

Architecture des ordinateurs

Cours 1

17 septembre 2012

Avant de commencer

- contact : carine.pivoteau@univ-mlv.fr
- page web du cours :
<http://http://www-igm.univ-mlv.fr/~pivoteau/ARCHI/>
 - ▷ planning, dates d'Exam
 - ▷ transparents de cours, sujets de TD
 - ▷ bibliographie et lien utiles
- 7 séances de cours (toutes les 2 semaines)
 - ▷ lundi, 10h30 - 12h30
- 14 séances de TD (dont 5 de TP)
 - ▷ mercredi après-midi
- contrôle des connaissances :
 - ▷ contrôle continu (interros, TPs)
 - ▷ 1 exam (à la moitié du cours)
 - ▷ 1 exam (mi-janvier)

But du cours

- Culture** comprendre les grands principes de fonctionnement d'un ordinateur
- Technique** manipuler des concepts basiques récurrents en informatique
- Informatique** acquérir une connaissance "bas niveau" de la programmation

Introduction

E. Dijkstra (mathématicien et informaticien néerlandais) :
“ La science informatique n'est pas plus la science des ordinateurs que l'astronomie n'est celle des télescopes ”

Informatique : contraction d'**information** et **automatique**

▷ **traitement automatique de l'information par des machines**

Architecture des ordinateurs : domaine de l'informatique centré sur les machines.

▷ point de vue à la fois matériel et logiciel

Et pour commencer, un peu d'histoire...

Préhistoire : les abaquages

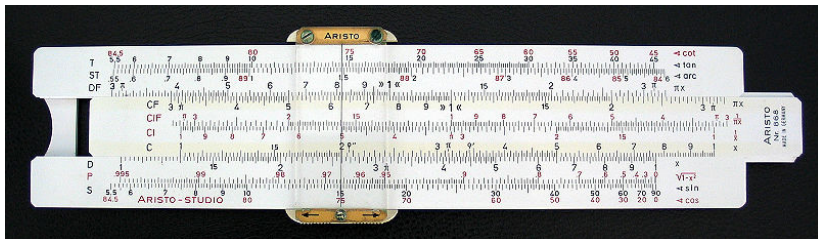
Avant 1600

Abaque : instrument mécanique facilitant le calcul.

Exemple : boulier, bâtons de Neper, règle à calculer, ...



INDEX	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	01	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	01	11
2	0/2	0/4	0/6	0/8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8	0	08	4 2
3	0/3	0/6	0/9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7	0	27	9 3
4	0/4	0/8	1/2	2/0	2/7	2/4	2/8	3/2	3/6	0	64	16 4
5	0/5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5	1	25	25 5
6	0/6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4	2	16	36 6
7	0/7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3	3	43	49 7
8	0/8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2	5	12	64 8
9	0/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1	7	29	81 9



Multiplier avec des bâtons de Neper

1	4	6	7	8	5	3	9	9
2	$\frac{0}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{0}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{0}{9}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{0}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}$
5	$\frac{2}{0}$	$\frac{3}{0}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{0}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$
6	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{0}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$
7	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{6}{3}$
8	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{4}{0}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$
9	$\frac{3}{6}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{8}{1}$

2	4	4	5	3	2	6	6	
8	2	9	6	5	1	3	3	
3	2	7	4	9	7	7	9	3

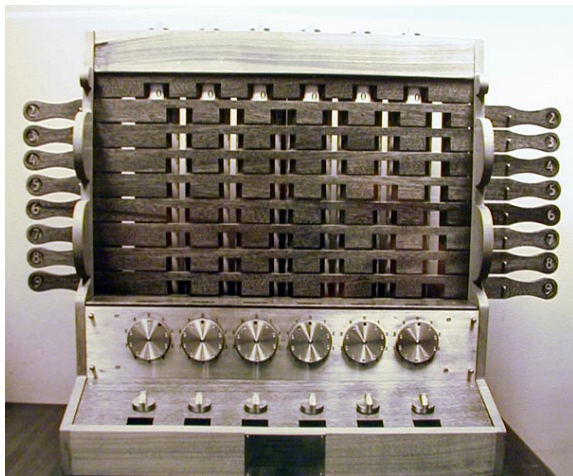
1	4	6	7	8	5	3	9	9
2	$\frac{0}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{0}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{0}{9}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{0}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}$
5	$\frac{2}{0}$	$\frac{3}{0}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{0}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$
6	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{0}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$
7	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{6}{3}$
8	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{4}{0}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$
9	$\frac{3}{6}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{8}{1}$

$$\begin{array}{r}
 46785399 \\
 \times 96431 \\
 \hline
 \rightarrow 46785399 \\
 \rightarrow 140356197 \\
 \rightarrow 187141596 \\
 \rightarrow 280712394 \\
 + 421068591 \\
 \hline
 4511562810969
 \end{array}$$

Préhistoire

1623

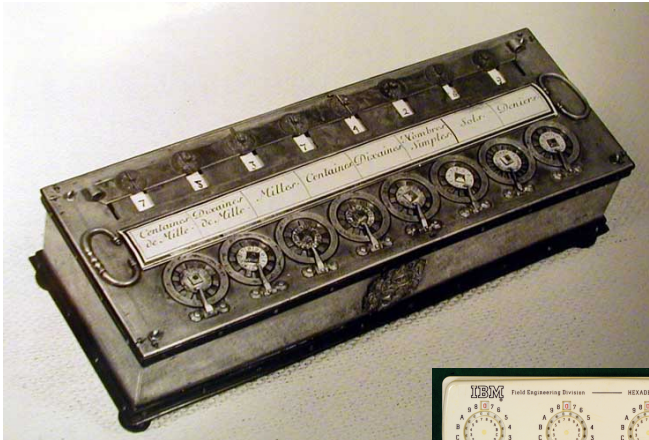
Wilhelm Schickard construit une machine à calculer mécanique en appliquant les idées de Neper (règle à calculer, 1614).



Préhistoire

1642

Pascal présente une machine qui additionne et soustrait les nombres de 6 chiffres en base 10 : la [Pascaline](#).



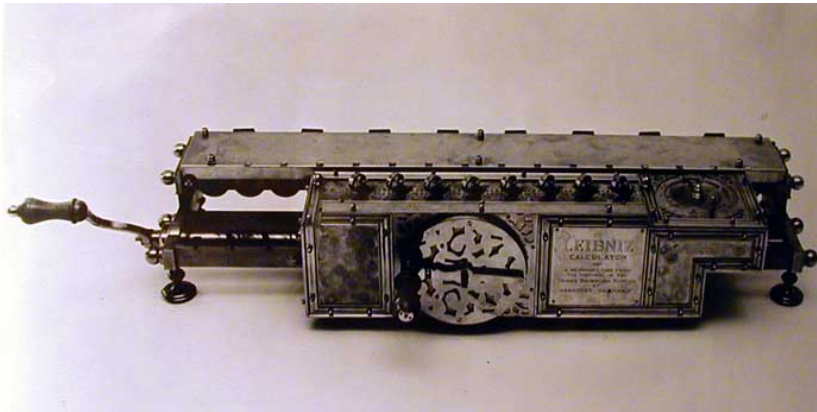
Multiplication : additions en chaîne.



Préhistoire

1672

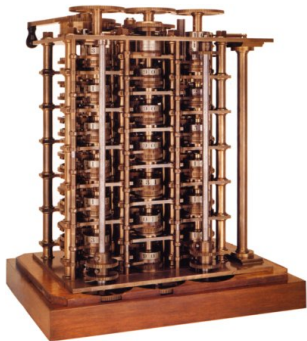
Leibnitz améliore la Pascaline : un chariot mobile permet de faire les multiplications et les divisions **automatiquement**.



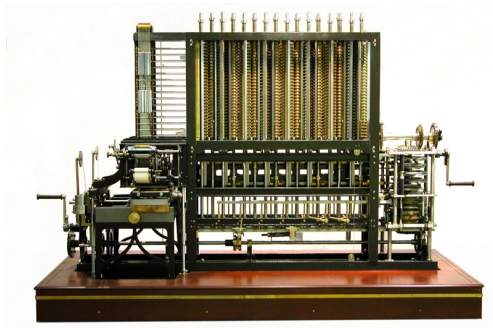
XIX^e siècle

1822

Charles Babbage conçoit la **machine à différences** pour calculer des tables numériques (pour la navigation).



Morceau de la première machine à différences



Machine à Différences n°2
1854, Babbage et Scheutz.

XIX^e siècle

1805

Joseph Jacquard (d'après des idées de Falcon en 1728) : cartes perforées pour métiers à tisser.



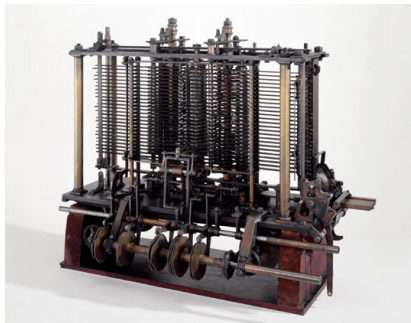
XIX^e siècle

1805

Joseph Jacquard (d'après des idées de Falcon en 1728) : cartes perforées pour métiers à tisser. C'est le premier [programme](#)!



Babbage conçoit ensuite une machine **programmable** capable de réaliser différentes opérations codées sur des *cartes perforées* : la Machine Analytique.



- un dispositif d'entrée et de sortie ;
- un **organe de commande** gérant le transfert des nombres et leur mise en ordre pour le traitement ;
- un magasin permettant de **stocker les résultats** intermédiaires ou finaux (mémoire) ;
- un moulin chargé d'exécuter les opérations sur les nombres ;
- un dispositif d'**impression**.

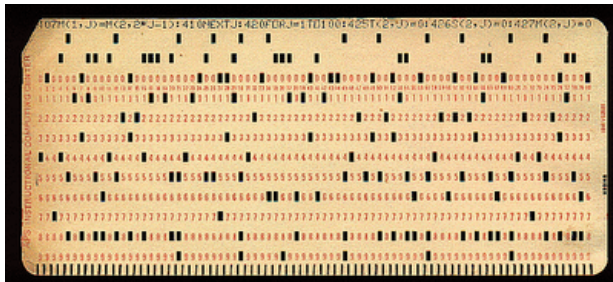
Programmes d'Ada Augusta. Irréalisable à l'époque.

XIX^e1854 - Georges Boole - *Une étude des lois de la pensée*

Fondements mathématiques de la logique.

L'électronique actuelle repose sur l'algèbre de Boole.

1890 : Calculateur statistique d'Hermann Hollerith pour les recensements. Il fonde la *Tabulating Machine Company* en 1896 qui devient IBM en 1908.



1936 - Alan Turing - *Machines de Turing*

Ce que l'on peut calculer et ce que l'on ne peut pas.

**1938 - Claude Shannon - *Théorie de l'information***

Tout peut être représenté par des 0 et des 1 : c'est la numérisation.

Première génération d'ordinateurs (1936-1956)

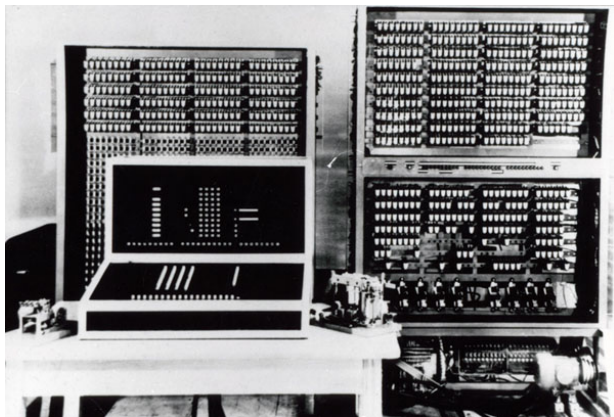
Des calculateurs programmables aux premiers ordinateurs.

Composants : relais, tubes à vides, résistances.

Logiciels : langage machine seulement.

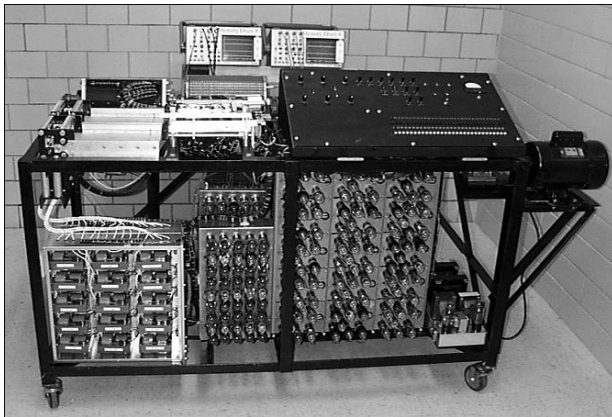


Indépendement : Konrad Zuse, John Atanasoff, Georges Stibitz travaillent à la conception de machines binaires.



Machine à calculer électromécaniques de Zuse (photo : Z3)

ABC (Atanasoff-Berry Computer) : officiellement, le premier ordinateur numérique électronique



1^{ère} génération

1944

Howard Aiken, machine électromécanique (Harvard Mark 1) :

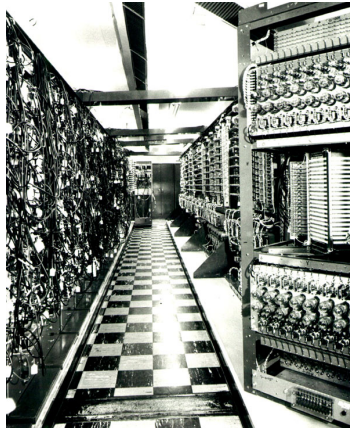
- Multiplication de nombres de 23 chiffres en 6 secondes ;
- Addition en 3 dixièmes de seconde.



1^{ère} génération

durant la guerre

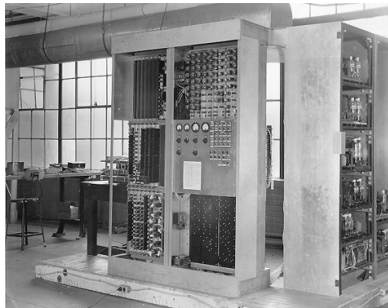
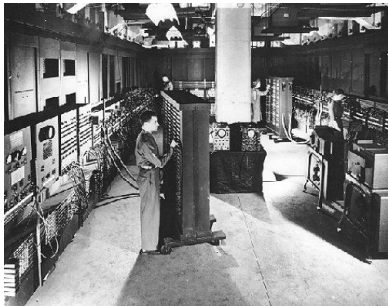
Le Colossus Mark II est utilisé pour la cryptanalyse. Il est constitué de 2 400 tubes à vide et réalise 5 000 opérations par seconde.



1^{ère} génération

1945

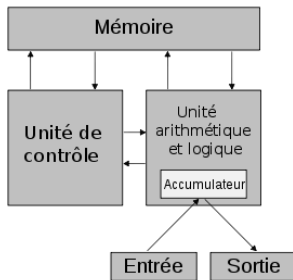
John Eckert et John Mauchly construisent l'*ENIAC* (Electronic Numerical Integrator And Calculator) : 18 000 tubes, 30 tonnes. Multiplication de nombres de 10 chiffres en 3ms.



Von Neumann (avec Eckert et Mauchly) propose l'*EDVAC* (Electronic Discrete Variable Automatic Computer). Système binaire contrairement à l'ENIAC. Mis en service en 1951.

Architecture de von Neumann

- Machine *universelle* programmée
- Instructions numériques stockées en mémoire
- Instructions modifiables exécutées en séquence avec des ruptures de séquence (sauts).



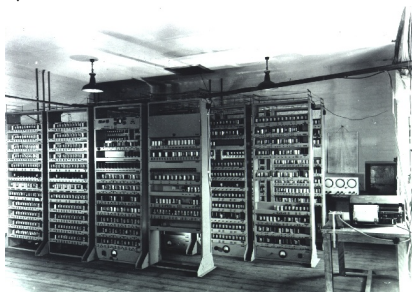
- **unité arithmétique et logique (UAL)** qui effectue les opérations de base,
- **unité de contrôle** qui est chargée du séquençage des opérations,
- **mémoire** qui contient à la fois les données et le programme,
- dispositifs d'**entrée-sortie** qui permettent de communiquer avec le monde extérieur.

Actuellement, la plupart des ordinateurs sont des machines de Von Neumann, seules les technologies ont changé.

1^{ère} génération

début des années 50

Maurice Wilkes construit l'*EDSAC* (Electronic Delay Storage Automatic Calculator). 5 000 opérations mathématiques dont 4 000 multiplications en 1 minute (en 1949).



Eckert et Mauchly construisent l'*UNIVAC* (UNIVERSal Automatic Computer). 5 200 tubes à vide, 13 tonnes, 1905 opérations par seconde. Données stockées sur une bande magnétique (1951).

1^{ère} génération

1953

IBM lance le 701 (19 exemplaires). Mémoire à tubes cathodiques.
16 000 additions ou 2 200 multiplications par seconde.

Peu de temps après, le 650 est lancé à 2 000 exemplaires.



1951 - M. V. Wilkes - *la microprogrammation*

L'unité centrale d'un ordinateur peut être contrôlée par un programme informatique spécialisé stocké en mémoire.

1^{ère} génération

synthèse

	composants	mémoire	opérations
Z3	2 600 relais	64 × 22 bits	4 add/s. 15 mul/min.
ABC	280 tubes	60 × 50 bits	30 add/s.
HM I	765 000 comp.	72 × 23 (déc.)	add : 3 ds. mul : 6 s.
CM II	2 400 tubes		
ENIAC	17 468 tubes	20 chiffres signés	5 000 add/s. 350 mul/s.
EDVAC	6 000 tubes	1000 × 44 bits	add : 0.8 ms. mul : 2.9 ms.
EDSAC	3 000 tubes		4000 mul/min.
UNIVAC	5 200 tubes	1000 × 11 déc.	add : 0.5 ms. mul : 0.21 ms.
IBM 650		60 × 10 déc. ferrite	add : 1.63 ms mul : 12.96 ms

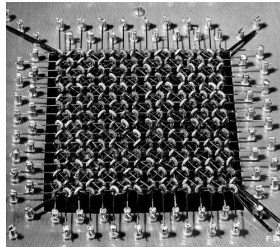
Deuxième génération d'ordinateurs (1956-1963)

1948, John Bardeen, Walter Brattain et William Shockley découvrent *le transistor*.

Composants : transistors, mémoire à tores de ferrite, imprimantes, bandes magnétiques.

Logiciels : apparition des systèmes d'exploitation, langages évolués FORMula TRANslator (1957) COMon Business Oriented Language (1959)

Apparition de l'industrie, IBM, DEC, HP, etc.



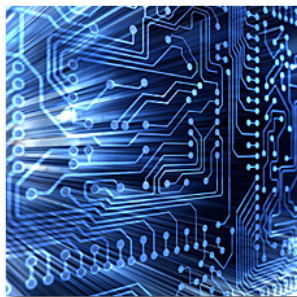
Troisième génération d'ordinateurs (1963-1971)

En 1958, Jack Kilby (Texas Inst.) crée le premier *circuit intégré*.

Composants : circuits intégrés,

Machine : faible consommation énergétique,
fiable, encombrement réduit.

Évolution : multiprocesseur, temps partagé, accès interactif,
apparition des réseaux,
premiers problèmes de compatibilité entre machines.



Quatrième génération d'ordinateurs

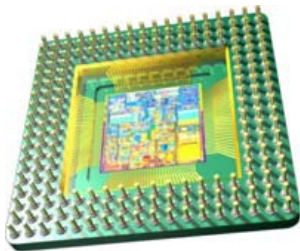
(1971-)

Miniaturisation des circuits : l'ère de la *micro-informatique*

Composants : Very Large Scale Integration
premier microprocesseur INTEL 4004 (1971)

Logiciel : traitement distribué, machine virtuelle
réseau, base de données
convivialité

Évolution : parallélisme d'exécution
ordinateurs personnels
augmentation en puissance



Résumé

avant 1600 les abaques...

XVII^e siècle machines à calculer mécaniques

XIX^e siècle machines à calculer programmables

1936-1956 1^{ère} génération : des calculateurs programmables
aux ordinateurs

1956-1963 2^{ème} génération : apparition des transistors

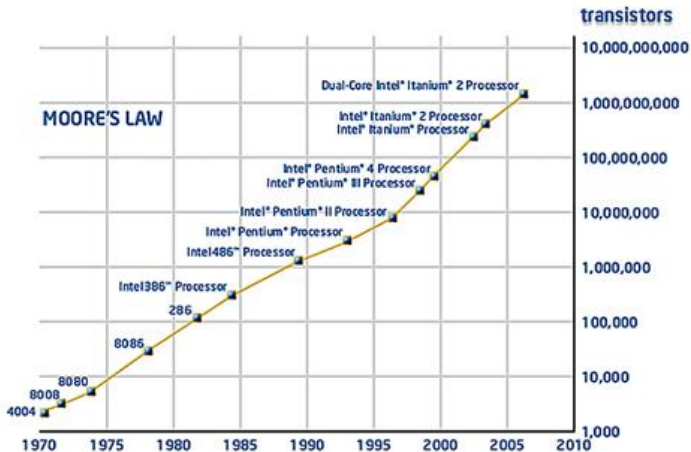
1963-1971 3^{ème} génération : apparition des circuit intégrés

depuis 1971 4^{ème} génération : la micro-informatique

Conclusion

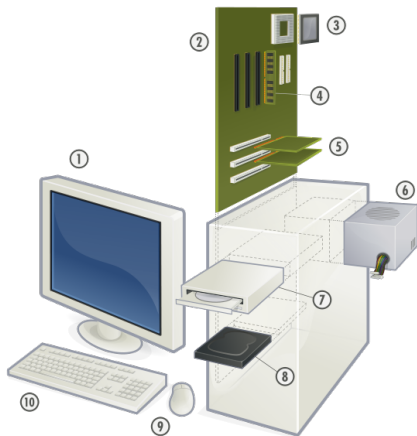
Innovations technologiques supportées par des bases théoriques.

Loi de Moore (1965) : le nombre de transistors sur une puce double tous les 2 ans.



Architecture en couches

L'ordinateur : point de vue externe



- ① Écran
- ② Carte mère
- ③ CPU (Microprocesseur)
- ④ Mémoire vive (RAM)
- ⑤ Cartes de périphériques
- ⑥ Alimentation
- ⑦ Lecteur de disques (ex. DVD)
- ⑧ Disque dur
- ⑨ Souris
- ⑩ Clavier

L'ordinateur : point de vue interne

- Machine électronique binaire
- Fonctionnement des composants de base : circuits électroniques
- Organisation et communication entre les composants
- Langage de la machine
- Système d'exploitation :
 - programme principal de l'ordinateur
 - exécution simultanée d'autres programmes
 - gestion des périphériques : entrées-sorties, stockage, ...

Machines multi-niveaux

5. Langages haut niveau

Compilation

4. Langage d'assemblage

Assembleur

3. Système d'exploitation

Appels système

2. Jeu d'instructions propre à chaque machine

Microprogrammes : micro-instructions binaires

1. Micro-architecture (UAL, opérations, registres, ...)

Assemblage physique des portes logiques

0. Circuits logiques

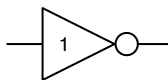
La couche circuits logiques

Circuit logique

- ▷ Un **circuit logique** est un circuit dans lequel seules 2 valeurs logiques sont possibles : 0 ou 1.
- ▷ En pratique : circuit électrique (transistors) dans lequel une faible tension représente le signal 0 alors qu'une tension élevée correspond au signal 1.
- ▷ Composants de base : les **portes logiques** qui permettent de combiner ces signaux binaires.

Une porte logique est un composant qui reçoit en **entrée** une ou plusieurs valeurs binaires (souvent 2) et renvoie en **sortie** une unique valeur binaire.

porte NON



Si la valeur d'entrée est 1 alors la sortie vaut 0.
Si la valeur d'entrée est 0 alors la sortie vaut 1.

Fonctions logiques et tables de vérité

Fonction logique : fonction d'une ou plusieurs variables **booléennes** (qui peut prendre la valeur 0 ou 1) dans $\{0, 1\}$.

Exemples :

$$\textcircled{1} f_0(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a = 1 \\ 1 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} f_1(a, b) = a$$

$$\textcircled{3} f_2(a, b, c) = \begin{cases} c & \text{si } a = 0 \\ 1-c & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

Tables de vérité

fonction f_0

a	S
0	1
1	0

fonction f_1

a	b	S
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

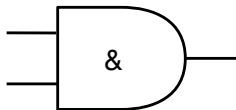
fonction f_2

a	b	c	S
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Voir l'algèbre booléenne (cours de Structures Discrètes)

Portes ET et OU

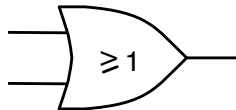
porte ET



a	b	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$S = f(a, b) = a \cdot b$$

porte OU

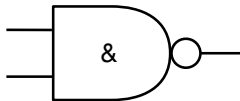


a	b	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$f(a, b) = a + b$$

Portes NON-ET et NON-OU

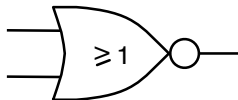
porte NON-ET



a	b	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$f(a, b) = \overline{a \cdot b}$$

porte NON-OU



a	b	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$f(a, b) = \overline{a + b}$$

Résumé

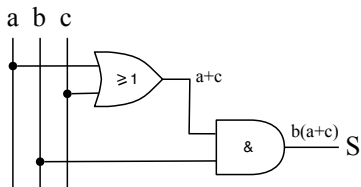
Les 16 fonctions booléennes de 2 variables ($\{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$)

00	01	10	11	$f(a, b)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	ab
0	0	1	0	$a\bar{b}$
0	0	1	1	a
0	1	0	0	$\bar{a}b$
0	1	0	1	b
0	1	1	0	$a \oplus b$
0	1	1	1	$a + b$

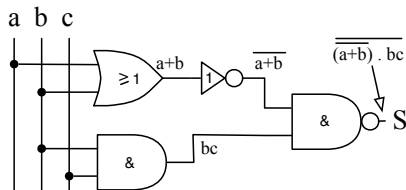
00	01	10	11	$f(a, b)$
1	0	0	0	$\overline{a + b}$
1	0	0	1	$\overline{a \oplus b}$
1	0	1	0	\bar{b}
1	0	1	1	$a + \bar{b}$
1	1	0	0	\bar{a}
1	1	0	1	$\bar{a} + b$
1	1	1	0	\overline{ab}
1	1	1	1	1

Avec 3 variables, combien de fonctions ?

Du circuit à la table de vérité



a	b	c	$a + c$	$b(a + c)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1



a	b	c	$a + b$	$\overline{a + b}$	bc	S
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	1	1

Règles de calcul

Constantes	$a + 0 = a$	$a \cdot 0 = 0$
	$a + 1 = 1$	$a \cdot 1 = a$
Idempotence	$a + a = a$	$a \cdot a = a$
Complémentation	$a + \bar{a} = 1$	$a \cdot \bar{a} = 0$
Commutativité	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Distributivité	$a + (bc) = (a + b)(a + c)$	
	$a(b + c) = (ab) + (ac)$	
Associativité	$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$	
	$a(bc) = (ab)c = abc$	
Lois de De Morgan	$\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}$	$\overline{a + b} = \bar{a} \bar{b}$
Autres relations	$\overline{\bar{a}} = a$	$(a + b)(a + \bar{b}) = a$

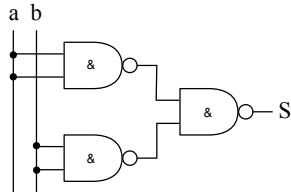
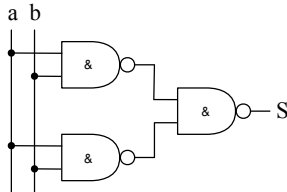
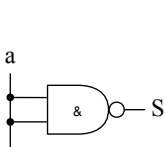
Complétude de la porte NON-ET

La porte NON-ET est **complète** : on peut réaliser n'importe quelle fonction booléenne avec seulement des portes NON-ET.

$$\bar{a} = \overline{a \cdot a}$$

$$\begin{aligned} a \cdot b &= \overline{\overline{a \cdot b}} \\ &= \overline{\overline{ab} \cdot \overline{ab}} \end{aligned}$$

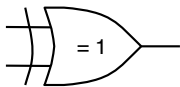
$$\begin{aligned} a + b &= \overline{\overline{a + b}} \\ &= \overline{\overline{a} \cdot \overline{b}} \\ &= \overline{\overline{aa} \cdot \overline{bb}} \end{aligned}$$



Complétude de NON-OU : en TD

Porte XOR

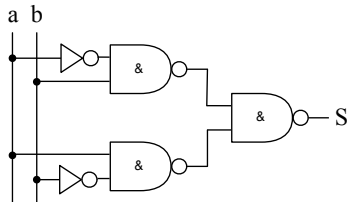
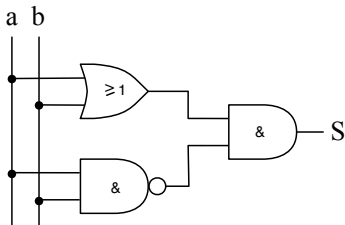
porte XOR



a	b	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\begin{aligned}
 f(a, b) &= a \oplus b \\
 &= (a + b)(\overline{ab}) \\
 &= (a + b)(\overline{a} + \overline{b}) \\
 &= a\overline{a} + a\overline{b} + b\overline{a} + b\overline{b} \\
 &= \overline{a}b + a\overline{b} \\
 &= \overline{\overline{\overline{a}b}} + \overline{\overline{\overline{a\overline{b}}}} = \overline{\overline{a}b} \cdot \overline{\overline{a\overline{b}}}
 \end{aligned}$$

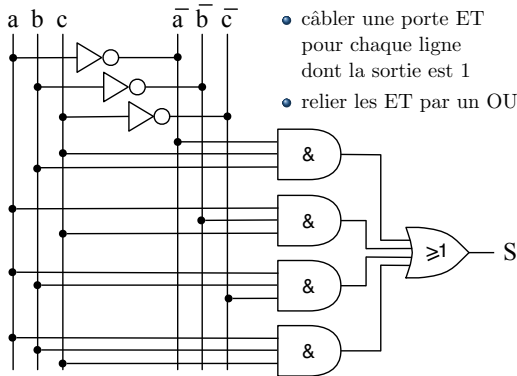
Réalisation à partir des portes précédentes.



De la table de vérité au circuit

La fonction majoritaire : la valeur de sortie est celle qui apparaît majoritairement en entrée.

a	b	c	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



$$f(a, b, c) = \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc$$

Simplification

Simplifier = diminuer le nombre d'opérateurs = diminuer le nombre de portes logiques (et donc le coût).

exemple précédent :

$$\begin{aligned}
 f(a, b, c) &= \overline{\overline{a + b} \cdot bc} \\
 &= \overline{\overline{a + b} + \overline{bc}} \\
 &= a + b + \overline{b} + \overline{c} \\
 &= a + 1 + \overline{c} = 1
 \end{aligned}$$

fonction majoritaire :

$$\begin{aligned}
 f(a, b, c) &= \overline{a}bc + a\overline{b}c + ab\overline{c} + abc &&= (\overline{a}b + a\overline{b})c + ab(\overline{c} + c) \\
 &= \overline{a}bc + a\overline{b}c + ab\overline{c} + abc + abc + abc &&= (a + b)(\overline{a} + \overline{b})c + ab \\
 &= (a + \overline{a})bc + (b + \overline{b})ac + (c + \overline{c})bc &&= (ac + bc)\overline{a}b + ab \\
 &= ab + ac + bc &&= (ab + ac + bc)(\overline{a}b + ab)
 \end{aligned}$$

Méthode de Karnaugh

La fonction majoritaire

binaire
classique

a	b	c	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

binaire
réfléchi

a	b	c	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	1	1
0	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	1
1	0	1	1
1	0	0	0

a \ bc	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

a \ bc	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

$$f(a, b, c) = ab + ac + bc$$

Méthode de Karnaugh (suite)

On veut le moins de porte ET et OU possible.

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	1	0	1	1

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	1	0	1	1

$$f(a, b, c, d) = \bar{a}\bar{b} + cd + a\bar{b}\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}d = cd + \bar{a}d + \bar{b}\bar{d}$$

La première formule est juste, mais **pas simplifiée au maximum !**

Méthode de Karnaugh

Méthode graphique (visuelle) pour simplifier au maximum les formules et/ou les circuits.

- 1 Écrire la table de vérité sous la forme d'un code de Gray (ou binaire réfléchi) : ainsi, les valeurs des entrées ne diffèrent que d'un seul bit entre chaque ligne.
- 2 Compacter la table (ces 2 étapes peuvent être simultanées)
- 3 Entourer tous les 1 dans des rectangles :
 - les plus grands possibles,
 - tels que leur taille est une puissance de 2,
 - éventuellement sur les bords.
- 4 En déduire la formule et le circuit :
 - une somme (OU) des formules de chaque rectangle
 - le formule d'un rectangle est un produit (ET) :
 - des variables qui valent toujours 1 dans ce rectangle
 - des négations de celles qui valent toujours 0.
 - les autres variables n'apparaissent pas dans le ET.
- 5 !!! Il peut y avoir plusieurs simplifications maximales !