Áreas e volumes por equicomposição
Areas and volumes by equicomposition

Flavia Mescko Fernandes - flavia_m_f@yahoo.com.br
Editora Positivo, Curitiba, PR
Rudimar Luiz Nós - rudimarnos@utfpr.edu.br
Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, Curitiba, PR

Resumo. Apresentamos neste trabalho o teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien e o terceiro problema de Hilbert para analisar a equicomposição de áreas e de volumes. Além disso, pesquisamos alguns livros didáticos de matemática para o Ensino Fundamental aprovados no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) em 2017 para avaliar o quanto a equicomposição de polígonos é explorada no cálculo de áreas. Observamos que todos os autores das obras analisadas abordam a equicomposição, muitos deles em atividades lúdico-manipulativas.

Palavras-chave. O teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien, quadratura, isometrias, área, o terceiro problema de Hilbert.

Abstract. We present in this work the Wallace-Bolyai-Gerwien theorem and Hilbert's third problem to analyze the equicomposition of areas and volumes. In addition, we have researched some math textbooks for Elementary School that were approved in the National Textbook Program (PNLD) in 2017 to evaluate how much the equicomposition of polygons is explored in the calculation of areas. We observe that all the authors of the analyzed books approach the equicomposition, many of them in ludic-manipulative activities.

Keywords. Wallace-Bolyai-Gerwien theorem, quadrature, isometries, area, Hilbert's third problem.

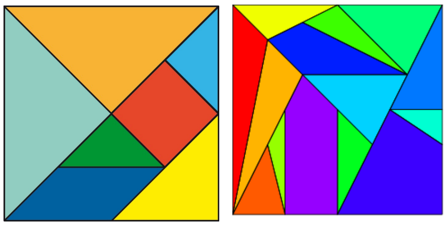
1 Introdução

O cálculo de áreas foi uma das necessidades mais antigas das civilizações. Talvez pelo fato do quadrado ser a figura mais simples, os antigos geômetras tentaram estudar a área de outras figuras, como a do círculo por exemplo, relacionando-as com o quadrado. Assim, a expressão "quadratura" era empregada no sentido de se determinar um quadrado com área igual à área da figura em estudo, ou seja, de se construir um quadrado equivalente à figura.

Sobre a quadratura, a Base Nacional Comum Curricular - BNCC [10] afirma que:

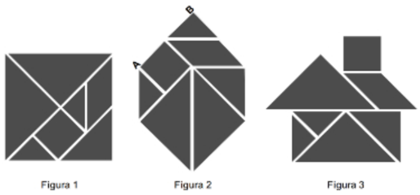
> Assim, a Geometria não pode ficar reduzida à mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume e nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam "fazer a quadratura de uma figura"). Isso permite, inclusive, resolver geometricamente problemas que podem ser traduzidos por uma equação do 2º grau.

Dois *puzzles* da antiguidade, o *tangram* e o *stomachion* de Arquimedes, ilustrados na Figura 1, são dois bons exemplos do processo de quadratura.

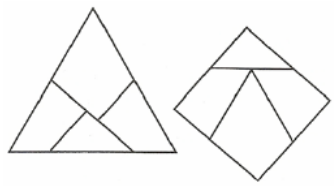


(a) (b)

Figura 1: (a) *Tangram* - [4]; (b) *stomachion* - [12]



(a)



(b)

Figura 2: Equicomposição em testes: (a) ENEM 2008; (b) vestibular UFRGS 2011

Puzzle é uma palavra inglesa usada para designar um enigma ou quebra-cabeça. O *tangram* é um quebra-cabeça chinês de sete peças poligonais que compõem um quadrado; o *stomachion* de Arquimedes, um quebra-cabeça constituído de catorze peças poligonais que também compõem um quadrado. Em ambos, o quociente entre a área de cada peça e a área do quadrado constituído por todas as peças é um número racional [5, 12]. Todas as figuras formadas com as peças poligonais de um desses dois *puzzles* têm a mesma área e são equidecomponíveis, ou seja, têm a mesma decomposição. Essa relação pode ser generalizada, isto é, dois polígonos que têm a mesma área são sempre equidecomponíveis?

Para responder esta pergunta, abordamos a equicomposição apresentando o teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien. A equicomposição de polígonos é um tema pertinente à formação do professor de matemática da Educação Básica, uma vez que a BNCC enfatiza o uso da mesma e ela tem sido explorada em testes oficiais, como por exemplo, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e o vestibular da UFRGS (Universidade Federal do Rio Grande do Sul) - Figura 2.

2 O teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien

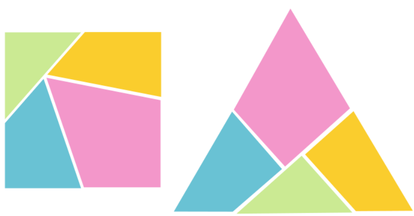


Figura 3: Quadrado e triângulo equicompostos - [11]

Segundo Boltianski [1]:

> Duas figuras são equicompostas (ou equidecomponíveis) se é possível decompor uma das figuras em um número finito de partes, e, por meio de um rearranjo dessas partes, compor a outra figura.

No rearranjo das peças, utilizamos duas isometrias no plano [7]: translações e rotações. A Figura 3 ilustra duas figuras equicompostas.

Para provar o teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien, precisamos utilizar a propriedade de transitividade da equicomposição [5] e demonstrar o Teorema 2.1 e os Lemas 2.1, 2.2 e 2.3. Essas demonstrações podem ser encontradas em [1, 5, 6, 8].

Teorema 2.1. *Todo polígono de n lados, $n \geq 4$, pode ser decomposto em $(n-2)$ triângulos justapostos cujos vértices são vértices do polígono.*

Lema 2.1. *Todo triângulo é equicomposto a um retângulo.*

Lema 2.2. *Dois retângulos que têm áreas iguais são equicompostos.*

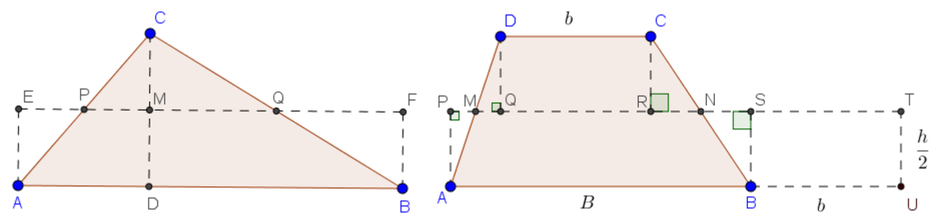
Lema 2.3. *Todo polígono é equicomposto a um retângulo.*

Teorema 2.2 (Wallace-Bolyai-Gerwien)**.** *Dois polígonos que têm áreas iguais são equicompostos.*

Demonstração. Segundo o Lema 2.3, os dois polígonos são equicompostos a retângulos. Como estes retângulos têm a mesma área, pelo Lema 2.2 são equicompostos. Logo, os dois polígonos são equicompostos. □

3 Áreas

Podemos provar a relação para o cálculo da área de um polígono convexo por equicomposição empregando o Lema 2.3. Para tanto, devemos provar inicialmente a área do retângulo [5]. Ilustramos na Figura 4 as equicomposições que permitem provar as áreas do triângulo e do trapézio, respectivamente, a partir da área do retângulo.



(a) (b)

Figura 4: Equicomposições: (a) triângulo ABC equicomposto ao retângulo $ABFE$; (b) trapézio $ABCD$ equicomposto ao retângulo $APTU$ - [5]

O teorema de Pitágoras também pode ser provado por equicomposição. Uma dessas provas é a equicomposição de Perigal (Henry Perigal: 1801-1898). Na demonstração por equicomposição, Perigal seccionou o quadrado $ACFG$, construído sobre o maior cateto $\overline{AC}$, por duas retas $\overleftrightarrow{KL}$ e $\overleftrightarrow{MN}$ passando pelo seu centro J, de tal forma que $\overline{KL}$ é paralelo à hipotenusa $\overline{BC}$ e perpendicular à $\overline{MN}$ ($\overline{KL}$ e $\overline{MN}$ são as diagonais do losango $KMLN$, portanto perpendiculares). Dessa forma, é possível mostrar que o quadrado $ACFG$ é dividido em quatro quadriláteros congruentes. Essas quatro partes, mais o quadrado construído sobre o menor cateto $\overline{AB}$, quando rotacionadas e transladadas, preenchem completamente o quadrado construído sobre a hipotenusa $\overline{BC}$, como mostra a Figura 5. Outras demonstrações do teorema de Pitágoras por equicomposição estão presentes em [9].

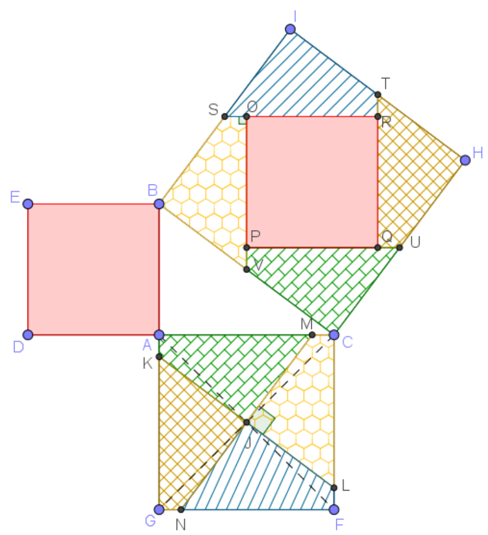


Figura 5: Equicomposição de Perigal - [5]

4 O terceiro problema de Hilbert

A equicomposição provada no Teorema 2.2 é extensível para poliedros, ou seja, poliedros equivalentes (de mesmo volume) são equidecomponíveis? Esta pergunta está relacionada com o terceiro dos vinte e três problemas propostos por David Hilbert (1862-1943) em 1900, no Congresso Internacional de Matemáticos em Paris. Vários matemáticos se empenharam no estudo da decomposição de poliedros. Foi Max Wilhelm Dehn (1878-1952), orientando de Hilbert, quem deu a resposta negativa ao problema.

Teorema 4.1 (Dehn)**.** *O tetraedro regular não é equicomposto por corte a um cubo.*

A demostração do Teorema 4.1 pode ser encontrada em [2] e [3].

Mesmo assim, podemos empregar o Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien para provar o volume de alguns poliedros.

Teorema 4.2. *Todo prisma reto é equicomposto a um paralelepípedo reto retângulo.*

Demonstração. Seja P um prisma reto qualquer. Pelo Lema 2.3, a base poligonal do prisma P é equicomposta a um retângulo. Consideremos este retângulo como base de um paralelepípedo reto retângulo R cuja altura é congruente à altura de P. Como P e R têm alturas congruentes e bases equicompostas, temos que que P é equivalente a R. Assim, P e R são equidecomponíveis. □

A Figura 6 ilustra dois poliedros equicompostos.

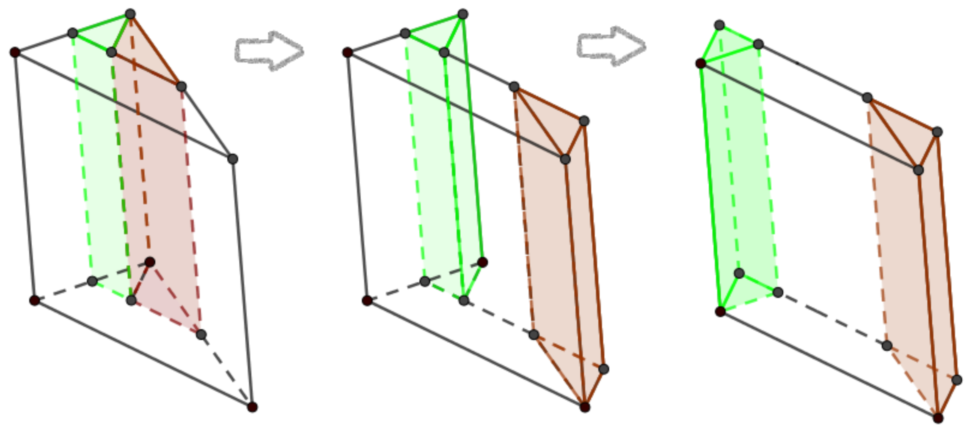


Figura 6: Prisma triangular reto equicomposto a um paralelepípedo reto retângulo - [5]

5 Análise de livros didáticos

Analisamos seis livros didáticos de matemática para o Ensino Fundamental aprovados no PNLD em 2017. Constatamos que todos eles abordam de alguma forma a equicomposição no plano para o cálculo da área de polígonos convexos. Essa abordagem é pictórica em alguns e formal em outros. Os autores exploram malhas quadriculadas, materiais manipulativos e *puzzles* em atividades lúdicas. As demonstrações formais geralmente não são apresentadas, mas os conceitos e ideias utilizados nelas são abordados na solução das atividades propostas.

A avaliação completa dos livros analisados encontra-se em [5].

6 Conclusões

Apresentamos neste trabalho o teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien e discutimos a extensibilidade do mesmo para o cálculo do volume de poliedros. Em consonância com o que diz a BNCC sobre a equicomposição de polígonos, analisamos livros didáticos de matemática para o Ensino Fundamental aprovados no PNLD em 2017. Verificamos que todos os autores das obras analisadas abordam a equicomposição no cálculo da área de polígonos convexos. Dessa forma, perguntamo-nos o quanto o professor de matemática do Ensino Fundamental tem utilizado/explorado o livro didático de matemática oferecido pelo governo federal no PNLD.

Agradecimentos

À CAPES, pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.

Referências

[1] BOLTIANSKI, V. G. **Figuras equivalentes e equicompostas**. São Paulo: Atual, 1996.

[2] CONDE, A. O terceiro problema de Hilbert. **Revista Brasileira de História da Matemática**, n. 5, v. 3, p. 41-59, 2003.

[3] DIAS, R. **Terceiro problema de Hilbert e teorema de Dehn**. São José do Rio Preto: UNESP, 2013.

[4] ESCOLAR. **Tangram**, 2015. Disponível em: http://www.buscaescolar.com/artes/tangram/. Acesso em: 05.fev.2018.

[5] FERNANDES, F. M. **Polígonos e poliedros equidecomponíveis**. Dissertação de Mestrado, UTFPR, 2018.

[6] HILBERT, D. **Fundamentos de geometria**. Lisboa: Gradiva, 2003.

[7] LIMA, E. L. **Isometrias**. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

[8] LIMA, E. L. **Conceitos e controvérsias - polígonos equidecomponíveis**, 1985. Disponível em: http://rpm.org.br/cdrpm/11/5.htm. Acesso em: 05.fev.2018.

[9] LOOMIS, E. S. **The pythagorean proposition**. Washington: National Council of Teachers of Mathematics, 1968.

[10] MEC. **Base Nacional Comum Curricular**, 3 ed. Brasília: Ministério da Educação, 2017.

[11] WIKIPEDIA. **Wallace-Bolyai-Gerwien theorem**, 2017. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Wallace-Bolyai-Gerwien_theorem. Acesso em: 05.fev.2018.

[12] WOLFRAMMATHWORLD. **Stomachion**. Disponível em: http://mathworld.wolfram.com/Stomachion.html. Acesso em: 25.abr.2018.