1). Sean las matrices A y B

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Hallar la matriz X que verifica la igualdad : $2X - A.B = A^2$

RESOLUCIÓN:

$$2X - A \cdot B = A^2$$

Se trata de una ecuación matricial de primer grado que resolvemos despejando X, para lo cual:

Primero sumamos $A \cdot B$ a los dos miembros:

$$2X = A^2 + A \cdot B$$

Y a continuación los multiplicamos por $\frac{1}{2}$:

$$X = \frac{1}{2}(A^2 + A \cdot B)$$

Sustituyendo A y B por las matrices que representan y efectuando las operaciones indicadas obtenemos el valor de X:

$$X = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 15 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/2 & 3 \\ 3/2 & 3 \end{pmatrix}$$

1.

MATRICES

Selectividad - Extremadura

Junio 1996

Conocimientos específicos:

- Operaciones con matrices:
  - · Suma de matrices.
  - · Producto de número por matriz.
  - · Producto de matrices.

Comprobamos que, efectivamente, se cumple que $2X - A \cdot B = A^2$

$$2X - A \cdot B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 15/2 & 3 \\ 3/2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A^2. \text{ Verrificado.}$$

Respuesta:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 15/2 & 3 \\ 3/2 & 3 \end{pmatrix}}$$

1). Determinar las matrices A y B sabiendo que:

$$A-2B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix} \quad y \quad 2A+B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓN:

$$A-2B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix} \qquad 2A+B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$$

Se trata de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que resolveremos por el método de reducción, para lo cual:

A la primera ecuación le sumamos el doble de la segunda. Esta combinación lineal de las dos ecuaciones tiene A como única incógnita.

En efecto:

$$\left\{\begin{aligned} A-2B&=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}\\ 4A+2B&=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 6 & -4\end{pmatrix}\end{aligned}\right.$$

$$5A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow A=\begin{pmatrix}3/5 & 4/5\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

2.

MATRICES

Selectividad - Extremadura

Septiembre 1996

Conocimientos específicos:

- Operaciones con matrices:
  - · Suma de matrices.
  - · Producto de número por matriz.
  - · Producto de matrices.

Sustituyendo este resultado en la segunda ecuación y despejando B obtenemos:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} -6/5 & -3/5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que estos resultados verifican las dos ecuaciones propuestas:

$$A - 2B = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -6/5 & -3/5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12/5 & 6/5 \\ -2 & +4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ se cumple la 1}^{\text{a}}$$

$$2A + B = 2\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6/5 & -3/5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{y, también, se cumple la 2}^{\text{a}}$$

Respuesta:

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -6/5 & -3/5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}$$

1) Dadas las matrices A y B

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

hallar la matriz X que verifica la igualdad:

$$A.B - 2X = A + 3B$$

RESOLUCIÓN:

$$A \cdot B - 2X = A + 3B$$

Se trata de una ecuación matricial de primer grado que resolvemos despejando X, para lo cual:

Primero restamos $A \cdot B$ a los dos miembros:

$$-2X = A + 3B - AB$$

Y, a continuación, los multiplicamos por $\frac{-1}{2}$

$$X = -\frac{1}{2}(A + 3B - AB)$$

Sustituyendo A y B por las matrices que representan y efectuando las operaciones indicadas obtenemos el valor de X:

3.

MATRICES

Selectividad - Extremadura

Junio 1997

Conocimientos específicos:

- Operaciones con matrices:
  - · Suma de matrices.
  - · Producto de número por matriz.
  - · Producto de matrices.

$$X = -\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\right] = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1/2 & -11/2 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que, efectivamente, se cumple que $A \cdot B - 2X = A + 3B$

$$A \cdot B - 2X = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1/2 & -11/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A + 3B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} \text{ Verificado.}$$

Respuesta:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1/2 & -11/2 \end{pmatrix}}$$

1) Determinar la matriz X que verifica la ecuación :

$$A^2 - X = A.B$$

siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

RESOLUCIÓN:

$$A^2 - X = A \cdot B \quad \Rightarrow \quad -X = -A^2 + AB \quad \Rightarrow \quad X = A^2 - A \cdot B \quad \Rightarrow \quad X = A \cdot (A - B)$$

Sustituyendo A y B por las matrices que representan y efectuando las operaciones indicadas obtenemos el valor de X:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

4.
MATRICES
Selectividad - Extremadura
Septiembre 1997

Conocimientos específicos:

- Operaciones con matrices:
  - · Suma de matrices.
  - · Producto de número por matriz.
  - · Producto de matrices.

Comprobamos que se cumple $A^2 - X = A \cdot B$

$$A^2 - X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$. Verificado.

Respuesta:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}}$$

5.

MATRICES

Selectividad - Extremadura

Junio 1998

1) Determinar la matriz X que satisface la ecuación:

$$3X + I = A.B - A^2$$

siendo :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

e I ***la matriz unidad de orden 3***

RESOLUCIÓN:

$$3X + I = A{\cdot}B - A^2 \quad \Rightarrow \quad 3X = A{\cdot}B - A^2 - I \quad \Rightarrow \quad X = \frac{1}{3}{\cdot}\left(A{\cdot}B - A^2 - I\right) \quad \text{por tanto:}$$

$$X = \frac{1}{3}{\cdot}\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}{\cdot}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}{\cdot}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}{\cdot}\left[\begin{pmatrix} 9 & 5 & -3 \\ 7 & 6 & 1 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 1 & 5 \\ 7 & 5 & 10 \\ 5 & 5 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3}{\cdot}\begin{pmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/3 & -8/3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Conocimientos específicos:

- Matriz unidad o identidad.
- Operaciones con matrices:
  - · Suma de matrices.
  - · Producto de número por matriz.
  - · Producto de matrices.

Comprobación de que se cumple $3X + I = A{\cdot}B - A^2$

$$3X + I = 3\cdot\begin{pmatrix} -1/3 & 4/3 & -8/3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A{\cdot}B - A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 5 & -3 \\ 7 & 6 & 1 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 1 & 5 \\ 7 & 5 & 10 \\ 5 & 5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$. Comprobado.

Respuesta:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/3 & -8/3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}$$

1) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Hallar la matriz $(A - 3I)^2 + B^t$ *, (B^t es la matriz traspuesta de B e I la matriz identidad)*

b) Hallar, si es posible, la matriz inversa de A

Justificar las respuestas.

RESOLUCIÓN:

a) Para hallar la matriz $(A-3I)^2 + B^t$ efectuamos, ordenadamente, las operaciones:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 3I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A-3I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A-3I)^2 = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 8 & -2 \\ 4 & 22 & -10 \\ -10 & -17 & 7 \end{pmatrix} \text{ y como } B^t = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Sumando estas dos matrices obtenemos la solución:

$$\boxed{(A-3I)^2 + B^t = \begin{pmatrix} 14 & 11 & -1 \\ 4 & 24 & -8 \\ -9 & -18 & 4 \end{pmatrix}}$$

6.

MATRICES

Selectividad - Extremadura

Septiembre 1998

Conocimientos específicos:

- Matriz unidad o identidad.
- Matriz traspuesta
- Operaciones con matrices:
  - · Suma de matrices.
  - · Producto de número por matriz.
  - · Producto de matrices.
- Concepto de matrices inversas.
- Cálculo de la matriz inversa de una dada.
  - · Determinante de una matriz.
  - · Matriz adjunta.

b) Existirá A^{-1}, inversa de *A*, si $|A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)\cdot 2 + 0\cdot 3\cdot 0 + 2\cdot(-1)\cdot 2 - 0\cdot(-1)\cdot 2 - 2\cdot 3\cdot(-1) - 2\cdot(-1)\cdot 0 = 4 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

Para hallar A^{-1} utilizaremos la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(A^t) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & +2 & -2 \\ 4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que $A^{-1} = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} -8 & +2 & -2 \\ 4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}}$

Podemos comprobar que se verifica $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I$

Tiempo máximo de la prueba:

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad 2A + B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Justificar la respuesta.

Se pide "*determinar las matrices A y B que son soluciones del sistema matricial dado*"

RESOLUCIÓN:

Lo haremos por el método de reducción:

$$E_1 + 2E_2 \Rightarrow 7 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ -7 & 21 & 14 \\ 35 & -14 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo la matriz A en E_2 y despejando B obtenemos:

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

7.

MATRICES

Selectividad - Extremadura

Junio 1999

Conocimientos específicos:

- Operaciones con matrices:
  - · Suma de matrices.
  - · Producto de número por matriz.
  - · Producto de matrices.

Comprobamos los resultados obtenidos sustituyéndolos en las ecuaciones originales:

$$3A-2B=3\cdot\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&3&2\\5&-2&0\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}3&-1&2\\-4&0&3\\0&-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&5&-4\\5&9&0\\15&-4&4\end{pmatrix}\Rightarrow \text{Se verifica la primera.}$$

$$2A+B=2\cdot\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&3&2\\5&-2&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&-1&2\\-4&0&3\\0&-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&1&2\\-6&6&7\\10&-5&-2\end{pmatrix}\Rightarrow \text{También la segunda.}$$

Respuesta:

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&3&2\\5&-2&0\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad B=\begin{pmatrix}3&-1&2\\-4&0&3\\0&-1&-2\end{pmatrix}}$$

1.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ determinar la matriz B que verifica:

$$B - I = A^t . A^{-1}$$

siendo I ***la matriz unidad respecto al producto de matrices,*** A^t ***la matriz traspuesta de*** A ***y*** A^{-1} ***la matriz inversa de*** A

RESOLUCIÓN:

$$B - I = A^t \cdot A^{-1} \Rightarrow B = A^t \cdot A^{-1} + I$$

Siendo $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; y $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A^t)$

$$A^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} *$$

8.

MATRICES

Selectividad - Extremadura

Septiembre 1999

Conocimientos específicos:

- Matriz unidad o identidad.
- Matriz traspuesta
- Operaciones con matrices:
  - · Suma de matrices.
  - · Producto de matrices.
- Concepto de matrices inversas.
- Cálculo de la matriz inversa de una dada.
  - · Determinante de una matriz.
  - · Matriz adjunta.

Sustituyendo las matrices en la fórmula obtenemos:

$$B = A^t \cdot A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Respuesta:

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

(*) Comprobamos que A^{-1} es correcta, es decir, se cumple que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Bien}$$

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Bien.}$$

1) ***Determinar la matriz*** X ***que verifica la ecuación*** $2A.X=B$ ***donde :***

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&-1&0\\0&1&-3\end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓN:

$$2A\cdot X=B$$

Despejamos X multiplicando a los dos miembros por 1/2 y, POR LA IZQUIERDA, por A^{-1} y teniendo en cuenta la propiedad asociativa:

$$2A\cdot X=B\Rightarrow A^{-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2A\cdot X=A^{-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot B\Rightarrow X=\frac{1}{2}\cdot(A^{-1}\cdot B)$$

Hallamos A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot Adj\left(A^t\right)=\frac{1}{\begin{vmatrix}1&0&1\\-2&-1&0\\0&1&-3\end{vmatrix}}\cdot Adj\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&-1&1\\1&0&-3\end{pmatrix}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}-1&1\\0&-3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\1&-3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&-1\\1&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}-2&0\\0&-3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\1&-3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&-2\\1&0\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}-2&0\\-1&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&-2\\0&-1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=$$

9.

MATRICES

Selectividad - Extremadura

Septiembre 2000

Conocimientos específicos:

- Operaciones con matrices:
  - · Producto de número por matriz.
  - · Producto de matrices.
  - · Propiedades.
- Concepto de matrices inversas.
- Cálculo de la matriz inversa de una dada.
  - · Determinante de una matriz.
  - · Matriz adjunta.

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -6 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ Por tanto}$$

$$X = \frac{1}{2}\cdot(A^{-1}\cdot B) = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -6 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ -12 & -5 & -7 \\ -4 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3/2 & 3/2 \\ -6 & -5/2 & -7/2 \\ -2 & -1 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que se cumple $2A\cdot X = B$:

$$2A\cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 3/2 & 3/2 \\ -6 & -5/2 & -7/2 \\ -2 & -1 & -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = B. \text{ Comprobado.}$$

Respuesta:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 3 & 3/2 & 3/2 \\ -6 & -5/2 & -7/2 \\ -2 & -1 & -3/2 \end{pmatrix}}$$

10.
MATRICES
Selectividad - Extremadura
Septiembre 2001

Conocimientos específicos:

- Producto de matrices.
- Criterio de igualdad de matrices.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ***hallar las matrices*** X ***que verifiquen:*** $A.X = X.A$

Justificar la respuesta.

RESOLUCIÓN:

Se tiene que cumplir $A \cdot X = X \cdot A$

Como A tiene tres columnas, X debe tener tres filas para que exista la matriz $A \cdot X$ y como A tiene tres filas, X ha de tener tres columnas para que exista la matriz $X \cdot A$. Por tanto X es una matriz cuadrada de orden 3.

$$\text{Sea } X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = X \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ -x_{21} & -x_{22} & -x_{23} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & -x_{12}+x_{13} & 0 \\ x_{21} & -x_{22}+x_{23} & 0 \\ x_{31} & -x_{32}+x_{33} & 0 \end{pmatrix}$$

El criterio de igualdad entre matrices obliga a que se cumpla:

$$\left\{\begin{array}{lll} x_{11}=x_{11} & x_{12}=-x_{12}+x_{13} & x_{13}=0 \\ -x_{21}=x_{21} & -x_{22}=-x_{22}+x_{23} & -x_{23}=0 \\ x_{21}=x_{31} & x_{22}=-x_{32}+x_{33} & x_{23}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{lll} x_{11}\in\Re & x_{12}=0 & x_{13}=0 \\ x_{21}=0 & x_{22}\in\Re & x_{23}=0 \\ x_{31}=0 & x_{32}=x_{33}-x_{22} & x_{33}\in\Re \end{array}$$

Es decir, las matrices X que cumplen $A\cdot X = X\cdot A$, son de la forma:

$$\boxed{X=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c-b & c \end{pmatrix} \quad \forall a,b,c\in\Re}$$

Comprobación:

$$A\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c-b & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

$$X\cdot A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c-b & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

1) Resolver la ecuación matricial $A + B.X = I$

donde:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

e I **es la matriz identidad de orden tres. Justificar la respuesta.**

11.
MATRICES
Selectividad - Extremadura
Junio 2002

RESOLUCIÓN:

Para resolver la ecuación $A + BX = I$, restamos A a los dos miembros, los multiplicamos por B^{-1}, necesariamente POR LA IZQUIERDA ya que no se cumple la propiedad conmutativa y, por cumplir el producto de matrices la propiedad asociativa, quedará despejada X…

$$A + B\cdot X = I \Rightarrow B\cdot X = I - A \Rightarrow B^{-1}\cdot(B\cdot X) = B^{-1}\cdot(I - A) \Rightarrow * \Rightarrow X = B^{-1}\cdot(I - A)$$

$$*\ B^{-1}\cdot(B\cdot X) = (B^{-1}\cdot B)\cdot X = I\cdot X = X$$

Calcularemos B^{-1} por el método de Gauss:

$$(B \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2 - F_1} \\ \xrightarrow{F_3 + F_1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1 + F_2} \\ \xrightarrow{-\frac{1}{2}F_2} \\ \xrightarrow{F_3 + \frac{5}{2}F_2} \end{array}$$

Conocimientos específicos:

- Matriz unidad o identidad.
- Matriz traspuesta
- Operaciones con matrices:
  - · Suma de matrices.
  - · Producto de número por matriz.
  - · Producto de matrices.
- Concepto de matrices inversas.
- Cálculo de la matriz inversa de una dada.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -3/2 & 5/2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1-2F_3} \\ \xrightarrow{F_2+F_3} \\ \xrightarrow{-2F_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -5 & -2 \end{array}\right) = \left(I \mid B^{-1}\right)$$

Por lo tanto:

$$X = B^{-1}\cdot(I-A) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 14 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Respuesta:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 14 & 4 & 1 \end{pmatrix}}$$

Comprobación de que $A + B\cdot X = I$

$$A + B\cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 4 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 14 & 4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \Rightarrow \text{La solución es correcta}$$

1) Resolver la ecuación matricial $2A - 3X = B$ **donde:**

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -6 \\ 6 & -7 & 8 \\ 5 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

Justificar la respuesta.

12.

MATRICES

Selectividad - Extremadura

Septiembre 2002

RESOLUCIÓN:

$$2A-3X=B \;\Rightarrow\; -3X=-2A+B \;\Rightarrow\; X=-\frac{1}{3}\cdot(-2A+B) \;\Rightarrow\; X=\frac{1}{3}\cdot(2A-B)$$

$$X=\frac{1}{3}\cdot\left[\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 6 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & 5 & -6 \\ 6 & -7 & 8 \\ 5 & -9 & 1 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -9 & -3 & +6 \\ 0 & 3 & -6 \\ -3 & 9 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Respuesta:

$$\boxed{X=\begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}$$

Conocimientos específicos:

- Operaciones lineales con matrices:
  - · Suma de matrices.
  - · Producto de número por matriz

Comprobación:

$$2A-3X=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 0\\ 6 & -4 & 2\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-9 & -3 & +6\\ 0 & 3 & -6\\ -3 & 9 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 5 & -6\\ 6 & -7 & 8\\ 5 & -9 & 1\end{pmatrix}=B \quad \Rightarrow \quad \text{Cumple}$$

13.
MATRICES
Selectividad - Extremadura
Junio 2003

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ***y*** $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Determinar la matriz: $X = (A^{-1}.B^{t})^2$

donde A^{-1} ***es la matriz inversa de*** A ***y*** B^t ***es la matriz traspuesta de B. Justificar la respuesta.***

RESOLUCIÓN:

Para determinar la matriz $X = (A^{-1}\cdot B^t)^2$ necesitamos realizar cuatro pasos para obtener:

$$1^o)\ A^{-1};\quad 2^o)\ B^t;\quad 3^o)\ A^{-1}\cdot B^t;\quad 4^o)\ (A^{-1}\cdot B^t)^2$$

$$1^o)\quad (A\ |\ I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_3-F_2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{-F_2} \\ \xrightarrow{F_3+F_2} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1+F_3} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{F_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = \left(I\ \ |\ \ A^{-1}\right)$$

$$2^o)\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Conocimientos específicos:

- Matriz unidad o identidad.
- Matriz traspuesta.
- Producto de matrices.

3º) $A^{-1}\cdot B^{t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

4º) $(A^{-1}\cdot B^{t})^{2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ -6 & -6 & 16 \end{pmatrix}$

Respuesta:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ -6 & -6 & 16 \end{pmatrix}}$$

Determinar la matriz X que verifica la ecuación $B^t - A.X = A$ donde:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

y B^t es la matriz traspuesta de B. Justificar la respuesta.

RESOLUCIÓN:

Para despejar X de la ecuación $B^t - A\cdot X = A$, hacemos lo siguiente a los dos miembros:

- Restamos B^t : $\quad -A\cdot X = -B^t + A$

- Multiplicamos por -1: $\quad A\cdot X = B^t - A$

- Multiplicamos por A^{-1} POR LA IZQUIERDA (el producto de matrices no es conmutativo aunque si es asociativo): $\quad A^{-1}\cdot(A\cdot X) = A^{-1}\cdot(B^t - A)$

$$(A^{-1}\cdot A)\cdot X = \text{“} \quad \text{“}$$

$$I \cdot X = \text{“} \quad \text{“}$$

$$X = A^{-1}\cdot(B^t - A)$$

14.

MATRICES

Selectividad - Extremadura

Septiembre 2003

Conocimientos específicos:

- Matriz unidad o identidad.
- Matriz traspuesta
- Operaciones con matrices:
  - · Suma de matrices.
  - · Producto de número por matriz.
  - · Producto de matrices.
- Concepto de matrices inversas.
- Cálculo de la matriz inversa de una dada.
  - · Determinante de una matriz.
  - · Matriz adjunta.

$$A^{-1}=\frac{1}{A}\cdot Adj(A^t)=\frac{1}{\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&-1&0\\1&1&0\end{vmatrix}}\cdot Adj\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\-1&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}-1&1\\0&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\-1&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&-1\\-1&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&1\\-1&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\-1&0\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}0&1\\-1&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\0&-1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=$$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&-1&0\\-1&1&1\end{pmatrix}$ y como $B^t=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&3\\0&1&1\end{pmatrix}$ sustituimos en $X=A^{-1}\cdot(B^t-A)$ resultando:

$$X=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&-1&0\\-1&1&1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&3\\0&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&-1&0\\-1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&3\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&4\\-1&-2&-3\\-1&2&2\end{pmatrix}$$

Respuesta:

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}0&2&4\\-1&-2&-3\\-1&2&2\end{pmatrix}}$$

Comprobación de que se cumple $B^t-A\cdot X=A$

$$\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&3\\0&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&2&4\\-1&-2&-3\\-1&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&3\\0&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&3\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$$

Cálculo de A^{-1} por el método de Gauss:

$$(A\ |\ I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\0&-1&0&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}\xrightarrow{F_1}\\\xrightarrow{F_2}\\\xrightarrow{F_3-F_1}\end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\0&-1&0&0&1&0\\0&1&1&-1&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}\xrightarrow{F_1}\\\xrightarrow{-F_2}\\\xrightarrow{F_3+F_2}\end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right)\begin{matrix}\xrightarrow{F_1+F_3}\\\xrightarrow{F_2}\\\xrightarrow{F_3}\end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&1\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right)=(I\ |\ A^{-1})$$

Determinar las matrices A y B que verifican:

$$2A - B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad , \quad A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Justificar la respuesta.

RESOLUCIÓN:

Para resolver el sistema: $\begin{cases} 2A - B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \\ \\ A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$ Emplearemos el método de doble reducción:

Eliminamos B haciendo $2E_1+E_2$, $\quad 5A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 10 \\ 15 & 5 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Para eliminar A hacemos $-E_1+2E_2$, $\quad 5B = \begin{pmatrix} 10 & -5 & -15 \\ 0 & 10 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Comprobamos estos resultados en el sistema inicial:

15.
MATRICES
Selectividad - Extremadura
Septiembre 2004

Conocimientos específicos:

- Operaciones lineales con matrices:
  - · Suma de matrices.
  - · Producto de número por matriz.

$$\begin{cases} 2\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$ Se cumplen ambas igualdades.

Respuesta:

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ m & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ***se pide:***

a) ¿Para qué valor o valores de m no existe la matriz inversa de A

b) Determinar la matriz inversa de A cuando $m = 2$

Justificar la respuesta.

RESOLUCIÓN:

La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ m & 1 & -2 \end{pmatrix}$ no tiene inversa si su rango es menor que su orden (3 en este caso) es decir si su filas no son linealmente independientes entre sí, en cuyo caso $|A| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ m & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -6 + 6m + 3m - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 9m - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 1$$

Respuesta *a)*:

$\boxed{A \text{ no tiene inversa, únicamente, para } m = 1}$

$\forall m \neq 1 \Rightarrow \quad \exists A^{-1}$. En concreto, para $m = 2$:

16.

MATRICES

Selectividad - Extremadura

Junio 2005

Conocimientos específicos:

- Concepto de matrices inversas.
- Cálculo de la matriz inversa de una dada.
  - · Determinante de una matriz.
  - · Matriz adjunta.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&3&3\\2&1&-2\end{pmatrix}$$ y se nos pide hallar $$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$$

$|A| = 9\cdot 2 - 9 = 9$

$$A^t=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&3&1\\-1&3&-2\end{pmatrix}\Rightarrow Adj(A^t)=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}3&1\\3&-2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2&1\\-1&-2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2&3\\-1&3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0&2\\3&-2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&2\\-1&-2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&0\\-1&3\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0&2\\3&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&0\\2&3\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9&3&9\\6&0&-3\\-6&3&3\end{pmatrix}$$

Por lo que: $$A^{-1}=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}-9&3&9\\6&0&-3\\-6&3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1/3&1\\2/3&0&-1/3\\-2/3&1/3&1/3\end{pmatrix}$$

Comprobamos que $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&3&3\\2&1&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1/3&1\\2/3&0&-1/3\\-2/3&1/3&1/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}-1&1/3&1\\2/3&0&-1/3\\-2/3&1/3&1/3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&3&3\\2&1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

Respuesta *b)*:

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1/3&1\\2/3&0&-1/3\\-2/3&1/3&1/3\end{pmatrix}}$$

17.
MATRICES
Selectividad - Extremadura
Septiembre 2005

OPCION B

1) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -3\end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

determinar la matriz X ***que verifica la ecuación*** $A.X=B.C$ ***Justificar la respuesta.***

RESOLUCIÓN:

Podríamos resolver la ecuación despejando X –multiplicaríamos a los dos miembros (por la izquierda) por A^{-1} que, obviamente, tendríamos que calcular previamente– pero, como la matriz X es pequeña, hallaremos los cuatro números que la componen efectuando los productos de ambos miembros de la ecuación e igualando entre sí los elementos de igual posición:

Consideremos $X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}$; sustituyendo A, B, C y X por las matrices que representan y efectuando las multiplicaciones:

$$\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}-2x_{11}-x_{21} & -2x_{12}-x_{22}\\ x_{11}+x_{21} & x_{12}+x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

El criterio de igualdad entre matrices obliga a que:

$$\begin{matrix}-2x_{11}-x_{21}=5 & -2x_{12}-x_{22}=2\\ x_{11}+x_{21}=1 & x_{12}+x_{22}=1\end{matrix}$$ sistema de ecuaciones cuya solución es:

$$\begin{matrix}x_{11}=-6 & x_{12}=-3\\ x_{21}=7 & x_{22}=4\end{matrix}$$

Conocimientos específicos:

- Producto de matrices.
- Igualdad de matrices.

Por lo tanto:

Respuesta:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}}$$

Comprobación:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ 3 & -2 & z \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 11 & -6 & -1 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ determinar los valores de x, y, z que hacen posible la igualdad matricial $A{\cdot}B = A+C$. Justificar la respuesta

RESOLUCIÓN:

Para encontrar los valores de x, y, z que aparecen en la matriz B y que hacen que se cumpla la igualdad $A{\cdot}B = A+C$ todo lo que hay que hacer es, 1, efectuar las operaciones que aparecen en los dos miembros, 2, igualar entre sí los elementos que ocupan la misma posición en las matrices obtenidas y, 3, resolver el sistema resultante.

$$A{\cdot}B = A+C$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ 3 & -2 & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 11 & -6 & -1 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectuamos las operaciones:

$$\begin{pmatrix} 2x+y & 1 & 2 \\ -x+9 & -6 & -1+3z \\ x+y-6 & 5 & 1-2z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 10 & -6 & 2 \\ -5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

18.

MATRICES

Selectividad - Extremadura

Junio 2006

Conocimientos específicos:

- Suma de matrices.
- Producto de matrices.
- Igualdad de matrices.

Que las matrices de ambos miembros sean iguales obliga a que:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y=0 \\ -x+9=10 \\ -1+3z=2 \\ x+y-6=-5 \\ 1-2z=-1 \end{array}\right\} \quad \text{Sistema cuya solución es:} \quad \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=2 \\ z=1 \end{array}\right.$$

Comprobación:

$$x=-1,\ \ y=2,\ \ z=1 \ \Rightarrow B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 10 & -6 & 2 \\ -5 & 5 & -1 \end{pmatrix}=A+C$$

Respuesta:

$$\boxed{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=2 \\ z=1 \end{array}}$$

19.

MATRICES

Selectividad - Extremadura

Septiembre 2006

Conocimientos específicos:

- Suma de matrices.
- Producto de matrices.
- Igualdad de matrices.

Determinar la matriz X que verifica la ecuación matricial $A \cdot X + B = C$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Justificar la respuesta.

RESOLUCIÓN:

La matriz X tiene que tener dimensión 2x3 para que se puedan realizar las operaciones del primer miembro de la igualdad.

$$\text{Sea } X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}$$

Se tiene que cumplir:

$$A \cdot X + B = C$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Efectuando las operaciones del primer miembro:

$$\begin{pmatrix} 3x_{11} + 5x_{21} - 1 & 3x_{12} + 5x_{22} & 3x_{13} + 5x_{23} + 1 \\ -x_{11} - 2x_{21} + 2 & -x_{12} - 2x_{22} + 1 & -x_{13} - 2x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Para que estas dos matrices sean iguales se tiene que verificar:

$$\begin{array}{llllll} 3x_{11}+5x_{21}-1=1 & (E_1) & 3x_{12}+5x_{22}=-1 & (E_3) & 3x_{13}+5x_{23}+1=2 & (E_5) \\ -x_{11}-2x_{21}+2=0 & (E_2) & -x_{12}-2x_{22}+1=1 & (E_4) & -x_{13}-2x_{23}=3 & (E_6) \end{array}$$

Sistema de tres pares de ecuaciones con dos incógnitas que resolvemos por reducción:

($3E_2 + E_1$): $-x_{21}+5=1 \Rightarrow x_{21}=4$ $\Rightarrow$ Sustituyendo en *(E_2)*: $-x_{11}-8+2=0 \Rightarrow x_{11}=-6$

($3E_4 + E_3$): $-x_{22}+3=2 \Rightarrow x_{22}=1$ $\Rightarrow$ Sustituyendo en *(E_4)*: $-x_{12}-2+1=1 \Rightarrow x_{12}=-2$

($3E_6 + E_5$): $-x_{23}+1=11 \Rightarrow x_{23}=-10$ $\Rightarrow$ Sustituyendo en *(E_6)*: $-x_{13}+20=3 \Rightarrow x_{13}=17$

La matriz X es, por lo tanto, $X=\begin{pmatrix}-6 & -2 & 17 \\ 4 & 1 & -10\end{pmatrix}$

Comprobamos si se cumple que $A\cdot X + B = C$

$$A\cdot X + B = \begin{pmatrix}3 & 5 \\ -1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6 & -2 & 17 \\ 4 & 1 & -10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}= C.$$ Se cumple.

Respuesta:

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-6 & -2 & 17 \\ 4 & 1 & -10\end{pmatrix}}$$

Determinar la matriz X que verifica la ecuación $A^2 \cdot X - B = A \cdot X$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ Justificar la respuesta

RESOLUCIÓN:

Para despejar X en la ecuación $A^2 \cdot X - B = A \cdot X$, tendremos en cuenta que el producto de matrices cumple la propiedad asociativa y la distributiva respecto a la suma, pero que no cumple la propiedad conmutativa:

$$\begin{aligned}
A^2 \cdot X - B &= A \cdot X \\
A^2 \cdot X - A \cdot X &= B \\
(A^2 - A) \cdot X &= B \\
(A^2 - A)^{-1} \cdot [(A^2 - A) \cdot X] &= (A^2 - A)^{-1} \cdot B \\
[(A^2 - A)^{-1} \cdot (A^2 - A)] \cdot X &= (A^2 - A)^{-1} \cdot B \\
I \cdot X &= (A^2 - A)^{-1} \cdot B \\
X &= (A^2 - A)^{-1} \cdot B
\end{aligned}$$

Hallaremos $(A^2 - A)$ para luego obtener su inversa y multiplicarla por B:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

20.

MATRICES

Selectividad - Extremadura

Junio 2007

Conocimientos específicos:

- Operaciones con matrices:
  - · Suma de matrices.
  - · Producto de número por matriz.
  - · Producto de matrices. Propiedades.
- Cálculo de la matriz inversa de una dada.

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Su inversa la calcularemos por el método de Gauss (las trasformaciones elementales que convierten una matriz en la matriz unidad, convierten a ésta, en la inversa de aquella):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \xrightarrow{F_2-2F_1} \\ \xrightarrow{F_3-F_1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1+\frac{1}{2}F_2} \\ \xrightarrow{\frac{1}{2}F_2} \\ \xrightarrow{F_3-F_2} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1+\frac{1}{2}F_3} \\ \xrightarrow{F_2} \\ \xrightarrow{\frac{1}{2}F_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right).$$

Por lo tanto:

$$X = (A^2 - A)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -3/2 & 5/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Respuesta:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -3/2 & 5/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}}$$

Determinar la matriz X solución de la ecuación matricial $A.X.B = I$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Justificar la respuesta.

21.
MATRICES
Selectividad - Extremadura
Septiembre 2008

Conocimientos específicos:

- Producto de matrices. Propiedades.
- Cálculo de la matriz inversa de una dada.

RESOLUCIÓN:

$$A \cdot X \cdot B = I \quad \Rightarrow \quad A^{-1} \cdot (A \cdot X \cdot B) \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot I \cdot B^{-1} \xrightarrow{\ *\ } \boxed{X = A^{-1} \cdot B^{-1}}$$

(*) Por la propiedad asociativa del producto: $A^{-1} \cdot (A \cdot X \cdot B) \cdot B^{-1} = (A^{-1} \cdot A) \cdot X \cdot (B \cdot B^{-1}) = I \cdot X \cdot I = X$
(el producto de dos matrices inversas entre sí es igual a la matriz I, elemento neutro del producto).

Cálculo de A^{-1} por el método de Gauss-Jordan: $(A \mid I) \rightarrow (I \mid A^{-1})$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{Bmatrix} -F_1 \\ F_2 + F_1 \end{Bmatrix} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \\ \frac{1}{3} F_2 \end{Bmatrix} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 + 2F_2 \\ F_2 \end{Bmatrix} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de B^{-1}: $(B \mid I) \rightarrow (I \mid B^{-1})$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{Bmatrix} -F_2 \\ F_1 \end{Bmatrix} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 + 2F_2 \\ F_2 \end{Bmatrix} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}\cdot B^{-1} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Comprobación de que $A\cdot X\cdot B = I$:

$$A\cdot X\cdot B = (A\cdot X)\cdot B = \left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -1/3 \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Solución:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -1/3 \end{pmatrix}}$$

1. Determinar las matrices A y B que son soluciones del siguiente sistema matricial:

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad 2A + B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Justificar la respuesta.

22.
MATRICES
CONTROL 1 (Curso 07-08)
27 SEP 07

Conocimientos específicos:

- Operaciones con matrices:
  - · Suma de matrices.
  - · Producto de número por matriz.
  - · Producto de matrices.

Lo resolveremos por el método de reducción:

Si llamamos E_1 a la primera ecuación y E_2 a la segunda, tenemos que:

$$E_1 + 2E_2 \Rightarrow 7 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ -7 & 21 & 14 \\ 35 & -14 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo la matriz A en E_2 y despejando B obtenemos:

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Comprobamos los resultados obtenidos sustituyéndolos en las ecuaciones originales:

$$3A - 2B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Se verifica la primera.}$$

$$2A+B=2\cdot\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&3&2\\5&-2&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&-1&2\\-4&0&3\\0&-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&1&2\\-6&6&7\\10&-5&-2\end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ También la segunda.

Respuesta:

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&3&2\\5&-2&0\end{pmatrix}\text{ y }B=\begin{pmatrix}3&-1&2\\-4&0&3\\0&-1&-2\end{pmatrix}}$$

2. Halla razonadamente el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -5 \\ 3 & 11 & 11 \end{pmatrix}$

e indica lo que significa dicho valor.

23.

MATRICES

CONTROL 1 (Curso 07-08)

27 SEP 07

Conocimientos específicos:

Rango de una matriz. Concepto y cálculo.

Hallaremos el rango de la matriz por el método de Gauss, para ello obtendremos una matriz escalonada equivalente a A haciendo en ésta trasformaciones elementales. El número de filas no nulas de la matriz escalonada será el rango de A.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -5 \\ 3 & 11 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & 11 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 3F_1]{F_2 \to F_2 - 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 10 & 13 \\ 0 & 20 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 10 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto: *Rang (A) = 2*

Respuesta:

El rango de la matriz A es 2 lo que significa que tiene dos filas linealmente independientes entre sí y la otra es una combinación lineal de ellas.

24.
MATRICES
CONTROL 2 (Curso 07-08)
04 OCT 07

1) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Hallar la matriz $(A - 3I)^2 + B^t$ *, (B^t es la matriz traspuesta de B e I la matriz identidad)*

b) Hallar, si es posible, la matriz inversa de A

Justificar las respuestas.

RESOLUCIÓN:

a) Para hallar la matriz $(A-3I)^2 + B^t$ efectuamos, ordenadamente, las operaciones:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 3I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A-3I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A-3I)^2 = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 8 & -2 \\ 4 & 22 & -10 \\ -10 & -17 & 7 \end{pmatrix} \text{ y como } B^t = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Sumando estas dos matrices obtenemos la solución:

$$\boxed{(A-3I)^2 + B^t = \begin{pmatrix} 14 & 11 & -1 \\ 4 & 24 & -8 \\ -9 & -18 & 4 \end{pmatrix}}$$

Conocimientos específicos:

- Matiz identidad.
- Matriz traspuesta.
- Operaciones con matrices:
  - · Suma de matrices.
  - · Producto de número por matriz.
  - · Producto de matrices.

b) Existirá A^{-1}, inversa de A, si $|A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)\cdot 2 + 0\cdot 3\cdot 0 + 2\cdot(-1)\cdot 2 - 0\cdot(-1)\cdot 2 - 2\cdot 3\cdot(-1) - 2\cdot(-1)\cdot 0 = 4 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

Para hallar A^{-1} utilizaremos la fórmula $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(A^t) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & +2 & -2 \\ 4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que $A^{-1} = \dfrac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} -8 & +2 & -2 \\ 4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}}$

25.
MATRICES
CONTROL 3 (Curso 07-08)
11 OCT 07

Halla razonadamente para qué valores de m la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 1 & -2 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$ *tiene rango 1, 2 y 3, respectivamente.*

Conocimientos específicos:

- Rango de una matriz. Concepto y cálculo.

RESPUESTA

El rango de una matriz es el número de filas linealmente independientes entre sí

M no puede tener rango 1 para ningún valor de m puesto que la fila 2 es linealmente independiente de la 1, al no ser proporcional a ella, es decir, no existe un número k para el que $F_2 = k \cdot F_1$, por lo tanto el mínimo rango que tiene M es 2, cosa que ocurrirá si F_3 es una combinación lineal de F_1 y F_2 en cuyo caso $|M| = 0$;

M tendrá rango 3, es decir, las tres filas serán linealmente independientes entre sí, si $|M| \neq 0$

$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 1 & -2 \\ 0 & m & 1 \end{vmatrix} = m^2 + 2m + 1$ y para que $m^2 + 2m + 1 = 0$ tiene que ser $m = -1$ por lo tanto:

Respuesta:

- Rango de M $= 1$ no se verifica para ningún valor de m.
- Rango de M $= 2$ para $m = -1$
- Rango de M $= 3$ $\forall m \neq -1$

Halla razonadamente la matriz X que verifica $A \cdot X = B$ *siendo* $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

26.
MATRICES
CONTROL 3 (Curso 07-08)
11 OCT 07

Conocimientos específicos:

- Operaciones con matrices:
  - · Suma de matrices.
  - · Producto de número por matriz.
  - · Producto de matrices. Propiedades.
- Cálculo de la matriz inversa de una dada.

Se trata de una ecuación matricial que resolveremos despejando X para lo cuál multiplicaremos a los dos miembros, por la izquierda ya que no se cumple la propiedad conmutativa, por la inversa de A y en virtud de la propiedad asociativa del producto de matrices y de que el producto de una matriz por su inversa es la matriz unidad, elemento neutro del producto, quedará despejada la X.

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \Rightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Cálculo de A^{-1}:

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \ y \ A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A^t) = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-23} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -14 & -3 \\ -6 & 8 & 5 \\ 5 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto: $X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -1 & -14 & -3 \\ -6 & 8 & 5 \\ 5 & 1 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -11 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\boxed{X = \begin{pmatrix} 7/23 \\ -4/23 \\ 11/23 \end{pmatrix}}$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7/23 \\ -4/23 \\ 11/23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$ Se verifica que $A \cdot X = B$

Determina la matriz X para la que se verifica: $A^2X = \frac{1}{2}(A + B \cdot C^t)$

Siendo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

27.

MATRICES

CONTROL 7 (Curso 07-08)

EXAMEN GLOBAL PRIMERA EVALUACIÓN.

28 NOV 07

Conocimientos específicos:

- Operaciones con matrices:
  - · Suma de matrices.
  - · Producto de número por matriz.
  - · Producto de matrices. Propiedades.
- Cálculo de la matriz inversa de una dada.

$$A^2X = \frac{1}{2}(A + B \cdot C^t) \Rightarrow X = (A^2)^{-1} \cdot \frac{1}{2}(A + B \cdot C^t) = \frac{1}{2} \cdot (A^2)^{-1} \cdot (A + B \cdot C^t)$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(A^2)^{-1} = \frac{1}{|A^2|} \cdot Adj(A^2)^t = \frac{1}{4} \cdot Adj\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Además:

$$C^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \text{ por lo que } B \cdot C^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A + B \cdot C^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$X = \frac{1}{2} \cdot (A^2)^{-1} \cdot (A + B \cdot C^t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 40 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Solución: $\boxed{X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 3/2 \end{pmatrix}}$

Determina, ***razonadamente****, para qué valores de m, la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 1 & -2 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$ *tiene inversa y calcúlala para m = 0*

28.

MATRICES

CONTROL 8 (Curso 07-08)

EXAMEN de REPASO de la 1ª EVALUACIÓN

10 ENE 08

La respuesta la encontrarás en tu libro de texto,

"MATEMÁTICAS II aplicadas a las CCSS" – edebé
(Ejemplo resuelto. Pág. 65 / Ej. B.).

Conocimientos específicos:

- Cálculo de la matriz inversa de una dada.

Resuelve la ecuación $A^{-1}XB - 2CD = B^2$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$

29.
MATRICES
CONTROL 16 (Curso 07-08)
EXAMEN FINAL
20 MAYO 08

Conocimientos específicos:

- Operaciones con matrices:
  - · Suma de matrices.
  - · Producto de número por matriz.
  - · Producto de matrices. Propiedades.
- Cálculo de la matriz inversa de una dada.

Se trata de una ecuación matricial que resolveremos despejando la incógnita, X, teniendo en cuenta que el producto de matrices cumple la propiedad asociativa, pero NO la conmutativa y que el producto de una matriz por su inversa da la matriz identidad que es el elemento neutro del producto.

$$A^{-1}XB - 2CD = B^2 \quad \Rightarrow \quad A^{-1}XB = B^2 + 2CD \quad \Rightarrow \quad XB = A\cdot(B^2 + 2CD)$$

$$\Rightarrow \boxed{X = A\cdot(B^2 + 2CD)\cdot B^{-1}}$$

Cálculos:

- $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$
- $2CD = 2\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$
- $B^2 + 2CD = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 20 \\ 6 & 17 \end{pmatrix}$
- $A\cdot(B^2 + 2CD) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 & 20 \\ 6 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 74 \\ 18 & 51 \end{pmatrix}$

Obtención de B^{-1} por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F2 \to F2 - F!]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F1 \to F1 - 2F2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

- $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

- $X = A \cdot (B^2 + 2CD) \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 26 & 74 \\ 18 & 51 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 22 \\ 3 & 15 \end{pmatrix}$

Solución:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 4 & 22 \\ 3 & 15 \end{pmatrix}}$$

Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, calcula, si es posible:

a) Una matriz X tal que X · A = B.

b) Una matriz Y tal que A · Y = B^t.

30.
MATRICES
CONTROL 17 (Curso 07-08)
EXAMEN EXTRAORDINARIO
01 SEPT. 08

a) $X_{mxn} \cdot A_{3x3} = B_{1x3}$.

De existir X, tendrá tantas filas como B (m $=1$) y tantas columnas como filas tiene A (n = 3) es decir la dimensión de X será 1×3 de esta manera:

$$\underbrace{X_{1X3} \cdot A_{3X3}} = B_{1X3}$$

Despejamos X multiplicando a ambos miembros de la ecuación, POR LA DERECHA, por A^{-1} (*), resultando: $X = B \cdot A^{-1}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}$$

Puedes comprobar que $X \cdot A = B$

b) $A_{3x3} \cdot Y_{mxn} = B^t_{3x1}$.

De existir Y, tendrá tantas columnas como B^t (n = 1) y tantas filas como columnas tiene A (m = 3), es decir, la dimensión de Y será 3×1 así:

$$\underbrace{A_{3X3} \cdot Y_{3X1}} = B^t_{3X1}$$

Despejamos Y multiplicando a ambos miembros de la ecuación, POR LA IZQUIERDA, por A^{-1} (*), resultando: $Y = A^{-1} \cdot B^t$

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Puedes comprobar que $A \cdot Y = B^t$

Conocimientos específicos:

- Operaciones con matrices:
  - · Suma de matrices.
  - · Producto de número por matriz.
  - · Producto de matrices. Propiedades.
- Cálculo de la matriz inversa de una dada.

(*) Cálculo de A^{-1}

$$|A| = Det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{y} \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Adj(A^t) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$; por lo tanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$