m $v = 6$ m/s b) $v(x = 1{,}5 \text{ m}, t = 0{,}25 \text{ s}) = 0$ m/s

Problema 12º En una cuerda tensa se tiene una onda de ecuación:

$$y\,(x,t) = 5 \cdot 10^{-2} \cos (10\pi x) \,\text{sen}\, (40\pi t) \quad \text{(en unidades SI)}$$

a) Razone las características de las ondas cuya superposición da lugar a la onda dada y escriba sus ecuaciones.
b) Calcule la distancia entre nodos y la velocidad de un punto de la cuerda situado en la posición $x = 1,\ 5 \cdot 10^{-2}$ m, en el instante t = 9/8 s.

SOLUC: a) ¿? b) 10 cm $v(x = 1{,}5.10^{-2} \text{ m}, t = 9/8 \text{ s}) = -1{,}78\pi$ m/s

Problema 13º La cuerda de una guitarra vibra de acuerdo con la ecuación:

$y(x,t) = 0{,}01 \text{ sen } (10\pi x) \cos (200\pi t)$ (en unidades SI)

a) Indique de qué tipo de onda se trata y calcular la amplitud y la velocidad de propagación de las ondas cuya superposición puede dar lugar a dicha onda.
b) ¿Cuál es la energía de una partícula de la cuerda situada en el punto x = 10 cm? Razone la respuesta.

SOLUC: a) ¿? b) 0 J porque……….

Problema 14º Por una cuerda tensa (a lo largo del eje x) se propaga una onda armónica transversal de amplitud A = 5 cm y de frecuencia f = 2 Hz con una velocidad de propagación $v = 1{,}2 \text{ m s}^{-1}$.

a) Escriba la ecuación de la onda.
b) Explique qué tipo de movimiento realiza el punto de la cuerda situado en x = 1 m y calcule su velocidad máxima.

SOLUC: a) $y(x,t) = 0{,}05 \text{ sen } (4\pi t - 4\pi/1{,}2\ x)$ (UI) b) $v_{vib.\ máx.} = 0{,}2\pi$ m/s

Problema 15º Una antena emite una onda electromagnética de frecuencia 50 Hz.

a) Calcule su longitud de onda.
b) Determine la frecuencia de una onda sonora de la misma longitud de onda.
$c = 3\cdot10^8 \text{ m s}^{-1}$; $v_s = 340 \text{ m s}^{-1}$

SOLUC: a) $\lambda = 6.10^6$ m b) $f = 5{,}6.10^{-5}$ Hz

Problema 16º El espectro visible en el aire está comprendido entre las longitudes de onda 380 nm (violeta) y 780 nm (rojo).

a) Calcule las frecuencias de estas radiaciones extremas. ¿Cuál de ellas se propaga a mayor velocidad?
b) Determine entre qué longitudes de onda está comprendido el espectro visible del agua, cuyo índice de refracción es 4/3.
$c = 3\cdot10^8 \text{ m s}^{-1}$

SOLUC: a) $3{,}8.10^{14}$ Hz (rojo) - $7{,}9.10^{14}$ Hz (violeta) b) $2{,}85.10^{-7}$ m (violeta) – $5{,}84.10^{-7}$ m (rojo)

Problema 17º Una onda electromagnética tienen, en el vacío, una longitud de onda de $5\cdot10^{-7}$ m.

a) Determine la frecuencia y el número de onda.
b) Si dicha onda entra en un determinado medio, su velocidad se reduce a 3c/4. Determine el índice de refracción del medio y la frecuencia y la longitud de onda en el medio.
$c = 3\cdot10^8 \text{ m s}^{-1}$

SOLUC: a) $f = 6.10^{14}$ Hz $K = 1{,}26.10^7$ rad/m b) n = 1,33 $f = 6.10^{14}$ Hz $\lambda = 375$ nm

Problema 18º Un rayo de luz amarilla, emitida por una lámpara de sodio, tiene una longitud de onda en el vacío de $580\cdot10^{-9}$ m.

a) Determine la velocidad de propagación y la longitud de onda de dicha luz en el interior de una fibra de cuarzo, cuyo índice de refracción es n = 1,5.
b) ¿Pueden existir valores del ángulo de incidencia para los que un haz de luz, que se propague por el interior de una fibra de cuarzo, no salga al exterior? Explique el fenómeno y, en su caso, calcule los valores del ángulo de incidencia para los cuales tiene lugar.
$c = 3\cdot10^8 \text{ m s}^{-1}$

SOLUC: a) $v = 2.10^8$ m/s $\lambda = 387$ nm b) $i > i_L = 41{,}81º$

Problema 19º Un rayo de luz pasa del agua al aire con un ángulo de incidencia de 30º respecto a la normal.

a) Dibuje en un esquema los rayos incidente y refractado y calcule el ángulo de refracción.
b) ¿Cuál debería ser el ángulo de incidencia para que el rayo refractado fuera paralelo a la superficie de separación agua-aire?
(Índice de refracción del agua respecto al aire: n = 1,3)

SOLUC: a) t = 40,54º b) $i = i_L$ = 50,28º

Problema 20º El espectro visible tiene frecuencias comprendidas entre $4 \cdot 10^{14}$ Hz y $7 \cdot 10^{14}$ Hz.

a) Determine las longitudes de onda correspondientes a dichas frecuencias en el vacío.
b) ¿Se modifican estos valores de las frecuencias y de las longitudes de onda cuando la luz se propaga por el agua? En caso afirmativo, calcule los valores correspondientes.
(Índice de refracción del agua respecto al aire: n = 1,3) ; $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}

SOLUC: a) 430 – 750 nm b) La frecuencia no; la longitud de onda sí: 330 – 575 nm

Problema 21º Cuando un rayo de luz se propaga a través del agua (n = 1,33) emerge hacia el aire para ciertos valores del ángulo de incidencia y para otros no.

a) Explique este fenómeno e indique para qué valores del ángulo de incidencia emerge el rayo.
b) ¿Cabría esperar un hecho similar si la luz pasa del aire al agua?

SOLUC: a) $i < i_L$ = 48,75º b) ¿?

Problema 22º Un diamante está sumergido en agua y un rayo de luz incide a 30º sobre una de sus caras.

a) Haga un esquema del camino que sigue el rayo luminoso y determine el ángulo con que se refracta dentro del diamante.
b) ¿Cuál es el ángulo límite para la luz que pasa del diamante al agua? ¿Y si pasa del agua la diamante?
n (diamante) = 2,41 ; n (agua) = 1,33

SOLUC: a) t = 16,02º b) i_L = 33,5º; Del agua al diamante no se daría el fenómeno de la reflexión total

Problema 23º Una lámina de caras paralelas, de vidrio de índice de refracción 1,54 y de espesor 10 cm, está colocada en el aire. Sobre una de sus caras incide un rayo de luz con un ángulo de incidencia de 30º.

a) Haga un esquema de la marcha del rayo y determine el tiempo que este tarda en atravesar la lámina.
b) ¿Con qué ángulo se refracta el rayo en la segunda cara? Compare este resultado con el ángulo de incidencia.
$c = 3 \times 10^8$ m s^{-1}

SOLUC: a) $5,42.10^{-10}$ s b) t = 30º

Problema 24º Un rayo de luz amarilla, emitido por una lámpara de vapor de sodio, posee una longitud de onda en el vacío de $5,9 \times 10^{-9}$ m.

a) Determine la frecuencia, velocidad de propagación y longitud de onda de la luz en el interior de una fibra óptica de índice de refracción 1,5.
b) ¿Cuál es el ángulo de incidencia mínimo para que un rayo que incide en la pared interna de la fibra no salga al exterior? ¿Cómo se denomina este ángulo?
$c = 3 \times 10^8$ m s^{-1}

SOLUC: a) $f = 5,1.10^6$ Hz $v = 2.10^8$ m/s λ = 392 nm b) $i = i_L$ = 41,8º

Problema 25º Una onda electromagnética armónica de 20 MHz se propaga en el vacío, en el sentido positivo del eje OX. El campo eléctrico de dicha onda tiene la dirección del eje OZ y su amplitud es de $3 \cdot 10^{-3}$ N/C

a) Escriba la expresión del campo eléctrico **E**(x, t), sabiendo que en x = 0 su módulo es máximo cuando t = 0.
b) Represente en una gráfica los campos **E**(t) y **B**(t) y la dirección de propagación de la onda.
$c = 3 \cdot 10^{8}$ m s^{-1}

SOLUC: a) $E(x,t) = 3.10^{-3}$ sen ($40.10^{6}\, \pi\, t - 2\pi/15\, x + \pi/2$) E en N/C; t en s; x en m

Problema 26º Un haz de luz monocromática de frecuencia $5 \cdot 10^{14}$ Hz se propaga por el aire.

a) Explique qué características de la luz cambian al penetrar en una lámina de vidrio y calcule la longitud de onda.
b) ¿Cuál debe ser el ángulo de incidencia en la lámina para que los rayos reflejado y refractado sean perpendiculares entre sí?
$c = 3 \cdot 10^{8}$ m s^{-1} ; $n_{vidrio} = 1{,}2$

SOLUC: a) $\lambda = 5.10^{-7}$ m = 500 nm = 500 A b) i = 50,19º

Problema 27º Un rayo de luz monocromática emerge desde el interior de un bloque de vidrio hacia el aire. Si el ángulo de incidencia es de 19,5º y el de refracción de 30º.

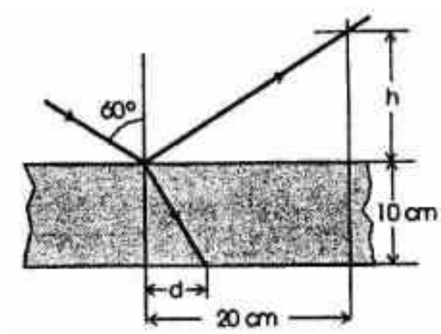
a) Determine el índice de refracción y la velocidad de propagación de la luz en el vidrio.
b) Como sabe, pueden existir ángulos de incidencia para los que no hay rayo refractado; es decir, no sale luz del vidrio. Explique este fenómeno y calcule los ángulos para los que tiene lugar.
$c = 3\ 10^{8}$ m s^{-1}; $n_{aire} = 1$

SOLUC: a) n = 1,5 v = 2.10^{8} m/s b) $i > i_L = 41{,}8º$

Problema 28º Una lámina de vidrio, de índice de refracción 1,5, de caras paralelas y espesor 10 cm, está colocada en el aire. Sobre una de sus caras incide un rayo de luz, como se muestra en la figura. Calcule:

a) La altura **h** y la distancia **d** marcadas en la figura.
b) El tiempo que tarda la luz en atravesar la lámina.
$c = 3 \cdot 10^{8}$ m s^{-1}

SOLUC: a) h = 11,5 cm d = 7,1 cm b) t = $6{,}12.10^{-10}$ s



Problema 29º Un rayo de luz que se propaga por un medio a una velocidad de 165 km s^{-1} penetra en otro medio en el que la velocidad de propagación es 230 km s^{-1}.

a) Dibuje la trayectoria que sigue el rayo en el segundo medio y calcule el ángulo que forma con la normal si el ángulo de incidencia es de 30º.
b) ¿En qué medio es mayor el índice de refracción? Justifique la respuesta.

SOLUC: a) t = 44,18º b) ¿?

Problema 30º a) ¿Cuál es la longitud de onda de una estación de radio que emite con una frecuencia de 100 MHz?
b) Si las ondas emitidas se propagaran por el agua, razone si tendrían la misma frecuencia y la misma longitud de onda. En el caso de que varíe alguna de estas magnitudes, determine su valor.
$c = 3 \cdot 10^{8}$ m s^{-1}; nagua = 1,3

SOLUC: a) $\lambda = 3$ m b) $\lambda = 2{,}3$ m

Problema 31º Un haz de luz que viaja por el aire incide sobre un bloque de vidrio. Los haces reflejado y refractado forman ángulos de 30º y 20º, respectivamente, con la normal a la superficie del bloque.

a) Calcule la velocidad de la luz en el vidrio y el índice de refracción de dicho material.

b) Explique qué es el ángulo límite y determine su valor para al caso descrito.

$c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}

SOLUC: a) $v = 2{,}05.10^8$ m/s n = 1,46 b) No hay reflexión total

Problema 32º Un rayo luminoso que se propaga en el aire incide sobre el agua de un estanque formando un ángulo de 20º con la normal.

a) ¿Qué ángulo formarán entre sí los rayos reflejado y refractado?
b) Variando el ángulo de incidencia, ¿podría producirse el fenómeno de reflexión total? Razone la respuesta.

$n_{aire} = 1$; $n_{agua} = 1{,}33$

SOLUC: a) 145,1º b) ¿?

TEMA 8. ÓPTICA GEOMÉTRICA

1. **Introducción y conceptos básicos.**
2. **Formación de imágenes en espejos planos.**
3. **Formación de imágenes en espejos esféricos cóncavos.**
4. **Formación de imágenes en espejos esféricos convexos.**
5. **Lentes convergentes y divergentes.**
6. **Formación de imágenes en lentes convergentes.**
7. **Formación de imágenes en lentes divergentes.**
8. **Ecuaciones de las lentes delgadas.**

1. INTRODUCCIÓN Y CONCEPTOS BÁSICOS

Los fenómenos ópticos de la reflexión y la refracción pueden ser interpretados si consideramos únicamente que la luz está constituida por rayos rectilíneos que proceden de un foco emisor. Mediante la aproximación de rayos, estos fenómenos, tratados geométricamente de una forma simplificada que facilita su interpretación, son objeto de estudio de la **óptica geométrica**.

La **óptica geométrica** es la parte de la óptica que estudia la trayectoria de los rayos luminosos a través de espejos y lentes, y la formación de imágenes en estos sistemas ópticos.

Entre los conceptos básicos de la óptica geométrica destacamos:

- **Sistema óptico:** Es un conjunto de superficies que separan medios transparentes, homogéneos e isótropos de diferente índice de refracción.
- **Imagen real de un punto objeto:** Es la imagen formada por un sistema óptico mediante intersección en un punto de los rayos convergentes procedentes del objeto puntual después de atravesar el sistema óptico.
- **Imagen virtual de un punto objeto:** Es la imagen formada mediante intersección en un punto de las prolongaciones de los rayos divergentes formadas después de atravesar el sistema óptico.
- **Imagen de un objeto extenso:** La imagen de un objeto extenso está formada por las imágenes puntuales de cada uno de los puntos del objeto. Puede ser **real** (para verla debe ser registrada en una pantalla) o **virtual** (puede verse directamente y no se puede registrar en una pantalla).
- **Dioptrio:** Es una superficie que separa dos medios transparentes con distinto índice de refracción.

Junto a los conceptos anteriores, debemos tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- Los rayos luminosos son reversibles, es decir, el camino recorrido por un rayo para ir de un punto A_1 a otro A_2 tras atravesar un sistema óptico es el mismo que recorrería para ir de A_2 al A_1 tras atravesar el mismo sistema.
- Los rayos se dibujan partiendo del punto objeto como si éste fuese el foco luminoso.

2. FORMACIÓN DE IMÁGENES EN ESPEJOS PLANOS

Los **espejos** son superficies lisas y pulidas capaces de reflejar los rayos luminosos. Pueden ser **planos** o **esféricos** según como sea la superficie.

Para construir la imagen de un objeto extenso formada por un espejo plano, elegimos los puntos extremos de éste y desde ellos hacemos partir dos rayos:

- Un rayo perpendicular a la superficie del espejo que se reflejará sin cambiar de dirección.
- Un rayo que forme determinado ángulo con la normal al espejo que se reflejará con el mismo ángulo.

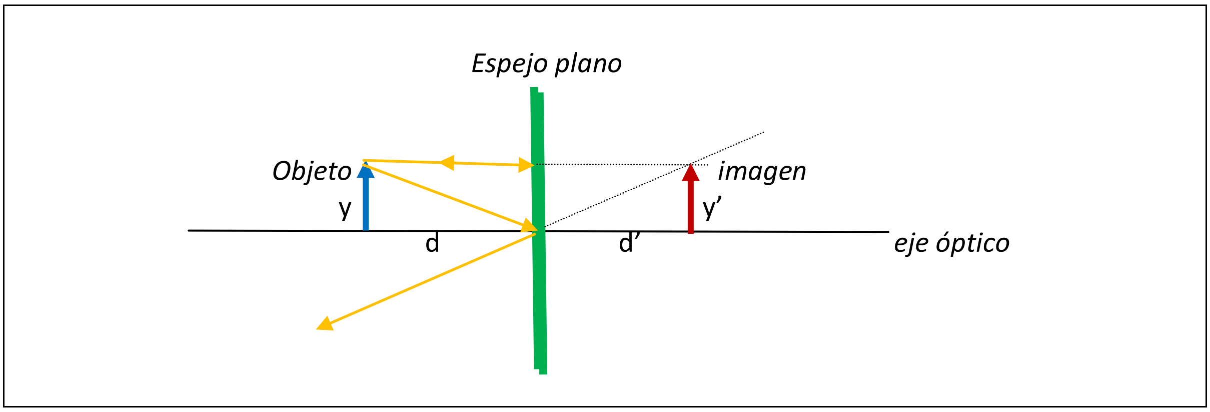


Figura 8.1
Formación de imágenes en un espejo plano

La imagen que da un espejo plano de un objeto tiene las siguientes características:

- Es una imagen virtual porque se forma mediante la intersección de las prolongaciones de los rayos reflejados.
- Es una imagen derecha porque está orientada de la misma dirección y sentido que el objeto.
- La imagen tiene el mismo tamaño que el objeto, es decir, y = y'.
- La imagen y el objeto están a la misma distancia del espejo, es decir, d = d'.

3. FORMACIÓN DE IMÁGENES EN ESPEJOS ESFÉRICOS CÓNCAVOS

Un espejo esférico es **cóncavo**, si la superficie reflectante es la cara interna del espejo.
En los espejos esféricos hemos de tener en cuenta los siguientes elementos:

- **Centro de curvatura, C:** centro de la superficie esférica. Este punto tiene la particularidad de que cualquier rayo que incida sobre el espejo pasando por él, lo hace con un ángulo de incidencia de 0º y por tanto se reflejará en el espejo en la misma dirección pero en sentido contrario.
- **Vértice, O:** vértice de la superficie esférica.
- **Eje óptico:** recta que pasa por el centro de curvatura y por el vértice.
- **Foco, F:** se encuentra en el punto medio entre el centro de curvatura, C, y el vértice, O, es decir, a r/2 del vértice del espejo. La distancia entre O y F se llama **distancia focal f** y su valor es la mitad del radio de curvatura r del espejo.

La importancia del foco es doble porque:

1º. Cualquier rayo que incida sobre el espejo paralelamente al eje óptico, se reflejará pasando por el foco.
2º. Cualquier rayo que incida sobre el espejo pasando por el foco, se reflejará paralelamente al eje óptico.

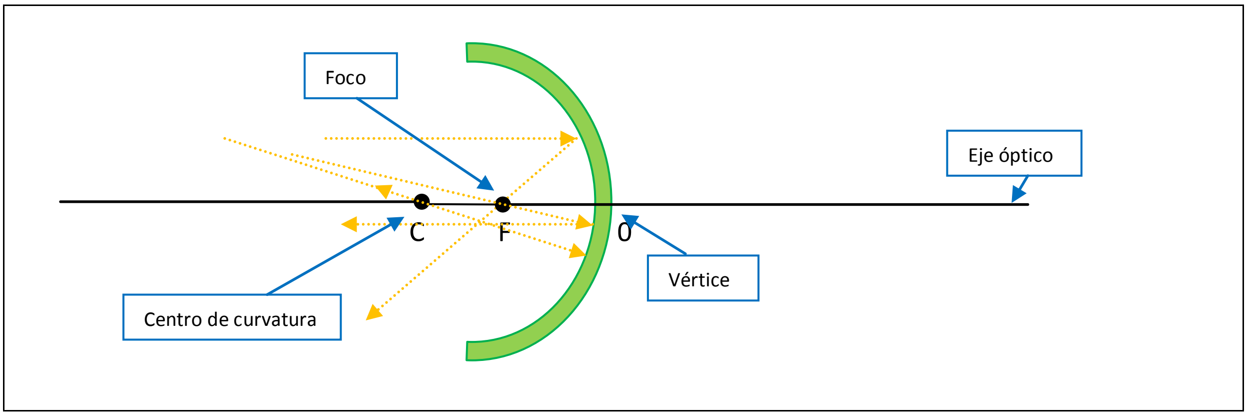


Figura 8.2
Elementos de un espejo esférico cóncavo

Para construir gráficamente la imagen obtenida en un espejo esférico cóncavo, trazaremos dos de los tres rayos siguientes que parten del extremo superior del objeto:

- Un rayo que pasa por el centro de curvatura C y que se refleja volviendo por su trayectoria, sin desviarse.
- Un rayo paralelo al eje y que, por lo tanto, se refleja en la dirección que pasa por el foco F.
- Un rayo cuya dirección pasa por el foco F y que, por lo tanto, se refleja paralelamente al eje.

Según la posición del objeto con respecto al espejo, se pueden dar cinco casos:

1º. Imagen de un objeto situado a una distancia mayor que el radio de curvatura (d > r).

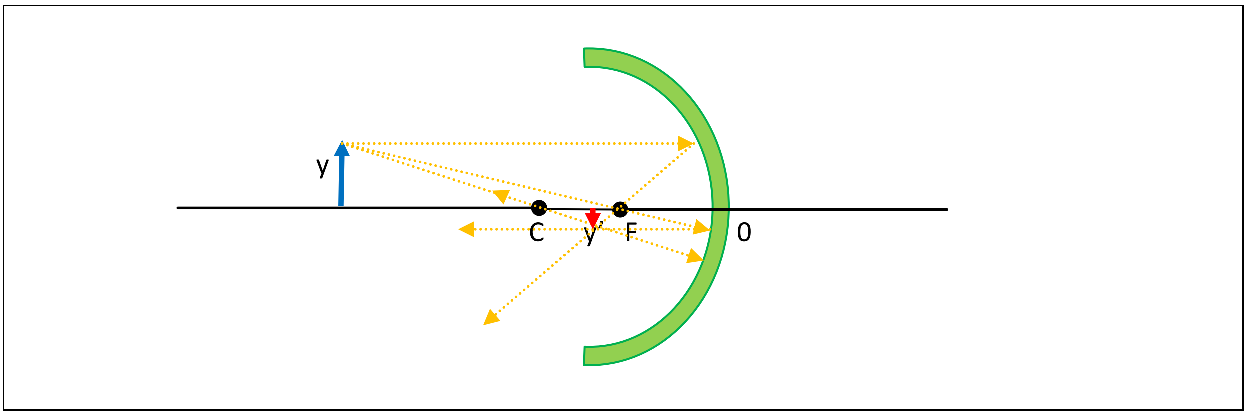


Figura 8.3
Imagen de un objeto situado a una distancia mayor que el radio de curvatura del espejo (d > r)

La imagen que da un espejo esférico cóncavo de un objeto que está a una distancia mayor que el radio del espejo tiene las siguientes características:

- Es una imagen real porque se forma mediante la intersección de los rayos reflejados y no de sus prolongaciones.
- Es una imagen invertida porque tiene la misma dirección que el objeto pero en sentido contrario.
- La imagen tiene menor tamaño que el objeto, es decir, y' < y.
- La imagen se forma a menor distancia del espejo de la que está el objeto. es decir, d' < d.

2º. Imagen de un objeto situado en el centro de curvatura (d = r).

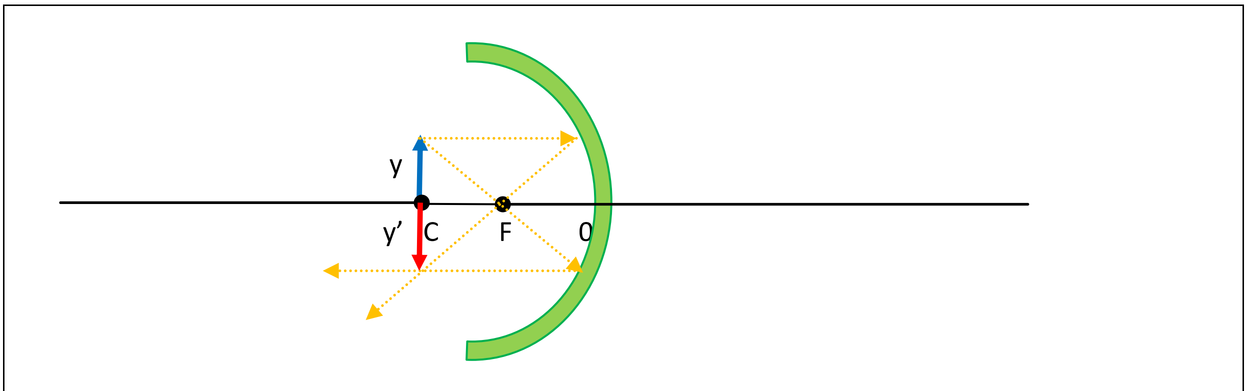


Figura 8.4
Imagen de un objeto situado en el centro de curvatura del espejo (d = r)

La imagen que da un espejo esférico cóncavo de un objeto que está a una distancia mayor que el radio del espejo tiene las siguientes características:

- Es una imagen real porque se forma mediante la intersección de los rayos reflejados y no de sus prolongaciones.
- Es una imagen invertida porque tiene la misma dirección que el objeto pero en sentido contrario.
- La imagen tiene el mismo tamaño que el objeto, es decir, y' = y.
- La imagen se forma en el mismo que está el objeto. es decir, d' = d.

3º. Imagen de un objeto situado entre el centro de curvatura y el foco (f < d < r).

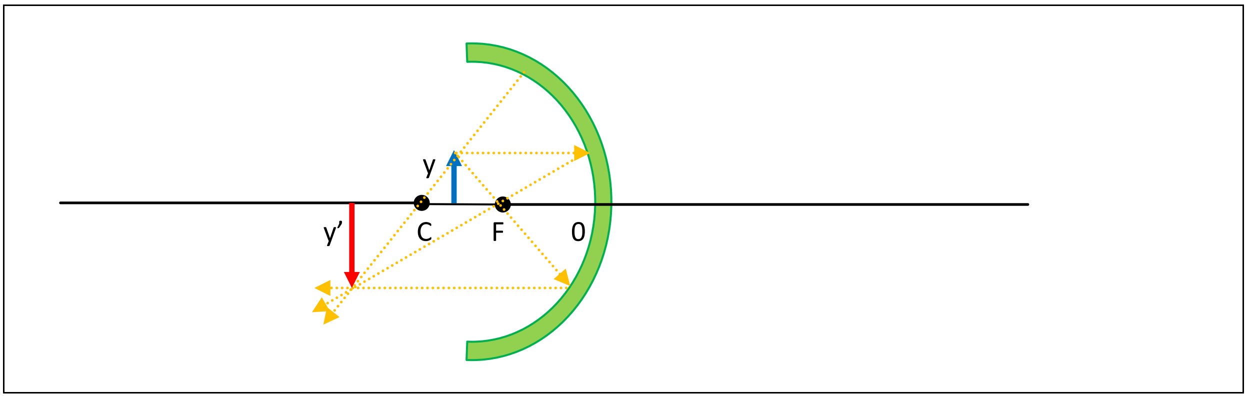


Figura 8.5
Imagen de un objeto situado entre el centro de curvatura y el foco del espejo (f < d < r)

La imagen que da un espejo esférico cóncavo de un objeto que está entre el centro de curvatura y el foco tiene las siguientes características:

- Es una imagen real porque se forma mediante la intersección de los rayos reflejados y no de sus prolongaciones.
- Es una imagen invertida porque tiene la misma dirección que el objeto pero en sentido contrario.
- La imagen mayor tamaño que el objeto, es decir, y' > y.
- La imagen se forma a mayor distancia del espejo de la que está el objeto. es decir, d' > d.

4º. Imagen de un objeto situado en el foco (d = f). N**o se forma imagen** o bien se forma a distancia infinita, ya que los rayos reflejados son paralelos y no se cortan.

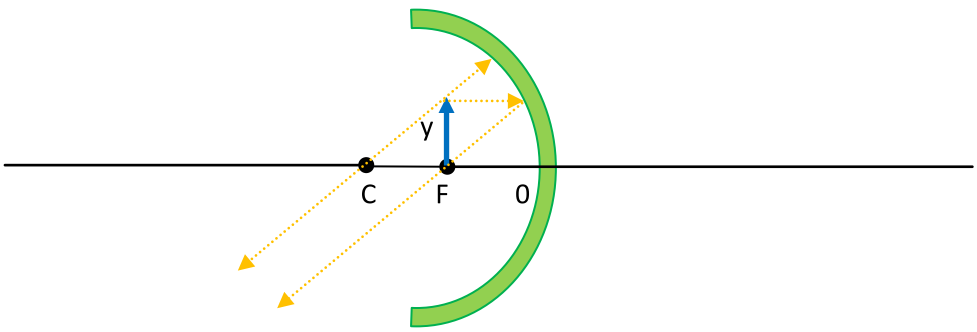


Figura 8.6
Imagen de un objeto situado en el foco del espejo (d = f)

Si el objeto está en el foco, los rayos reflejados salen paralelos entre sí y no se cortan. No se forma imagen o se dice que la imagen se forma en el infinito.

5º. Imagen de un objeto situado entre el foco y el vértice del espejo (d < f).

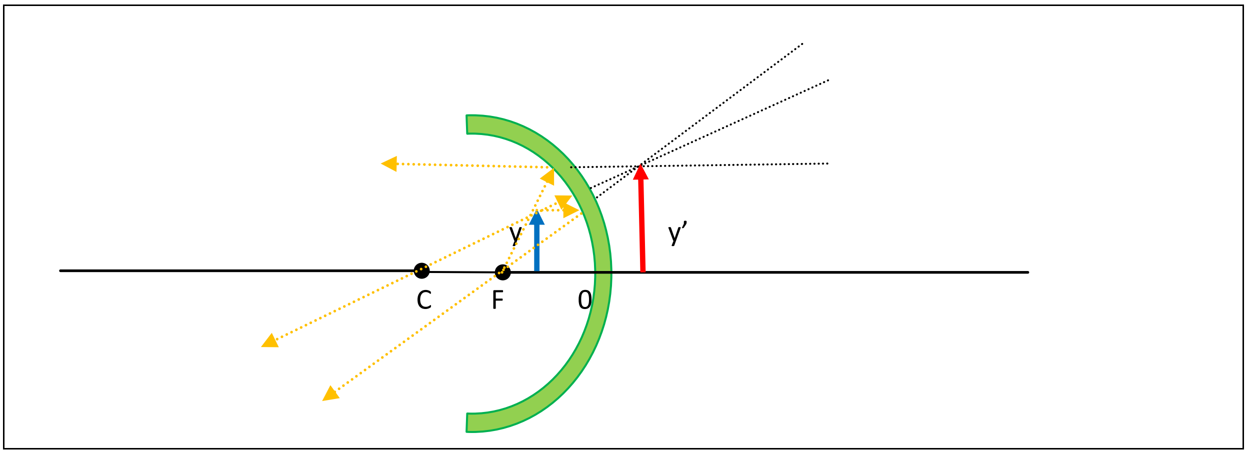


Figura 8.7
Imagen de un objeto situado entre el foco y el vértice del espejo (d < f)

La imagen que da un espejo esférico cóncavo de un objeto que está situado entre el foco y el vértice del espejo (d < f) tiene las siguientes características:

- Es una imagen virtual porque se forma mediante la intersección de las prolongaciones de los rayos reflejados.
- Es una imagen derecha porque está orientada en la misma dirección y sentido que el objeto.
- La imagen tiene mayor tamaño que el objeto, es decir, y’ > y.
- La imagen se forma a menor distancia del espejo de la que está el objeto. es decir, d’ < d.

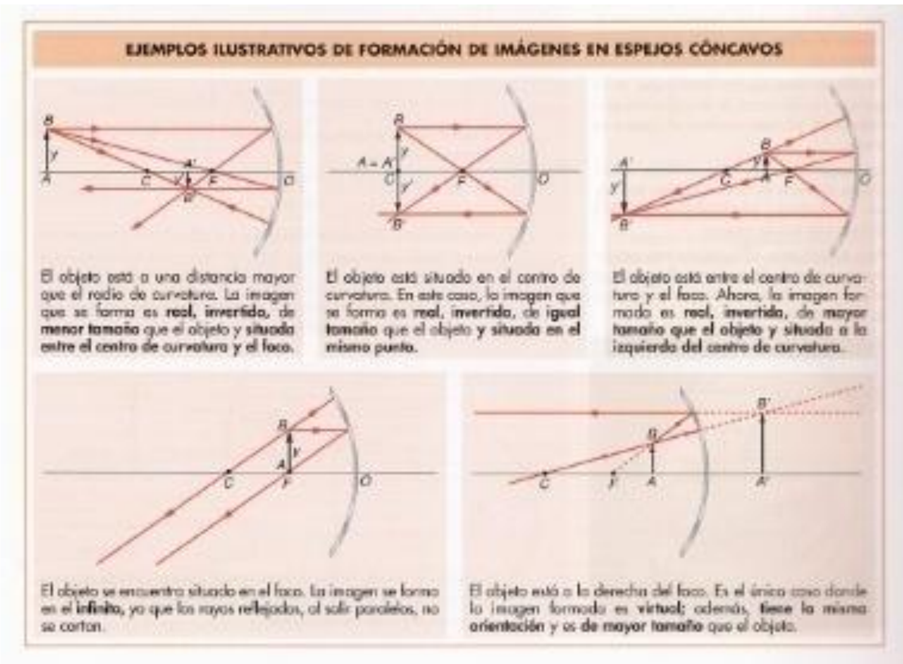


Figura 8.8
Imagen de un objeto situado a diferentes distancias del vértice de un espejo cóncavo

4. FORMACIÓN DE IMÁGENES EN ESPEJOS ESFÉRICOS CONVEXOS

En un espejo convexo el centro de curvatura. C, y el foco, F, están al otro lado de la superficie espejada.

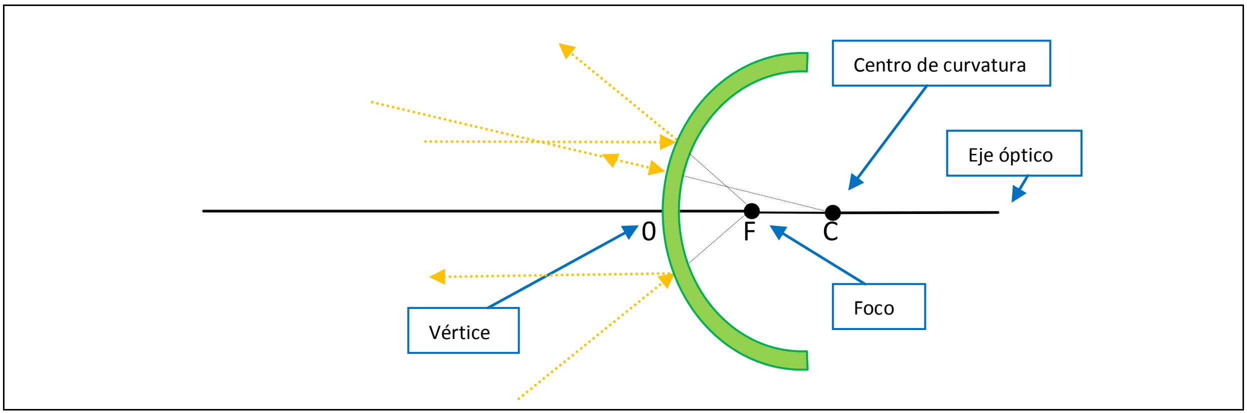


Figura 8.9
Elementos de un espejo esférico convexo

Para construir gráficamente la imagen obtenida en un espejo esférico convexo de un objeto se sigue el mismo procedimiento que para los espejos cóncavos, es decir, trazaremos dos de los tres rayos siguientes que parten del extremo superior del objeto:

- Un rayo que pasa por el centro de curvatura C y que se refleja volviendo por su trayectoria, sin desviarse.
- Un rayo paralelo al eje y que, por lo tanto, se refleja en la dirección que pasa por el foco F.
- Un rayo cuya dirección pasa por el foco F y que, por lo tanto, se refleja paralelamente al eje.

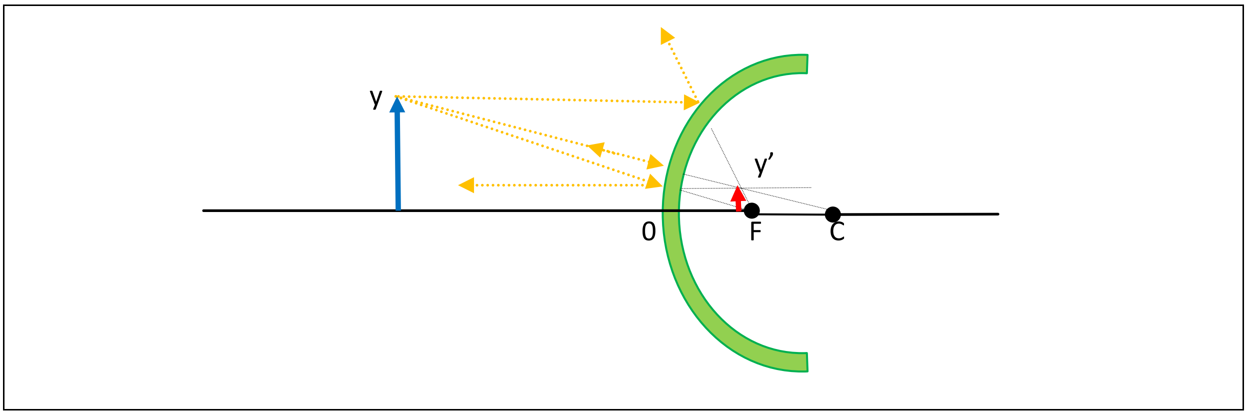


Figura 8.10
Imagen de un objeto en un espejo esférico convexo

La imagen que da un espejo esférico convexo de un objeto tiene siempre las mismas características, sea cual sea la distancia a la que esté el objeto del espejo, y son las siguientes:

- Es una imagen virtual porque se forma mediante la intersección de las prolongaciones de los rayos reflejados.
- Es una imagen derecha porque está orientada de la misma dirección y sentido que el objeto.
- La imagen es de menor tamaño que el objeto, es decir, $y' < y$.

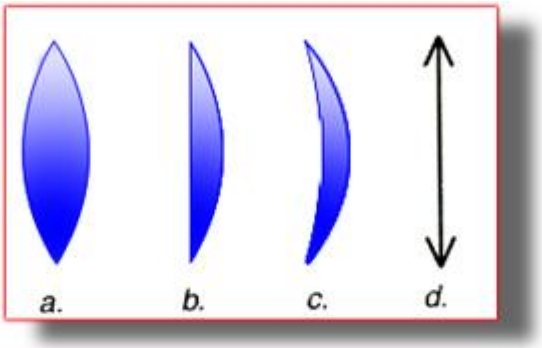
Los espejos convexos suelen utilizarse en los retrovisores de los coches y en cruces o curvas con poca visibilidad debido a su amplio campo visual y al hecho de que siempre ofrecen imágenes virtuales.

5. LENTES

Son sistemas ópticos formados por un medio transparente de índice de refracción diferente al del medio exterior y que limita mediante dos superficies o dioptrios, uno de los cuales, al menos, debe ser esférico.

Según la forma de las superficies limitantes, las lentes pueden ser convergentes o divergentes.

- **Lentes convergentes:** son más gruesas en la parte central que en los extremos. Esquemáticamente se representan con una línea acabada en puntas de flecha.



a. Biconvexa
b. Planoconvexa
c. Meniscoconvergente
d. Representación

Figura 8.11
Lentes convergentes

- **Lentes divergentes:** son más gruesas en los extremos que en la parte central. Esquemáticamente se representan con una línea recta acabada en puntas de flecha invertidas.

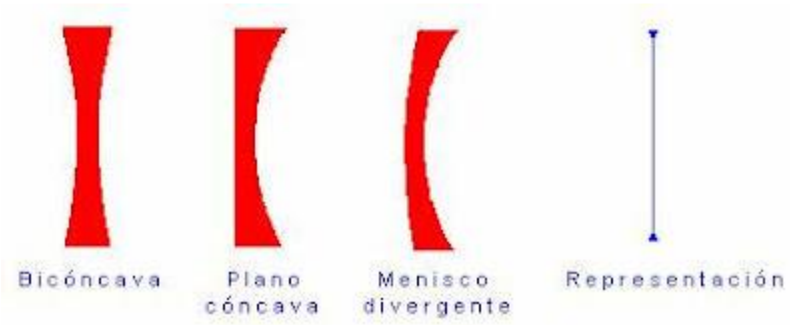


Figura 8.12
Lentes divergentes

6. FORMACIÓN DE IMÁGENES EN LENTES CONVERGENTES DELGADAS

Una lente delgada es aquélla en que el grosor es despreciable frente al radio de curvatura de las superficies esféricas que conforman la lente. Sus **elementos característicos** son los siguientes:

- **Centro óptico, O:** punto de la lente que tiene la propiedad de que todo rayo que pase por él atraviesa la lente sin desviarse. Coincide con el centro geométrico de la lente.
- **Eje óptico:** recta perpendicular a la lente que pasa por su centro óptico.
- **Foco objeto, F:** punto del eje óptico que cumple la propiedad de que todos los rayos cuya dirección pase por este punto emergen de la lente paralelamente al eje óptico. La distancia f desde el centro de la lente O al punto F es la **distancia focal objeto**.
- **Foco imagen, F':** punto del eje óptico en el que concurren las direcciones de todos los rayos refractados que provienen de rayos incidentes paralelos al eje óptico. La distancia f' desde el centro de la lente O al punto F' se llama **distancia focal imagen**.

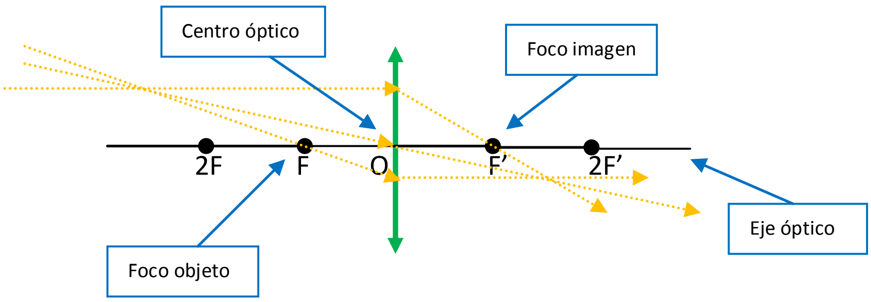


Figura 8.13
Elementos característicos de una lente convergente

En las lentes delgadas las dos distancias focales son iguales si a ambos lados de la lente está el mismo medio material; así pues, f = f' = f.

La determinación gráfica de la imagen que da una lente convergente de un objeto lineal y, situado perpendicularmente sobre el eje óptico, se efectúa trazando dos de los tres rayos luminosos siguientes que parten del extremo del objeto:

1º. Un rayo que incide sobre la lente paralelamente al eje, la atraviesa y, una vez refractado, el rayo pasa por el foco imagen F'.
2º. Un rayo incidente que pasa por el centro óptico O, la atraviesa, y se refracta sin sufrir ninguna desviación.
3º. Un rayo incidente que pasa por el foco objeto F y que emerge de la lente paralelamente al eje óptico una vez refractado.

Las características, el tamaño y la naturaleza de la imagen obtenida en una **lente convergente** dependen de la posición del objeto sobre el eje óptico, y pueden darse cinco situaciones diferentes:

a) Imagen de un objeto situado a una distancia mayor que el doble de la distancia focal (d > 2f)

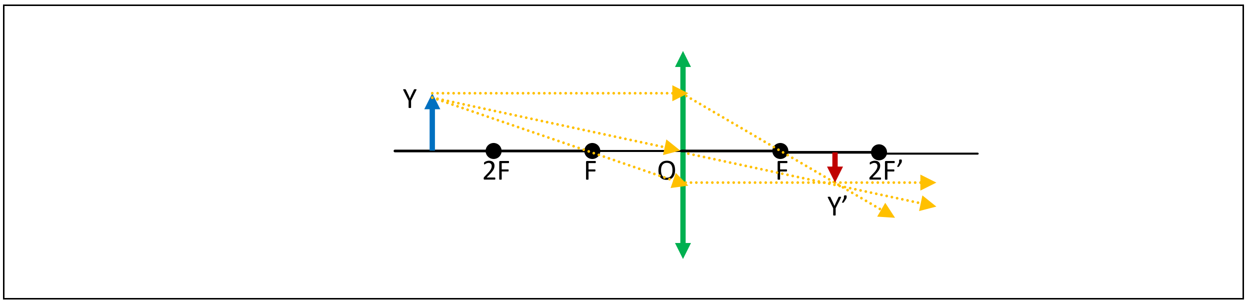


Figura 8.14
Imagen de un objeto situado a mayor distancia del doble de la distancia focal de una lente convergente

La imagen que da una lente convergente de un objeto situado a una distancia mayor al doble de la distancia focal (d > 2f), tiene las siguientes características:

- Es una imagen real porque se forma mediante la intersección de los rayos refractados.
- Es una imagen invertida porque está orientada de la misma dirección que el objeto pero en sentido contrario.
- La imagen es de menor tamaño que el objeto, es decir, y' < y.
- La imagen está de la lente a menor distancia que el objeto, es decir, d' < d.

b) Imagen de un objeto situado a una distancia igual al doble de la distancia focal (d = 2f)

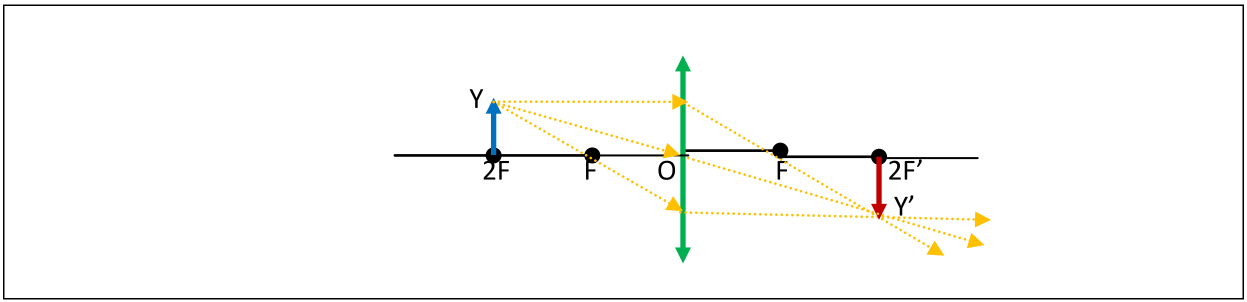


Figura 8.15
Imagen de un objeto situado a igual distancia del doble de la distancia focal de una lente convergente

La imagen que da una lente convergente de un objeto situado a una distancia igual al doble de la distancia focal (d = 2f), tiene las siguientes características:

- Es una imagen real porque se forma mediante la intersección de los rayos refractados.
- Es una imagen invertida porque está orientada de la misma dirección que el objeto pero en sentido contrario.
- La imagen es de igual tamaño que el objeto, es decir, y' = y.
- La imagen está de la lente a igual distancia que el objeto, es decir, d' = d.

c) Imagen de un objeto situado entre el doble de la distancia focal y el foco (f < d < 2f)

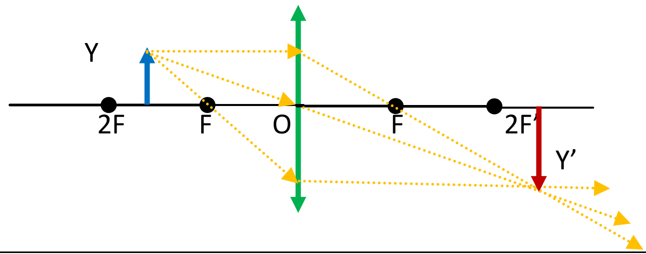


Figura 8.16
Imagen de un objeto situado entre el doble de la distancia focal y el foco de una lente convergente

La imagen que da una lente convergente de un objeto situado entre el doble de la distancia focal y el foco (f < d < 2f), tiene las siguientes características:

- Es una imagen real porque se forma mediante la intersección de los rayos refractados.
- Es una imagen invertida porque está orientada de la misma dirección que el objeto pero en sentido contrario.
- La imagen es de mayor tamaño que el objeto, es decir, y' > y.
- La imagen está de la lente a mayor distancia que el objeto, es decir, d' > d.

d) Imagen de un objeto situado en el foco (d = f)

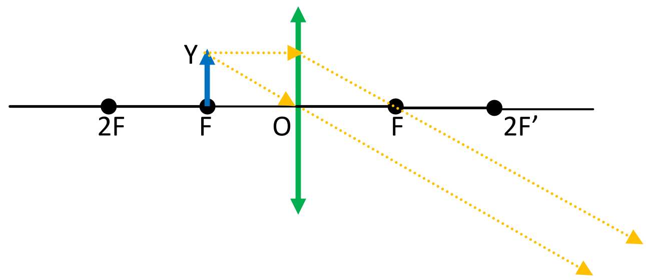


Figura 8.17
Imagen de un objeto situado en el foco de una lente convergente

Si el objeto está en el foco de la lente d = f, **no se forma imagen** o bien se forma una distancia infinita.

e) Imagen de un objeto situado entre el foco y el centro óptico de la lente (d < f)

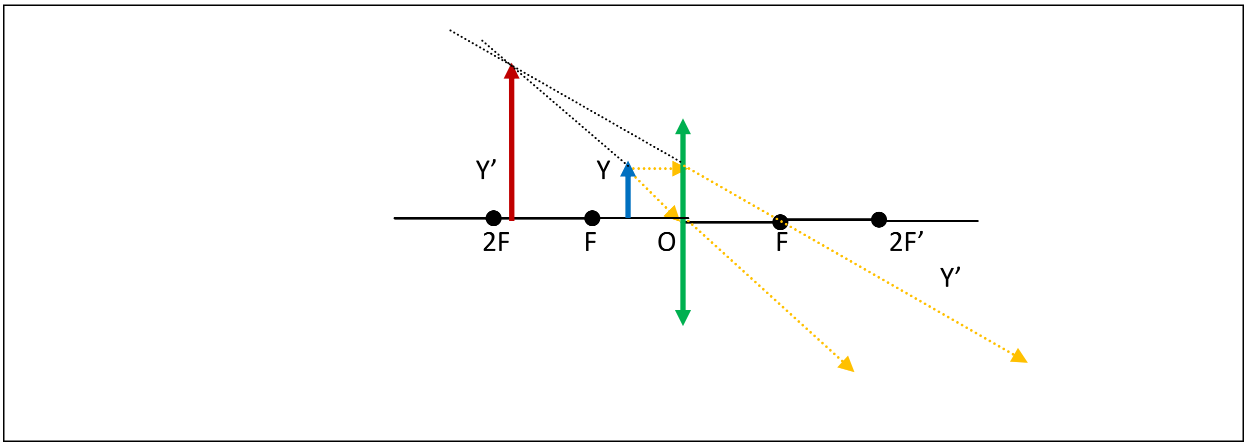


Figura 8.18
Imagen de un objeto situado entre el foco y el centro de una lente convergente

La imagen que da una lente convergente de un objeto situado entre el foco y el centro (d < f), tiene las siguientes características:

- Es una imagen virtual porque se forma mediante la intersección de la prolongación de los rayos refractados.
- Es una imagen derecha porque está orientada de la misma dirección y sentido que el objeto.
- La imagen es de mayor tamaño que el objeto, es decir, y' > y. en este caso, se da el llamado **efecto lupa.**
- La imagen está de la lente a mayor distancia que el objeto, es decir, d' > d.

7. FORMACIÓN DE IMÁGENES EN LENTES DIVERGENTES DELGADAS

Una lente divergente tiene los mismos elementos que una convergente, pero en las lentes divergentes los focos objeto e imagen están invertidos (véase figura 10.17):

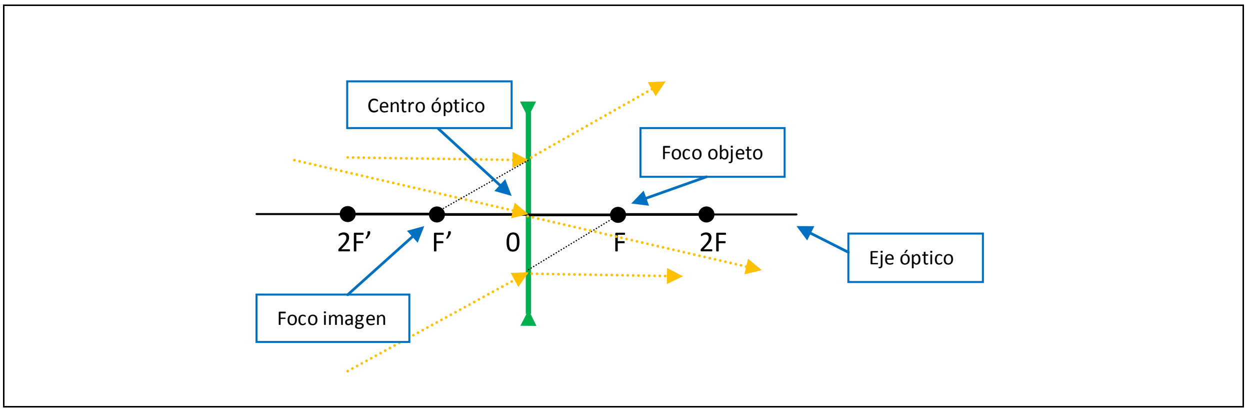


Figura 8.19
Elementos característicos de una lente divergente

La determinación gráfica de la imagen que da una lente divergente de un objeto lineal y, situado perpendicularmente sobre el eje óptico, se efectúa igual que para una lente convergente, es decir, trazando dos de los tres rayos luminosos siguientes que parten del extremo del objeto:

1º. Un rayo que incide sobre la lente paralelamente al eje, la atraviesa y, una vez refractado, el rayo pasa por el foco imagen F’ (en realidad es la prolongación del rayo refractado).
2º. Un rayo incidente que pasa por el centro óptico O, la atraviesa, y se refracta sin sufrir ninguna desviación.
3º. Un rayo incidente que pasa por el foco objeto F (en realidad dirigido hacia el foco objeto) y que emerge de la lente paralelamente al eje óptico una vez refractado.

La imagen que da una lente divergente de un objeto siempre tiene las siguientes características, sea cual sea la distancia a la que esté el objeto de la lente:

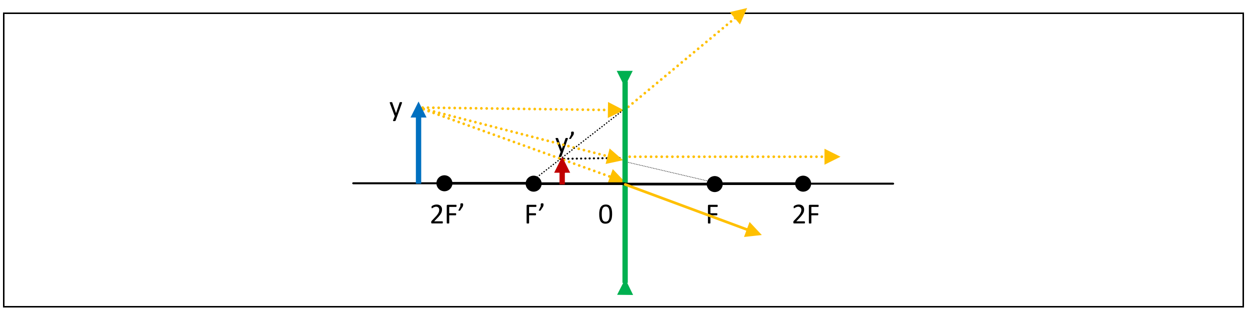


Figura 8.20
Imagen de un objeto en una lente divergente

- Es una imagen virtual porque se forma mediante la intersección de las prolongaciones de los refractados.
- Es una imagen derecha porque está orientada de la misma dirección y sentido que el objeto.
- La imagen es de menor tamaño que el objeto, es decir, y’ < y.
- La imagen está de la lente a mayor distancia que el objeto, es decir, d’ > d.

En los siguientes esquemas se muestran los distintos casos descritos anteriormente.

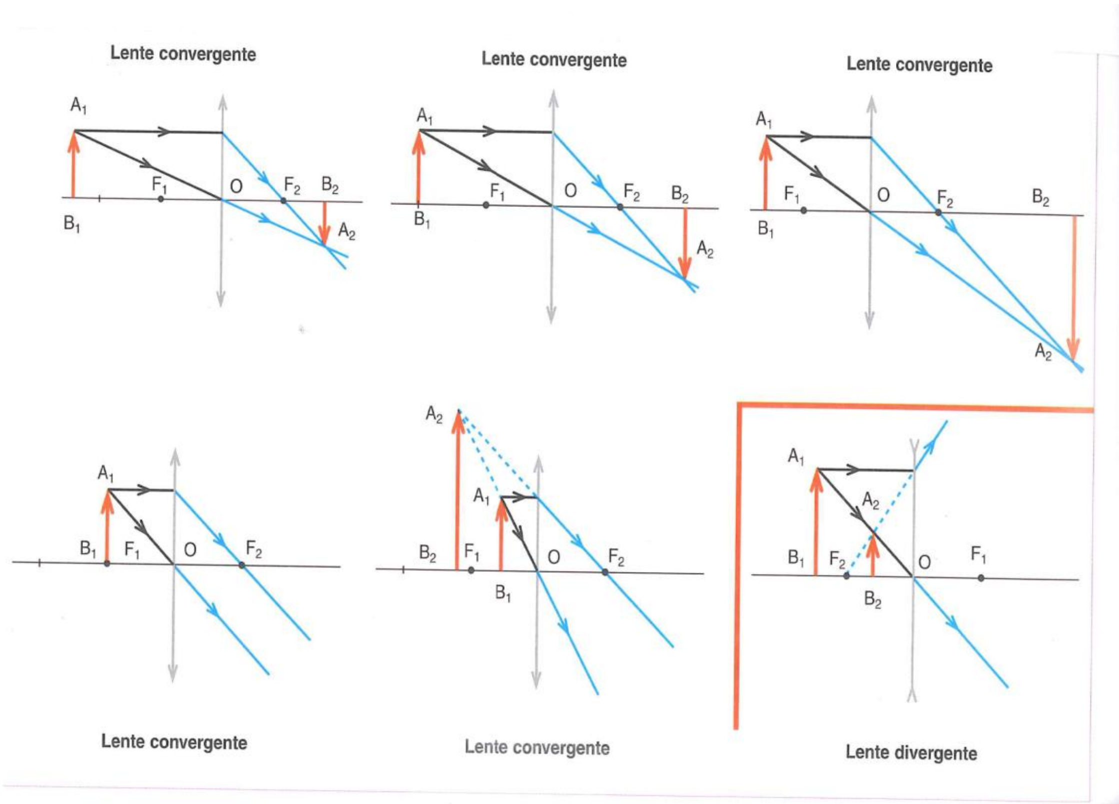


Figura 8.21
Imagen de un objeto en lentes convergentes y divergentes

8. ECUACIONES DE LAS LENTES DELGADAS

Para estudiar cuantitativamente la Óptica Geométrica hay que establecer unos criterios de signos. Para el caso que nos ocupa, el criterio es el siguiente:

1º. En el eje horizontal, eje óptico, se toma como origen de coordenadas el vértice de la lente. De este modo, las distancias son positivas si se miden hacia la derecha del vértice de la lente, y negativas en caso contrario.

2º. En el eje vertical, perpendicular al eje óptico, las distancias son positivas si están medidas hacia arriba y negativas en caso contrario.

Además, como criterio general, se establece que para representar las diferentes características del objeto y de la imagen se utiliza la misma letra, pero poniéndole el signo "prima" para el caso de la imagen.

Es muy usual utilizar **s** y **s'**, para identificar, respectivamente, las posiciones (distancias a vértice de la lente) de objeto e imagen en el eje óptico.

Se suele utilizar **y** e **y'**, para el tamaño de objeto e imagen, repectivamente.

Y, finalmente, se utiliza **f** y **f'** para representar, respectivamente, las distancias focales objeto e imagen, que en lentes delgadas tienen el mismo valor absoluto ya que los focos objeto **F** e imagen **F'** están simétricamente situados en el eje óptico respecto al vértice de la lente.

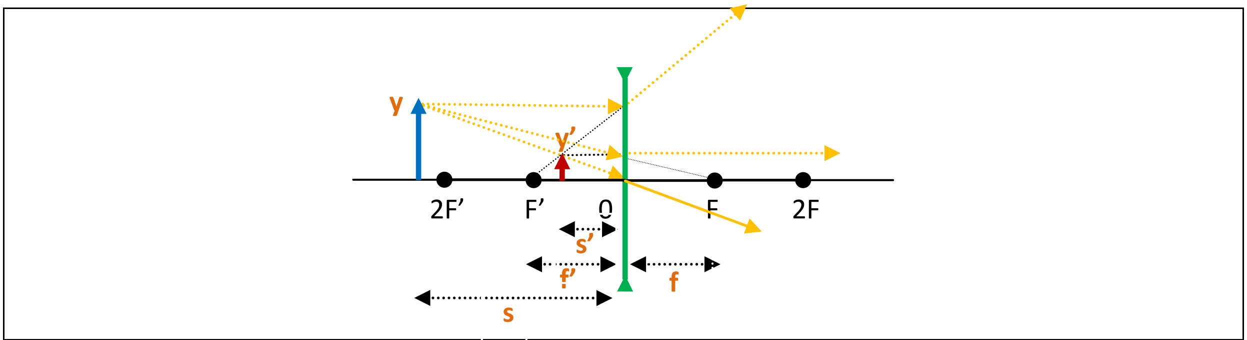


Figura 8.22
Criterio de signos en las lentes convergentes

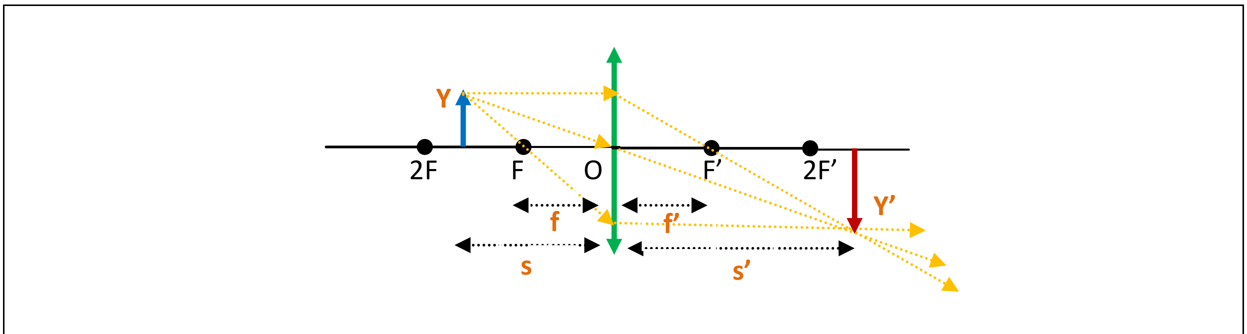


Figura 8.23
Criterio de signos en las lentes divergentes

Para caracterizar una lente, los oftalmólogos y los ópticos utilizan la **POTENCIA** en vez de utilizar la distancia focal.

La potencia de una lente es la inversa de la distancia focal imagen, siempre que esta última esté expresada en metros.

$$\boxed{P = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f}}$$

Su unidad es el m^{-1} y recibe el nombre de **dioptría**. Una lente convergente cuya distancia focal imagen es de 40 cm tiene una potencia de + 2,5 dioptrías. Si la lente fuese divergente, su potencia sería de – 2,5 dioptrías, ya que su distancia focal imagen sería de – 40 cm.

Para las lentes delgadas existen dos ecuaciones: una nos relaciona las posiciones de objeto e imagen (llamada ecuación de Gauss), y la otra nos relaciones los tamaños de objeto e imagen, es decir, los aumentos.

FÓRMULA DE GAUSS o **ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LAS LENTES DELGADAS**.

La ecuación de las lentes delgadas que nos relaciona las posiciones de objeto e imagen en el eje óptico es:

$$\boxed{\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f}} \quad \text{o bien} \quad \boxed{\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = P}$$

De la ecuación gaussiana de las lentes delgadas podemos despejar la inversa de la distancia de la imagen:

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{s}$$

Y esta expresión pone claramente de manifiesto que sólo en lentes convergentes se pueden conseguir imágenes reales. Para ello basta razonar con los criterios de signo.

La ecuación de las lentes delgadas que nos relaciona los tamaños de objeto e imagen es:

$$\boxed{\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}}$$

Ejemplo 1º

a) ¿podemos distinguir con facilidad una lente convergente de una lente divergente? ¿Cómo?
b) Calcula la distancia focal de una lente cuya potencia es de -2 dioptrías. ¿De qué tipo de lente se trata?

Ejemplo 2º

Un objeto de 1 cm de altura se sitúa sobre el eje óptico de una lente convergente, a 50 cm del centro óptico de ésta. Si la potencia de la lente es de 4 dioptrías:

a) Calcula la posición de la imagen y la distancia focal de la lente. Considera que la lente se sitúa en el aire.
b) Calcula el tamaño de la imagen.

Ejemplo 3º

Se sitúa un objeto a 80 cm a la izquierda de una lente divergente y la imagen se localiza a 40 cm a la izquierda de la lente.

a) Indique las características de la imagen y determine la distancia focal de la lente.
b) Si el objeto tiene un tamaño de 3 cm, calcule el tamaño de la imagen.

Ejemplo 4º

El objetivo (lente convergente) de una cámara fotográfica tiene una distancia focal de + 50 mm. Con esta cámara se realiza una fotografía a un niño que tiene 1,2 m de altura y que está de pie a 2 m de distancia. Calcula:

a) La distancia que debe haber entre la lente y la película para que se forme sobre esta una imagen nítida.
b) La altura de la imagen del niño en la película.

CUESTIONES

Cuestión 1ª ¿Puede formarse una imagen real con un espejo convexo? Razone la respuesta utilizando los esquemas que se consideren oportunos.

Cuestión 2ª a) Indique qué se entiende por foco y por distancia focal de un espejo. ¿Qué es una imagen virtual? b) Con ayuda de un diagrama de rayos, describa la imagen formada por un espejo convexo para un objeto situado entre el centro de curvatura y el foco.

Cuestión 3ª a) Si queremos ver una imagen ampliada de un objeto, ¿qué tipo de espejo tenemos que utilizar? Explique, con ayuda de un esquema, las características de la imagen formada. b) La nieve refleja casi toda la luz que incide en su superficie. ¿Por qué no nos vemos reflejados en ella?

Cuestión 4ª a) Explique qué es una imagen real y una imagen virtual y señale alguna diferencia observable entre ellas. b) ¿Puede formarse una imagen virtual con un espejo cóncavo? Razone la respuesta utilizando las construcciones gráficas que considere oportunas.

Cuestión 5ª Dibuje la marcha de los rayos e indique el tipo de imagen formada con una lente convergente si:

e) La distancia objeto, s, es igual al doble de la focal, f.
f) La distancia objeto es igual a la focal.

Cuestión 6ª Es corriente utilizar espejos convexos como retrovisores en coches y camiones o en vigilancia de almacenes, con objeto de proporcionar mayor ángulo de visión con un espejo de tamaño razonable.

a) Explique con ayuda de un esquema las características de la imagen formada en este tipo de espejos.
b) En estos espejos se suele indicar: "Atención, los objetos están más cerca de lo que parece". ¿Por qué parecen estar más alejados?

Cuestión 7ª a) Explique la formación de imágenes y sus características en una lente divergente. b) ¿Pueden formarse imágenes virtuales con lentes convergentes? Razone la respuesta.

Cuestión 8ª a) Formación de imágenes en espejos. b) Los fabricantes de espejos retrovisores para automóviles advierten que los objetos pueden estar más cerca de lo que parece en el espejo. ¿Qué tipo de espejo utilizan y por qué se produce ese efecto? Justifique la respuesta mediante un diagrama de rayos.

Cuestión 9ª a) Construya la imagen formada con una lente convergente de un objeto situado a una distancia, s, de la lente igual al doble de la distancia focal, f, y comente sus características.
b) ¿Pueden formarse imágenes virtuales con lentes convergentes? Razone la respuesta.

Cuestión 10ª a) Explique la formación de imágenes por un espejo convexo y, como ejemplo, considere un objeto situado entre el centro de curvatura y el foco. b) Explique las diferencias entre imagen virtual e imagen real. Razone si puede formarse una imagen real con un espejo convexo.

PROBLEMAS

Problema 1º Un objeto se encuentra frente a un espejo plano a una distancia de 4 m del mismo.

a) Construya gráficamente la imagen y explique sus características.
b) Repita el apartado anterior si se sustituye el espejo plano por uno cóncavo de 2 m de radio.

Problema 2º a) Un objeto se encuentra a una distancia de 0,6 m de una lente delgada convergente de 0,2 m de distancia focal.

a) Construya gráficamente la imagen que se forma y explique sus características.

Repita el apartado anterior si el objeto se coloca a 0,1 de la lente.

Problema 3º Construya la imagen de un objeto situado a una distancia entre f y 2f de una lente:

a) Convergente.
b) Divergente.

Explique en ambos casos las características de la imagen.

Problema 4º Construya gráficamente la imagen y explique sus características para:

a) Un objeto que se encuentra a 0,5 m frente a una lente delgada biconvexa de 1 m de distancia focal.
b) Un objeto situado a una distancia menor que la focal de un espejo cóncavo.

Problema 5º Construya gráficamente la imagen de:

a) Un objeto situado a 0,5 m de distancia de un espejo cóncavo de 2 m de radio.
b) Un objeto situado a la misma distancia delante de un espejo plano.

Explique en cada caso las características de la imagen y compare ambas situaciones.

TEMA 9. DUALIDAD ONDA PARTÍCULA

INTRODUCCIÓN

A finales del siglo XIX se pensaba que cualquier fenómeno físico se podía explicar con los tres pilares básicos de lo que, posteriormente, pasaría a llamarse la Física Clásica: la Mecánica Clásica, la Termodinámica y el Electromagnetismo. Sin embargo, el descubrimiento de una serie de fenómenos que no podían explicarse con las ideas de la Física Clásica, supuso el inicio de la crisis de la misma de la que se saldría gracias a la apertura de nuevos apasionantes caminos insospechados hasta entonces. La llamada Física Moderna se desplegó en tres direcciones: la teoría de la Relatividad, la Mecánica Cuántica y la Física Nuclear.

Los principales fenómenos que pusieron en tela de juicio a la Física Clásica fueron la radiación térmica, el efecto fotoeléctrico y los espectros atómicos. Estos tres fenómenos fueron claves para el desarrollo de la denominada revolución cuántica.

Por otro lado, hasta principios del siglo XX, la comunidad científica consideraba el electrón como una partícula y la radiación electromagnética como una onda. Sin embargo, la radiación electromagnética se comporta, al interaccionar con la materia, como un conjunto de corpúsculos llamados fotones. Este hecho, junto con otros resultados experimentales obtenidos alrededor de 1900, no estaba de acuerdo con lo establecido hasta entonces por la comunidad científica. Ello llevó a los físicos de la época a desarrollar una nueva teoría, la **mecánica cuántica**. En este tema describiremos dos aspectos característicos de esta teoría: la *dualidad onda-partícula* y el *principio de indeterminación*.

1. TEORÍAS SOBRE LA NATURALEZA DE LA LUZ

La determinación de la naturaleza de la luz ha originado una de las controversias más apasionantes de la historia de la Ciencia. Las diversas hipótesis, formuladas en diferentes momentos históricos para justificar los fenómenos conocidos hasta entonces, se iban desechando o modificando a medida que se alcanzaban nuevos conocimientos.

Las primeras hipótesis científicas merecedoras de atención surgieron simultáneamente durante el siglo XVII y fueron propuestas por dos grandes científicos: el inglés Isaac Newton (1642-1727) y el holandés Christian Huygens (1929-1695). Las dos hipótesis, aparentemente contradictorias entre sí, se han denominado, respectivamente, la **teoría corpuscular de Newton** y la **teoría ondulatoria de Huygens**, y han servido de base a todas las opiniones posteriores.

Teoría corpuscular de Newton

En su obra *Óptica*, publicada en 1705, Newton afirmó que la luz tiene **naturaleza corpuscular**: los focos luminosos emiten minúsculas partículas que se propagan en línea recta en todas las direcciones y, al chocar con nuestros ojos, producen la sensación luminosa.

Los corpúsculos, distintos para cada color, son capaces de atravesar los medios transparentes y son reflejados en los cuerpos opacos.

Esta hipótesis justificaba fenómenos como la propagación rectilínea de la luz y la reflexión, pero no aclaraba otros como la refracción: ¿por qué unos corpúsculos luminosos son reflejados por la superficie de un cuerpo al mismo tiempo que otros penetran en ella refractándose?

Para poder justificarlo, supuso que la luz viajaba a mayor velocidad en los líquidos y en los vidrios que en el aire, lo que posteriormente se comprobó que era falso.

Teoría ondulatoria de Huygens

Con anterioridad a Newton, Huygens, en su obra *Tratado de la luz*, publicada en 1690, propuso que la luz consiste en la propagación de una perturbación ondulatoria del medio. Huygens creía que se trataba de ondas longitudinales, similares a las ondas sonoras, que necesita para su propagación un medio especial, el *éter*, a la vez rígido y suficientemente elástico, que todo lo ocupa.

Esta hipótesis explicaba fácilmente determinados fenómenos como la reflexión, la refracción y la doble refracción, descubierta por entonces.

Pese a ello, no fue comúnmente aceptada. La mayoría de los científicos se adhirió a la teoría corpuscular de Newton, dado su prestigio. Así mismo, tampoco se terminaba de aceptar la existencia del éter y sus especiales propiedades.

Otra dificultad añadida residía en que aún no se habían observado en la luz fenómenos típicamente ondulatorios como la difracción. Hoy sabemos que la longitud de onda de la luz es tan pequeña que estos fenómenos, aunque se producen, no es fácil observarlos.

Teoría ondulatoria de Fresnel

A principios del siglo XIX diversos avances revalorizaron la hipótesis ondulatoria de la luz. Algunos de ellos fueron: las experiencias, en 1801, del médico y físico inglés T. Young (1773-1829) sobre *interferencias luminosas*; el descubrimiento, en 1808, de la *polarización* de la luz o las experiencias, en 1815, del físico francés A. J. Fresnel (1788-1827) sobre la *difracción*.

Fresnel mostró la insuficiencia de la teoría corpuscular para justificar estos descubrimientos e hizo una nueva propuesta: la luz está constituida por **ondas transversales**.

Más tarde, en 1850, el físico francés J. Foucault (1819-1868) midió la velocidad de la luz en el agua y comprobó que era menor que en el vacío, lo que invalidaba la justificación de Newton para la refracción.

La hipótesis corpuscular, después de 150 años de aceptación, fue prácticamente abandonada.

Teoría electromagnética de Maxwell

En 1864, el físico y matemático escocés J. C. Maxwell (1831-1879) estableció la **teoría electromagnética** de la luz, que acabaría convirtiéndose en la **teoría clásica** de la luz. Adelantándose a la comprobación experimental de la existencia de las ondas electromagnéticas, efectuada en 1887 por el físico alemán H. Hertz (1857-1894), propuso que la luz no es una onda mecánica que necesite de ningún medio material, incluido el éter, sino una forma de **onda electromagnética** de alta frecuencia. Por tanto, las ondas luminosas consisten en la propagación, sin necesidad de soporte material alguno, de un campo eléctrico y de un campo magnético, perpendiculares entre sí, y a la dirección de propagación.

Esta teoría tuvo aceptación general y, al parecer, podía considerarse como la teoría definitiva acerca de la naturaleza de la luz.

Naturaleza corpuscular de la luz según Einstein

Sin embargo alrededor de 1900 aparecieron tres fenómenos relacionados con la interacción de la radiación electromagnética con la materia que no pueden ser explicados mediante la teoría ondulatoria, pero sí con la teoría corpuscular. Estos tres fenómenos son: **LA RADIACIÓN DEL CUERPO NEGRO, EL EFECTO FOTOELÉCTRICO** y **EL EFECTO COMPTON**.

Naturaleza dual de la luz

Ante esta situación se propone una nueva teoría sobre la naturaleza de la luz y de la radiación electromagnética en general, que engloba a las dos anteriores. Esta nueva teoría, denominada de la dualidad onda-partícula, engloba a las dos teorías anteriores y acepta que la luz tiene una doble naturaleza: **corpuscular** y **ondulatoria**. Así, la luz manifestará su carácter de onda electromagnética en fenómenos típicamente ondulatorios (reflexión, refracción, difracción, interferencias, etc.) o su carácter corpuscular en su interacción con la materia o en ciertos fenómenos de intercambio de energía (efecto fotoeléctrico).

Sin embargo, la luz no manifiesta simultáneamente ambas características, puesto que en un fenómeno concreto se comporta como onda o bien como partícula; son, por tanto, comportamientos complementarios.

2. RADIACIÓN DEL CUERPO NEGRO: HIPÓTESIS DE PLANCK (No obligatoria)

Cuando una barra de hierro se calienta, va cambiando de color conforme aumenta su temperatura: al principio sólo emite radiación infrarroja, que no vemos; después comienza a emitir luz roja y, a temperaturas superiores, presenta color blanco, e incluso blanco azulado.

Se llama **radiación térmica** a la energía electromagnética que emite un cuerpo debido a su temperatura.

Esta radiación térmica varía tanto con la temperatura como con la composición del cuerpo. Existe, sin embargo, un conjunto de cuerpos cuya radiación térmica sólo depende de su temperatura. Se denominan **cuerpos negros** y son considerados tanto emisores como absorbentes ideales de luz. Su radiación presenta las siguientes características:

- La potencia total P emitida a la temperatura T por una superficie S cumple la **ley de Stefan-Boltzmann**:

$$P = \sigma \cdot T^4 \cdot S$$

donde $\sigma = 5{,}6703 \cdot 10^{-8}\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$ es la constante de Boltzmann.

- La longitud de onda $\lambda_{máx}$ para la que se produce mayor emisión de energía es inversamente proporcional a la temperatura T, según la **ley de desplazamiento de Wien**:

$$\lambda_{máx} \cdot T = 2{,}897755 \cdot 10^{-3}\ m \cdot K$$

Hipótesis de Planck

A principios del año 1900 dos físicos ingleses, Rayleigh y Jeans, utilizaron los principios del electromagnetismo y la termodinámica clásicos para describir la radiación del cuerpo negro. Obtuvieron una expresión matemática (ley de Rayleigh-Jeans) en la que la energía de la radiación disminuye al aumentar la longitud de onda, pero aumenta indefinidamente al disminuir ésta.

En cambio, según los resultados experimentales, la energía tiende a cero para longitudes de onda muy pequeñas, como las correspondientes al ultravioleta, que era la zona de mayor energía del espectro electromagnético conocida en ese momento. Este fracaso de la teoría clásica fue tan importante que se denominó *catástrofe ultravioleta*.

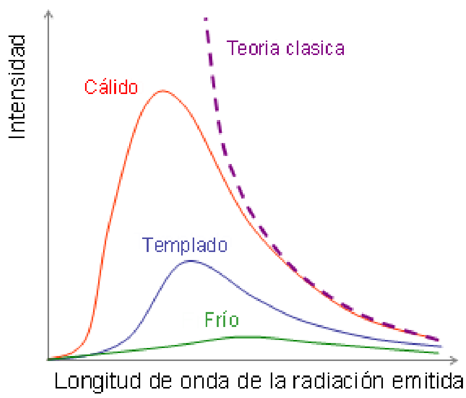


Fig. 9.1

A finales de ese mismo año, el físico alemán Max Planck (1858-1947) formuló las siguientes **hipótesis** como punto de partida para explicar la radiación del cuerpo negro:

- Los átomos que emiten la radiación se comportan como osciladores armónicos.
- Cada oscilador absorbe o emite energía de la radiación en una cantidad proporcional a su frecuencia de oscilación f:

$$E_0 = h \cdot f$$

donde $h = 6{,}625 \cdot 10^{-34}$ J·s es la constante de Planck.

Así, la energía total emitida o absorbida por cada oscilador atómico sólo puede tener un número entero n de porciones de energía E_0:

$$E = n \cdot E_0 = n \cdot h \cdot f \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

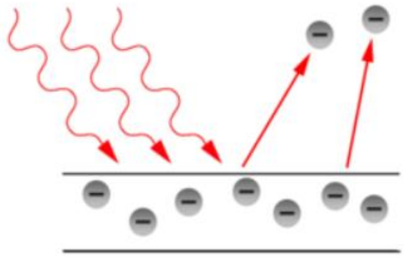
Los paquetes de energía h·f se llamaron **cuantos**, de manera que se dice que la energía de los osciladores está *cuantizada* y n es un *número cuántico*.

Al desarrollar esta hipótesis cuántica, Planck obtuvo una expresión que le permitió reproducir la distribución de energías observada experimentalmente (fig. 8.1).

3. EFECTO FOTOELÉCTRICO: TEORÍA DE EINSTEIN

3.1 Definición y resultados experimentales

Se denomina efecto fotoeléctrico a la emisión de electrones por parte de un metal cuando sobre él incide una radiación electromagnética correspondiente al espectro visible.



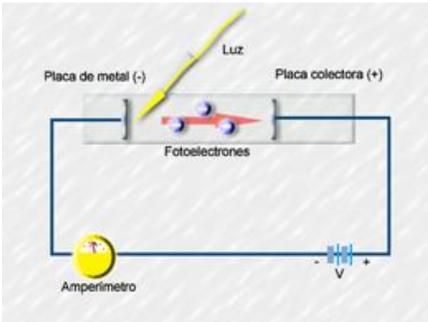


Figura 9.2

Este fenómeno fue descubierto por el físico alemán Heinrich Hertz (1857-1894). En 1887, Hertz descubrió que al someter a la acción de la luz (visible o ultravioleta) determinadas superficies metálicas, éstas desprendían electrones (llamados fotoelectrones). Este fenómeno se denomina **efecto fotoeléctrico**.

Experimentalmente se observan los siguientes resultados para el efecto fotoeléctrico:

1º. El efecto fotoeléctrico en un metal no se produce para cualquier radiación incidente.

2º. El efecto fotoeléctrico en un metal solo se produce si la radiación incidente tiene una frecuencia igual o superior a un cierto valor denominado **FRECUENCIA UMBRAL O FRECUENCIA PROPIA DEL METAL, f_0.**

3º. La frecuencia umbral es diferente para cada metal.

4º. Por debajo de la frecuencia umbral el metal no emite electrones por mucho que aumentemos la intensidad de la radiación incidente, pero, si la radiación incidente tiene una frecuencia igual o superior a la frecuencia umbral, f_0 , el número de fotoelectrones emitidos aumenta al aumentar la intensidad de la radiación incidente.

5º. Nunca se ha podido medir un tiempo de retraso entre la iluminación del metal y la emisión de fotoelectrones.

3.2 Fracaso de la teoría ondulatoria

La teoría ondulatoria de la luz no puede explicar este fenómeno por tres razones fundamentales:

1ª. Para el modelo ondulatorio no debería existir la frecuencia umbral, es decir, cualquier frecuencia debería de servir para arrancar electrones a un metal, para ello bastaría con aumentar la intensidad de la radiación incidente suficientemente.

2ª. Si la frecuencia f de la luz incidente es mayor que la frecuencia umbral f_0, el número de electrones emitidos es proporcional a la intensidad de la radiación incidente. Sin embargo, su energía cinética máxima es independiente de la intensidad de la luz, lo cual no tiene explicación en la teoría clásica.

3ª. Según la teoría clásica, si la intensidad de la luz es muy débil, debe existir un tiempo de retraso entre el instante en que la luz incide sobre la superficie metálica y la emisión de fotoelectrones.

3.3 Teoría cuántica de Einstein

En 1905, el físico alemán Albert Einstein (1879-1955) dio una explicación satisfactoria al efecto fotoeléctrico utilizando el modelo corpuscular de la luz, basado en los cuantos de Planck.

Así, para explicar el efecto fotoeléctrico, Einstein propuso que:

1º. La luz está formada por unas partículas denominadas **fotones.**

2º. La cantidad de energía de cada fotón solo depende de la frecuencia f de la radiación electromagnética a la que pertenece mediante la expresión:

$$\boxed{E = h \cdot f} \quad [9.1]$$

Siendo h la denominada **CONSTANTE DE PLANCK** que vale $6{,}63.10^{-34}$ J.s
(Como vemos Einstein considera a la luz formada por cuantos o paquetes de energía)

3º. Cuando la radiación incide sobre un determinado metal, la energía de cada fotón $E = h \cdot f$ es absorbida completamente por un electrón del metal.

De esta manera, la teoría cuántica de Einstein da respuesta a los aspectos del efecto fotoeléctrico que no tiene explicación bajo el punto de vista ondulatorio:

1ª. Cuando un fotón es absorbido por un electrón del metal, el primero transmite toda su energía h.f al segundo y, si esta energía es igual o superior a la energía de ionización del metal (también llamada trabajo de extracción o función trabajo), el electrón podrá abandonar el metal, pero si la energía del fotón incidente es menor el electrón no podrás abandonar el metal y no se producirá el efecto fotoeléctrico.

2ª. La frecuencia umbral f_0, es la frecuencia de aquella radiación cuyos fotones tienen una energía $E = h.f_0$, igual a la energía de ionización del metal o trabajo de extracción $W_{ext.}$, es decir, es la frecuencia mínima con la que hay que irradiar al metal para que se emitan fotoelectrones.

$$\boxed{h \cdot f_0 = W_{ext.}} \quad [9.2]$$

3ª. Si la radiación incidente tiene una frecuencia f inferior a la umbral f_0, $f < f_0$, la energía de los fotones de dicha radiación es inferior al trabajo de extracción del metal, $h.f < W_{ext} = hf_0$, y por tanto, los fotones no pueden comunicar suficiente energía a los electrones del metal para que lo abandonen, ni siquiera aunque aumente la intensidad de la radiación incidente. Si aumenta la intensidad de la radiación incidente, lo que aumenta es el número de fotones incidentes, pero no su energía, y por eso no se produce el efecto fotoeléctrico.

4ª. Si se ilumina al metal con una radiación de frecuencia superior a la umbral, $f > f_0$, los fotones de dicha radiación si producirán el efecto fotoeléctrico ya que sus fotones tienen una energía superior al trabajo de extracción del metal, $h.f > W_{ext} = hf_0$, Al aumentar la intensidad de la luz incidente, no aumenta la energía de sus fotones, $E = h.f$, sino que aumenta proporcionalmente el número de fotones incidentes y, por tanto, el número de fotoelectrones emitidos por el metal pero no la energía cinética de ellos.

5ª. Debido a que la energía necesaria para extraer un electrón se suministra en paquetes concentrados (fotones), no tiene sentido la existencia de un tiempo de retraso.

6ª. Cuando un fotón de la radiación incidente es absorbido íntegramente por un electrón del metal, el balance de energía es el siguiente:

Energía del fotón incidente = Trabajo de extracción + Energía cinética del e⁻

$$\boxed{h.f = h.f_0 + \frac{1}{2} m_e . v_e^2} \quad [9.3]$$

La ecuación anterior se denomina **ECUACIÓN DE EINSTEIN DEL EFECTO FOTOELÉCTRICO**

Cuando Einstein publicó su teoría en 1905, no existían datos experimentales para confirmarla. Hubo que esperar a los trabajos del físico norteamericano Robert Millikan (1868-1953), efectuados entre 1914 y 1916, para disponer de datos suficientes. En este momento quedó demostrada la ecuación fotoeléctrica de Einstein [9.3]

Ejemplo 1º

La frecuencia umbral para el Na es $4,39.10^{14}$ Hz.

a) ¿Qué significa este valor?
b) Calcula la longitud de onda umbral del Na e interpreta el resultado.
c) Calcula el trabajo de extracción del sodio.
d) Se ilumina el sodio con una radiación de $5,5.10^{14}$ Hz, ¿se producirá efecto fotoeléctrico? ¿por qué?
e) Si la respuesta del apartado anterior ha sido afirmativa, calcula la energía cinética y la velocidad de los fotoelectrones emitidos.
f) Sabiendo que se llama **potencial de frenado** a la diferencia de potencial eléctrico que hay que aplicar para frenar y detener a los fotoelectrones que son arrancados del metal, calcula el potencial de frenado del Na.

Ejemplo 2º

La frecuencia umbral para un determinado metal se encuentra dentro del espectro del verde. Explica razonadamente si:

a) ¿Se producirá el efecto fotoeléctrico en el metal si lo iluminamos con luz azul?
b) ¿Y si lo iluminamos con luz amarilla?

4. ESPECTROS ATÓMICOS: POSTULADOS DE BOHR (No obligatorio)

A finales del siglo XIX se disponía de muchos datos sobre la luz emitida por los átomos de un gas excitados por una descarga eléctrica. El análisis espectroscópico de esta radiación mostraba el aspecto de un conjunto discreto de líneas de diferentes longitudes de onda (figura 8.4). El conjunto discreto de frecuencias de radiación electromagnética que emiten los átomos de un gas se llama **espectro de emisión** y es característico de cada elemento.

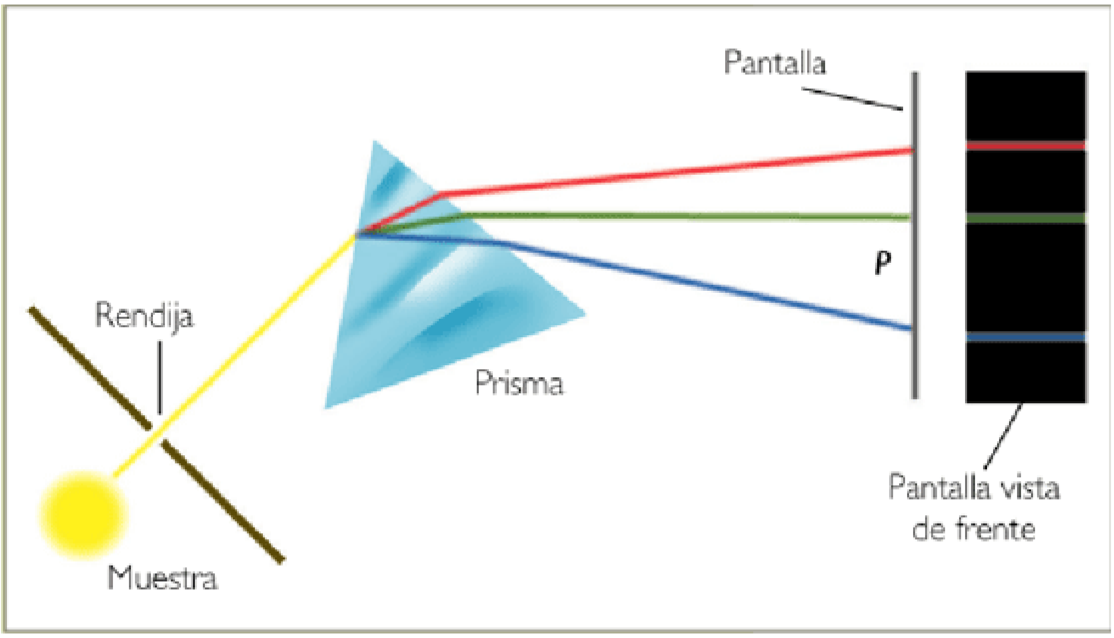


Figura 9.3

Del mismo modo, los átomos absorben algunas frecuencias específicas al ser iluminados con radiación electromagnética. En este caso, se obtiene un espectro continuo en el que aparecen rayas oscuras en las mismas posiciones en que aparecen las rayas del espectro de emisión; se obtiene de esta forma el correspondiente **espectro de absorción**.

Modelo atómico de Bohr

Una de las aplicaciones más destacables de la cuantización de la energía fue llevada a cabo por el físico danés Niels Bohr (1885-1962). Estudió detenidamente el espectro atómico del hidrógeno, comprobando que no podía interpretarlo desde el punto de vista de la teoría clásica, por lo que optó por aplicar la teoría cuántica. Así, propuso un nuevo modelo atómico que tenía en cuenta los espectros atómicos. Según este modelo:

- El electrón se mueve, sin emitir ni absorber radiación, en **órbitas circulares estacionarias** que sólo pueden tener ciertas energías y ciertos radios.

- El electrón sólo puede cambiar de órbita emitiendo o absorbiendo un fotón con energía y frecuencia determinadas. La energía de estos fotones es igual a la diferencia de energías entre las órbitas de transición o niveles de energía (figura 9.4):

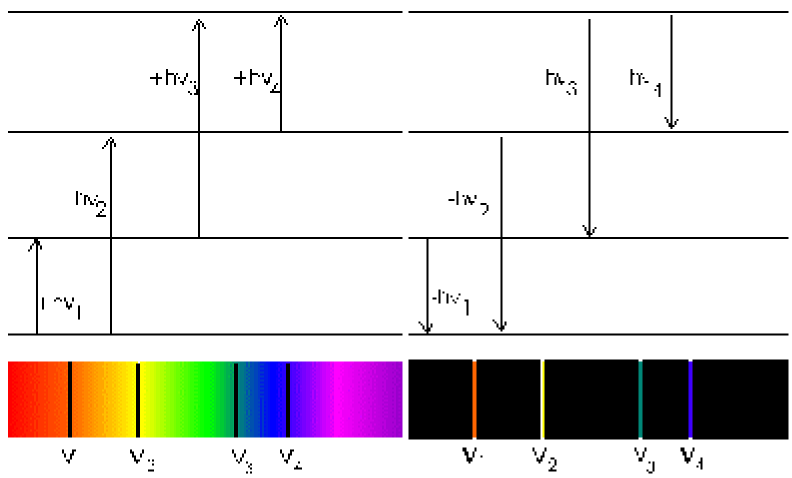
$$\Delta E = h \cdot f$$

Esta cuantificación de la energía justifica que las líneas espectrales estén separadas, es decir, que el espectro sea discreto.

Transiciones energéticas de los electrones entre los distintos niveles de energía
Figura 9.4

En el átomo de Bohr, el número natural, n, o número cuántico principal, identifica los estados estacionarios del electrón. En el átomo de hidrógeno, el estado con energía más baja (n = 1) se conoce como *estado fundamental*, mientras que los demás (n > 1) son *estados excitados*.

El electrón puede emitir un fotón, pasando de un nivel de energía a otro más bajo o bien puede absorber el mismo fotón para volver a pasar al nivel de mayor energía. Éste es el motivo por el que los espectros de absorción y emisión contienen las mismas frecuencias discretas (figura 8.5).



Espectros de emisión y absorción en las transiciones electrónicas de los distintos niveles de energía
Figura 9.5

5. DUALIDAD ONDA-PARTÍCULA: HIPÓTESIS DE DE BROGLIE

Como ya sabemos existe una serie de fenómenos relacionados con la luz (la radiación del cuerpo negro, el efecto fotoeléctrico y el efecto Compton) que solo pueden ser explicados mediante la teoría corpuscular. Sin embargo existen otros fenómenos (polarización, difracción, interferencias, etc.) que han de ser explicados mediante la teoría ondulatoria.

Ante esta situación se plantea la pregunta de si la luz es un conjunto de ondas o un conjunto de partículas. La respuesta a esta pregunta es que la luz, y en general el resto de la radiación electromagnética, tiene un doble comportamiento: como onda y como partícula (dualidad onda-partícula de la luz), es decir, el modelo ondulatorio y el modelo corpuscular han de considerarse como aspectos complementarios que explican el comportamiento real de la luz y del resto de radiación electromagnética.

¿Podría extenderse esta dualidad onda-corpúsculo a la materia?

La respuesta la dio, en 1924, el físico francés Luis de Broglie (1892-1987). En su tesis doctoral, sugirió que los electrones podían tener características ondulatorias. Su hipótesis, conocida como **hipótesis o postulado de De Broglie**, consistió en ampliar el comportamiento dual de la radiación a la materia, y dice lo siguiente:

Cuando un electrón se mueve con velocidad v, tiene asociado una onda cuya longitud de onda es igual a la constante de Planck dividida por la cantidad de movimiento o momento lineal del electrón:

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p_e} \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{h}{m_e v_e}} \quad [9.4]$$

Como vemos en el postulado de De Broglie quedan relacionadas dos magnitudes físicas del electrón, siendo una de ellas característica de un comportamiento ondulatorio (la longitud de onda λ), mientras que la otra es característica de un comportamiento corpuscular (la cantidad de movimiento o momento lineal p).

La hipótesis de De Broglie sobre la dualidad onda–partícula en los electrones fue propuesta de forma puramente teórica por la ausencia de evidencias experimentales. Sin embargo, en 1927, los físicos norteamericanos C. Davisson (1881-1958) y L. A. Germer (1896-1971) la comprobaron experimentalmente después de haber observado la difracción de electrones de forma casual.

El postulado de De Broglie se hace extensivo a toda la materia, y por tanto, se puede afirmar lo siguiente:

Cuando una partícula de masa m, se mueve con velocidad v, tiene asociado una onda cuya longitud de onda es igual a la constante de Planck dividida por la cantidad de movimiento o momento lineal de dicha partícula:

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p} \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{h}{m.v}} \quad [9.5]$$

En la práctica, las ondas asociadas a partículas muy grandes tienen una longitud de onda muy pequeña, debido al pequeño valor de la constante de Planck, $h = 6{,}63.10^{-34}$ J.s, y la onda asociada de De Broglie a estas partículas es despreciable y no ha de ser tenida en cuenta.

Sin embargo, para las partículas subatómicas, aunque se mueven a altas velocidades, tienen una masa muy pequeña y la longitud de onda asociada de De Broglie que se obtiene de la ecuación 8.5 tiene un valor que está dentro del espectro electromagnético, y por tanto las ondas asociadas a las partículas subatómicas sí ha de ser tenida en cuenta.

INFORMACIÓN ADICIONAL:

Una aplicación práctica de la dualidad onda-partícula es el microscopio electrónico el cual utiliza las características ondulatorias de los electrones con una longitud de onda asociada de hasta 3 Å, muy inferiores a los 400 nm mínimos de los microscopios ópticos que utilizan luz visible, consiguiendo con ello aumentar el poder de resolución y logrando un número de aumentos suficiente para poder observar estructuras muy pequeñas.

La longitud de onda de los electrones se controla fijando su velocidad; para ello se les impulsa mediante una diferencia de potencial V determinada tal que la energía cinética E_c que adquieren viene dada por:

$$E_c = e \cdot V$$

Como $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{p^2}{2 \cdot m}$ y $\lambda = \frac{h}{p}$ entonces:

$$\frac{h^2}{2 \cdot m \cdot \lambda^2} = e \cdot V \;\Rightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m \cdot e \cdot V}}$$

Por tanto, al aumentar la diferencia de potencial V se logra disminuir la longitud de onda λ de los electrones y lograr con ello un mayor número de aumentos.

<u>Ejemplo 3º</u>

Un electrón, inicialmente en reposo, se acelera mediante una diferencia de potencial de 10^4 V.

a) Haz un análisis energético del movimiento del electrón mientras es acelerado.
b) Calcula la energía cinética y la velocidad adquirida por el electrón.
c) Calcula la longitud de onda asociada de De Broglie del electrón.
d) Repite todos los apartados anteriores en el supuesto de que la partícula que se acelera sea un protón

<u>Ejemplo 4º</u>

Calcula la longitud de onda asociada de De Broglie de un balón de 500 g que en un momento dado se mueve a 90 Km/h.

<u>Ejemplo 5º</u>

Un electrón y un neutrón se desplazan con la misma energía cinética. ¿Cuál de ellos tendrá un menor valor de longitud de onda asociada? Razone la respuesta.

6. PRINCIPIO DE INDETERMINACIÓN O INCERTIDUMBRE DE HEISENBERG: DETERMINISMO Y PROBABILIDAD

El postulado de De Broglie sobre la dualidad onda-partícula es el comienzo de una nueva teoría física llamada Mecánica Cuántica o Mecánica Ondulatoria. Una de las consecuencias fundamentales de esta nueva teoría es el Principio de Indeterminación o Incertidumbre de Heisenberg.

Según la física clásica, el error en una medida se debe a la imprecisión del aparato de medida. Por tanto, un aparato clásico ideal podría determinar exactamente, por ejemplo, la posición y la velocidad de un electrón. Ahora bien, la cuestión planteada era: ¿hasta qué punto es posible determinar simultáneamente la posición y el momento lineal de un objeto cuántico, materia, como un electrón, o radiación, como un fotón?

En 1927, el físico alemán Werner Heisenberg (1901-1976) dio la respuesta enunciando su **Principio de Indeterminación** o **Principio de Incertidumbre**, el cual nos proporciona unos límites para la información que podemos conocer de un objeto cuántico. Este principio tiene dos partes:

- No es posible determinar simultáneamente el valor exacto de la posición x y del momento lineal p de un objeto cuántico. Los valores de las correspondientes indeterminaciones cumplen:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geqslant \frac{h}{4\pi}$$

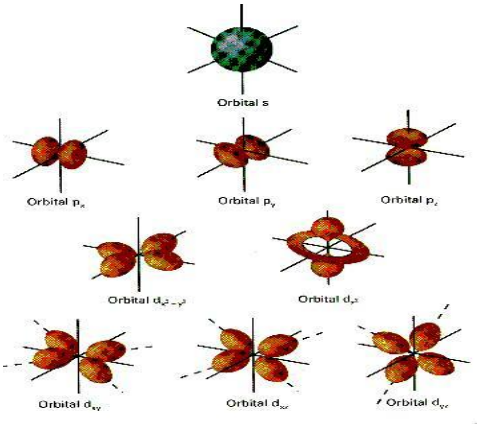
De esta relación vemos que un alto grado de precisión en el valor de la posición equivale a una gran indeterminación en la medida del momento lineal (y, por tanto, en la velocidad) del objeto.

- No es posible determinar simultáneamente el valor medido de la energía E de un objeto cuántico y el tiempo t en que tiene dicha energía. Los valores de las correspondientes indeterminaciones cumplen:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geqslant \frac{h}{4\pi}$$

Este principio tiene dos principales consecuencias:

1º. Hace evidente la necesidad de que los sistemas cuánticos se expresen en términos de probabilidad. La Mecánica Cuántica es una teoría probabilística (la Mecánica Clásica es determinista). Por ejemplo, una partícula tiene infinitas trayectorias posibles, más o menos probables, siendo la trayectoria clásica únicamente la trayectoria de mayor probabilidad. Del mismo modo, no se puede hablar de órbitas exactas como las de Bohr, sino únicamente de zonas del espacio donde es más probable hallar al electrón llamadas *orbitales*.



2º. Induce el *principio de complementariedad* según el cual un objeto cuántico, como un electrón o un fotón, actúa como onda o como partícula pero nunca mostrará los dos aspectos simultáneamente: son aspectos complementarios.

CUESTIONES

Cuestión 1ª Comente las siguientes afirmaciones: a) El número de fotoelectrones emitidos por un metal es proporcional a la intensidad del haz luminoso incidente. b) La energía cinética máxima de los fotoelectrones emitidos por un metal aumenta con la frecuencia del haz de luz incidente.

Cuestión 1ª a) Indique por qué la existencia de una frecuencia umbral para el efecto fotoeléctrico va en contra de la teoría ondulatoria de la luz. b) Si una superficie metálica emite fotoelectrones cuando se ilumina con luz verde, razone si lo emitirá cuando sea iluminada con luz azul.

Cuestión 3ª a) Explique la hipótesis de De Broglie de dualidad onda-corpúsculo. b) Explique por qué no suele utilizarse habitualmente la idea de dualidad al tratar con objetos macroscópicos.

Cuestión 4ª a) Un protón y un electrón tienen la misma velocidad. ¿Serán iguales las longitudes de onda de De Broglie de ambas partículas? Razone la respuesta. b) Un protón y un electrón tienen igual energía cinética. Razone cuál de los dos tiene mayor longitud de onda.

Cuestión 5ª En un estudio del efecto fotoeléctrico, se realiza la experiencia con dos fuentes luminosas: una de intensidad **I** y frecuencia ν y otras de intensidad **I/2** y frecuencia 2ν. Si ν es mayor que la frecuencia umbral, razona a) ¿Con qué fuente se emiten electrones con mayor velocidad? b) ¿Con qué fuente la intensidad de la corriente fotoeléctrica es mayor?

Cuestión 6ª Razone si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones relativas al efecto fotoeléctrico: a) La emisión de electrones se produce un cierto tiempo después de incidir los fotones, porque necesitan acumular energía suficiente para abandonar el metal. b) Si se triplica la frecuencia de la radiación incidente sobre un metal, se triplicará la energía cinética de los fotoelectrones.

Cuestión 7ª a) ¿Qué significado tiene la expresión "longitud de onda asociada a una partícula"? b) Si la energía cinética de una partícula aumenta, ¿aumenta o disminuye su longitud de onda asociada?

Cuestión 8ª a) De entre las siguientes opciones, elija la que crea correcta y explique por qué. La energía cinética máxima de los fotoelectrones emitidos por un metal depende de: i) la intensidad de la luz incidente; ii) la frecuencia de la luz incidente; iii) la velocidad de la luz.
b) Razone si es cierta o falsa la siguiente afirmación: "En un experimento sobre el efecto fotoeléctrico los fotones con frecuencia menor que la frecuencia umbral no pueden arrancar electrones del metal".

Cuestión 9ª Comente las siguientes afirmaciones relativas al efecto fotoeléctrico: a) El trabajo de extracción de un metal depende de la frecuencia de la luz incidente. b) La energía cinética máxima de los electrones emitidos varía linealmente con la frecuencia de la luz incidente.

Cuestión 10ª ¿Se podría determinar simultáneamente, con exactitud, la posición y la cantidad de movimiento de una partícula? Razone la respuesta.

Cuestión 11ª Razone si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones: a) La energía de los electrones emitidos por efecto fotoeléctrico no depende de la intensidad de la luz para una frecuencia dada. b) El efecto fotoeléctrico no tiene lugar en un cierto material al incidir sobre él luz azul, y sí al incidir luz naranja.

Cuestión 12ª Razone las respuestas a las siguientes cuestiones: a) ¿Puede conocerse con precisión la posición y la velocidad de un electrón? b) ¿Por qué el principio de incertidumbre carece de interés en el mundo macroscópico?

Cuestión 13ª a) ¿Es cierto que las ondas se comportan también como corpúsculos en movimiento? Justifique su respuesta. b) Comente la siguiente frase: "Sería posible medir simultáneamente la posición de un electrón y su cantidad de movimiento, con tanta exactitud como quisiéramos, si dispusiéramos de instrumentos suficientemente precisos".

Cuestión 14ª a) Un átomo que absorbe un fotón se encuentra en un estado excitado. Explique qué cambios han ocurrido en el átomo. ¿Es estable ese estado excitado del átomo? b) ¿Por qué en el espectro emitido por los átomos sólo aparecen ciertas frecuencias? ¿Qué indica la energía de los fotones emitidos?

Cuestión 15ª a) Describa la explicación de Einstein del efecto fotoeléctrico y relaciónela con el principio de conservación de la energía. b) Suponga un metal sobre el que incide radiación electromagnética produciendo efecto fotoeléctrico. ¿Por qué al aumentar la intensidad de la radiación incidente no aumenta la energía cinética de los electrones emitidos?

Cuestión 16ª Al iluminar una superficie metálica con luz de frecuencia creciente empieza a emitir fotoelectrones cuando la frecuencia corresponde al color amarillo.

g) Explique razonadamente qué se puede esperar cuando el mismo material se irradie con luz roja. ¿Y si se irradia con luz azul?
h) Razone si cabría esperar un cambio en la intensidad de la corriente de fotoelectrones al variar la frecuencia de la luz, si se mantiene constante el número de fotones incidentes por unidad de tiempo y de superficie.

Cuestión 17ª Un mesón π tiene una masa 275 veces mayor que un electrón. ¿Tendrían la misma longitud de onda si viajasen a la misma velocidad? Razone la respuesta.

Cuestión 18ª Razone qué cambios cabría esperar en la emisión fotoeléctrica de una superficie metálica: i) al aumentar la intensidad de la luz incidente; ii) al aumentar el tiempo de iluminación; iii) al disminuir la frecuencia de la luz.

Cuestión 19ª a) Enuncie el principio de incertidumbre y explique cuál es su origen.

b) Razone por qué no tenemos en cuenta el principio de incertidumbre en el estudio de los fenómenos ordinarios.

Cuestión 20ª Cuando se ilumina un metal con un haz de luz monocromática se observa emisión fotoeléctrica. a) Explique, en términos energéticos, dicho proceso. b) Si se varía la intensidad del haz de luz que incide en el metal, manteniéndose constante su longitud de onda, ¿variará la velocidad máxima de los electrones emitidos? ¿Y el número de electrones emitidos en un segundo? Razone las respuestas.

Cuestión 21ª Razone cómo cambiarían el trabajo de extracción y la velocidad máxima de los electrones emitidos si se disminuyera la longitud de onda de la luz incidente.

Cuestión 22ª Si tenemos luz monocromática verde de débil intensidad y luz monocromática roja intensa, capaces ambas de extraer electrones de un determinado metal, ¿cuál de ellas produciría electrones con mayor energía? ¿Cuál de las dos extraería mayor número de electrones? Justifique las respuestas.

PROBLEMAS

Problema 1º Un metal, para el que la longitud de onda umbral de efecto fotoeléctrico es λ_0 = 275 nm, se ilumina con luz de λ = 180 nm.

a) Explique el proceso en términos energéticos.
b) Calcule la longitud de onda, frecuencia y energía cinética de los fotoelectrones.
$c = 3\cdot10^8$ m s^{-1} ; $h = 6{,}6\cdot10^{-34}$ J s

SOLUC: b) $\lambda = 7{,}6.10^{-10}$ m $f = 1{,}19.10^{15}$ Hz $E_c = 2{,}4$ eV

Problema 2º Un protón se acelera desde el reposo mediante una diferencia de potencial de 50 kv.

a) Haga un análisis energético del problema y calcule la longitud de onda de De Broglie asociada a la partícula.
b) ¿Qué diferencia cabría esperar si en lugar de un protón la partícula acelerada fuera un electrón?
$h = 6{,}6\cdot10^{-34}$ J s ; $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ C ; $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ kg ; $m_p = 1{,}7\cdot10^{-27}$ kg

SOLUC: a) $1{,}27.10^{-13}$ m b) $\lambda_e = 5{,}6.10^{-12}$ m

Problema 3º El cátodo de una célula fotoeléctrica se ilumina simultáneamente con dos radiaciones monocromáticas: λ_1= 228 nm y λ_2= 524 nm. El trabajo de extracción de un electrón de este cátodo es W = 3,40 eV.

a) ¿Cuál de las radiaciones produce efecto fotoeléctrico? Razone la respuesta.
b) Calcule la velocidad máxima de los electrones emitidos. ¿Cómo variaría dicha velocidad al duplicarla intensidad de la radiación luminosa incidente?
$h = 6{,}6\cdot10^{-34}$ J s ; $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ C ; $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ kg ; $c = 3\cdot10^8$ m s^{-1}

SOLUC: a) 428 nm b) 8,44.105 m/s

Problema 4º Sea una célula fotoeléctrica con fotocátodo de potasio, de trabajo de extracción 2,22 eV. Mediante un análisis energético del problema, conteste razonadamente a las siguientes preguntas:

a) ¿Se podría utilizar esta célula fotoeléctrica para funcionar con luz visible? (El espectro visible está comprendido entre $380\cdot10^{-9}$ m y $780\cdot10^{-9}$ m).
b) En caso afirmativo, ¿cuánto vale la longitud de onda asociada a los electrones de máxima energía extraídos con luz visible?
$h = 6{,}6\cdot10^{-34}$ J s ; $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ C ; $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ kg ; $c = 3\cdot10^8$ m s^{-1}

SOLUC: a) Cualquier radiación del visible cuya longitud de de onda fuese inferior a 557 nm b) $1{,}23.10^{-9}$ m

Problema 5º El material fotográfico suele contener bromuro de plata, que se impresiona con fotones de energía superior a $1{,}7\cdot10^{-19}$ J.

a) ¿Cuál es la frecuencia y la longitud de onda del fotón que es justamente capaz de activar una molécula de bromuro de plata?
b) La luz visible tiene una longitud de onda comprendida entre $380\cdot10^{-9}$ m y $780\cdot10^{-9}$ m. Explique el hecho de que una luciérnaga, que emite luz visible de intensidad despreciable, pueda impresionar una película fotográfica, mientras que no puede hacerlo la radiación procedente de una antena de televisión que emite a 100 MHz, a pesar de que su potencia es de 50 kW.
$h = 6{,}6\cdot10^{-34}$ J s ; $c = 3\cdot10^8$ m s^{-1}

SOLUC: a) $2{,}57.10^{14}$ Hz 1170 nm

Problema 6º Un haz de electrones es acelerado desde el reposo por una diferencia de potencial de 100 V.

a) Haga un análisis energético del proceso y calcule la longitud de onda de los electrones tras ser acelerados, indicando las leyes físicas en que se basa.
b) Repita el apartado anterior para el caso de protones y calcule la relación entre las longitudes de onda obtenidas en ambos apartados.
$h = 6{,}6\cdot10^{-34}$ J s ; $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ C ; $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ kg ; $m_p = 1{,}7\cdot10^{-27}$ kg

SOLUC: a) $\lambda_e = 1{,}18.10^{-10}$ m b) $\lambda_p = 2{,}73.10^{-12}$ m $\lambda_e = 43{,}2\ \lambda_p$

Problema 7º Un haz de luz de longitud de onda $546\cdot10^{-9}$ m penetra en una célula fotoeléctrica de cátodo de cesio, cuyo trabajo de extracción es 2 eV.

a) Explique las transformaciones energéticas en el proceso de fotoemisión y calcule la energía cinética máxima de los electrones emitidos.
b) ¿Qué ocurriría si la longitud de onda incidente en la célula fotoeléctrica fuera el doble de la anterior?
$h = 6{,}6\cdot10^{-34}$ J s ; $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ C ; $c = 3\cdot10^{8}$ m s^{-1}

SOLUC: a) 0,28 eV b) ¿?

Problema 8º Un átomo de plomo se mueve con una energía cinética de 10^7 eV.

a) Determine el valor de la longitud de onda asociada a dicho átomo.
b) Compare dicha longitud de onda con las que corresponderían, respectivamente, a una partícula de igual masa y diferente energía cinética y a una partícula de igual energía cinética y masa diferente.
$h = 6{,}36\cdot10^{-34}$ J s ; 1 u = $1{,}66\cdot10^{-27}$ kg ; $m_{Pb} = 207$ u

SOLUC: a) $\lambda = 6{,}068.10^{-16}$ m b) ¿?

Problema 9º Al absorber un fotón se produce en un átomo una transición electrónica entre dos niveles separados por una energía de $12\cdot10^{-19}$ J.

a) Explique, energéticamente, el proceso de absorción del fotón por el átomo. ¿Volverá espontáneamente el átomo a su estado inicial?
b) Si el mismo fotón incidiera en la superficie de un metal cuyo trabajo de extracción es de 3 eV, ¿se producirá emisión fotoeléctrica?
$h = 6{,}6\cdot10^{-34}$ J s ; $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ C ; $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ kg

SOLUC: a) ¿? b) SI porque …..

Problema 10º Al iluminar la superficie de un cierto metal con un haz de luz ultravioleta de frecuencia $f = 2 \cdot 10^{15}$ Hz, la energía cinética máxima de los fotoelectrones emitidos es de 2,5 eV.

a) Determine el trabajo de extracción del metal.
b) Explique qué ocurriría si la frecuencia de la luz incidente fuera: i) 2f; ii) f/2.
$h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J s ; $e = 1{,}6 \cdot10^{-19}$ C

SOLUC: a) $W_{ext.} = 5{,}75$ eV b) ¿?

Problema 11º Al incidir luz de longitud de onda $\lambda = 620\cdot10^{-9}$ m sobre una fotocélula se emiten electrones con una energía cinética máxima de 0,14 eV.

a) Calcule el trabajo de extracción y la frecuencia umbral de la fotocélula.
b) ¿Qué diferencia cabría esperar en los resultados del apartado a) si la longitud de onda incidente fuera doble?
$h = 6{,}6\cdot10^{-34}$ J s ; $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ C ; $c =3\cdot10^{8}$ m s^{-1}.

SOLUC: a) $W_{ext.} = 1{,}87$ eV $f_0 = 4{,}5.10^{14}$ Hz

Problema 12º Un haz de luz de longitud de onda $546\cdot10^{-9}$ m incide en una célula fotoeléctrica de cátodo de cesio, cuyo trabajo de extracción es de 2 eV:

a) Explicar las transformaciones energéticas en el proceso de fotoemisión y calcular la energía cinética máxima de los electrones emitidos.
b) ¿Qué ocurriría si la longitud de onda de la radiación incidente en la célula fotoeléctrica fuera el doble de la anterior?
   $h = 6{,}6\cdot10^{-34}$ J s ; $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ C ; $c = 3\cdot10^{8}$ m s^{-1}.

SOLUC: a) $E_c = 0{,}27$ eV b) ¿?

<u>Problema 13º</u> Un haz de luz de longitud de onda 477 •10^{-9} m incide sobre una célula fotoeléctrica de cátodo de potasio, cuya frecuencia umbral es 5,5 • 10^{14} s^{-1}.

a) Explique las transformaciones energéticas en el proceso de fotoemisión y calcule la energía cinética máxima de los electrones emitidos.
b) Razone si se produciría efecto fotoeléctrico al incidir radiación infrarroja sobre la célula anterior. (La región infrarroja comprende longitudes de onda entre 10^{-3} m y 7,8 •10^{-5} m).
   $h = 6{,}6 \bullet 10^{-34}$ J s ; $c = 3 \bullet 10^{8}$ m s^{-1}

SOLUC: a) $E_c = 0{,}32$ eV b) ¿?

<u>Problema 14º</u> Una lámina metálica comienza a emitir electrones al incidir sobre ella radiación de longitud de onda 5 •10^{-7} m.

a) Calcule con qué velocidad saldrán emitidos los electrones si la radiación que incide sobre la lámina tiene una longitud de onda de 4 •10^{-7} m.
b) Razone, indicando las leyes en que se basa, qué sucedería si la frecuencia de la radiación incidente fuera de 4,5 •10^{14} s^{-1}.
   $h = 6{,}6 \bullet 10^{-34}$ J s ; $c = 3 \bullet 10^{8}$ m s^{-1} ; $m_e = 9{,}1 \bullet 10^{-31}$ kg

SOLUC: a) $v_e = 4{,}66.10^{5}$ m/s b) ¿?

<u>Problema 15º</u> Al estudiar experimentalmente el efecto fotoeléctrico en un metal se observa que la mínima frecuencia a la que se produce dicho efecto es de 1,03 ·10^{15} Hz.

a) Calcule el trabajo de extracción del metal y el potencial de frenado de los electrones emitidos si incide en la superficie del metal una radiación de frecuencia 1,8 ·10^{15} Hz.
b) ¿Se produciría efecto fotoeléctrico si la intensidad de la radiación incidente fuera el doble y su frecuencia la mitad que en el apartado anterior? Razone la respuesta.
   $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J s ; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C

SOLUC: a) $W_{ext.} = 4{,}27$ eV $\Delta V = -3$ V b) ¿?

<u>Problema 16º</u> Se acelera un protón mediante una diferencia de potencial de 3000 V.

a) Calcule la velocidad del protón y su longitud de onda de De Broglie.
b) Si en lugar de un protón fuera un electrón el que se acelera con la misma diferencia de potencial, ¿tendría la misma energía cinética? ¿Y la misma longitud de onda asociada? Razone sus respuestas.
   mp = 1,7 ·10^{-27} kg ; me = 9,1·10^{-31} kg ; h = 6,6 ·10^{-34} J s ; e = 1,6 ·10^{-19} C

SOLUC: a) $v_p = 7{,}5.10^{5}$ m/s $\lambda_p = 5{,}18.10^{-13}$ m b) ¿?

<u>Problema 17º</u> Se trata de medir el trabajo de extracción de un nuevo material. Para ello se provoca el efecto fotoeléctrico haciendo incidir una radiación monocromática sobre una muestra A de ese material y, al mismo tiempo, sobre otra muestra B de otro material cuyo trabajo de extracción es W_B = 5 eV. Los potenciales de frenado son V_A = 8 V y V_B =12 V, respectivamente. Calcule:

a) La frecuencia de la radiación utilizada.
b) El trabajo de extracción W_A.
   $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J s ; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C

SOLUC: a) $f = 4{,}1.10^{15}$ Hz b) $W_A = 8{,}6$ eV

Problema 18º Sobre una superficie de potasio, cuyo trabajo de extracción es 2,29 eV, incide una radiación de $0,2 \cdot 10^{-6}$ m de longitud de onda.

a) Razone si se produce efecto fotoeléctrico y, en caso afirmativo, calcule la velocidad de los electrones emitidos y la frecuencia umbral del material.

d) Se coloca una placa metálica frente al cátodo. ¿Cuál debe ser la diferencia de potencial entre ella y el cátodo para que no lleguen electrones a la placa?

$h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J s ; $c = 3 \cdot 10^{8}$ m s^{-1} ; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C ; $me = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg

SOLUC: a) $1,17.10^{6}$ m/s $f_0 = 5,5.10^{14}$ Hz b) -3,9 V

Problema 19º Al iluminar un fotocátodo de sodio con haces de luz monocromáticas de longitudes de onda 300 nm y 400 nm, se observa que la energía cinética máxima de los fotoelectrones emitidos es de 1,85 eV y 0,82 eV, respectivamente.

a) Determine el valor máximo de la velocidad de los electrones emitidos con la primera radiación.

b) A partir de los datos del problema determine la constante de Planck y la energía de extracción del metal.

$c = 3 \cdot 10^{8}$ m s^{-1} ; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C ; $me = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg

SOLUC: a) 8.10^{5} m/s b) $h = 6,59.10^{-34}$ J.s $W_{ext.} = 2,77$ eV

Problema 20º Un haz de electrones se acelera desde el reposo con una diferencia de potencial. Tras ese proceso la longitud de onda asociada a los electrones es de $8 \cdot 10^{-11}$ m.

a) Haga un análisis energético del proceso y determine la diferencia de potencial aplicada a los electrones.

b) Si un haz de protones se acelera con esa diferencia de potencial determine la longitud de onda asociada a los protones.

$h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J s ; $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg; $c = 3 \cdot 10^{8}$ m s^{-1} ; $e=1,6 \cdot 10^{-19}$ C $m_p=1840\ m_e$

SOLUC: a) $\Delta V = 233,7$ V b) $\lambda_p = 1,87.10^{-12}$ m

TEMA 10. FÍSICA NUCLEAR

1. **El núcleo atómico: nº atómico, nº másico e isótopos**
2. **Defecto de masa nuclear, energía de enlace nuclear, interacción nuclear fuerte, energía de enlace nuclear por nucleón y estabilidad nuclear.**
3. **Radiactividad: descripción de los procesos alfa, beta y gamma**
4. **Ley de desintegración radiactiva: periodo de semidesintegración radiactiva, vida media y actividad**
5. **Reacciones nucleares**
6. **Fisión y fusión nucleares**
7. **Principales interacciones en la naturaleza**

CUESTIONES

PROBLEMAS

1. EL NÚCLEO ATÓMICO: Nº ATÓMICO, Nº MÁSICO E ISÓTOPOS

El descubrimiento del núcleo atómico se produjo en 1911 a partir de las experiencias realizadas por Ernest Rutherford y sus colaboradores. A partir de este hecho, Rutherford propuso un modelo atómico, conocido como *modelo nuclear. Según este modelo el átomo consta de dos partes: una parte central, denominada núcleo, y la zona periférica denominada corteza.*

El tamaño del núcleo es muy pequeño comparado con el tamaño del átomo. El radio del núcleo es del orden de 10^{-15} m = 1 fermi (fm), mientras que el radio del núcleo es del orden de 10^{-10} m = 1 Angstrom (A). Si comparamos el radio del átomo con el radio del núcleo, obtenemos que el radio del átomo es aproximadamente 10^5 (cien mil veces) superior al radio del núcleo.

En la corteza se encuentran los electrones girando alrededor del núcleo en distintas órbitas o niveles de energía. El núcleo está formado por protones y neutrones, partículas que denominamos **nucleones**.

La carga de los electrones y de los protones coincide en valor absoluto ($1{,}6.10^{-19}$ C). Por esta razón, si el átomo está en estado neutro, el nº de electrones de la corteza coincide con el nº de protones de su núcleo. Pero, si el átomo no está en estado neutro, es porque en su corteza hay un exceso o un defecto de electrones con respecto al nº de protones de su núcleo, y el átomo sería un ión cargado negativamente (anión) o cargado positivamente (catión)

La masa de los protones y neutrones es muy parecida, aunque la de los neutrones es ligeramente superior. La masa de los electrones es mucho más pequeña. En la siguiente tabla aparecen la masa y carga de las partículas subatómicas:

PARTÍCULA	CARGA	MASA
Electrón (e^-)	$-1{,}6.10^{-19}$ C	$9{,}11.10^{-31}$ Kg = 0,00055 u
Protón (p^+)	$1{,}6.10^{-19}$ C	$1{,}6726.10^{-27}$ Kg = 1,0073 u
Neutrón (n)	-	$1{,}6749.10^{-27}$ Kg = 1,0087 u

Si comparamos la masa del protón con la masa del electrón, obtenemos que el protón tiene aproximadamente 1836 veces más masa que el electrón. Por esta razón, en el núcleo se concentra la mayor parte de la masa (más del 99 %) y toda la carga positiva del átomo. En cambio, el volumen del núcleo es una parte muy pequeña del volumen atómico. Por consiguiente, el núcleo posee una elevadísima densidad (del orden de 10^{18} kg/m^3).

Para medir la masa de los átomos se utiliza la unidad de masa atómica (u), llamada también uma, que es la doceava parte de la masa de un átomo de carbono-12. La equivalencia en Kg es:

$$1 \text{ u} = 1{,}6605.10^{-27} \text{ Kg}$$

Todos los átomos de un mismo elemento químico tienen en su núcleo el mismo número de protones. A este nº se le denomina **número atómico**, y se representa por la letra **Z**. El número atómico identifica a cada elemento químico y en la tabla periódica los elementos están ordenados en orden creciente de número atómico: Z(H) = 1; Z(He) = 2; Z(Li) = 3; Z(Be) = 4; …

El nº de neutrones del núcleo puede variar de unos átomos a otros para un mismo elemento químico. Por tanto, todos los átomos de un mismo elemento químico no son iguales porque, aunque tengan el mismo nº de protones (Z), pueden tener distinto nº de neutrones.

A los diferentes tipos de átomos de un elemento químico se les denomina **isótopos del elemento**. Por tanto, los isótopos de un elemento químico se caracterizan por tener distinta masa, ya que, en su núcleo tienen distinto nº de partículas **(o nucleones)**. En efecto los isótopos de un elemento químico, aunque tienen la misma cantidad de protones en el núcleo (igual nº atómico Z), tienen diferente nº de neutrones.

Al número de partículas (o nucleones) que tienen en el núcleo los átomos de un determinado isótopo de un elemento químico se le denomina **número másico**, y se representa por la letra **A**. Por tanto, el nº másico A de un isótopo es la suma de los protones y neutrones que tienen los átomos de dicho isótopo en su núcleo:

nº másico = nº de protones + nº de neutrones

A = Z + N

Los isótopos de un elemento químico se representan por el símbolo del elemento precedido de un subíndice y un superíndice. El subíndice representa al nº atómico y el superíndice al nº másico:

$$^{\text{nº másico (A)}}_{\text{nº atómico (Z)}}\text{Símbolo del elemento} \qquad ^{A}_{Z}\mathrm{X}$$

También se puede representar mediante el símbolo del elemento seguido de un guión y el nº másico:

Símbolo del elemento-A

Por ejemplo, el hidrógeno tiene tres isótopos, es decir, hay tres tipos de átomos de hidrógeno y son:

$$^{1}_{1}\mathrm{H} \qquad ^{2}_{1}\mathrm{H} \qquad ^{3}_{1}\mathrm{H}$$

protio *deuterio* *trítio*

La composición de un átomo de cada uno de estos isótopos es:

Protio: $^{1}_{1}\mathrm{H}\begin{cases} núcleo\begin{cases}1\ p^{+}\\ 0\ \ n\end{cases}\\ corteza\{1\ e^{-}\end{cases}$ *Deuterio:* $^{2}_{1}\mathrm{H}\begin{cases} núcleo\begin{cases}1\ p^{+}\\ 1\ \ n\end{cases}\\ corteza\{1\ e^{-}\end{cases}$ *Tritio:* $^{3}_{1}\mathrm{H}\begin{cases} núcleo\begin{cases}1\ p^{+}\\ 2\ \ n\end{cases}\\ corteza\{1\ e^{-}\end{cases}$

Hay que recordar que la masa atómica de un elemento químico no es la masa de un átomo de ese elemento químico, sino que es la masa media ponderada de las masas de sus distintos isótopos. Ponderada significa que en la media hay que tener en cuenta la abundancia relativa de sus distintos isótopos.

Llamamos **núclido** a un conjunto de átomos todos iguales entre sí, es decir, a un conjunto de átomos del mismo isótopo.

OBSERVACIÓN:
No confundir núclido con núcleo o con nucleón.

Un núclido se representa por $^{A}_{Z}\mathrm{X}$, donde X es el símbolo del elemento químico al que pertenece. Cada núclido pertenece a un *isótopo* del correspondiente elemento. Los isótopos de un mismo elemento difieren sólo en el valor de A.

2. DEFECTO DE MASA NUCLEAR, ENERGÍA DE ENLACE NUCLEAR, INTERACCIÓN NUCLEAR FUERTE, ENERGÍA DE ENLACE NUCLEAR POR NUCLEÓN Y ESTABILIDAD NUCLEAR.

2.1 Defecto de masa nuclear

Es un hecho comprobado experimentalmente que cuando se mide con precisión la masa del núcleo de un átomo cualquiera, esta resulta ser siempre inferior a la suma de las masas de las partículas que lo constituyen (nucleones). Es decir, cuando los protones y neutrones se unen para formar el núcleo se produce una pérdida de masa.

A esta disminución de masa se le denomina defecto de masa nuclear, y se calcula:

Defecto de masa nuclear = masa de los nucleones – masa del núcleo > 0

Defecto de masa nuclear = (masa de los protones + masa de los neutrones) – masa del núcleo > 0

$$\boxed{\Delta m = Z\cdot m_p + (A - Z)\cdot m_n - M_N > 0} \quad [10.1]$$

2.2 ENERGÍA DE ENLACE NUCLEAR

Esta masa que se pierde al formarse el núcleo es la masa que se convierte en energía y que se libera al formarse el núcleo. Esta energía la podemos calcular mediante la ecuación de Einstein de la equivalencia entre la masa y la energía, y que es:

$$E = m.c^2$$

Según la ecuación anterior, la energía que se libera al formarse un núcleo es:

$$\boxed{E = \Delta m.c^2} \quad [10.2]$$

Esta energía representa también a la mínima energía que habría que suministrar al núcleo para descomponerlo en sus nucleones y por tanto, a esta energía se le denomina **energía de enlace nuclear o energía de enlace del núcleo**.

2.3 FUERZA NUCLEAR FUERTE

¿Cómo puede explicarse la estabilidad del núcleo? La estabilidad del núcleo no puede explicarse, ni mediante fuerzas gravitatorias, ni mediante fuerzas eléctricas. En efecto, la fuerte repulsión eléctrica entre los protones frente a la débil atracción gravitatoria produciría una desintegración del núcleo.

El hecho de que en el núcleo convivan protones y neutrones sugiere que debe de existir entre ellos otro tipo de interacción, que es de atracción y mucho más intensa que la de repulsión eléctrica entre los protones. A esta fuerza se le denomina **fuerza nuclear fuerte o interacción nuclear fuerte**.

La fuerza nuclear fuerte presenta las siguientes características:

- Es la responsable de la cohesión del núcleo.
- Es una fuerza atractiva que se manifiesta entre los nucleones con independencia de su carga eléctrica.
- Es una fuerza muy intensa ya que debe de vencer a la fuerte repulsión electrostática entre los protones.
- Es de muy corto alcance ya que sólo se manifiesta a distancias inferiores al tamaño del núcleo (10^{-15} m).
- Aunque es una fuerza de atracción, cuando la separación entre los nucleones es mucho menor a su alcance, se convierte en una fuerza de repulsión para impedir el colapso entre los nucleones.
- Es una fuerza conservativa, y por tanto tiene asociada una energía potencial que es la energía de enlace nuclear.

2.4 ENERGÍA DE ENLACE NUCLEAR POR NUCLEÓN Y ESTABILIDAD NUCLEAR

Un núcleo es tanto más estable cuanto más dificultad presente a perder nucleones. Por tanto, una forma cuantitativa de medir la estabilidad de un núcleo es conocer la energía necesaria para extraer un nucleón del mismo, la cual se conoce como **energía de enlace nuclear por nucleón**.

La energía de enlace nuclear por nucleón se define como es el cociente entre la energía de enlace nuclear y el número másico:

$$Energía\ de\ enlace\ nuclear\ por\ nucleón = \frac{\text{Energía de enlace nuclear}}{\text{nº másico}}$$

$$\boxed{Energía\ de\ enlace\ nuclear\ por\ nucleón = \frac{\Delta m.c^2}{A}} \quad [10.3]$$

La energía de enlace nuclear por nucleón representa la energía media liberada por cada nucleón incorporado al núcleo, o lo que lo mismo, la energía media mínima que habría que suministrar al núcleo para extraerle un nucleón.

Experimentalmente se ha comprobado que la energía de enlace por nucleón varía con el número másico según la curva de la figura 9.1.

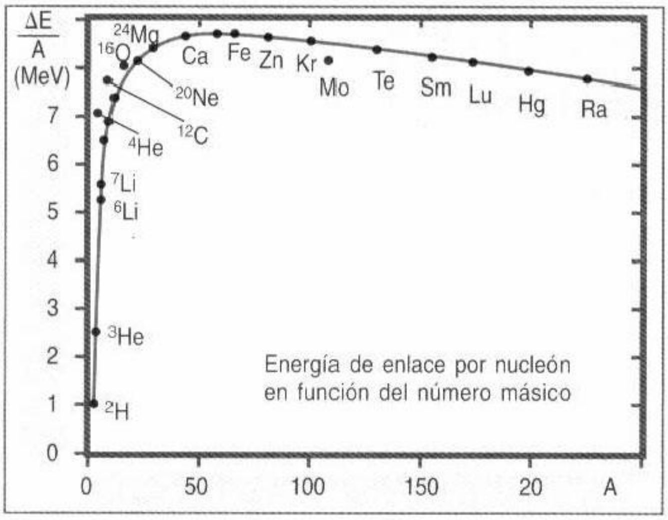


Figura 10.1
Energía de enlace nuclear por nucleón en función del nº másico (en MeV/nucleón)

En la gráfica anterior podemos observar lo siguiente:

1º. La energía de enlace nuclear por nucleón no supera los 9 MeV/nucleón.

2º. La energía de enlace nuclear por nucleón es máxima para aquellos isótopos cuyos números másicos están comprendidos entre 40 y 80 aproximadamente y, por tanto, estos núcleos son los más estables.

3º. Si tomamos dos núcleos ligeros y los unimos para formar un solo núcleo, este, según la gráfica, tendrá mayor energía de enlace por nucleón que los dos iníciales y, por tanto, en el proceso se habrá liberado energía. A este proceso se le denomina **fusión nuclear**.

4º. Si tomamos un núcleo pesado y lo dividimos en dos más ligeros, estos dos, según la gráfica, tendrán más energía de enlace por nucleón que el inicial y, por tanto, en el proceso también se habrá liberado energía. A este proceso se le denomina **fisión nuclear**.

Otro factor que colabora en estabilizar a un núcleo es el número de neutrones. En los núcleos ligeros se observa que el número de neutrones es aproximadamente igual al número de protones: Z = A-Z (figura 9.2). Sin embargo, en los núcleos más pesados, el número de neutrones se hace mayor: A-Z > Z para compensar la mayor repulsión electrostática.

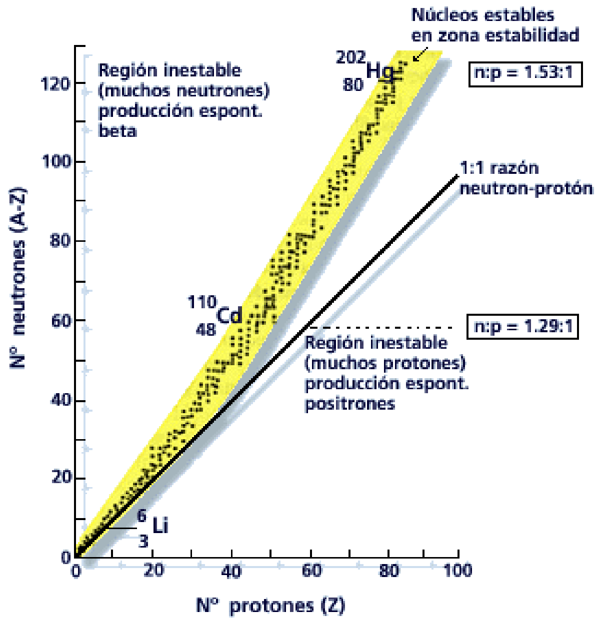


Figura 10.2

Ejemplo 1º

Para el isótopo $^{24}_{12}\mathrm{Mg}$ calcula:

a) El defecto de masa nuclear del Mg-24 e interpreta el resultado obtenido.
b) La energía de enlace nuclear del Mg-24 e interpreta el resultado.
c) La energía de enlace nuclear por nucleón del Mg-24 e interpreta el resultado.
d) Calcula la energía mínima que habría que aportar a 10 g de Mg-24 para descomponer a todos sus núcleos.
e) ¿Qué núcleo es más estable, el Mg-24 o el Mg-25?

Datos: m_{p+} = 1,0073 u m_n = 1,0087 u $^{24}_{12}\mathrm{Mg}$ = 23,9850 u $^{25}_{12}\mathrm{Mg}$ = 24,9858 u 1 u = $1{,}67.10^{-27}$ Kg

3. RADIACTIVIDAD: DESCRIPCIÓN DE LOS PROCESOS ALFA, BETA Y GAMMA

Una propiedad fundamental de los núcleos atómicos es que algunos son estables, mientras que otros no lo son. Los núcleos inestables se transforman en otros emitiendo espontáneamente partículas y radiaciones características.

Se denomina radiactividad a la transformación espontánea de los núcleos de los isótopos inestables en isótopos de otro o de ese mismo elemento acompañada de la emisión de ciertas partículas y/o de energía en forma de radiación. La radiactividad natural es la que tiene lugar en los isótopos inestables existentes en la naturaleza. La radiactividad artificial es la que se produce en los isótopos inestables que aparecen en las reacciones nucleares efectuadas por el hombre.

La radiactividad fue descubierta en 1896 por el físico francés A. H. Becquerel (1852-1908). Becquerel observó que unas placas fotográficas que había guardado en un cajón envueltas en papel oscuro estaban veladas. En el mismo cajón había guardado un trozo de mineral de uranio. Becquerel comprobó que lo sucedido se debía a que el uranio emitía una radiación mucho más penetrante que los rayos X. Acababan de descubrir la *radiactividad*, nombre propuesto por Marie Curie (1867-1934) para dicho fenómeno.

Al poco tiempo de descubrirse la radiactividad del uranio, se descubrieron nuevos elementos radiactivos: torio, polonio, radio y actinio. En la actualidad se conocen más de cuarenta elementos radiactivos.

Rutherford, a principios del siglo XX, sometió a la radiación emitida por los núcleos radiactivos a campos electromagnéticos y comprobó que no todas las radiaciones emitidas eran iguales. Fundamentalmente existen tres tipos de radiaciones: **la radiación alfa, la beta y la gamma.** Como veremos a continuación, las dos primeras radiaciones realmente son partículas, mientras que la tercera es energía en forma de oem (figura 9.3).

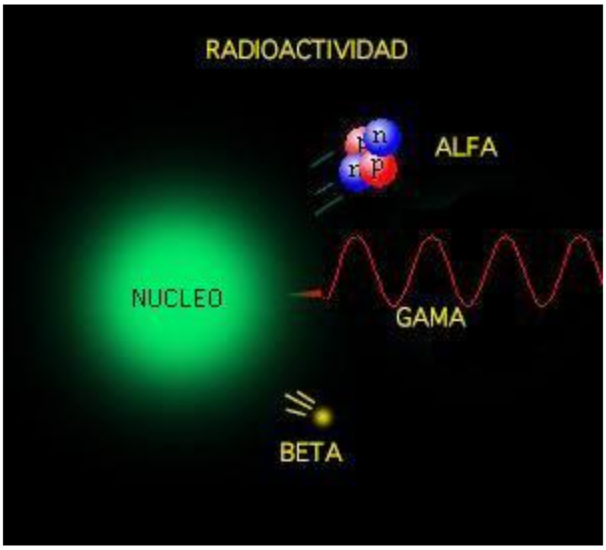


Figura 10.3

- **Radiación alfa**

La radiación α es un proceso en el que un núcleo radiactivo emite un núcleo de He-4, es decir, emite dos protones y dos neutrones.

Las características de una partícula α, que denotaremos como ${}^{4}_{2}\alpha$, son:

Carga eléctrica: $q_\alpha = +2\cdot q_{p+} = 2.e = 2.1{,}6.10^{-19}$ C $= +3{,}2\cdot 10^{-19}$ C
Masa: $m_\alpha = 4m_{p+} = 6{,}7\cdot 10^{-27}$ kg

Cuando un núcleo radiactivo emite una partícula alfa, el núcleo resultante disminuye su nº atómico en dos unidades y su nº másico en cuatro unidades. A esto se le llama la **ley de Soddy**.

La emisión de una partícula α por un núcleo radiactivo se puede representar mediante la siguiente expresión:

$$ {}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He $$

Como podemos fácilmente apreciar, después de una emisión α, el núcleo resultante pertenece a un isótopo del elemento que ocupa dos posiciones anteriores en la tabla periódica respecto al núcleo radiactivo inicial.

La emisión de partículas α es característica de los núcleos pesados y son emitidas con una energía cinética del orden del MeV. Esto supone que las partículas α tienen un pequeño poder de penetración en la materia y, de hecho, pueden ser detenidas por una lámina de cartón y no pueden atravesar la piel del cuerpo humano. Estas partículas no son perjudiciales.

Radiación beta

Cuando un núcleo radiactivo emite una partícula β, en realidad lo que está emitiendo es un electrón rápido. El electrón que emite el núcleo procede de un neutrón (${}^{1}_{0}n$) del núcleo que se desintegra, dando lugar a un protón (${}^{1}_{1}p$) y a un electrón (${}^{0}_{-1}e = {}^{0}_{-1}\beta$), que es el que emite.

Las características de una partícula β, que denotaremos ${}^{0}_{-1}\beta$, son las de un electrón:

Carga eléctrica: $q = -e = -1{,}6\cdot 10^{-19}$ C
Masa: $m = 9{,}11\cdot 10^{-31}$ kg

Cuando un núcleo radiactivo emite una partícula β, el núcleo resultante aumenta su nº atómico en una unidad pero no varía el nº másico. A esto se conoce con el nombre de **ley de Fajans**.

La emisión de una partícula β por parte de un núcleo radiactivo se puede representar mediante la siguiente expresión:

$$ {}^{A}_{Z}X \rightarrow {}_{Z+1}^{\ \ A}Y + {}^{0}_{-1}\beta \ \ (\text{ó } {}^{0}_{-1}e) $$

Como puede apreciarse, el núcleo resultante pertenece a un isótopo del elemento siguiente en la tabla periódica.

Su energía cinética es del orden del MeV, pero como su masa es mucho más pequeña que las de las partículas α, tienen un mayor poder de penetración en la materia. Pueden atravesar el cuerpo humano, siendo detenidas por chapas metálicas delgadas. No son perjudiciales para la salud.

- **Radiación gamma**

Cuando un núcleo radiactivo emite radiación ϒ, está emitiendo energía en forma de ondas electromagnéticas de mayor frecuencia que los rayos X. Por tanto, carecen tanto de carga eléctrica como de masa.

La explicación de esta emisión se basa en que los núcleos, igual que los átomos, pueden estar en estados energéticos definidos, de modo que si un núcleo está en un estado energético por encima de su estado fundamental (estado excitado), emite la diferencia de energía entre ambos estados en forma de radiación ϒ.

Como podemos apreciar, cuando un núcleo radiactivo emite radiación ϒ, el núcleo no se transforma en otro núcleo diferente, sino que sigue siendo el mismo isótopo pero en un estado de energía inferior, es decir, es energéticamente más estable (recordemos que cuando un núcleo radiactivo emite una partícula α ó β, sí se produce una verdadera transmutación nuclear).

La emisión de radiación ϒ por parte de un núcleo radiactivo se puede representar mediante la siguiente ecuación:

$$^{A}_{Z}X^{*} \rightarrow {}^{A}_{Z}X + \Upsilon$$

La radiación ϒ es de alta energía (como dijimos en la última pregunta del tema 7), entre el keV y el MeV, pudiendo atravesar el cuerpo humano y gruesas chapas metálicas, siendo detenidas por una gruesa pared de hormigón. En la naturaleza existe esta radiación a la que nuestro organismo se ha adaptado, pero un aumento de la densidad de esta radiación junto con una exposición prolongada a ella causa graves perjuicios en los seres vivos.

Para finalizar, hay que destacar que generalmente un núcleo radiactivo no emite un solo tipo de radiación, sino que puede emitir sucesivamente varias partículas α y/o varia partículas β y/o varias radiaciones ϒ, es decir, tienen lugar varias desintegraciones sucesivas hasta que el núcleo final es estable. El conjunto de todos los isótopos que forman parte del proceso constituye una **serie** o **familia radiactiva**.

__Ejemplo 3º__

El radio 226 ($^{226}_{88}\mathrm{Ra}$) emite sucesivamente 3 partículas α y dos partículas β. Escriben las correspondientes ecuaciones que representan dichas emisiones.

$$^{226}_{88}\mathrm{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\mathrm{Rn} + {}^{4}_{2}\alpha$$

$$^{222}_{86}\mathrm{Rn} \rightarrow {}^{218}_{84}\mathrm{Po} + {}^{4}_{2}\alpha$$

$$^{218}_{84}\mathrm{Po} \rightarrow {}^{214}_{82}\mathrm{Pb} + {}^{4}_{2}\alpha$$

$$^{214}_{82}\mathrm{Pb} \rightarrow {}^{214}_{83}\mathrm{Bi} + {}^{0}_{-1}\beta$$

$$^{214}_{83}\mathrm{Bi} \rightarrow {}^{214}_{84}\mathrm{Po} + {}^{0}_{-1}\beta$$

4. LEY DE DESINTEGRACIÓN RADIACTIVA: PERIODO DE SEMIDESINTEGRACIÓN RADIACTIVA, VIDA MEDIA Y ACTIVIDAD

Cuando un núcleo atómico emite radiación α, β ó ϒ, el núcleo cambia de estado o bien se transforma (transmuta) en otro distinto. En este último caso se dice que ha tenido lugar una **desintegración radiactiva**. Debido al gran nº de núcleos existentes en cualquier muestra radiactiva, la desintegración radiactiva es un **proceso aleatorio** gobernado por leyes estadísticas.

Experimentalmente se sabe que la desintegración radiactiva sigue la siguiente ley de decrecimiento exponencial:

$$\boxed{N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}} \quad [10.4]$$

Siendo:

N_0 al número de núcleos radiactivos iniciales.

N al nº de núcleos radiactivos que aún no se han desintegrado transcurrido un tiempo t.

λ una constante característica de cada isótopo radiactivo denominada ***CONSTANTE DE DESINTEGRACIÓN* RADIACTIVA** que se mediría en unidades de tiempo elevadas a -1, es decir, en el SI de unidades se mediría en s^{-1}.

Como puede observarse, la el ritmo de desintegración de los núcleos radiactivos presentes en la muestra será mayor cuanto más elevado sea el valor de λ.

En la figura 9.4 se muestra la representación gráfica correspondiente a la ley de desintegración radiactiva.

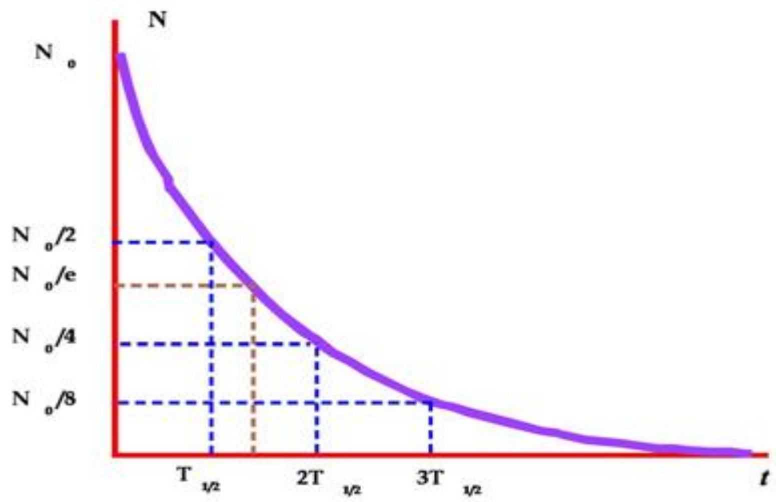


Figura 10.4
Ley de desintegración radiactiva

Se denomina **periodo de desintegración radiactiva o semivida** al tiempo que ha de transcurrir para que se desintegren la mitad de los núcleos radiactivos iniciales, es decir, para que en la muestra sólo quede el 50% de los núcleos radiactivos iniciales.

El periodo de desintegración radiactiva lo podemos calcular del siguiente modo:

$$N = N_0 \, . \, e^{-\lambda.t} \;\Rightarrow\; \frac{N_0}{2} = N_0 \, . \, e^{-\lambda.T_{1/2}} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} = e^{-\lambda.T_{1/2}} \;\Rightarrow\; Ln\frac{1}{2} = Ln(e^{-\lambda.T_{1/2}})$$

$$\Rightarrow\; Ln\frac{1}{2} = -\lambda.T_{1/2}\,.Ln(e) \;\Rightarrow\; Ln\frac{1}{2} = -\lambda.T_{1/2} \;\Rightarrow\; -Ln2 = -\lambda.T_{1/2} \;\Rightarrow$$

$$\boxed{T_{1/2} = \frac{Ln2}{\lambda}} \quad [10.5]$$

No hay que confundir el periodo de desintegración radiactiva de un núclido con la vida media de dicho núclido. **La vida media** de un isótopo radiactivo es el tiempo medio que tarda un núcleo al azar en desintegrarse. Su unidad en el S.I. es el segundo (s) y viene dada por la expresión:

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{½}}{ln2}} \quad [10.6]$$

Se llama **actividad (A) o velocidad de desintegración** de una muestra radiactiva a la rapidez con la que dicha muestra radiactiva se desintegra por unidad de tiempo, es decir, al número de emisiones o desintegraciones de una sustancia radiactiva por unidad de tiempo. La actividad de una muestra radiactiva se calcula multiplicando la constante de desintegración radiactiva (λ) por el nº de núcleos radiactivos (N) presentes en la muestra en cada instante.

$$\boxed{A = \lambda.\,N} \quad [10.7]$$

Démonos cuenta de que la actividad decrece exponencialmente con el tiempo ya que, el nº de núcleos radiactivos (N) presentes en la muestra, así lo hace.

En el S.I. la actividad se mide desintegraciones dividido por segundo y, a esta unidad, se le da un nombre especial, es el *becquerel* (Bq).

Otra unidad para la actividad es el curie (Ci):

$$1 \text{ Ci} = 3{,}7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$$

IMPORTANTE:

La ley de desintegración radiactiva descrita en la ecuación 9.4, también puede escribirse en términos de masa:

$$m = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

siendo m_0 la masa inicial de la muestra radiactiva y m la masa de los núcleos que aún no se han desintegrado en un cierto tiempo t.

La actividad sigue también la misma ley de decrecimiento exponencial:

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

siendo A_0 la actividad inicial de la muestra radiactiva y A la actividad al cabo de un cierto tiempo t.

Ejemplo 4º

Disponemos de una muestra radiactiva de 80 mg de ^{222}Rn que tiene una constante de desintegración radiactiva de 0,182 $dias^{-1}$. Calcula:

a) La masa que quedará sin desintegrar al cabo de una semana.
b) El periodo de semidesintegración radiactiva. ¿Qué indica este valor?
c) La vida media del radón.
d) El tiempo que debe de transcurrir para que queden 5 mg.
e) La actividad de la muestra al cabo de dos semanas.

Ejemplo 5º

En una excavación arqueológica se ha encontrado una herramienta de madera de roble. Sometida a la prueba del C-14 se observa que presenta una actividad de 100 desintegraciones/h, mientras que una muestra de madera de roble actual presenta una actividad de 600 desintegraciones/h.
Sabiendo que el periodo de semidesintegración del C-14 es de 5730 años, calcula la antigüedad de la herramienta.

Ejemplo 6º

La actividad del isótopo ^{14}C contenido en la madera de un sarcófago resulta ser el 60% de la que tiene la madera actual. Data la antigüedad del sarcófago-

5. REACCIONES NUCLEARES

Las **reacciones nucleares** son procesos en los que intervienen directamente los núcleos atómicos transformándose en otros distintos.

En 1919 Rutherford bombardeó núcleos de nitrógeno con partículas α y observó cómo estas partículas eran absorbidas por el núcleo y que se transformaba en otro distinto emitiendo un protón. Fue la primera reacción nuclear provocada por el ser humano:

$$^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{17}_{8}\mathrm{O} + {}^{1}_{1}\mathrm{H}$$

En toda reacción nuclear se cumplen los siguientes principios de conservación:

- **Conservación de la carga eléctrica:** Significa que la suma de los números atómicos es constante, es decir, dicha suma ha de coincidir en reactivos y productos.
- **Conservación del número de nucleones:** Significa que la suma de los números másicos es constante, es decir, dicha suma ha de coincidir en reactivos y productos.
- **Conservación de la energía y de la masa equivalente:** Significa que la energía, E, puesta en juego en la reacción tiene su origen en la diferencia de masa, Δm, que se produce entre los reactivos y los productos. El valor de dicha energía viene dado por el principio de equivalencia entre la energía y la masa de Einstein:

$$E = \Delta m \cdot c^2$$

donde:

$$\Delta m = \Sigma m_{reactivos} - \Sigma m_{productos}$$

representa el defecto de masa de los productos con respecto a los reactivos.

Por tanto:

9.5 Si $\Delta m > 0$, $E > 0$ y la reacción será exoenergética, es decir, desprende energía (es la situación más común).

9.6 Si $\Delta m < 0$, $E < 0$ y la reacción será endoenergética, es decir, absorbe energía.

Las reacciones nucleares más comunes son las reacciones de **fisión** y las de **fusión**.

6. FISIÓN Y FUSIÓN NUCLEARES

Recordemos que la energía de enlace nuclear por nucleón es un buen indicador para comparar la estabilidad entre los núcleos. Además vimos que la energía de enlace por nucleón varía con el número másico según la curva de la figura 9.1.

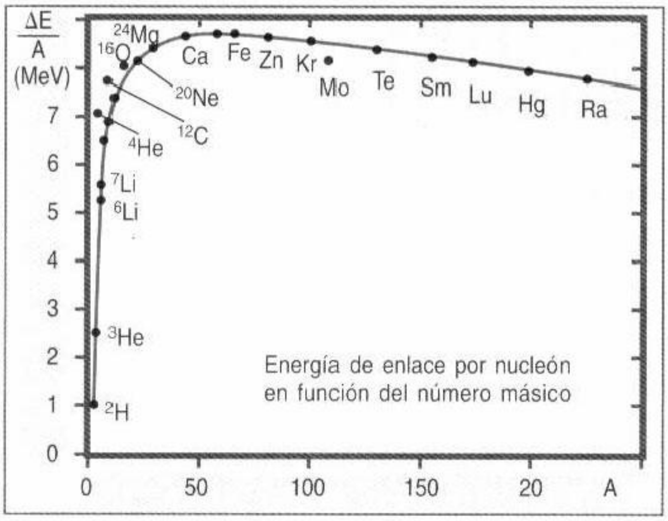


Figura 10.3

Entre otras cosas podía deducirse que:

1º. Si tomamos dos núcleos ligeros y los unimos para formar un solo núcleo, este, según la gráfica, tendrá mayor energía de enlace por nucleón que los dos iníciales y, por tanto, en el proceso se habrá liberado energía. A este proceso se le denomina **fusión nuclear**.

2º. Si tomamos un núcleo pesado y lo dividimos en dos más ligeros, estos dos, según la gráfica, tendrán más energía de enlace por nucleón que el inicial y, por tanto, en el proceso también se habrá liberado energía. A este proceso se le denomina **fisión nuclear**.

Fisión nuclear

La **fisión nuclear** es una reacción nuclear que consiste en la división de un núcleo pesado en otros dos más ligeros al ser bombardeado con neutrones. En el proceso se liberan más neutrones y gran cantidad de energía.

La fisión nuclear es una reacción exoenergética dado que los productos son núcleos más ligeros y, según la curva de la figura 9.1, energéticamente más estables que el núcleo original; así pues, dicha reacción presenta un defecto de masa positivo. Por otro lado, el uso de neutrones, se debe fundamentalmente, al hecho de que carecen de carga eléctrica, evitándose la posible repulsión electrostática por parte del núcleo a fisionar al acercarse a éste.

En 1938, los físicos alemanes Hahn y Strassmann consiguieron dividir un núcleo de uranio-235 según la reacción:

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + ^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow ^{141}_{56}\mathrm{Ba} + ^{92}_{36}\mathrm{Kr} + 3^{1}_{0}\mathrm{n}$$

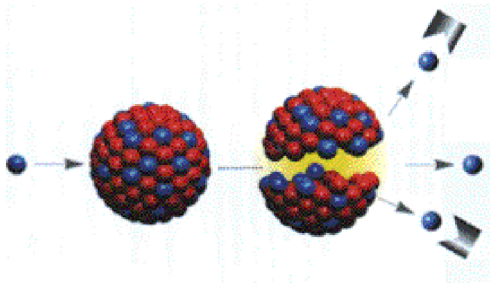


Figura 10.4
Fisión nuclear

Los productos de esta reacción nuclear presentan un defecto de masa de 0,2154 u por núcleo de uranio fisionado, que corresponde a una energía liberada de unos 200 MeV por núcleo de uranio-235.

A pesar de que el uranio-235 es energéticamente menos estable que sus productos de fisión, no se fisiona de forma espontánea. Es necesaria una **energía de activación** que se obtiene de la captura de un neutrón por el núcleo.

Los núcleos más adecuados para la fisión son los de elevada masa atómica, como son el uranio-235 y el plutonio-239.

Los neutrones liberados por la fisión de un núcleo pueden fisionar otros núcleos dando lugar a una **reacción nuclear en cadena**. La primera de éstas la produjo Fermi en 1942 y pueden ser de dos tipos:

- **Controlada**: si el exceso de neutrones liberados son absorbidos por un material específico (barras de plomo); se produce en centrales nucleares y en generadores auxiliares de submarinos y cohetes.
- **No controlada**: si no existe ningún elemento controlador que absorba los neutrones en exceso, por lo que la reacción tiene lugar de forma explosiva; se produce en las bombas atómicas.

La fisión nuclear tiene un elevado rendimiento energético: con 1 kg de uranio se obtiene la misma cantidad de energía que con 2000 toneladas de petróleo. Sin embargo, presenta el riesgo de contaminación radiactiva y la dificultad de eliminar de forma rápida y segura los residuos.

Fusión nuclear

La **fusión nuclear** es una reacción nuclear en las que dos núcleos ligeros se unen para formar otro más pesado. En el proceso se libera gran cantidad de energía.

La fusión nuclear es una reacción exoenergética dado que los productos son núcleos más pesados y, según la curva de la figura 9.1, energéticamente más estables que el núcleo original; así pues, dicha reacción presenta un defecto de masa positivo.

Un ejemplo de reacción de fusión lo constituye la unión del deuterio y el tritio (isótopos del hidrógeno) para formar helio-4:

$$^{2}_{1}\mathrm{H} + ^{3}_{1}\mathrm{H} \rightarrow ^{4}_{2}\mathrm{He} + ^{1}_{0}\mathrm{n}$$

En esta reacción los productos presentan un defecto de masa de 0.0189 u, que corresponde a una energía liberada de 17,6 MeV por átomo de helio-4.

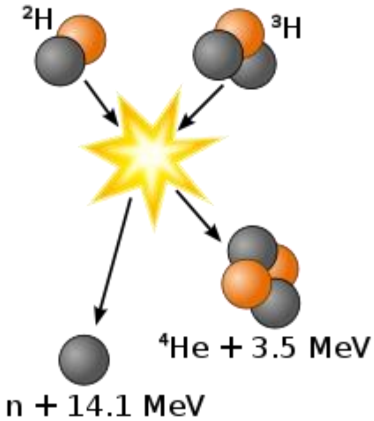


Figura 10.5
Fusión nuclear

Tal como sucede en la fisión, para iniciar un proceso de fusión nuclear es necesaria una **energía de activación**. En este caso, la energía necesaria para que los núcleos se unan venciendo las repulsiones electrostáticas es proporcionada por una energía térmica muy elevada, correspondiente a temperaturas superiores a 10^6 K. A estas temperaturas, los átomos se ionizan y se crea el estado de **plasma**, formado por una "sopa" de núcleos y electrones.

Los núcleos de pequeña masa atómica, como los isótopos del hidrógeno, son los más adecuados para producir la fusión nuclear.

Las reacciones de fusión (también llamadas termonucleares) tienen lugar de forma natural en el Sol y las estrellas, gracias a las altas temperaturas de su interior. De forma artificial, el ser humano ha conseguido la fusión en cadena de forma explosiva, que puede ser:

- **Controlada**: aún no se ha conseguido de forma rentable debido a la dificultad técnica que supone confinar y mantener el plasma estable durante el tiempo suficiente; actualmente hay varios proyectos relacionados con la fusión nuclear controlada como el europeo ITER.
- **No controlada**: se produce en la bomba de hidrógeno (bomba H); la energía para inicial la fusión se obtiene de la explosión de una bomba atómica de fisión.

  La fusión controlada presenta múltiples ventajas frente a la fisión:
  - Existen grandes reservas de combustible ya que los isótopos del hidrógeno se obtiene de los océanos.
  - Se obtiene una energía más de tres veces mayor que en la fisión.
  - No se producen residuos contaminantes.

Ejemplo 7º

En un reactor de fisión nuclear tiene lugar la reacción de nuclear siguiente:

$$ {}^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{90}_{38}\mathrm{Sr} + {}^{136}_{Z}\mathrm{Xe} + a\,{}^{1}_{0}\mathrm{n} $$

a) Descubre el nº atómico del Xe y el nº de neutrones liberados en cada núcleo de uranio-235 fisionado indicando las leyes de conservación que utilizas para ello.
b) Comprueba que es una reacción exoenergética.
c) ¿Qué energía se libera cuando se fisiona un núcleo de uranio-235?
d) Calcula la energía que se liberaría al fisionar 1 g de uranio-235.
e) Calcula la masa de uranio-235 que se consumiría por hora en una central nuclear de 800 Mw.

Datos: $m(^{235}U)$ = 235,043944 u $m(^{90}Sr)$ = 89,907167 u $m(^{136}Xe)$ = 135,907294 u

m_n = 1,008665 u 1 u = $1{,}67.10^{-27}$ Kg

Ejemplo 8º

El proyecto europeo ITER (Reactor Termonuclear Experimental Internacional) fue puesto en marcha en 1988 y, aunque el organismo europeo tiene su sede en Barcelona, sus instalaciones experimentales están en Cadarache (Francia), investiga la fusión de deuterio y tritio para dar Helio-4.

a) Escribe la reacción nuclear correspondiente
b) Comprueba que es una reacción exoenergética.
c) Calcula la energía liberada por cada núcleo de helio formado.

Masas nucleares: deuterio = 2,0136 u; tritio = 3,0155 u; helio-4 = 4,0015 u; neutrón = 1,0087 u

7. PRINCIPALES INTERACCIONES EN LA NATURALEZA

Todas las fuerzas conocidas hasta ahora en la naturaleza se han podido unificar en cuatro grupos:

- Interacción gravitatoria
- Interacción electromagnética
- Interacción nuclear fuerte
- Interacción nuclear débil

Las principales características de cada una de estas interacciones son:

Interacción gravitatoria

La fuerza de atracción gravitatoria entre dos masas viene dada por la **ley de gravitación universal** que dice:

"La fuerza con que se atraen dos masa puntuales (M y m) separadas por una distancia r es directamente proporcional a los valores de dichas masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa"

$\boxed{\vec{F} = -G\dfrac{M_1 . M_2}{r^2}\vec{u}_r}$ (vector fuerza) $\boxed{F = G\dfrac{M_1 . M_2}{r^2}}$ (módulo del vector fuerza)

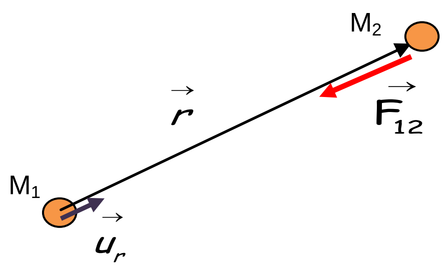
Donde:

G = 6,67·10^{-11} N m^2 kg^{-2} es la llamada constante de gravitación universal

"r" es módulo del vector $\vec{r}$ (que es la distancia que separa a las dos masas que interaccionan)

El vector $\vec{r}$ es el vector que va de la masa fuente a la masa testigo

Y $\vec{u_r} = \frac{\vec{r}}{r}$ es un vector unitario de la misma dirección y sentido que el vector $\vec{r}$ y por tanto un vector unitario dirigido de la masa fuente a la masa testigo (fig. 1.2).



Las principales características de la fuerza gravitatoria son:

- Es una fuerza universal ya que se debe a la masa de los cuerpos.
- Es una fuerza de atracción.
- Es una fuerza central porque su dirección coincide con la dirección de la recta que une las dos masas que interaccionan.
- La fuerza gravitatoria es una fuerza de largo alcance porque se manifiesta tanto a cortas distancias como a largas distancias.

- La atracción gravitatoria entre dos masas también es independiente del medio en el que se encuentren puesto que G es una constante universal, es decir, su valor no depende del medio en el que se encuentren las masas que interaccionan.
- Debido al pequeño valor de G la fuerza de atracción gravitatoria entre dos masas sólo es apreciable en el caso en que al menos una de las dos masas sea de valor elevado.
- Es una fuerza cuyo valor disminuye con el cuadrado de la distancia que separa a las masas que interaccionan (es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia), lo que permite demostrar, junto con su carácter central, que se trata de una fuerza conservativa y, por tanto, tendrá asociada una energía potencial.

Interacción electromagnética

Es la fuerza de interacción entre cuerpos cargados eléctricamente. Habría que distinguir entre la fuerza electrostática y la fuerza magnética.

La fuerza electrostática se manifiesta tanto si las cargas que interaccionan están en reposo o en movimiento. La fuerza magnética entre cargas sólo se manifiesta si estas están en movimiento.

La fuerza electrostática viene dada por **la Ley de Coulomb**, que dice:

"La fuerza con que se atraen o se repelen dos cuerpos cargados es directamente proporcional al producto de dichas cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa".

$\boxed{\vec{F} = K\frac{Q_1 . Q_2}{r^2}\vec{u}_r}$ vector fuerza electrostática $\boxed{F = K\frac{|Q_1| . |Q_2|}{r^2}}$ módulo del vector

Donde:

K es la llamada constante eléctrica.

"r" es módulo del vector $\vec{r}$ (que es la distancia que separa a las dos cargas que interaccionan)

El vector $\vec{r}$ es el vector que va de la carga fuente a la carga testigo

Y $\vec{u_r} = \frac{\vec{r}}{r}$ es un vector unitario de la misma dirección y sentido que el vector $\vec{r}$ y por tanto un vector unitario dirigido de la carga fuente a la carga testigo.

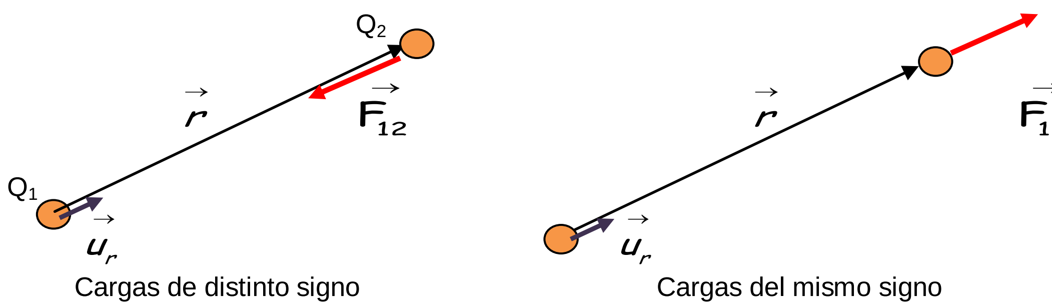


Figura 3.9

La fuerza electrostática tiene las siguientes características:

- No es una fuerza universal ya que se da sólo entre cuerpos cargados.

- Es una fuerza de atracción (cargas de distinto signo), o de repulsión (cargas del mismo signo).
- Es una fuerza central porque…..
- Es una fuerza de largo alcance.
- La interacción eléctrica entre dos cargas sí depende del medio en el que se encuentran dichas cargas ya que el valor de la constante eléctrica K no es una constante universal puesto que su valor depende del medio interpuesto entre las cargas que interaccionan.
- La constante eléctrica es máxima en el vacío y vale aproximadamente:

$$K(\text{vacío}) = K_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$$

  Por tanto la interacción eléctrica entre dos cargas es máxima cuando estas están en el vacío, y disminuye cuando se encuentran en un medio material.
- Es una fuerza cuyo valor disminuye con el cuadrado de la distancia que separa a las cargas que interaccionan (es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia), lo que permite demostrar, junto con su carácter central, que se trata de una fuerza conservativa y, por tanto, tendrá asociada una energía potencial.

Si las cargas que interaccionan están en movimiento aparece entre ellas la interacción magnética que tiene las siguientes características:

- No es una fuerza universal ya que se da sólo entre cuerpos cargados y en movimiento.
- Puede ser de atracción o de repulsión.
- No es una fuerza central.
- Es una fuerza de largo alcance.
- La interacción magnética también depende del medio en el que se encuentran las cargas que interaccionan. Esta dependencia se establece a través de la denominada permeabilidad magnética μ.
- La permeabilidad magnética μ no es máxima en el vacío que vale aproximadamente:

$$\mu(\text{vacío}) = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ UI}$$

  Por tanto la interacción magnética no es máxima en el vacío. En los medios paramagnéticos la interacción magnética es menor que en el vacío y en los medios diamagnéticos y ferromagnéticos es mayor.
- Es una fuerza cuyo valor disminuye con la distancia que separa a las cargas que interaccionan, pero no es una fuerza conservativa.

Interacción nuclear fuerte

La interacción nuclear fuerte es la responsable de la estabilidad de los núcleos y presenta las siguientes características:

- Es la responsable de la cohesión del núcleo.
- Es una fuerza atractiva que se manifiesta entre los nucleones con independencia de su carga eléctrica.
- Es una fuerza muy intensa ya que debe de vencer a la fuerte repulsión electrostática entre los protones.
- Es de muy corto alcance ya que sólo se manifiesta a distancias inferiores al tamaño del núcleo (10^{-15} m).
- Aunque es una fuerza de atracción, cuando la separación entre los nucleones es mucho menor a su alcance, se convierte en una fuerza de repulsión para impedir el colapso entre los nucleones.
- Es una fuerza conservativa, y por tanto tiene asociada una energía potencial que es la energía de enlace nuclear.

- Su valor depende de la orientación del espín de los nucleones.

Interacción nuclear débil

Es una fuerza de corto alcance puesto que se manifiesta también a nivel nuclear y explica la existencia de núcleos radiactivos que se desintegran emitiendo radiación β. Es una fuerza de poca intensidad.

Las investigaciones en Física Fundamental van encaminadas a conocer cada vez mejor a cada una de estas fuerzas y a la búsqueda de la "Teoría de la gran unificación", en la que estas cuatro fuerzas pudieran ser descritas mediante una sola ley.

CUESTIONES

Cuestión 1ª Comente cada una de las frases siguientes: a) Isótopos son aquellos núclidos de igual número atómico pero distinto número másico. b) Si un núclido emite una partícula alfa, su número másico decrece en dos unidades y su número atómico en una.

Cuestión 2ª a) Escriba la ley de desintegración radiactiva y explique el significado de cada símbolo. b) Un núcleo radiactivo tiene un periodo de semidesintegración de 1 año. ¿Significa esto que se habrá desintegrado completamente en dos años? Razone la respuesta.

Cuestión 3ª a) ¿Qué ocurre cuando un núclido emite una partícula alfa? ¿Y cuando emite una partícula beta? b) Calcule el número total de emisiones alfa y beta que permitirán completar la siguiente transmutación:

$$^{235}_{95}U \quad \rightarrow \quad ^{207}_{82}Pb$$

Cuestión 4ª Responda breve y razonadamente a las siguientes preguntas: a) ¿por qué se postuló la existencia del neutrón? b) ¿por qué la masa de un núcleo atómico es menor que la suma de las masas de las partículas que lo constituyen?

Cuestión 5ª a) Compare las características más importantes de las interacciones gravitatoria, electromagnética y nuclear fuerte. B) Explique cuál o cuáles de dichas interacciones serían importantes en una reacción nuclear, ¿por qué?

Cuestión 6ª a) ¿Por qué los protones permanecen unidos en el núcleo, a pesar de que sus cargas tienen el mismo signo? b) Compare las características de la interacción responsable de la estabilidad nuclear con las de otras interacciones, refiriéndose a su origen, intensidad relativa, alcance, etc.

Cuestión 7ª a) La masa de un núcleo atómico no coincide con la suma de las masas de las partículas que los constituyen. ¿Es mayor o menor? ¿Cómo justifique esa diferencia? b) ¿Qué se entiende por estabilidad nuclear? Explique, cualitativamente, la dependencia de la estabilidad nuclear con el número másico.

Cuestión 8ª Razone si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas: a) Una vez transcurridos dos periodos de semidesintegración, todos los núcleos de una muestra radiactiva se han desintegrado. b) La actividad de una muestra radiactiva es independiente del tiempo.

Cuestión 9ª a) Escriba la expresión de la ley de desintegración radiactiva e indique el significado de cada uno de los símbolos que en ella aparecen. b) Dos muestras radiactivas tienen igual masa. ¿Puede asegurarse que tienen igual actividad?

Cuestión 10ª a) Enumere las interacciones fundamentales de la Naturaleza y explique las características de cada una. b) ¿Cómo es posible la estabilidad de los núcleos a pesar de la fuerte repulsión eléctrica entre sus protones?

Cuestión 11ª a) Explique el proceso de desintegración radiactiva con ayuda de una gráfica aproximada en la que se represente el número de núcleos sin transformar en función del tiempo. b) Indique qué es la actividad de una muestra. ¿De qué depende?

Cuestión 12ª a) Explique el origen de la energía liberada en una reacción nuclear. ¿Qué se entiende por defecto de masa? b) ¿Qué magnitudes se conservan en las reacciones nucleares?

Cuestión 13ª a) ¿Por qué en dos fenómenos tan diferentes como la fisión y la fusión nucleares, se libera una gran cantidad de energía? b) ¿Qué ventajas e inconvenientes presenta la obtención de energía por fusión nuclear frente a la obtenida por fisión?

Cuestión 14ª a) Algunos átomos de nitrógeno ($^{14}_{7}N$) atmosférico chocan con un neutrón y se transforman en carbono ($^{14}_{6}C$) que, por emisión β, se convierte de nuevo en nitrógeno. Escriba las correspondientes reacciones nucleares. b) Los restos de animales recientes contienen mayor proporción de ($^{14}_{6}C$) que los restos de animales antiguos. ¿A qué se debe este hecho y qué aplicación tiene?

Cuestión 15ª¿Por qué un isótopo radiactivo de período de semidesintegración muy corto (por ejemplo, dos horas) no puede encontrarse en estado natural y debe ser producido artificialmente.

Cuestión 16ª a) Razone cuáles de las siguientes reacciones nucleares son posibles:

$$^{1}_{1}H + \,^{3}_{2}He \rightarrow \,^{4}_{2}He$$
$$^{224}_{88}Ra \rightarrow \,^{219}_{86}Rn + \,^{4}_{2}He$$
$$^{4}_{2}He + \,^{27}_{13}Al \rightarrow \,^{30}_{15}P + \,^{1}_{0}n$$

b) Deduzca el número de protones, neutrones y electrones que tiene un átomo de $^{27}_{13}Al$.

Cuestión 17ª Complete las siguientes ecuaciones de reacciones nucleares, indicando en cada caso las características de X:

$$^{9}_{4}Be + \,^{4}_{2}He \rightarrow \,^{12}_{6}C + X \qquad\qquad ^{27}_{13}Al + \,^{1}_{0}n \rightarrow \,^{4}_{2}He + X$$

Cuestión 18ª Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones: a) Cuanto mayor es el período de semidesintegración de un material, más deprisa se desintegra. b) En general, los núcleos estables tienen más neutrones que protones.

Cuestión 19ª Dos muestras A y B del mismo elemento radiactivo se preparan de manera que la muestra A tiene doble actividad que la B.

a) Razone si ambas muestras tienen el mismo o distinto período de desintegración.
e) ¿Cuál es la razón entre las actividades de las muestras después de haber trascurrido cinco períodos?

Cuestión 20ª a) Considere dos núcleos pesados X e Y de igual número másico. Si X tiene mayor energía de enlace, ¿cuál de ellos es más estable?
b) ¿Qué cambios experimenta un núcleo atómico al emitir una partícula alfa? ¿Qué sucedería si un núcleo emitiese una partícula alfa y después dos partículas beta?

Cuestión 21ª El $^{232}_{90}Th$ se desintegra, emitiendo 6 partículas α y 4 partículas β, dando lugar a un isótopo estable del plomo. Determine el número másico y el número atómico de dicho isótopo.

Cuestión 22ª Comente la siguiente frase: "debido a la desintegración del ^{14}C, cuando un ser vivo muere se pone en marcha un reloj…" ¿En qué consiste la determinación de la antigüedad de los yacimientos arqueológicos mediante el ^{14}C?

Cuestión 23ª a) Complete las reacciones nucleares siguientes especificando el tipo de nucleón o átomo representado por la letra X y el tipo de emisión radiactiva de qué se trata:

$$^{210}_{83}Bi \rightarrow \,^{206}_{81}Tl + X$$
$$^{24}_{11}Na \rightarrow X + \beta$$
$$X \rightarrow \,^{234}_{91}Pa + \beta$$

b) Considere los núclidos ${}^{232}_{90}\mathrm{Th}$ y ${}^{232}_{92}U$. Si el ${}^{232}_{90}\mathrm{Th}$ tiene mayor energía de enlace, razone cuál de ellos es más estable.

<u>Cuestión 24ª</u> a) Razone cuál es el número total de emisiones alfa y beta que permiten completar la siguiente transmutación:

$${}^{235}_{95}\mathrm{U} \quad \rightarrow \quad {}^{207}_{82}\mathrm{Pb}$$

b) Razone el número de desintegraciones alfa y beta necesarias para que el ${}^{226}_{88}Ra$ se transforme en ${}^{206}_{82}Pb$

<u>Cuestión 25ª</u> Considere dos muestras de la misma masa de dos isótopos radiactivos. Si el periodo de semidesintegración de una es el doble que el de la otra, razone cómo cambia la relación entre las actividades de ambas muestras en función del tiempo.

PROBLEMAS

Problema 1º La vida media del ^{55}Fe es de 2,6 años.

a) Explique las características del proceso de desintegración e indique el significado de periodo de semidesintegración y vida media.
b) Calcule la constante de desintegración radiactiva y el tiempo en que 1 mg de muestra se reduce a la mitad.

SOLUC: b) $\lambda = 0{,}385$ años^{-1} T = 1,8 años

Problema 2º En el año 1898 Marie y Pierre Curie aislaron 200 mg de radio, cuyo periodo de semidesintegración es de 1620 años.

a) ¿A qué cantidad de radio han quedado reducidos en la actualidad los 200 mg iniciales?
b) ¿Qué tanto por ciento se habrá desintegrado dentro de 500 años?

SOLUC: a) m = 190,9 mg b) 20%

Problema 3º El $^{14}_{6}C$ se desintegra dando $^{14}_{7}N$ y emitiendo una partícula beta. El periodo de semidesintegración del $^{14}_{6}C$ es de 5376 años.

a) Escriba la ecuación del proceso de desintegración y explique cómo ocurre.
b) Si la actividad debida al $^{14}_{6}C$ de los tejidos encontrados en una tumba es del 40% de la que presentan los tejidos similares actuales, ¿cuál es la edad de aquellos?

SOLUC: b) $\lambda = 1{,}29.10^{-4}$ años^{-1} t = 7100 años

Problema 4º Una de las reacciones de fisión posibles del $^{235}_{92}U$ es la formación de $^{94}_{38}Sr$ y $^{140}_{54}Xe$, liberándose dos neutrones.

a) Formule la reacción y hacer un análisis cualitativo del balance de masa.
b) Calcule la energía liberada por 20 mg de uranio.
$m_U = 234{,}9943$ u ; $m_{Sr} = 93{,}9754$ u ; $m_{Xe} = 139{,}9196$ u ; $m_n = 1{,}0086$ u ; $N_A = 6{,}02\cdot10^{23}$ mol^{-1}

SOLUC: a) $\Delta m = 0{,}0907$ u/núcleo fisionado b) $E = 6{,}9.10^{8}$ J

Problema 5º El $^{99}_{43}Tc$ se desintegra emitiendo radiación gamma.

a) Explique el proceso de desintegración y definir "periodo de semidesintegración".
b) Calcule la actividad de un gramo de isótopo cuya vida media en el estado inicial es de 6 horas.
$N_A = 6{,}02\cdot10^{23}$ mol^{-1}

SOLUC: b) $A = 2{,}84.10^{17}$ bq

Problema 6º a) Calcule la energía de enlace de los núcleos $^{3}_{1}H$ y $^{3}_{2}He$.

b) ¿Qué conclusión, acerca de la estabilidad de dichos núcleos, se deduce de los resultados del apartado a)?
$m_{He-3}= 3{,}016029$ u ; $m_{H-3}= 3{,}016049$ u ; $m_n = 1{,}0086$ u ; $1u = 1{,}66\cdot10^{-27}$ kg ; $c = 3\cdot10^{8}$ m s^{-1}

SOLUC: a) $E(^{3}H) = 7{,}875$ MeV $E(^{3}H)/A = 2{,}625$ MeV/nucleón $E(^{3}He) = 6{,}69$ MeV $E(^{3}He)/A = 2{,}25$ MeV/nucleón

Problema 7º El periodo de semidesintegración de un nucleido radiactivo, de masa atómica 200 u que emite partículas beta es de 50 s. Una muestra, cuya masa inicial era 50 g, contiene en la actualidad 30 g del nucleido original.

a) Indique las diferencias entre el nucleido original y el resultante y representar gráficamente la variación con el tiempo de la masa del nucleido original.
b) Calcule la antigüedad de la muestra y su actividad actual.
$N_A = 6{,}02\cdot 10^{23}\ mol^{-1}$

SOLUC: b) 36,94 s A = $1{,}248.10^{21}$ bq

Problema 8º a) Indique las partículas constituyentes de los dos nucleidos $^{3}_{1}H$ y $^{3}_{2}He$ y explique qué tipo de emisión radiactiva permitiría pasar de uno a otro.

b) Calcule la energía de enlace para cada uno de los nucleidos e indique cuál de ellos es más estable.

m_{He-3}= 3,016029 u ; m_{H-3}= 3,016049 u ; m_n = 1,0086 u ; 1 u = $1{,}66\cdot 10^{-27}$ kg ; c = $3\cdot 10^{8}$ m s^{-1}

Problema 9º El $^{226}_{88}Ra$ se desintegra radiactivamente para dar $^{222}_{86}Rn$.

a) Indique el tipo de emisión radiactiva y escriba la ecuación de dicha reacción nuclear.
b) Calcule la energía liberada en el proceso.
m_{Ra} = 226,0960 u ; m_{Rn} = 222,0869 u ; m_{He} = 4,00387 u
1 u = $1{,}66\cdot 10^{-27}$ kg ; c = $3\cdot 10^{8}$ m s^{-1}

SOLUC: b) 4,88 MeV

Problema 10º a) Justificar cuantitativamente cuál de los núclidos $^{16}_{8}O$ y $^{218}_{84}Po$ es más estable.

b) En la desintegración del núcleo $^{218}_{84}Po$ se emite una partícula alfa y dos partículas beta, obteniéndose un nuevo núcleo. Indique las características de dicho núcleo resultante. ¿Qué relación existe entre el núcleo inicial y el final?
m_O = 15,994915 u ; m_{Po} = 218,009007 u ; m_p = 1,007825 u ; m_n = 1,008665 u

SOLUC: a) E(^{16}O)/A = 7,99 MeV/nucleón E(^{218}Po)/A = 7,75 MeV/nucleón

Problema 11º La actividad de ^{14}C ($T_{1/2}$ = 5700 años) de un resto arqueológico es de 120 desintegraciones por segundo. La misma masa de una muestra actual de idéntica composición posee una actividad de 360 desintegraciones por segundo.

a) Explique a que se debe dicha diferencia y calcule la antigüedad de la muestra arqueológica.
b) ¿Cuántos átomos de ^{14}C tiene la muestra arqueológica en la actualidad? ¿Tienen ambas muestras el mismo número de átomos de carbono?

SOLUC: a) 9000 años b) $3{,}098.10^{13}$

Problema 12º En un reactor tiene lugar la reacción:

$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n = ^{141}_{56}Ba + ^{92}_{Z}Kr + a\ ^{1}_{0}n$$

a) Calcule el número atómico, **Z**, del Kr, y el número de neutrones, **a**, emitidos en la reacción, indicando las leyes de conservación utilizadas para ello.
b) ¿Qué masa de $^{235}_{92}U$ se consume por hora en una central nuclear de 800 Mw, sabiendo que la energía liberada en la fisión de un átomo de $^{235}_{92}U$ es de 200 MeV?
e = $1{,}6\cdot 10^{-19}$ C ; $N_A = 6{,}02\cdot 10^{23}\ mol^{-1}$

SOLUC: a) a = 3 Z = 36 b) 35,12 g/h

Problema 13º El ^{131}I es un isótopo radiactivo que se utiliza en medicina para el tratamiento del hipertiroidismo, ya que se concentra en la glándula tiroides. Su periodo de semidesintegración es de 8 días.

a) Explique cómo ha cambiado una muestra de 20 mg de ^{131}I tras estar almacenada en un hospital durante 48 días.
b) ¿Cuál es la actividad de un microgramo de ^{131}I?
$N_A = 6{,}02\cdot 10^{23}\ mol^{-1}$

SOLUC: a) Quedan 0,3125 mg de yodo radiactivo b) $A = 4{,}6.10^{9}$ bq

Problema 14º En un proceso de desintegración el núcleo radiactivo emite una partícula **alfa**. La constante de desintegración de dicho proceso es $2\cdot 10^{-10}\ s^{-1}$.

a) Explique cómo cambian las características del núcleo inicial y escriba la ley que expresa el número de núcleos sin transformar en función del tiempo.
b) Si inicialmente había 3 moles de dicha sustancia radiactiva, ¿cuántas partículas alfa se han emitido al cabo de 925 años? ¿Cuántos moles de He se han formado después de dicho tiempo?
$N_A = 6{,}02\cdot 10^{23}\ mol^{-1}$

SOLUC: b) $1{,}8.10^{24}$ partículas α emitidas n = 2,997 moles

Problema 15º Dada la reacción nuclear de fisión:

$$ {}^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n = {}^{90}_{38}Sr + {}^{136}_{Z}Xe + a\ {}^{1}_{0}n $$

a) Halle razonadamente el número de neutrones emitidos, **a**, y el valor de **Z**.
b) ¿Qué energía se desprende en la fisión de 1 gramo de ^{235}U?
$c = 3 \times 10^{8}\ m\ s^{-1}$; $m(^{235}U) = 235{,}043944$ u ; $m(^{90}Sr) = 89{,}907167$ u ;
$m(^{136}Xe) = 135{,}\ 907294$; $m_n = 1{,}008665$ u ; $1\ u = 1{,}7 \times 10^{-27}$ kg ; $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}\ mol^{-1}$

SOLUC: a) a = 10 Z = 54 b) $5{,}9.10^{10}$ J/g = $3{,}71.10^{23}$ MeV/g

Problema 16º En la bomba de hidrógeno se produce una reacción termonuclear en la que se forma helio a partir de deuterio y de tritio.

a) Escriba la reacción nuclear.
b) Calcule la energía liberada en la formación de un átomo de helio.
$c = 3\cdot 10^{8}\ m\ s^{-1}$; $m({}^{4}_{2}He) = 4{,}0026$ u ; $m({}^{3}_{1}H) = 3{,}0170$ u ; $m({}^{2}_{1}H) = 2{,}0141$ u ; $m_p = 1{,}0078$ u ; $m_n = 1{,}0086$ u ; $1\ u = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ kg

SOLUC: b) $2{,}99.10^{-12}$ J = 18,7 MeV.

Problema 17º En una reacción nuclear se produce un defecto de masa de 0,2148 u por cada núcleo de ^{235}U fisionado.

a) Calcule la energía liberada en la fisión de 23,5 g de ^{235}U.
b) Si se producen 10^{20} reacciones idénticas por minuto, ¿cuál será la potencia disponible?
$1\ u = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ kg ; $c = 3\cdot 10^{8}\ m\ s^{-1}$; $N_A = 6{,}02\cdot 10^{23}\ mol^{-1}$

SOLUC: a) $1{,}26.10^{25}$ MeV b) 51,5 Mw

Problema 18º El ${}^{12}_{5}B$ se desintegra radiactivamente en dos etapas: en la primera el núcleo resultante es ${}^{12}_{6}C^{*}$ (* = estado excitado) y en la segunda el ${}^{12}_{6}C^{*}$ se desexcita, dando ${}^{12}_{6}C$ (estado fundamental).

a) Escriba los procesos de cada etapa, determinando razonadamente el tipo de radiación emitida en cada caso.

b) Calcule la frecuencia de la radiación emitida en la segunda etapa si la diferencia de energía entre los estados energéticos del isótopo del carbono es de 4,4 MeV.
$h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J s ; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C

SOLUC: b) $f = 1,06.10^{21}$ Hz

<u>Problema 19º</u> El isótopo del hidrógeno denominado tritio ($^{3}_{1}H$) es inestable ($T_{1/2}$ = 12,5 años) y se desintegra con emisión de una partícula beta. Del análisis de una muestra tomada de una botella de agua mineral se obtiene que la actividad debida al tritio es el 92 % de la que presenta el agua en el manantial de origen.

a) Escriba la correspondiente reacción nuclear.
b) Determine el tiempo que lleva embotellada el agua de la muestra.

SOLUC: b) 536 dias

<u>Problema 20º</u> En una muestra de madera de un sarcófago ocurren 13536 desintegraciones en un día por cada gramo, debido al ^{14}C presente, mientras que una muestra actual de madera análoga experimenta 920 desintegraciones por gramo en una hora. El período de semidesintegración del ^{14}C es de 5730 años.

a) Establezca la edad del sarcófago.
b) Determine la actividad de la muestra del sarcófago dentro de 1000 años.

SOLUC: a) 4000 años b) 0,14 bq

<u>Problema 21º</u> El núcleo radiactivo $^{232}_{92}U$ se desintegra, emitiendo partículas alfa, con un período de semidesintegración de 72 años.

a) Escriba la ecuación del proceso de desintegración y determine razonadamente el número másico y el número atómico del núcleo resultante.
b) Calcule el tiempo que debe transcurrir para que su masa se reduzca al 75 % de la masa original.

SOLUC: b) 30 años

<u>Problema 22º</u> Considere la reacción nuclear:

$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{133}_{51}Sb + ^{99}_{41}Nb + 4\ ^{1}_{0}n$$

a) Explique de qué tipo de reacción se trata y determine la energía liberada por átomo de Uranio.

b) ¿Qué cantidad de $^{235}_{92}U$ se necesita para producir 10^{6} kWh ?

$c = 3 \cdot 10^{8}$ m s^{-1} ; $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1} ; m_U = 235,128 u;
m_{Sb} = 132,942 u ; m_{Nb} = 98,932 u ; m_n = 1,0086 u ; 1 u = $1,66 \cdot 10^{-27}$ kg

SOLUC: a) $3,41.10^{-11}$ J/núcleo de uranio fisionado b) 41,32 g

<u>Problema 23º</u> Imagine una central nuclear en la que se produjera energía a partir de la siguiente reacción nuclear:

$$4\ ^{4}_{2}He \rightarrow ^{16}_{8}O$$

a) Determine la energía que se produciría por cada kilogramo de helio que se fusionase.
b) Razone en cuál de los dos núcleos anteriores es mayor la energía de enlace por nucleón.

$c = 3 \cdot 10^{8}$ m s^{-1} ; 1 u = $1,66 \cdot 10^{-27}$ kg; m ($^{4}_{2}He$) = 4,0026 u ;

m($^{16}_{8}O$) = 15,9950 u; m_p = 1,007825 u ; m_n = 1,008665 u

Problema 24º La fisión de un átomo de $^{235}_{92}U$ se produce por captura de un neutrón, siendo los productos principales de este proceso $^{144}_{56}Ba$ y $^{90}_{36}Kr$.

a) Escriba y ajuste la reacción nuclear correspondiente y calcule la energía desprendida por cada átomo que se fisiona.

c) En una determinada central nuclear se liberan mediante fisión $45\cdot10^8$ W. Determine la masa de material fisionable que se consume cada día.

$c = 3\cdot10^8$ m.s^{-1} ; m(U) = 235,12 u ; m(Ba) = 143,92 u ; m(Kr) = 89,94 u ;
m_n = 1,008665 u ; 1 u = $1,7\cdot10^{-27}$ kg

SOLUC: a) Se liberan dos neutrones $3,85.10^{-11}$ J/núcleo fisionado b) 3,9kg

Problema 25º Un núcleo de $^{226}_{88}Ra$ emite una partícula alfa y se convierte en un núcleo de $^{A}_{Z}Rn$

d) Escriba la reacción nuclear correspondiente y calcule la energía liberada en el proceso.

e) Si la constante de desintegración del $^{226}_{88}Ra$ es de $1,37\cdot10^{-11}$ s^{-1}, calcule el tiempo que debe transcurrir para que una muestra reduzca su actividad a la quinta parte

$c = 3\cdot10^8$ ms^{-1}; 1 u = $1,67\cdot10^{-27}$ kg ; m(Ra) = 226,025406 u ; m(Rn) = 222,017574 u ; m(He)= 4,002603 u

SOLUC: a) $7,81.10^{-13}$ J/núcleo b) 3725 años

Problema 26º Entre unos restos arqueológicos de edad desconocida se encuentra una muestra de carbono en la que sólo queda una octava parte del carbono ^{12}C que contenía originalmente. El periodo de semidesintegración del ^{12}C es de 5730 años.

a) Calcule la edad de dichos restos.

b) Si en la actualidad hay 10^{12} átomos de ^{12}C en la muestra, ¿cuál es su actividad?

SOLUC: a) 17328 años b) $1,2.10^8$ desintegraciones/año

Problema 27º En la explosión de una bomba de hidrógeno se produce la reacción:

$$^{2}_{1}H + ^{3}_{1}H \rightarrow ^{4}_{2}He + ^{1}_{0}n$$

a) Defina defecto de masa y calcule la energía de enlace por nucleón del $^{4}_{2}He$.

b) Determine la energía liberada en la formación de un átomo de helio.

$c = 3\cdot10^8$ m s^{-1}; 1 u =$1,67\cdot10^{-27}$ kg ; m($^{2}_{1}H$) = 2,01474 u ; m($^{3}_{1}H$) = 3,01700 u;
m($^{4}_{2}He$) = 4,002603 u ; m($^{1}_{0}n$) =1,008665 u ; m($^{1}_{1}p$) =1,007825 u

SOLUC: a) 7 MeV/nucleón b) 19,23 MeV

Problema 28º En las estrellas de núcleos calientes predominan las fusiones del denominado ciclo de carbono, cuyo último paso consiste en la fusión de un protón con nitrógeno $^{15}_{7}N$ para dar $^{12}_{6}C$ y un núcleo de helio.

a) Escriba la reacción nuclear.

b) Determine la energía necesaria para formar 1 kg de $^{12}_{6}C$.

$c = 3\cdot10^8$m s^{-1} ; m($^{1}_{1}H$) = 1,007825 u ; m ($^{15}_{7}N$) = 15,000108 u ; m($^{12}_{6}C$)=12,000000 u ; m($^{4}_{2}He$) = 4,002603 u ; u = $1,7\cdot10^{-27}$ kg

SOLUC: a) b) $4,0899.10^{13}$ J/kg

Problema 29º El isótopo ${}^{235}_{92}U$, tras diversas desintegraciones α y β, da lugar al isótopo ${}^{207}_{82}Pb$.

a) Describa las características de esas dos emisiones radiactivas y calcule cuántas partículas α y cuántas β se emiten por cada átomo de ${}^{207}_{82}Pb$ .formado.

b) Determine la actividad inicial de una muestra de 1 g de ${}^{235}_{92}U$, sabiendo que su periodo de semidesintegración es $7\cdot10^{8}$ años. ¿Cuál será la actividad de la muestra ${}^{235}_{92}U$, transcurrido un tiempo igual al periodo de semidesintegración?

$N_A = 6{,}02\cdot10^{23}$ mol^{-1} ; m (${}^{235}_{92}U$) = 235,07 u

SOLUC: a) 7 α y 4 β b) $A_0 = 2{,}54.10^{12}$ desintegraciones/año $A = A_0/2 = 1{,}27.10^{12}$ desintegraciones/año

Problema 30º En el accidente de la central nuclear de Fukushima I se produjeron emisiones de yodo y cesio radiactivos a la atmósfera. El periodo de semidesintegración del ${}^{137}_{55}Cs$ es 30,23 años.

a) Explique qué es la constante de desintegración de un isótopo radiactivo y calcule su valor para el ${}^{137}_{55}Cs$.

b) Calcule el tiempo, medido en años, que debe transcurrir para que la actividad del ${}^{137}_{55}Cs$ se reduzca a un 1 % del valor inicial.

SOLUC: a) 0,023 $años^{-1}$ b) 200,22 años