Asignatura "Astrofísica Extragaláctica y Cosmología" (curso 2010/2011)

- Página 85 del Sparke & Gallagher
- Masa del BH de la Vía Láctea según curva de rotación.
- Curva de rotación creada por un disco de densidad s y extensión R para todo radio.
- Problema 1.6 J&L.
- Problema 1.7 J&L.
- Problema 24.27 C&O.
- C&O página 930 (accretion rate del central BH).
- Metalicidad Pop III (J&L p. 18).
- Ghez et al. (2008): degeneracy between BH mass and distance to it (trabajo?).
- Emisión del polvo.
- Problems in S&G around page 100 (energy and gas/dust). Also 3.7.

TEMA 3:

Incertidumbre en distancia asociada a precisión en paralaje 0.001".

Problema sobre SN1987 y distancia a LMC.

Plano fundamental y D-s relation.

Superluminal jet.

Cuando v/c<1 en jet.

Sublimation radius del toro del AGN.

Ho (2008) review on AGN.

SZ: página 404 Binney & Merrifield.

http://gravitationallensing.pbworks.com/w/page/15553257/Strong-Lensing

1. luminosidad, flujo, intensidad.
2. magnitudes, distancia, redshift.
3. extinción.
4. filtros, magnitudes.

Problemas de Astrofísica Extragaláctica y Cosmología 2010/2011

1. Proxima Centauri (α Centauri C) es la estrella más cercana al Sol y es parte de un sistema triple. Las coordenadas J2000.0 son $(\alpha,\delta)=14^h29^m42.95^s$ -62º40'46.1". El miembro del sistema más brillante es Alpha Centauri (α Centauri A) tiene coordenadas $(\alpha,\delta)=14^h39^m36.50^s$ -60º50'02.3".

a) ¿Cuál es la distancia angular entre ambas estrellas?

b) Si la distancia a Proxima Centauri es 4.0×10^{16} m, ¿cuál es la distancia de esta estrella a Alpha Centauri?

a) $\Delta\alpha=9^m53.55^s=2.4731º$, $\Delta\delta=2º09'16.2''=1.8455º$, $\theta=1.964º$ (avisar sobre coseno)

b) $\tau=\theta xd=1.37\times10^{15}$ m=9,160±230 AU (avisar sobre radianes, 1 AU=1.49598×10^{11} m)

Incertidumbre para $\Delta d=0.1\times10^{16}$ m → 0.03×10^{15} m

Os dejo ver efecto de incertidumbres en posición y en los demás problemas.

[Tema 1-Intro, problema CO1.8]

REPASAR!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

2. ¿Qué valores de ascensión recta serían los mejores para observar desde un telescopio a latitud 40º en Enero?

El Sol en Enero está a unas 19-20^h de RA (la RA se empieza a contar desde el Equinoccio de Invierno, Marzo; 24 horas son 12 meses, a 2 horas por mes). Esto quiere decir que los objetos a 7-8^h de RA cruzan el meridiano a medianoche. Si asumimos unas 12-14 horas de noche (Enero en el Hemisferio Norte), se podrán observar objetos entre 0^h y 14^h, que son los que cruzan el meridiano desde la puesta hasta la salida del Sol.

[Tema 1-Intro, problema CO1.10]

3. ¿A qué distancia de una lámpara de 100 W es su flujo igual a la irradiancia del Sol?

La irradiancia del Sol es 1365 W/m^2. (It is measured by satellite to be roughly 1.366 kilowatts per square meter (kW/m²) -WIKIPEDIA-). $I=L/A=L/4\pi r^2$ r=sqrt($L/4\pi I$) r=0.07635 m=7.64 cm.

[Tema 1-Intro, problema CO3.2]

4. El paralaje de Sirio es 0.379". Hallar la distancia a Sirio en pc, años-luz, AU y metros. Dar el módulo de distancia de Sirio. Determinar la magnitud bolométrica de Sirio conociendo que su temperatura efectiva es 9500 K y su radio son 5.936 mas. Compararla con la del Sol. Lo mismo para luminosidades. ¿Qué color tiene Sirio?

La distancia es d=1/p=2.64 pc, 8.61 ly, 5.46×10^5 AU=8.16×10^{16} m.

m-M=5xlog(d/10 pc)=-2.89

El diámetro de Sirio es 5.936 mas (a radianes) x $8.16e^{16}=2.35\times10^9$ m. El diámetro del Sol son 1.392×10^9 m, por lo que Sirio tiene un radio $R_{Sirio}=1.69xR_\odot$. La energía radiada por un cuerpo negro, como es el caso de una estrella, es $L=4\pi R^2\sigma T^4$. $L_{Sirio}/L_\odot=(R_{Sirio}/R_\odot)^2x(T_{Sirio}/T_\odot)^4$, por lo que $L_{Sirio}/L_\odot=$ 20.8 (con $T_\odot$=5780 K). $M_{Sirio}=-2.5\log(L_{Sirio}/L_\odot)+M_\odot=1.44$ (con $M_\odot$=4.74).

Por la ley de Wien λ_{max}=0.0029 m K/9970 K=291 nm. Es una estrella muy azul.

[Tema 1-Intro, problema CO3.2]

5. La misión espacial Hipparcos fue capaz de medir paralajes hasta 0.001”. ¿A qué distancia tendría que estar una moneda de 10 céntimos de euro (1.9 cm de diámetro) para que tuviera un tamaño angular de 0.001”?
Extensión: Asumiendo que el césped crece 5 cm cada semana, ¿cuánto crece en un segundo?, ¿A qué distancia tendrías que estar para verlo crecer a 0.000004” (4 microarcsec) cada segundo? Esta es la resolución angular que intenta alcanzar SIM, una misión de NASA que será el nuevo Hipparcos. Gaia es una misión de ESA que quiere llegar a unos 300 microarcsec.

Converting the subtended angle to radians gives 0.001”=4.85x10^{-9} radians. Thus, the distance required is d=0.019 m/4.85x10^{-9}=3.92x10^{6} m=3920 km.

La velocidad es 8.3x10^{-8} m/s. En un segundo crece 8.3x10^{-8} m. θ=t/d=8.3x10^{-8}/(4x10^{-6}” a radianes)=4.3 km.

[Tema 1-Intro, problema CO3.5]

6. Una persona tiene unos 1.4 m^2 de piel, que está a unos 310 K. Considera una persona como un emisor perfecto en una habitación a 293 K.

a) Calcula la energía por segundo radiada por la persona en forma de emisión de cuerpo negro.
b) Determinar dónde está el pico de radiación de una persona.
c) Calcular la energía absorbida por la persona del medio ambiente (a 293 K), asumiendo que absorbe la energía del cuerpo negro correspondiente.
d) Calcular el flujo de energía neto para una persona en la habitación.
e) Sabiendo que el telescopio espacial *Spitzer* puede detectar densidades de flujo del orden de 1 μJy a 3.6 micras, ¿a qué distancia detectaría una persona?

a) De la ecuación de Stephan-Boltzmann $F=\sigma T^4$, $L=A\sigma T^4$. L=733 W.
b) De la Ley de Wien λ_{max}=0.0029 m K/310 K=9.4 μm.
c) La energía absorbida es L_{abs}=585 W.
d) El flujo de energía es de 148 W, perdidos por la persona.
e) Primero hay que calcular la luminosidad monocromática a 3.6 micras.
$L_\nu = \pi A \left(\frac{2h\nu^3}{c^2}\right)\frac{1}{e^{h\nu/KT}-1}$ =9.42874x10^{-14} W/Hz.
$F_\nu=L_\nu/4\pi d^2$. d=sqrt($L_\nu/4\pi F_\nu$). d=8.66x10^{8} m=866207 km
1 Jy=10^{-26} W/Hz/m^2.

[Tema 1-Intro, problema CO3.8]

7. Usar las siguientes anchuras de los filtros UBV para determinar en qué filtros un fotómetro determinaría que Vega es más brillante. Asumir T_{eff}=9600 K, filtros cuadrados de la anchura dada y constante del sistema fotométrico igual a cero. Lo mismo para un CCD.

Filtro	**$\lambda_{central}$ (cm)**	**Anchura (nm)**
U	365	68
B	440	98
V	550	89

Para un fotómetro, la magnitud de un objeto que emite con una densidad de flujo Fλ es:

$$m = -2.5\log\left(\int_0^\infty F_\lambda S(\lambda)d\lambda \Big/ \int_0^\infty S(\lambda)d\lambda\right) + C$$

Ésta sería la relación correcta, usando densidades de flujo. Pero erróneamente se suelen utilizar flujos integrados dentro de una banda:

$$m = -2.5\log\left(\int_0^\infty F_\lambda S(\lambda)d\lambda\right) + C$$

Comparando directamente los flujos integrados observados para cada filtro **(no la densidad de flujo!!!; estaba mal o para un fotómetro las cosas se hacen en flujos integrados)**, asumiendo C_λ=0, y que la emisión de Vega es la de un cuerpo negro y es prácticamente constante dentro de cada filtro:

$$\frac{F_U}{F_B} = \frac{\int_0^\infty F_\lambda S_U(\lambda)d\lambda}{\int_0^\infty F_\lambda S_B(\lambda)d\lambda} \approx \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_U}\right)^5 \frac{e^{hc/\lambda_B KT} - 1}{e^{hc/\lambda_U KT} - 1}\left(\frac{\Delta\lambda_U}{\Delta\lambda_B}\right) = 0.862$$

$$\frac{F_U}{F_V} = 1.42$$

$$\frac{F_B}{F_V} = 1.64$$

Por lo que Vega es más brillante en B, luego en U y por último en V.

Si lo hubiéramos hecho para densidades de flujo (mejor hecho!!):

$$\frac{F_U}{F_B} = 1.24$$

$$\frac{F_U}{F_V} = 1.85$$

$$\frac{F_B}{F_V} = 1.49$$

Para un CCD las ecuaciones de las densidades de flujo a través del filtro son diferentes, incluyen la frecuencia de la radiación. Se deja al alumno.

$$m = -2.5\log\left(\int_0^\infty F_\lambda S(\lambda)\lambda d\lambda \Big/ \int_0^\infty S(\lambda)\lambda d\lambda\right) + C$$

[Tema 1-Intro, problema CO3.16]

8. En una cierta región de la nebulosa de Norteamérica la extinción de la radiación en el visual es 1.1 magnitudes. La extensión de la nebulosa es de 20 pc, y está localizada a 700 pc de la Tierra. Suponer que una estrella de la secuencia principal de clase espectral B se observa en la dirección de la nebulosa y la magnitud absoluta visual de la estrella se sabe que es M_V=-1.1 a través de datos espectroscópicos. No considerando cualquier fuente de extinción entre nosotros y la nebulosa:

a) Encontrar la magnitud aparente visual de la estrella si está delante de la nebulosa.
b) Lo mismo si la estrella está detrás de la nebulosa.
c) Si no supiéramos de la existencia de la nebulosa, ¿a qué distancia creeríamos que está la estrella del apartado anterior? ¿Cuál sería el porcentaje de error en la distancia si no consideráramos la extinción de la nebulosa?

a) m-M=5xlog(d/10 pc); m_0=8.1 mag.
b) m_1=m_0+A(V); m_1=9.2 mag.
c) m-M=5xlog(d/10 pc); d=1150 pc. La estrella parece estar más lejos porque es más débil, pero es débil en parte porque está extinguida.
Un 65% mayor que la distancia real.
[Tema 1-Intro, problema CO12.1]

9. Una nube de HI produce una línea de 21 cm con una profundidad óptica en su centro τ_H=0.5 (la línea es ópticamente fina). La temperatura del gas es 100 K, la FWHM de la línea es 10 km/s, y la densidad atómica media de la nube es 10^7 m^{-3}. Hallar el tamaño de la nube en dirección de la línea de visión.

$$\tau_H = 5.2 \times 10^{-23} \frac{N_H}{T\Delta v} \Rightarrow N_H = 9.6 \times 10^{24} m^{-2}$$

donde la velocidad va en km/s y todo lo demás en SI.
tamaño=N_H/densidad=9.6x10^{17} m=31.1 pc.
[Tema 1-Intro, problema CO12.4]

10. La magnitud absoluta de una cefeida de periodo P (en días) es:

$$\bar{M} = -1.35 - 2.78 \times log_{10}(P)$$

a) En la Gran Nube de Magallanes se han resuelto estrellas de este tipo con magnitud aparente 15.54 y periodo 5 días. Calcular la distancia a esta galaxia.

b) Si el periodo de una cefeida varía entre 1.2 y 40 días, y asumiendo que podemos hacer observaciones profundas hasta magnitud 25, ¿cuál es la máxima distancia que podemos calcular con este método?

a) La distancia se puede calcular por medio del módulo de distancias:

$$M - m = 5 - 5 \times \log(d)$$

La magnitud absoluta de la cefeida es (darse cuenta de que se utilizan magnitudes medias):

$$M = -1.35 - 2.78 \times log_{10}(5) \Rightarrow M = -3.29$$

Usando la definición del módulo de distancias:

$$d = 10^{-0.2\times(M-m-5)} = 58.4\ kpc$$

Alguna estimación más reciente obtiene 48.5 kpc (tras una recalibración de las cefeidas en NGC4258).

¿Extinción? Para obtener 48.5 kpc en vez de 58.4 kpc se debería tener una magnitud aparente de:

$$m = M - 5 + 5 \times \log(d) \Rightarrow m = 15.13$$

Es decir, 0.4 magnitudes de extinción, que no es mucho, pueden explicar esta diferencia.

b) La distancia máxima a la que se puede observar una cefeida será para la que se obtiene m=25 si la magnitud absoluta es máxima (lo más brillante posible). La magnitud absoluta más brillante se alcanza para los periodos más largos, es decir, 40 días. Con esto:

$$M = -1.35 - 2.78 \times log_{10}(40) \Rightarrow M = -5.80$$

$$d_{max} = 10^{-0.2\times(M-m-5)} = 14.5\ Mpc \text{ para m=25}$$

$$d_{max} = 10^{-0.2\times(M-m-5)} = 1.45\ Mpc \text{ para m=20}$$

$$d_{max} = 10^{-0.2\times(M-m-5)} = 145\ Mpc \text{ para m=30}$$

Algunas distancias medidas con Cefeidas:

LMC: 0.052±0.004 Mpc (8%)
M33: 0.92±0.15 Mpc (16%)
M101: 6.4±0.5 Mpc (8%)
NGC4571: 14.9±1.2 Mpc (8%)

11. Supongamos que se observa una cefeida con un periodo de 30 días en M31. La magnitud aparente media es de 18.7. Usando la relación del problema anterior:

a) Determinar la magnitud absoluta media y la distancia.
b) ¿Cuánto tiempo hace que la luz que incide en nuestro telescopio abandonó M31?
c) Si se pudiera volar instantáneamente a M31, ¿podríamos encontrar la cefeida observada?
d) Suponiendo que ha existido una confusión y la estrella observada es en realidad una RR Lyrae, ¿en qué factor se ha calculado erróneamente la distancia a M31?
e) ¿Y si fuera una estrella de tipo W Virginis?

a) La distancia se puede calcular por medio del módulo de distancias:

$$M - m = 5 - 5 \times \log(d)$$

$$M = -1.35 - 2.78 \times log_{10}(30) \Rightarrow M = -5.46$$

$$d = 10^{-0.2\times(M-m-5)} = 0.68\ Mpc$$

b) Transformación entre Mpc y ly: 1 pc=3.26 ly

$$0.68\ Mpc = 2.21\ Mly\ (2.2\ millones\ de\ años)$$

No se podría encontrar la estrella porque las cefeidas son supergigantes que permanecen en el estado latente un millón de años aproximadamente, así que seguramente la estrella ya no es una cefeida.

c) Si la cefeida no fuera tal sino una RR Lyrae, entonces sabemos que su magnitud absoluta es M=0.6±0.3 mag. Entonces:

$$d = 10^{-0.2\times(M-m-5)} = 0.041\ Mpc$$

Un error de un factor 17!!!.

d) Si fuera una W Virginis, hay que tener en cuenta que son 1.5 mag más débiles que las cefeidas:

$$M_1 - M_2 = -2.5log_{10}\left(\frac{L_1}{L_2}\right) \Rightarrow M_1 - M_2 = -2.5log_{10}\left(\frac{4\pi d_1^2 F_1}{4\pi d_2^2 F_2}\right)$$

$$\frac{d_1^2}{d_2^2} = 10^{-0.4\times(M_1-M_2)} \Rightarrow d_1 = 0.5d_2 = 0.34\ Mpc$$

12. La galaxia UCM2257+2438 ha sido observada tanto espectroscópicamente como fotométricamente. De su espectro se infiere una magnitud absoluta M_B=-19.1, un E(B-V)=0.15 y un z=0.014. De la fotometría tenemos m_B=15.6. Considerar diferentes leyes de extinción para calcular el efecto de ésta en el módulo de distancia.

La distancia se puede calcular por medio del módulo de distancias:

$$M - m = 5 - 5 \times \log(d)$$

Pero si hay extinción entonces:

$$M - m = 5 - 5 \times \log(d) - A$$

- Si la extinción fuera nula A=0 mag.

$$d = 10^{-0.2\times(M-m-5+A)} = 87.1\ Mpc$$

- Pero en general eso no va a ser así. En primer lugar debe haber extinción Galáctica. Para determinarla necesitamos las coordenadas y los mapas de Schlegel et al. (1998) o Burstein & Hailes (1982), ambos accesibles a través de NED.
  Las coordenadas se pueden sacar del nombre (formato IAU: JHHMMSS.ss+DDMMSS.s).
  Buscamos en NED: A_B=0.672 mag (Sch+) o 0.150 mag (B&H).

$$d = 10^{-0.2\times(M-m-5+A)} = 63.9\ Mpc \text{ (Sch+)}$$

$$d = 10^{-0.2\times(M-m-5+A)} = 81.3\ Mpc \text{ (B\&H)}$$

- Ahora consideramos la extinción interna (¿o no?):
  Asumiendo una ley de extinción de Cardelli con R_V=3.1:

$$A_V = R_V E(B-V)$$

$$A_\lambda = k_\lambda A_V = k_\lambda R_V E(B-V)$$

Para nuestro problema A_V=0.47 mag

Actualmente se suele dar la ley de extinción no en función de E(B-V) sino de A_V.

Estos son algunos valores para la transformación entre A(V) y A(B):

Cardelli R_V=3.1: k_B=1.3198
Cardelli R_V=5.0: k_B=1.198
Calzetti R_V=4.0: k_B=1.247

Estos valores se sacan de expresiones como estas:

- ✓ En Cardelli et al. (1989):

$$\langle\frac{A_\lambda}{A_V}\rangle = a(x) + \frac{b(x)}{R_V}$$

Donde x es x=1/λ, en μm^{-1} y a(x) y b(x) vienen dados por expresiones como esta que se encuentra en Cardelli+:

i) *The Infrared and Optical*

$$\text{Infrared}: 0.3\ \mu\text{m}^{-1} \le x \le 1.1\ \mu\text{m}^{-1};$$

$$a(x) = 0.574x^{1.61}\ ; \qquad (2a)$$

$$b(x) = -0.527x^{1.61}\ . \qquad (2b)$$

$$\text{Optical/NIR}: 1.1\ \mu\text{m}^{-1} \le x \le 3.3\ \mu\text{m}^{-1} \text{ and } y = (x - 1.82);$$

$$a(x) = 1 + 0.17699y - 0.50447y^2 - 0.02427y^3 + 0.72085y^4 + 0.01979y^5 - 0.77530y^6 + 0.32999y^7\ ; \qquad (3a)$$

$$b(x) = 1.41338y + 2.28305y^2 + 1.07233y^3 - 5.38434y^4 - 0.62251y^5 + 5.30260y^6 - 2.09002y^7\ . \qquad (3b)$$

- ✓ En el caso de Calzetti et al. (2000), su ley de extinción se define como:

$$F(\lambda) = F_0(\lambda)10^{0.4E_s(B-V)k\prime(\lambda)}$$

$$E_s(B-V) = (0.44 \pm 0.03)E(B-V)$$

$$k'(\lambda) = 2.659(-1.857 + 1.040/\lambda) + R'_V\ , \qquad 0.63\ \mu\text{m} \le \lambda \le 2.20\ \mu\text{m}\ ;$$

$$= 2.659(-2.156 + 1.509/\lambda - 0.198/\lambda^2 + 0.011/\lambda^3) + R'_V\ , \qquad 0.12\ \mu\text{m} \le \lambda < 0.63\ \mu\text{m}\ . \qquad (4)$$

Con estos valores:

Cardelli R_V=3.1: A_B=0.61 mag → d=65.7 Mpc
Cardelli R_V=5.0: A_B=0.92 mag → d=57.6 Mpc
Calzetti R_V=4.05: A_B=0.75 mag → d=61.7 Mpc

- Finalmente calculamos una distancia con la ley de Hubble:

$$z = \frac{v}{c}$$

$$v = H_0 d = zc \Rightarrow d = \frac{zc}{H_0} \Rightarrow d = \frac{zc}{100h} \Rightarrow d = \frac{zc}{70h_{70}}$$

$d = 60\ Mpc$ para H_0=70 km/s/Mpc
$d = 84\ Mpc$ para H_0=50 km/s/Mpc
$d = 56\ Mpc$ para H_0=75 km/s/Mpc

Con todos los valores calculados (63.9,81.3,65.7,57.6,61.7,60,84,56), considerad que la distancia media es 66±11 Mpc (17% de incertidumbre).

Cosas a tener en cuenta:

- ✓ E(B-V) puede llevar incluido el efecto Galáctico.
- ✓ La extinción del gas y de las estrellas puede ser diferente.
- ✓ La extinción puede referirse a estrellas jóvenes, pero la magnitud integrada puede estar dominada por estrellas más evolucionadas, que podrían tener una extinción más baja. O puede haber un AGN.

HACER PARA UCM1428+2727 (z=0.0149, E(B-V)=0.107, MB=-19.33).

13. La base de datos SIMBAD nos da como datos de la galaxia Zwicky 456.053 el que tiene una anchura de emisión de 267 km/s al 20% de altura de la línea de HI de 21 cm. Calcular la magnitud absoluta aproximada de esta galaxia en todas las bandas fotométricas posibles.

Las ecuaciones a utilizar son la relación Tully-Fisher. Están en la página 425 del Binney&Merrifield, sacadas de Pierce & Tully (1992):

$$M_B^i = -7.48\left(logW_R^i - 2.50\right) - 19.55 + \Delta_B \pm 0.14$$
$$M_R^i = -8.23\left(logW_R^i - 2.50\right) - 20.46 + \Delta_R \pm 0.10$$
$$M_I^i = -8.72\left(logW_R^i - 2.50\right) - 20.94 \pm 0.10$$
$$M_H^i = -9.50\left(logW_R^i - 2.50\right) - 21.67 \pm 0.08$$

Donde Δ_B=0.25 y Δ_R=0.06 fueron factores de corrección introducidos para galaxias de cúmulo, que parecen ser más rojas que las galaxias de campo. Estas diferencias no parecen existir en bandas en el NIR.

Con estas expresiones calculamos (asumiendo que el valor de la anchura de la línea de emisión ya está corregida de inclinación):

$$M_B^i = -19.00 \pm 0.14\ mag$$
$$M_R^i = -19.86 \pm 0.10\ mag$$
$$M_I^i = -20.30 \pm 0.10\ mag$$
$$M_H^i = -20.97 \pm 0.08\ mag$$

Si nos vamos a NED:

$$m_B = 14.77 \pm 0.22\ mag\ (14.14\ mag\ con\ corrección\ de\ extinción)$$
$$m_I = 13.05 \pm 0.05\ mag$$
$$m_H = 11.42 \pm 0.04\ mag$$

Con ello derivamos la distancia:

$$d_B = 56.8\ Mpc\ (42.5\ Mpc\ con\ la\ otra\ medida)$$
$$d_I = 46.8\ Mpc$$
$$d_H = 30.1\ Mpc$$

¿Por qué difieren? ¡¡¡Extinción!!! ¡¡¡Efectos de apertura!!! ¡¡¡Sistema fotométrico!!!

NED da una distancia de luminosidad de 70.8 Mpc basada en H_0=73 km/s/Mpc.

14. Supongamos que todas las estrellas de una galaxia fueran M0V, cuya masa es M=0.5 $M_\odot$ y su luminosidad es L_B=0.01 $L_{B,\odot}$. Supongamos que a esa galaxia se añaden unas pocas estrellas B0V (M=17 $M_\odot$, L_B=6x10^3 $L_{B,\odot}$). ¿Cuántas de éstas son necesarias para que la relación masa-luminosidad tenga un valor de 5, que es típico de galaxias irregulares o espirales tardías?

La relación masa luminosidad de una estrella M0V es 50 $M_\odot/L_{B,\odot}$, y de una estrella B0V es 0.0028 $M_\odot/L_{B,\odot}$.

La relación masa luminosidad para una población compuesta como la que se trabaja en este problema se puede escribir como:

$$\left(\frac{M}{L}\right)_T = \left(\frac{M_{M0V} + M_{B0V}}{L_{M0V} + L_{B0V}}\right) = \left(\frac{N_{M0V} m_{M0V} + N_{B0V} m_{B0V}}{N_{M0V} l_{M0V} + N_{B0V} l_{B0V}}\right)$$

Dividiendo en numerador y denominador por el número de estrellas B0V

$$\left(\frac{M}{L}\right)_T = \left(\frac{{N_{M0V}}/{N_{B0V}}\, m_{M0V} + m_{B0V}}{{N_{M0V}}/{N_{B0V}}\, l_{M0V} + l_{B0V}}\right)$$

Sustituyendo valores y despejando ${N_{M0V}}/{N_{B0V}}$:

$$\left(\frac{M}{L}\right)_T = \left(\frac{{N_{M0V}}/{N_{B0V}}\, 0.5 + 17}{{N_{M0V}}/{N_{B0V}}\, 0.01 + 6 \times 10^3}\right) = 5\ M_\odot/L_\odot$$

$${N_{M0V}}/{N_{B0V}} = 6.7 \times 10^4$$

Basta una estrella B0V cada 67000 estrellas M0V para convertir una galaxia con M/L~50 (elíptica) en una galaxia con M/L~5 (una espiral).

En luminosidad, esta galaxia espiral tendría un 10% de su emisión procedente de las estrellas M0V [67000*0.01/(67000*0.01+6000)]!!!!

En masa, esta galaxia espiral ejemplo tendría un 99.95% de la masa en forma de estrellas M0V [67000*0.5/(67000*0.5+17)]!!!! No se distinguiría nada de una elíptica en función de qué estrellas dominan la masa, pero la emisión sería más grande en la banda B (y el UV).

15. Supongamos que la luz de las galaxias fuera una simple mezcla de dos componentes:

Tipo de estrellas	muy jóvenes	muy viejas
B-V	-0.20	+0.95
U-B	-1.00	+0.55

Calcular y dibujar en el plano (U-B) vs. (B-V) los puntos correspondientes a tal mezcla. Superponer en dicho diagrama los puntos correspondientes a galaxias de diferentes tipos morfológicos y discutir los resultados. (hacer con Fukugita)

Tipo de galaxia	I	Sc	Sbc	Sa-Sb	S0	E
B-V	+0.50	+0.52	+0.65	+0.85	+0.92	+0.95
U-B	-0.20	-0.10	+0.00	+0.25	+0.48	+0.50

El color se escribe como:

$$B - V = M_B - M_V = M_{B,0} - M_{V,0} - 2.5log\left(\frac{L_B L_{V,0}}{L_V L_{B,0}}\right)$$

$$L_B = L_{B,0} 10^{-0.4(B-V-M_{B,0}+M_{V,0})}\, L_V/L_{V,0}$$

$$U - B = M_U - M_B = M_{U,0} - M_{B,0} - 2.5log\left(\frac{L_U L_{B,0}}{L_B L_{U,0}}\right)$$

$$L_U = L_{U,0} 10^{-0.4(U-B-M_{U,0}+M_{B,0})}\, L_B/L_{B,0}$$

Sustituyendo por la expresión de arriba:

$$L_U = L_{U,0} 10^{-0.4(U-V-M_{U,0}+M_{V,0})}\, L_V/L_{V,0}$$

Para una población compuesta:

$$(B - V)^T = M_{B,0} - M_{V,0} - 2.5log\left[\frac{(L_B^{you} + L_B^{old})L_{V,0}}{(L_V^{you} + L_V^{old})L_{B,0}}\right]$$

$$(B - V)^T = M_{B,0} - M_{V,0} - 2.5log\left[\frac{(N^{you} l_B^{you} + N^{old} l_B^{old})L_{V,0}}{(N^{you} l_V^{you} + N^{old} l_V^{old})L_{B,0}}\right]$$

$$(B - V)^T = M_{B,0} - M_{V,0} - 2.5log\left[\frac{(l_B^{you} + b \times l_B^{old})L_{V,0}}{(l_V^{you} + b \times l_V^{old})L_{B,0}}\right]$$

Donde $b=N^i/N^2$.

Las luminosidades "l" son por estrella, y su expresión es:

$$l_B^i = L_{B,0} 10^{-0.4((B-V)^i - M_{B,0}+M_{V,0})}\, l_V^i/L_{V,0} = L_{B,0} 10^{0.4(M_{B,0}-M_{V,0})} 10^{-0.4((B-V)^i)}\, l_V^i/L_{V,0}$$

$$l_B^{you} + b \times l_B^{old} = L_{B,0}/L_{V,0}\, 10^{0.4(M_{B,0}-M_{V,0})}\left[10^{-0.4((B-V)^{you})} l_V^{you} + b \times 10^{-0.4((B-V)^{old})} l_V^{old}\right]$$

$$l_U^{you} + b l_U^{old} = L_{U,0}/L_{V,0}\, 10^{0.4(M_{U,0}-M_{V,0})}\left[10^{-0.4((U-V)^{you})} l_V^{you} + b \times 10^{-0.4((U-V)^{old})} l_V^{old}\right]$$

Lo ponemos todo en función de una fracción en luz en la banda V:

$$j = \frac{N^{you} l_V^{you}}{N^{you} l_V^{you} + N^{old} l_V^{old}} = \frac{l_V^{you}}{l_V^{you} + b \times l_V^{old}}$$

$$l_V^{you} = \frac{j \times b \times l_V^{old}}{1 - j}$$

Combinando expresiones:

$$(B - V)^T = -2.5log\left[\frac{10^{-0.4((B-V)^{you})} l_V^{you} + b \times 10^{-0.4((B-V)^{old})} l_V^{old}}{(l_V^{you} + b \times l_V^{old})}\right]$$

$$(B-V)^T = -2.5log\left[\frac{10^{-0.4((B-V)^{you})}\frac{j}{1-j}+10^{-0.4\left((B-V)^{old}\right)}}{\left(\frac{j}{1-j}+1\right)}\right]$$

$$(B-V)^T = -2.5log\left[\frac{10^{-0.4((B-V)^{you})}\frac{j}{1-j}+10^{-0.4\left((B-V)^{old}\right)}}{\left(\frac{1}{1-j}\right)}\right]$$

Sustituyendo por los colores correspondientes:

$$(B-V)^T = -2.5log\left[\frac{1.20\times\frac{j}{1-j}+0.42}{\left(\frac{1}{1-j}\right)}\right]$$

$$\boldsymbol{(B-V)^T = -2.5log[0.78\times j+0.42]}$$

De igual manera se opera para U-B:

$$(U-B)^T = M_{U,0}-M_{B,0}-2.5log\left[\frac{\left(l_U^{you}+b\times l_U^{old}\right)L_{B,0}}{\left(l_B^{you}+b\times l_B^{old}\right)L_{U,0}}\right]$$

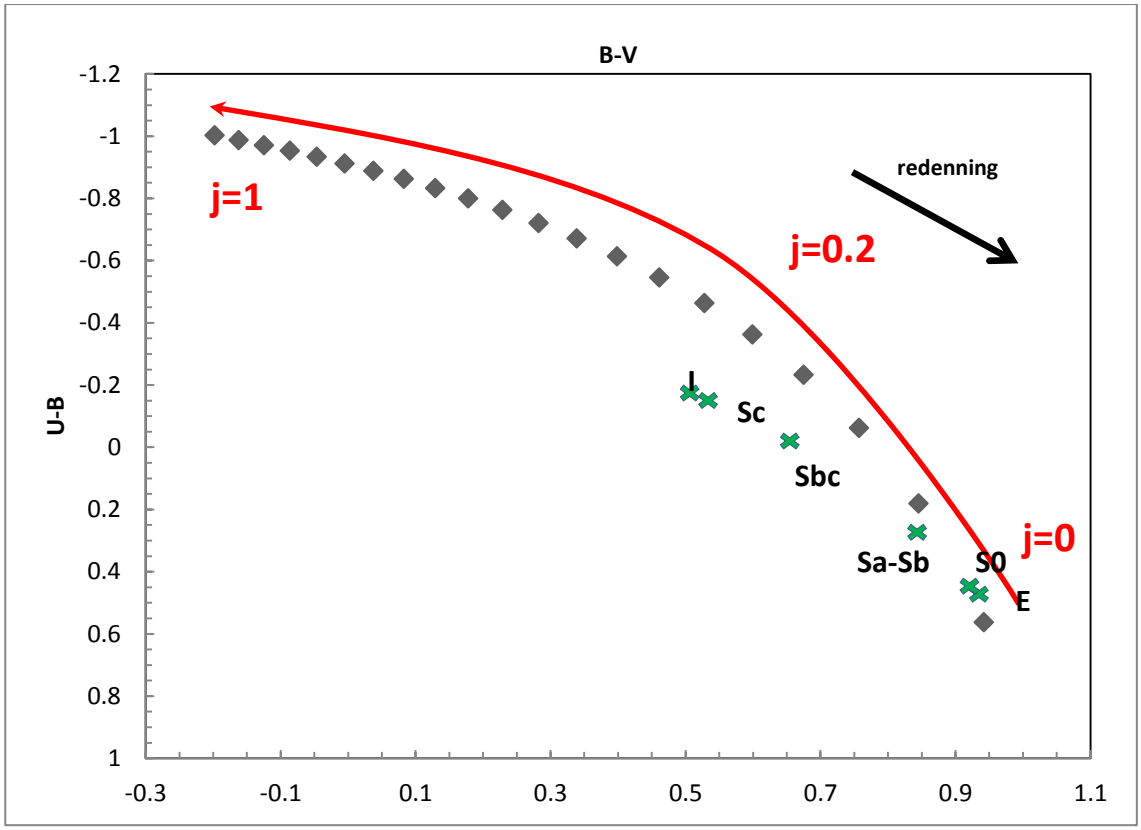
$$(U-B)^T = -2.5log\left[\frac{10^{-0.4((U-V)^{you})}l_V^{you}+b\times 10^{-0.4\left((U-V)^{old}\right)}l_V^{old}}{10^{-0.4((B-V)^{you})}l_V^{you}+b\times 10^{-0.4\left((B-V)^{old}\right)}l_V^{old}}\right]$$

$$(U-B)^T = -2.5log\left[\frac{10^{-0.4((U-V)^{you})}\frac{j}{1-j}+10^{-0.4\left((U-V)^{old}\right)}}{10^{-0.4((B-V)^{you})}\frac{j}{1-j}+10^{-0.4\left((B-V)^{old}\right)}}\right]$$

Sustituyendo por los colores correspondientes $(U\text{-}V)^{you}$=-1.20 y $(U\text{-}V)^{old}$=+1.50):

$$(U-B)^T = -2.5log\left[\frac{3.02\frac{j}{1-j}+0.25}{1.20\frac{j}{1-j}+0.42}\right]$$

$$\boldsymbol{(U-B)^T = -2.5log\left[\frac{2.77j+0.25}{0.78j+0.42}\right]}$$


B-V
U-B
-1.2
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
-0.3
-0.1
0.1
0.3
0.5
0.7
0.9
1.1
j=1
j=0.2
j=0
redenning
I
Sc
Sbc
Sa-Sb
S0
E

16. La distribución radial de intensidad para las galaxias elípticas y los bulbos de galaxias espirales sigue, en primera aproximación, la ley de de Vaucouleurs:

$$I(r) = I_e 10^{-3.33[(r/r_e)^{1/4}-1]}$$

siendo I_e la intensidad en el radio efectivo r_e (el radio en cuyo interior se encuentra la mitad de la luz total).

Análogamente, la distribución de luz para los discos de galaxias espirales sigue una ley de Freeman:

$$I(r) = I_0 e^{-r/d_L}$$

siendo I_0 la intensidad central y d_L la longitud de escala exponencial.

a) Convertir ambas leyes empíricas de intensidad a magnitudes por segundo de arco al cuadrado y comentar las ventajas de tales transformaciones.
b) Calcular el flujo total integrado de un bulbo que sigue la ley de de Vaucouleurs y de un disco que sigue la ley de Freeman.
c) Un útil caracterizador morfológico del tipo de Hubble de las galaxias es la razón bulbo-disco B/D o bulbo-total (B/T) entre las luminosidades totales de las componentes de bulbo y disco de una galaxia. Obtener dicha razón y comentar su conexión con la morfología.
d) Calcular las magnitudes aparente y absoluta de un bulbo que siga la ley de de Vaucouleurs y de un disco que siga la ley de Freeman.

Recordatorio:

$$\int_0^\infty z^n e^{-az} dz = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}$$

para a>0, n>-1, siendo Γ(n)=(n-1)! para n>0 y entero.

a) Convirtiendo las intensidades a brillos superficiales (fijaos en las unidades):

$$\mu(r) = -2.5\log[I(r)] + C = -2.5\log\left(I_e 10^{-3.33[(r/r_e)^{1/4}-1]}\right)$$

$$\mu(r) = -2.5\log I_e + C - 2.5 \times (-3.33) \times \left[(r/r_e)^{1/4} - 1\right] \times \log(10)$$

$$\mu(r) = -2.5\log I_e + C + 8.325 \times \left[(r/r_e)^{1/4} - 1\right]$$

$$\mu(r) = \mu_e + 8.33 \times \left[(r/r_e)^{1/4} - 1\right]$$

Si lo hubiéramos hecho con logaritmos neperianos nos saldría la expresión de los apuntes:

$$\ln[I(r)] = \ln I_e - 3.33 \times \ln 10 \left[(r/r_e)^{1/4} - 1\right]$$

$$\ln[I(r)] = \ln I_e + 6.67 \left[1 - (r/r_e)^{1/4}\right]$$

Para el disco:

$$\mu(r) = -2.5\log I(r) + C = C - 2.5\log\left(I_0 e^{-r/d_L}\right)$$

$$\mu(r) = \mu_0 + 2.5\log(e)\, r/d_L$$

$$\mu(r) = \mu_0 + 1.0857\frac{r}{d_L}$$

b) Calculamos el flujo total a partir de la intensidad:

$$F = \int_0^\infty I(r) 2\pi r dr$$

$$F_{bulge} = \int_0^\infty I_e 10^{-3.33[(r/r_e)^{1/4}-1]} 2\pi r dr$$

$$F_{bulge} = \int_0^\infty I_e e^{-7.67[(r/r_e)^{1/4}-1]} 2\pi r dr = I_e e^{7.67} 2\pi \int_0^\infty e^{-7.67(r/r_e)^{1/4}} r dr$$

Para hallar la integral hacemos un cambio de variable:

$$z = (r/r_e)^{1/4} \Rightarrow z^4 = r/r_e \Rightarrow 4z^3 r_e dz = dr$$

$$F_{bulge} = I_e e^{-7.67} 8\pi r_e^2 \int_0^\infty e^{-7.67z} z^7 dz$$

$$F_{bulge} = I_e e^{-7.67} 8\pi r_e^2 \frac{\Gamma(7+1)}{7.67^{7+1}}$$

$$F_{bulge} = 7.215\pi r_e^2 I_e = 2F_{bulge}(r < r_e)$$

Para el disco:

$$F_{disk} = \int_0^\infty I_0 e^{-r/d_L} 2\pi r dr$$

Con el cambio de variable:

$$z = r/d_L \Rightarrow d_L\, dz = dr$$

$$F_{disk} = 2\pi I_0 \int_0^\infty e^{-z} d_L^2 z dz = 2\pi d_L^2 I_0 \frac{\Gamma(1+1)}{1^{1+1}}$$

$$F_{disk} = 2\pi d_L^2 I_0$$

c) La relación bulbo disco se puede obtener a partir de los parámetros morfológicos:

$$\frac{B}{D} = \frac{F_{bulge}}{F_{disk}} = \frac{L_{bulge}}{L_{disk}} = \frac{7.215\pi r_e^2 I_e}{2\pi d_L^2 I_0} = 3.607 \times \frac{r_e^2 I_e}{d_L^2 I_0}$$

$$\frac{B}{D} = 3.607 \times \left(\frac{r_e}{d_L}\right)^2 \frac{I_e}{I_0}$$

En función de brillos superficiales:

$$\mu_e = -2.5 \log[I_e] + C$$

$$\mu_0 = -2.5 \log[I_0] + C$$

$$\frac{B}{D} = 3.607 \times \left(\frac{r_e}{d_L}\right)^2 10^{-0.4(\mu_e - \mu_0)}$$

La relación B/T se puede escribir como:

$$\frac{B}{T} = \frac{L_{bulge}}{L_{bulge} + L_{disk}} = \frac{L_{bulge}/L_{disk}}{L_{bulge}/L_{disk} + 1} = \frac{B/D}{B/D + 1}$$

La relación bulbo-disco correlaciona con el tipo morfológico. Estos son los valores típicos según Simien & de Vaucouleurs (1986; ver Galactic Astronomy –Binney and Merrifield- página 240):

T	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
MphT	$S0^-$	S0	$S0^+$	S0a	Sa	Sab	Sb	Sbc	Sc	Scd	Sd
B/D	1.50	1.33	1.13	0.92	0.69	0.47	0.32	0.19	0.10	0.05	0.02
B/T	0.60	0.57	0.53	0.48	0.41	0.32	0.24	0.16	0.09	0.05	0.02

Fijaos que para un tipo entre S0a y $S0^+$ es cuando el disco y el bulbo son igual de brillantes. Las lenticulares tienen bulbos hasta un 50% más brillantes que su disco. En una espiral como la MW el disco domina la luminosidad con un 70%-75% del total. Una Sd tiene un bulbo que solo contribuye con un 2% a la luminosidad total. Notad que esto es para la banda B ó V seguramente, en el NIR las cosas serán diferentes.

d) Las magnitudes aparentes y absolutas se pueden calcular de la siguiente manera:

$$m_{bulge} = -2.5 \log F_{bulge} + C$$

$$m_{bulge} = -2.5 \log 7.215\pi r_e^2 I_e + C$$
$$m_{bulge} = \mu_e - 2.5 \log 7.215\pi - 5 \log r_e$$
$$m_{bulge} = \mu_e - 3.39 - 5 \log r_e$$
$$M - m = 5 - 5 \log D\ [pc]$$
$$M_{bulge} = \mu_e - 3.39 - 5 \log r_e["] + 5 - 5 \log D\ [pc]$$
$$M_{bulge} = \mu_e + 1.61 - 5 \log(D \times r_e["])$$
$$M_{bulge} = \mu_e + 1.61 - 5 \log\left(D \times r_e["] \times \frac{1\ kpc}{206265\ "/rad \times 1000\ pc}\right)$$
$$M_{bulge} = \mu_e - 9.96 - 5 \log(r_e[kpc])$$

Esta relación significa que para galaxias elípticas o bulbos que siguen una ley de de Vaucouleurs perfecta, todos los objetos de la misma luminosidad (la misma masa, más o menos), se distribuyen en una recta cuando se enfrenta el brillo superficial frente al logaritmo del radio (relación de Kormendy).

Hay que tener en cuenta que se en la anterior relación se ha tomado que la distancia de luminosidad se puede usar para calcular un tamaño físico en función de un tamaño angular. Esto es una aproximación que funciona a distancias pequeñas (i.e., bajo redshift, z<0.1-0.2), pero no es cierto de manera general (se verá en Cosmología).

Para el disco:

$$m_{disk} = -2.5 \log F_{disk} + C$$
$$m_{disk} = -2.5 \log 2\pi d_L^2 I_0 + C$$
$$m_{disk} = -2.5 \log 2\pi d_L^2 I_0 + C = \mu_0 - 2.5 \log 2\pi - 5 \log d_L$$
$$m_{disk} = \mu_0 - 1.995 - 5 \log d_L["]$$
$$M - m = 5 - 5 \log D\ [pc]$$
$$M_{disk} = \mu_0 - 1.995 - 5 \log d_L["] + 5 - 5 \log D\ [pc]$$
$$M_{disk} = \mu_0 - 8.57 - 5 \log d_L[kpc]$$

Esta ecuación también nos lleva a que existe una relación entre brillo superficial del disco y radio, si la luminosidad del disco es constante.

17. A partir de la investigación sobre un grupo de doce galaxias E y S0, Abell (1962) concluyó que la distribución de luz para este tipo de galaxias se ajustaba a la forma: (no es para DM halos?)

$$I(r) = \frac{I_0}{\left(1+\frac{r}{a}\right)^2}$$

donde a es un parámetro constante. A partir de esta expresión y suponiendo una galaxia esférica:

a) Encontrar cómo varía F(r<R) –el flujo integrado dentro del radio R- con el radio.
b) Discutir el límite del flujo cuando el radio tiende a infinito.

a) Vemos como se integra la intensidad para obtener el flujo:

$$F(r) = \int_0^r I(r')2\pi r' dr'$$

$$F(r) = \int_0^r \frac{I_0}{\left(1+\frac{r'}{a}\right)^2} 2\pi r' dr'$$

Para resolver la integral se hace el cambio de variable:

$$t = 1 + \frac{r'}{a} \Rightarrow r' = a(t-1) \Rightarrow dr' = adt$$

$$F(r) = \int_1^{1+r/a} \frac{I_0}{(t)^2} 2\pi a(t-1)adt$$

$$F(r) = 2\pi I_0 a^2 \int_1^{1+r/a} \frac{(t-1)}{(t)^2} dt = 2\pi I_0 a^2 \int_1^{1+r/a} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right) dt$$

$$F(r) = 2\pi I_0 a^2 \left[\ln t + \frac{1}{t}\right]_1^{1+\frac{r}{a}} = 2\pi I_0 a^2 \left[\ln\left(1+\frac{r}{a}\right) + \frac{1}{1+\frac{r}{a}} - 1\right] = 2\pi I_0 a^2 \left[\ln\left(1+\frac{r}{a}\right) - \frac{r}{a+r}\right]$$

b) Para radios infinitos el flujo va a infinito. La ley de de Vaucouleurs se comporta mejor. El perfil de intensidad de este ejercicio se parece al perfil de densidad de materia oscura que presenté en clase (necesario para que la velocidad de rotación tienda a una constante a radios galactocéntricos altos):

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1+(r/a)^2}$$

Para evitar integrales divergentes se varia ese perfil ligeramente, como por ejemplo en el muy famoso paper de Navarro, Frenk & White (NFW profile). Como se dio en la el Tema 2: $\rho(r) = \frac{\rho_0}{(r/a)(1+r/a)^2}$.

18. Con los datos que se dan a continuación, correspondientes al núcleo de una galaxia, calcular la contribución a la masa y a la luminosidad de cada tipo de estrella. Discutir el resultado.

Tipo de estrella	**número**	**$M/M_\odot$**	**$L/L_\odot$**
cúmulos globulares	1	100000	100000
Últimas GV	$3.3x10^5$	0.9	0.6
K0V-K2V	$4.3x10^5$	0.7	0.4
Intermedias KV	$9.3x10^5$	0.6	0.3
Últimas KV	$3.6x10^6$	0.5	0.1
Primeras MV	$2.8x10^7$	0.4	0.01
Intermedias MV	$2.8x10^8$	0.2	0.001
Subgigantes K	$4.7x10^4$	1.2	6.0
G8III	$2.7x10^4$	2.0	40
K0-III-K2III	$2.8x10^3$	2.0	100
Intermedias KIII	$4.0x10^3$	2.0	100
Últimas KIII-M0 III	$1.2x10^3$	2.0	100
Primeras MIII	$8.0x10^2$	2.0	800

	N	M	L	M/L	M*N	L*N	%M	%L
cúmulos globulares	1	100000	100000	1.0000	1.00E+05	1.00E+05	0.1421	2.2366
Últimas GV	3.30E+05	0.9	0.6	001.5000	2.97E+05	1.98E+05	0.4220	4.4285
K0V-K2V	4.30E+05	0.7	0.4	001.7500	3.01E+05	1.72E+05	0.4277	3.8470
Intermedias KV	9.30E+05	0.6	0.3	002.0000	5.58E+05	2.79E+05	0.7928	6.2402
Últimas KV	3.60E+06	0.5	0.1	005.0000	1.80E+06	3.60E+05	2.5574	8.0519
Primeras MV	2.80E+07	0.4	0.01	040.0000	1.12E+07	2.80E+05	15.9127	6.2626
Intermedias MV	2.80E+08	0.2	0.001	200.0000	5.60E+07	2.80E+05	79.5635	6.2626
Subgigantes K	4.70E+04	1.2	6	000.2000	5.64E+04	2.82E+05	0.0801	6.3073
G8III	2.70E+04	2	40	000.0500	5.40E+04	1.08E+06	0.0767	24.1557
K0-III-K2III	2.80E+03	2	100	000.0200	5.60E+03	2.80E+05	0.0080	6.2626
Intermedias KIII	4.00E+03	2	100	000.0200	8.00E+03	4.00E+05	0.0114	8.9465
Últimas KIII-M0 III	1.20E+03	2	100	000.0200	2.40E+03	1.20E+05	0.0034	2.6840
Primeras MIII	8.00E+02	2	800	000.0025	1.60E+03	6.40E+05	0.0023	14.3145
TOTALES	3.13E+08				7.04E+07	4.47E+06	100%	100%

Se ha completado la tabla multiplicando en número de estrellas de cada tipo por su masa o por su luminosidad. Luego se hacen los sumatorios de estas cantidades para calcular la masa total y la luminosidad total. Finalmente se han calculado porcentajes para estudiar cómo contribuyen los distintos tipos de estrellas al total de la masa y la luminosidad.

En ecuaciones:

$$M_T = \sum_{i=0}^{N} N_i M_i \qquad L_T = \sum_{i=0}^{N} N_i L_i$$

$$Mass\ fraction_i = 100 \frac{N_i M_i}{\sum_{i=0}^{N} N_i M_i}$$

$$Luminosity\ fraction_i = 100 \frac{N_i L_i}{\sum_{i=0}^{N} N_i L_i}$$

La masa de este bulbo ejemplo está dominada por las estrellas de tipo MV, es decir, estrellas de la secuencia principal poco masivas (menores que el Sol), que suman casi un 95% de la masa total (M0V-M9V). Sin embargo estas estrellas solo suman un 12% de la luminosidad.

Las estrellas que más contribuyen a la luminosidad son gigantes (i.e., estrellas evolucionadas), que suman menos de un 0.1% de la masa pero pueden dar cuenta de un 15%+25% de la luminosidad.

Notar que esta población ya es evolucionada, es decir, en los bulbos no hay formación estelar importante (a no ser que haya starbursts nucleares) y no encontramos estrellas de los primeros tipos (OBA). Para esas ya vimos en otro ejercicio que unas pocas pueden deslumbrar y dominar la emisión óptica (p.e., filtros UBV) de una población compuestas, aún cuando no contribuyen mucho a la masa total de dicha población.

La relación masa-luminosidad (masa visible!!!) de la población total sería M/L=15.7 –unidades solares-. Este valor es típico de E/S0. Véanse las tablas resumen de propiedades según el tipo morfológico en el Tema 3.

19. Diversas teorías apuntaban a que las galaxias cD (galaxias dominantes de un cúmulo) acretaban una gran cantidad de gas proveniente del medio intracumular. Supongamos que la tasa de caída de gas es 100 $M_\odot$/año y que ha estado ocurriendo durante 10^{10} años. Si consideremos que a partir de ese gas solo se forman estrellas de baja masa, que podemos agrupar en tres tipos GV (masa: 0.8-1.0 $M_\odot$), KV (0.5-0.8 $M_\odot$) y MV (0.1-0.5 $M_\odot$), y que la formación de estrellas a partir de ese gas es instantánea con una función inicial de masa del tipo:

$$\phi(m) = \phi_0 m^{-\alpha}$$

con α=2.35.

a) Deducir el número de estrellas de cada grupo que se han formado en los 10^{10} años de caída del gas.

b) Suponiendo que la galaxia elíptica original (antes de la caída del gas) tenía (B-V)=0.99 y M_V=-20.0, calcular la magnitud M_V y el color B-V de la galaxia resultante tras la formación estelar a partir del gas acretado. Discutir el resultado.

Datos: $M_{V,\odot}$*=4.84*

Grupo	B-V	M_V
GV	0.68	+5.1
KV	1.15	+7.4
MV	1.60	+12.3

a) Estamos considerando la formación estelar en una galaxia. Nos dicen que solo se forman estrellas entre 0.1 y 1.0 $M_\odot$. ¿Cómo se interpretan estos dos números? ¡¡Son los límites de la IMF!! Recordad que los límites típicos son algo como m_{down}=0.1-1.0 $M_\odot$ y m_{up}=100-125 $M_\odot$. Esto es un ejercicio y se están simplificando cosas…

Recordamos que con la IMF se puede calcular el número de estrellas haciendo:

$$N_T = \int_{m_{down}}^{m_{up}} \phi(m)dm = N_{GV} + N_{KV} + N_{MV}$$

$$N_{GV} = \int_{m_{down}(GV)}^{m_{up}(GV)} \phi(m)dm$$

$$N_{KV} = \int_{m_{down}(KV)}^{m_{up}(KV)} \phi(m)dm$$

$$N_{MV} = \int_{m_{down}(MV)}^{m_{up}(MV)} \phi(m)dm$$

Si sustituimos ϕ(m) por la parametrización de Salpeter $\phi(m) = \phi_0 m^{-\alpha}$ podríamos hacer la integral en masa pero nos quedaría todo en función de la constante de normalización ϕ_0. Hay que calcularla. ¿Cómo? La masa total de estrellas formadas es conocida:

$$M_T = SFR \times \Delta t$$

donde Δt es la duración del brote.

Normalmente no todo el gas se convierte en estrellas, hay una determinada eficiencia (que no es muy alta), pero en el problema no se toma en cuenta esa eficiencia. Si se nombrara: $M_T = SFR \times \Delta t \times \varepsilon$. Para este problema ε=1.

Por otro lado, sabemos que la masa total de estrellas formadas (o de gas que se convierte en estrellas) es, a partir de la IMF:

$$M_T = \int_{m_{down}}^{m_{up}} m\phi(m)dm = M_{GV} + M_{KV} + M_{MV} = SFR \times \Delta t$$

$$M_{GV} = \int_{m_{down}(GV)}^{m_{up}(GV)} m\phi(m)dm$$

$$M_{KV} = \int_{m_{down}(KV)}^{m_{up}(KV)} m\phi(m)dm$$

$$M_{MV} = \int_{m_{down}(MV)}^{m_{up}(MV)} m\phi(m)dm$$

Con la primera ecuación se puede calcular la normalización de la IMF. Un fallo cometido por muchos de vosotros es calcular varias normalizaciones para los distintos tipos de estrellas. ¡¡¡Es incorrrecto!!! Solo hay una normalización y se calcula a partir de la masa de estrellas formadas.

A veces se calcula la normalización estableciendo:

$$\int_{m_{down}}^{m_{up}} m\phi(m)dm = 1$$

Entonces, con esta definición, habría que multiplicar después por SFRxΔt para calcular la masa total y las masas en estrellas de distintos tipos. Es solo cuestión de nomenclatura.

Para nuestro problema:

$$M_T = \int_{m_{down}}^{m_{up}} m\phi_0 m^{-\alpha}dm = \phi_0 \int_{m_{down}}^{m_{up}} m^{-\alpha+1}dm = \phi_0 \left[\frac{m^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_{m_{down}}^{m_{up}} = \phi_0 \left[\frac{m^{-0.35}}{-0.35}\right]_{0.1}^{1.0}$$

$$= \phi_0 \left[\frac{1.0 - 0.1^{-0.35}}{-0.35}\right] = 3.5392\phi_0 = 100\frac{M_\odot}{yr} \times 10^{10} yr = 10^{12} M_\odot$$

$$\phi_0 = 2.83 \times 10^{11} M_\odot$$

Cuidado con las unidades!!!

Con la normalización ya podemos calcular el número de estrellas formadas de cada tipo:

$$N_{SpT} = \int_{m_{down}(SpT)}^{m_{up}(SpT)} \phi_0 m^{-\alpha}dm = \phi_0 \int_{m_{down}(SpT)}^{m_{up}(SpT)} m^{-\alpha}dm = \phi_0 \left[\frac{m^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{m_{down}(SpT)}^{m_{up}(SpT)} = \phi_0 \left[\frac{m^{-1.35}}{-1.35}\right]_{m_{down}(SpT)}^{m_{up}(SpT)}$$

$$N_{GV} = 2.83 \times 10^{11} \left[\frac{1.0^{-1.35} - 0.8^{-1.35}}{-1.35}\right] = 7.37 \times 10^{10}$$

$$N_{KV} = 2.83 \times 10^{11} \left[\frac{0.8^{-1.35} - 0.5^{-1.35}}{-1.35}\right] = 2.51 \times 10^{11}$$

$$N_{MV} = 2.83 \times 10^{11} \left[\frac{0.5^{-1.35} - 0.1^{-1.35}}{-1.35}\right] = 4.16 \times 10^{12}$$

$$N_T = 2.83 \times 10^{11} \left[\frac{1.0 - 0.1^{-1.35}}{-1.35}\right] = 4.48 \times 10^{12}$$

O también:

$$N_T = N_{GV} + N_{KV} + N_{MV} = 4.48 \times 10^{12}$$

Podemos calcular la masa de estrellas de cada tipo:

$$M_{GV} = 2.83 \times 10^{11} \left[\frac{1.0^{-0.35} - 0.8^{-0.35}}{-0.35}\right] = 6.757 \times 10^{10} M_\odot$$

$$M_{KV} = 2.83 \times 10^{11} \left[\frac{0.8^{-0.35} - 0.5^{-0.35}}{-0.35}\right] = 1.56 \times 10^{11} M_\odot$$

$$M_{MV} = 2.83 \times 10^{11} \left[\frac{0.5^{-0.35} - 0.1^{-0.35}}{-0.35}\right] = 7.79 \times 10^{11} M_\odot$$

Si sumamos todo, ¿qué debe dar?

$$M_T = M_{GV} + M_{KV} + M_{MV} = 1.00 \times 10^{12} M_\odot = SFR \times \Delta t$$

b) Mezclamos las poblaciones:

$$(B-V)^T = M_{B,0} - M_{V,0} - 2.5log\left[\frac{\left(L_B^{orig} + L_B^{GV} + L_B^{KV} + L_B^{MV}\right)L_{V,0}}{\left(L_V^{orig} + L_V^{GV} + L_V^{KV} + L_V^{MV}\right)L_{B,0}}\right]$$

$$L_B^{orig} = L_{B,0} 10^{-0.4\left[M_B^{orig} - M_{B,0}\right]}$$

$$L_B^{GV} = N_{GV} L_{B,0} 10^{-0.4\left[M_B^{GV} - M_{B,0}\right]} \qquad L_V^{GV} = N_{GV} L_{V,0} 10^{-0.4\left[M_V^{GV} - M_{V,0}\right]}$$

$$L_B^{KV} = N_{KV} L_{B,0} 10^{-0.4\left[M_B^{KV} - M_{B,0}\right]} \qquad L_V^{KV} = N_{KV} L_{V,0} 10^{-0.4\left[M_V^{KV} - M_{V,0}\right]}$$

$$L_B^{MV} = N_{MV} L_{B,0} 10^{-0.4\left[M_B^{MV} - M_{B,0}\right]} \qquad L_V^{MV} = N_{MV} L_{V,0} 10^{-0.4\left[M_V^{MV} - M_{V,0}\right]}$$

Introduciendo todo arriba se ve que las constates del sistema fotométrico se van y queda:

$$(B-V)^T = -2.5log\left[\frac{\left(10^{-0.4M_B^{orig}} + N_{GV}10^{-0.4M_B^{GV}} + N_{KV}10^{-0.4M_B^{KV}} + N_{MV}10^{-0.4M_B^{MV}}\right)}{\left(10^{-0.4M_V^{orig}} + N_{GV}10^{-0.4M_V^{GV}} + N_{KV}10^{-0.4M_V^{KV}} + N_{MV}10^{-0.4M_V^{MV}}\right)}\right]$$

Ya se puede calcular el color, sustituyendo los valores de los números de estrellas calculados en el apartado a) y las magnitudes absolutas:

$$M_V^{orig} = -20.0 \qquad M_B^{orig} = (B-V)^{orig} + M_V^{orig} = +0.99 + (-20.0) = -19.01$$

$$M_V^{GV} = +5.1 \qquad M_B^{GV} = (B-V)^{GV} + M_V^{GV} = +0.69 + 5.1 = 5.79$$

$$M_V^{KV} = +7.4 \qquad M_B^{KV} = (B-V)^{KV} + M_V^{KV} = +1.15 + 7.4 = 8.55$$

$$M_V^{MV} = +12.3 \qquad M_B^{MV} = (B-V)^{MV} + M_V^{MV} = 1.60 + 12.3 = 13.90$$

Sustituyendo: todo:

$$(B-V)^T = 0.8468$$

La magnitud V de la galaxia resultante será:

$$M_V^T = M_{V,0} - 2.5log\left[10^{-0.4\left[M_V^{orig}-M_{V,0}\right]} + N_{GV}10^{-0.4\left[M_V^{GV}-M_{V,0}\right]} + N_{KV}10^{-0.4\left[M_V^{KV}-M_{V,0}\right]}\right.$$

$$\left. + N_{MV}10^{-0.4\left[M_V^{MV}-M_{V,0}\right]} {L_{V,0}}/{L_{V,0}}\right] = -22.6009$$

$$M_B^T = M_{B,0} - 2.5log\left[10^{-0.4\left[M_B^{orig}-M_{B,0}\right]} + N_{GV}10^{-0.4\left[M_B^{GV}-M_{B,0}\right]} + N_{KV}10^{-0.4\left[M_B^{KV}-M_{B,0}\right]}\right.$$

$$\left. + N_{MV}10^{-0.4\left[M_B^{MV}-M_{B,0}\right]} {L_{B,0}}/{L_{B,0}}\right] = -21.7541$$

$$M_B^T - M_V^T = 0.8468 = (B-V)^T \text{ Perfecto!!!}$$

El nuevo material que cae en la galaxia original hace la galaxia 0.6 mag más brillante (un 74%) pero el color B-V solo cambia 0.15 mag, se hace un poco más azul pero no mucho. Notad que en principio no hemos necesitado para nada $M_{V,0}$ ni $M_{B,0}$.

20. La galaxia MrK170 es una galaxia que muestra una intensa formación estelar. Sus luminosidades observadas en las líneas Hα y Hβ son:

$$L(H\alpha)=9.772\times10^{39}\ \text{erg/s} \qquad L(H\beta)=2.089\times10^{39}\ \text{erg/s}$$

Suponiendo que estas líneas se originan en el gas ionizado por estrellas, y que son líneas de recombinación, estimar la tasa de formación estelar media, en masas solares por año, que se está produciendo en la galaxia. Utilizar para ello los datos de la tabla, suponiendo que las estrellas mueren después de abandonar la secuencia principal (en la que viven un tiempo t_{SP}).

Tener en cuenta que las luminosidades observadas están afectadas por extinción interna, por lo que las luminosidades corregidas de extinción vendrán dadas por

$$L_{corregida}=L_{observada}\times10^{0.4E(B-V)k(\lambda)}$$

donde E(B-V) es el exceso de color, k(λ=Hα)=2.44, k(λ=Hβ)=3.68. Típicamente se asume que el cociente entre los flujos emitidos (antes de verse afectados por la extinción) por las líneas de Hα y Hβ verifican (para $T_e=10^4$ K, $n_e=10^2$ cm^{-3} y recombinación en el caso B):

$$F_{H\alpha}/F_{H\beta}=2.86$$

Para la IMF asumir una ley de Salpeter con pendiente α=-2.35 y normalizada empleando como límites inferior y superior 0.10 y 75 $M_\odot$.

Suponer además los siguientes coeficientes de recombinación:

$\sigma_{caso\ B}=2.6\times10^{-13}$ $\sigma_{H\alpha}=1.16\times10^{-13}$ $\sigma_{H\beta}=3.03\times10^{-14}$

Tipo espectral	**B3**	**B1**	**B0.5**	**B0**	**O9.5**	**O9**	**O5**
m ($M_\odot$)	6.0	8.0	15.0	20.0	30.0	40.0	60.0
t_{SP} (Gyr)	0.05	0.03	0.01	0.008	0.006	0.004	0.003
log(N_{Lyman})	43.69	45.29	46.23	47.36	47.84	48.08	49.62

N_{Lyman} es el número de fotones Lyman (aquellos que tienen una energía superior a 13.6 eV, es decir, capaces de ionizar el hidrógeno neutro).

Nota: en los cálculos es necesario sustituir una integral en masa por un sumatorio. En dicha aproximación se pasa de dm a Δm. Para el cálculo de Δm en el caso de estrellas menos masivas es necesario asumir un límite inferior de masa, que puede tomarse como 4 $M_\odot$. De forma análoga, para las estrellas más masivas puede tomarse como límite para el cálculo de Δm un valor de 75 $M_\odot$. Estos dos números no son críticos.

La lumonisidad Hα y la Hβ se relacionan una con la otra por medio de parámetros atómicos, en ausencia de extinción. Si hay extinción:

$$\frac{L^{obs}(H\alpha)}{L^{obs}(H\beta)}=\frac{L^{emit}(H\alpha)10^{-0.4\times A(H\alpha)}}{L^{emit}(H\beta)10^{-0.4\times A(H\beta)}}=\frac{L^{emit}(H\alpha)}{L^{emit}(H\beta)}10^{-0.4\times E(B-V)\times[k(H\alpha)-k(H\beta)]}\Rightarrow$$

$$E(B-V)=\frac{-2.5\log\left[\frac{L^{obs}(H\alpha)}{L^{obs}(H\beta)}\right]+2.5\log\left[\frac{L^{emit}(H\alpha)}{L^{emit}(H\beta)}\right]}{k(H\alpha)-k(H\beta)}=$$

$$E(B-V)=\frac{-2.5\log[4.68]+2.5\log[2.86]}{2.44-3.68}=$$

$$E(B-V) = \frac{-2.5\log\left[\frac{9.772\times10^{39}}{2.089\times10^{39}}\right] + 2.5\log[2.86]}{2.44-3.68} = 0.431\,mag$$

Con esto calculamos las luminosidades realmente emitidas:

$$L^{emit}(H\alpha) = L^{obs}(H\alpha)10^{0.4\times E(B-V)\times k(H\alpha)} = 2.576\times10^{40}\quad erg/s$$

$$L^{emit}(H\beta) = L^{obs}(H\beta)10^{0.4\times E(B-V)\times k(H\beta)} = 9.008\times10^{39}\quad erg/s$$

¿Qué da si dividimos una entre otra? Lo que debe: 2.86 (recordar que es valor para condiciones típicas: 100 cm^{-3} y 10^4 K.

Ahora recordamos que la luminosidad Hα en el caso B, asumiendo equilibrio de ionización, se puede escribir como:

$$L(Ha) = h\nu^{H\alpha}\frac{\alpha_B^{H\alpha}}{\alpha_B}N_{Ly} = \frac{hc}{\lambda^{H\alpha}}\frac{\alpha_B^{H\alpha}}{\alpha_B}N_{Ly}$$

El número de fotones Lyman se puede calcular a partir de la IMF y los datos propocinados por los modelos estelares acerca de la emisión UV según el tipo espectral (que correlaciona con la masa):

$$N_{Ly} = \int_{m_{do}}^{m_{up}} n_{Ly}(m)\phi(m)dm$$

La normalización de la IMF deberá tener en cuenta cuántas estrellas se forman. Asumiendo una SFR constante, la cantidad de estrellas formadas será <SFR>xΔt (con Δt igual al tiempo en la secuencia principal t_{MS} para este problema). Para una IMF de Salpeter con límites 0.10-75 $M_\odot$:

$$N_{Ly} = \int_{m_{do}}^{m_{up}} n_{Ly}(m)\phi_0 m^{-\alpha}dm$$

$$< SFR > t_{MS} = \int_{m_{do}}^{m_{up}} \phi_0 m^{-\alpha+1}dm \Rightarrow \phi_0 = \frac{< SFR > t_{MS}}{\int_{m_{do}}^{m_{up}} m^{-\alpha+1}dm} = \frac{< SFR > t_{MS}}{4.388}$$

$$\int_{m_{do}}^{m_{up}} m^{-\alpha+1}dm = \left[\frac{m^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_{m_{do}}^{m_{up}} = \frac{75^{-0.35}-0.1^{-0.35}}{-0.35} = 5.766$$

Introducimos todo en la ecuación de los fotones Lyman y notamos que la <SFR> es constante con respecto a la masa pero el tiempo en la MS no:

$$N_{Ly} = \int_{m_{do}}^{m_{up}} n_{Ly}(m)\frac{< SFR > t_{MS}(m)}{5.766}m^{-\alpha}dm = \frac{< SFR >}{5.766}\int_{m_{do}}^{m_{up}} n_{Ly}(m)t_{MS}(m)m^{-\alpha}dm$$

Ahora hay que hacer esa integral. Se hace numéricamente y lo mejor es considerar los intervalos de masa de la siguiente forma:

$$\int_{m_{do}}^{m_{up}} n_{Ly}(m)t_{MS}(m)m^{-\alpha}dm \cong \sum_i t_{MS}(m_i)m_i^{-2.35}n_{Ly}(m_i)(m_{2,i}-m_{1,i})$$

donde $m_{2,i}=(m_i x m_{i+1})^{1/2}$ y $m_{1,i}=(m_i x m_{i-1})^{1/2}$.

Númericamente la integral da 2.7×10^{53}. Con esto:

$$L(Ha) = \frac{hc}{\lambda^{H\alpha}}\frac{\alpha_B^{H\alpha}}{\alpha_B}\frac{< SFR >}{5.766}\times2.7\times10^{53}$$

Sustituyendo:

$$L(Ha) = \frac{6.63 \times 10^{-27} \times 3 \times 10^{10}}{6563 \times 10^{-8}} \frac{1.16 \times 10^{-13}}{2.6 \times 10^{-13}} \frac{< SFR >}{5.766} \times 2.7 \times 10^{53} \Rightarrow$$

$$< SFR >= 1.58 \times 10^{-41} L(Ha)$$

Con SFR en $M_\odot$/yr y L(Hα) en erg/s.

Para Hβ:

$$L(H\beta) = \frac{6.63 \times 10^{-27} \times 3 \times 10^{10}}{4861 \times 10^{-8}} \frac{3.03 \times 10^{-14}}{2.6 \times 10^{-13}} \frac{< SFR >}{5.766} \times 2.7 \times 10^{53} \Rightarrow$$

$$< SFR >= 4.48 \times 10^{-41} L(H\beta)$$

Esto es lo que hizo Kennicutt, pero con mejores datos para estrellas, asumiendo brotes con SFH continua de unos 100 Myr y una IMF de Salpeter entre 0.1 y 100 $M_\odot$. Su ecuación es:

$$< SFR >= 7.9 \times 10^{-42} L(Ha)$$

Sustituyendo nuestros valores:

$$< SFR > (H\alpha) = 0.41 \quad M_\odot/yr$$

$$< SFR > (H\beta) = 0.40 \quad M_\odot/yr$$

Como debe ser, ya que impusimos que las luminosidades tenían una razón de 2.86 y ese número proviene de los coeficientes de línea.

21. Encontrar la densidad de masa debida a las galaxias, suponiendo que todas ellas tienen una masa de 10^{11} $M_\odot$ y que existe un promedio de una galaxia por 75 Mpc^3. Hallar una dependencia entre el número total de galaxias que se pueden detectar con un flujo observado en Tierra por encima de un valor dado F_0 en función de la magnitud absoluta.

Si hay una galaxia por cada 75 Mpc3, la densidad de materia será:

$$\rho = \frac{1 \times 10^{11} M_\odot}{75\ Mpc^3} = \frac{10^{11} \times 1.99 \times 10^{30} kg}{75 \times (3.086 \times 10^{22}\ m)^3} = 9.03 \times 10^{-29} kg/m^3$$

Considerando que el átomo de hidrógeno tiene una masa de 1.67×10^{-27} kg, obtenemos una densidad de:

$$\rho = 0.054\ átomos\ de\ H/m^3$$

Si tomamos una piscina olímpica de 50x25x2 m^3, la densidad equivale a que hubiera 135 átomos de hidrógeno en toda la piscina o 7.5 moléculas de H_2O (contando con una masa por molécula de 2.99×10^{-26} kg).

Consideramos que la densidad de galaxias es constante a nuestro alrededor y que todas ellas tienen la misma masa/luminosidad. En este caso, el número total de galaxias detectadas en un volumen V correspondiente a una distancia d es:

$$N = \bar{n}V = \bar{n}\frac{4}{3}\pi d^3$$

La distancia (de lumonosidad) se relaciona con el flujo y la luminosidad de la siguiente manera:

$$L = 4\pi d^2 F \Rightarrow d = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}}$$

Para una luminosidad dada, cuanto más pequeño es el flujo límite F_{lim} de una exploración, a mayor distancia podemos observar la galaxia (Malmquist bias). Sustituyendo arriba:

$$N(F > F_{lim}) = \bar{n}\frac{4}{3}\pi\left(\frac{L}{4\pi F_{lim}}\right)^{3/2}$$

Claramente se comprueba que cuanto menor es el flujo límite (más profundo vamos), más galaxias podemos detectar, porque exploramos más volumen (i.e., llegamos a detectar objetos más distantes).

Si lo queremos en magnitudes, hay que considerar la relación del módulo de distancias:

$$M - m = 5 - 5\log d \Rightarrow d = 10^{0.2\times(5-M+m)}$$

$$N(F > F_{lim}) = \bar{n}\frac{4}{3}\pi\left(10^{0.2\times(5-M+m_{lim})}\right)^3$$

$$N(F > F_{lim}) = \bar{n}\frac{4}{3}\pi 10^{0.6\times(5-M+m_{lim})}$$

$$N(F > F_{lim}) = \bar{n}\frac{4}{3}\pi 10^3 10^{0.6\times(m_{lim}-M)}$$

Donde $\bar{n}$ tiene que estar en galaxias/pc^3.

Ejemplos:

I. 1 galaxia cada 75 Mpc^3, con magnitud M=-20 y detectamos hasta magnitud aparente m_{lim}=18.

$$N(F > F_{lim}) = 75\ Mpc^{-3}(10^{-6}\ Mpc/pc)^3 \frac{4}{3}\pi 10^3 10^{0.6\times[18-(-20)]}$$

$$N(F > F_{lim}) = 1/75\ Mpc^{-3}(10^{-6}\ Mpc/pc)^3 \frac{4}{3}\pi 10^3 10^{0.6\times[18-(-20)]}$$

$$N(F > F_{lim}) = 3.52 \times 10^6\ galaxias\ hasta\ m = 18$$

¿A qué distancia vemos esas galaxias?

$$m - M = 5\log d - 5 \Rightarrow d = 10^{0.2(m-M+5)} \Rightarrow d = 3.98 \times 10^8\ pc \approx 400\ Mpc$$

¿Argumentos de área? El cielo tiene A=4π sr=41253 deg^2=1.48x10^8 $arcmin^2$.

El número de galaxias obtenidas arriba, 3.52x10^6 galaxias hasta m=18, equivale a una densidad de n=3.52x10^6/1.48x10^8=0.024 galaxias/$arcmin^2$. Esto equivale a que hay que muestrear del orden de 42 $arcmin^2$ para encontrar una galaxia de este tipo. Muchos instrumentos en telescopios de 2-4 metros tienen CCDs que cubren típicamente 5'x5'-30'x30'. En 5'x5' típicamente solo debe haber una galaxia de m<18, en 30'x30' podría haber unas 20 galaxias con m<18.

El Sloan Digital Sky Survey, SDSS, cubre un 35% del cielo. Para nuestro problema, eso significa que debería detectar 0.35x3.52x10^6=1.2x10^6 galaxias si llegara hasta magnitud m~18.

En realidad SDSS llega hasta magnitud m~22, lo que implica un número de galaxias de:

$$N(m > 21) = 1/75\ Mpc^{-3}(10^{-6}\ Mpc/pc)^3 \frac{4}{3}\pi 10^3 10^{0.6\times[22-(-20)]}$$

$$N(m < 21) = 8.85 \times 10^8\ galaxias\ hasta\ m = 22$$

La distancia típica sería 2511 Mpc, o z~0.45.

Observando un 35% del cielo, SDSS debería detectar:

$$N(SDSS) = 0.35 \times 8.85 \times 10^8 = 300 \times 10^6\ galaxias$$

En realidad SDSS ha detectado unos 500 millones de galaxias hasta m=22, con un redshift típico de <z>=0.1, detectando galaxias luminosas rojas hasta z~0.6, QSO hasta z=5-6. Las diferencias pueden ser debidas a que es un modelo sencillo, hay que tener en cuenta la LF, efectos de extinción (parte de la magnitud aparente es debido a extinción –una magnitud supondría bajar la distancia típica a 1500 Mpc, o z~0.3).

22. La energía potencial de una galaxia elíptica se puede expresar como

$$\Omega = -0.34\frac{G\,M^2}{R_{1/2}}\left(\frac{b}{a}\right)^{2/3}$$

donde M es la masa de la galaxia, $R_{1/2}$ es el radio de la isofota tal que en la región $r<R_{1/2}$ se emite la mitad de la luminosidad de la galaxia, y b/a es la razón de los semiejes (todas las unidades están en el sistema CGS). Sabemos que para la galaxia NGC7332 (E6 o E7) b/a=0.4, $R_{1/2}$=1.4 kpc (según el eje menor) y $R_{1/2}$=3.5 kpc (eje mayor). Su dispersión de velocidades es σ=140 km/s. Aplicando el Teorema del Virial, estimar la masa de la galaxia.

El Teorema del Virial establece que:

$$2\langle T\rangle + \langle\Omega\rangle = 0$$

La energía cinética del sistema será:

$$\langle T\rangle = \frac{1}{2}M\langle v\rangle^2$$

$$\langle v\rangle^2 = \langle v_x\rangle^2 + \langle v_y\rangle^2 + \langle v_z\rangle^2 = \langle v_r\rangle^2 + \langle v_\theta\rangle^2 + \langle v_\phi\rangle^2 = 3\sigma^2$$

De esta manera:

$$2\times\frac{1}{2}M3\sigma^2 + \left[-0.34\frac{G\,M^2}{R_{1/2}}\left(\frac{b}{a}\right)^{2/3}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$3\sigma^2 - 0.34\frac{G\,M}{R_{1/2}}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = 0 \Rightarrow M = \frac{3\sigma^2 R_{1/2}}{0.34G}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Ya solo es cuestión sustituir, teniendo cuidado con las unidades y considerando una media geométrica para el radio efectivo:

$$M = \frac{3\times\left(140\frac{km}{s}\times 10^3 m/km\right)^2\times\sqrt{R_{1/2}^a R_{1/2}^b}\,kpc\times 3.0857\times 10^{19} m/kpc}{0.34\times 6.673\times 10^{-11}\,m^3kg^{-1}s^{-2}}(0.4^{-1})^{\frac{2}{3}}$$

$$M = \frac{3\times\left(140\frac{km}{s}\times 10^3 m/km\right)^2\times\sqrt{R_{1/2}^a R_{1/2}^b}\,kpc\times 3.0857\times 10^{19} m/kpc}{0.34\times 6.673\times 10^{-11}\,m^3kg^{-1}s^{-2}}(0.4^{-1})^{\frac{2}{3}}$$

$$M = 3.26\times 10^{41} kg = 1.63\times 10^{11}\,M_\odot$$

Si hubiéramos tomado una media aritmética:

$$M = 3.61\times 10^{41} kg = 1.81\times 10^{11}\,M_\odot$$

Concluimos que la masa es aproximadamente 2×10^{11} $M_\odot$ (las incertidumbres siempre van a ser considerables, del orden de decenas en % o incluso un factor 2-3).

23. Considerar un modelo de galaxia sencillo en el que la mayor parte de la masa se halla concentrada en un núcleo esférico de densidad constante. Mostrar que la velocidad orbital v(r) de una estrella a una distancia r del centro es:

a) Proporcional a r si $r \leq R$, con R siendo el radio del núcleo.
b) v(r) es proporcional a $r^{-1/2}$ si $r > R$.

Hecho en clase de Teoría!!!

24. La radiogalaxia VV72, también conocida como Cygnus A, tiene una densidad de flujo radio observada de 2.18×10^{-23} W m^{-2} Hz^{-1} a una frecuencia de 10^3 MHz. Su desplazamiento al rojo es z=0.170.

a) Si la radiación es recibida a 10^3 MHz, ¿a qué frecuencia fue emitida por Cygnus A?
b) ¿Cuál es la distancia a Cygnus A? (usar como constante de Hubble H_0=70 km/s/Mpc).
c) ¿Cuál es la luminosidad radio de esa galaxia a 10^3 MHz?
d) Para obtener la luminosidad radio integrada debemos multiplicar el resultado del apartado anterior por el ancho de banda $\Delta\nu$ de nuestro detector (o en el que estamos interesados). Asúmase $\Delta\nu=10^4$ Hz y calcúlese la luminosidad en radio frecuencias.
e) Calcular la masa mínima de hidrógeno que debe ser convertida en helio por segundo para producir dicha luminosidad.
f) Si Cygnus A continua radiando de esta forma durante 10^8 años, calcular las masas solares de hidrógeno que serían convertidas en helio. Expresar este resultado en términos de la masa de la Vía Láctea (10^{11} $M_\odot$).

a) El efecto del redshift es enrojecer los fotones; matemáticamente:

$$\upsilon_{emit} = (1+z)\,\upsilon_{obs}$$
$$\upsilon_{emit} = 1170\ MHz$$

b) Usando la Ley de Hubble, aplicable porque el redshift es pequeño:

$$d = \frac{zc}{H_0} = 728\ Mpc$$

Sale 728.57 Mpc, pero con una incertidumbre en H_0 de 3 km/s/Mpc equivale a una incertidumbre en la distancia de unos 30 Mpc. La distancia de luminosidad con la cosmología de concordancia es 818 Mpc, la distancia angular 598 Mpc.

c) La luminosidad será:

$$L_\upsilon = 4\pi d^2 F_\upsilon = 1.38 \times 10^{29}\ WHz^{-1}$$

Hay que darse cuenta que esta es la luminosidad a 1000 MHz observados (1170 MHz rest-frame), si se quiere la luminosidad a 1000 MHz rest-frame (lo típico, para poder comparar distintas galaxias a distintos redshifts). Para calcular esto hay que tener en cuenta que:

$$L_{\upsilon_{emit}} d\upsilon_{emit} = L_{\upsilon_{obs}} d\upsilon_{obs}$$
$$L_{\upsilon_{emit}} = L_{\upsilon_{obs}} \frac{d\upsilon_{obs}}{d\upsilon_{emit}} = \frac{L_{\upsilon_{obs}}}{1+z}$$

$$L_{\upsilon_{emit}}(1170\ MHz) = 1.18 \times 10^{29}\ WHz^{-1}$$

Ahora, para pasar a 1000 MHz rest-frame desde esta luminosidad a 1170 MHz rest-frame necesitamos saber cuál es el color entre 1000 y 1170 MHz. Esto es la corrección K. Para calcularla para esta radio galaxia asumimos un espectro de ley de potencia con índice α~0.5±0.5 ($F_\nu \sim \nu^{-\alpha}$). Con esto tenemos:

$$\frac{L_{\upsilon_{emit}}(1000\ MHz)}{L_{\upsilon_{emit}}(1170\ MHz)} = \left(\frac{1000}{1170}\right)^{-\alpha} = 1.082$$
$$L_{\upsilon_{emit}}(1000\ MHz) = 1.28 \times 10^{29}\ WHz^{-1}$$

d) Asumiendo un anchura de banda de 10 kHz, tenemos:

$$L_{v_{emit}}(1000\ MHz) = 1.28 \times 10^{33}\ W$$

e) Si tuviéramos que explicar esa luminosidad por medio de reacciones nucleares en estrellas, deberíamos tener una cantidad de hidrógeno convirtiéndose en helio que se calcularía sabiendo la energía liberada en cada reacción de fusión del H (4.3×10^{-5} erg=4.3×10^{-12} J). El número de reacciones sería:

$$N_{reacción}/t = \frac{L}{energía\ por\ reacción} = 2.98 \times 10^{44}\ reacciones/s$$

En cada reacción se usan 4 átomos de hidrógeno, así que

$$N_H/t = 4 \times 2.98 \times 10^{44} = 1.19 \times 10^{45}\ átomos\ de\ H/s$$

La masa sería:

$$M/t = 1.19 \times 10^{45} \times 1.67 \times 10^{-27}\ \frac{kg}{átomo} = 2.0 \times 10^{18}\frac{kg}{s} \sim 10^{-12}\ M_{\odot}/s$$

f) En 10^8 años, se gastarían:

$$M = 10^{-12} \times 10^{8}\ yr\ \times 365.25 \times 24 \times 3600 = 3153 M_{\odot} = 3.2 \times 10^{-8}\ M_{MW}$$

25. Una galaxia Seyfert está situada a 190 Mpc y emite un flujo de la línea Hβ que recibido en la Tierra resulta F(Hβ)=2.8x10^{-13} erg cm^{-2} s^{-1}. Si suponemos Ne=Np=10^{9} cm^{-3}, calcular la masa y el volumen de gas ionizado que origina esta línea.

Ahora recordamos que la luminosidad Hβ en el caso B, asumiendo equilibrio de ionización, se puede escribir como:

$$L(H\beta) = h\nu^{H\beta}\alpha_B^{H\beta}\int_V N_e N_p dV = \frac{hc}{\lambda^{H\beta}}\alpha_B^{H\beta}\int_V N_e N_p dV$$

Para densidades electrónica y de protones constante:

$$L(H\beta) = \frac{hc}{\lambda^{H\beta}}\alpha_B^{H\beta} N_e N_p V$$

$$V = \frac{\lambda^{H\beta} L(H\beta)}{hc\alpha_B^{H\beta} N_e N_p} = 9.77 \times 10^{48}\ cm^3$$

La luminosidad era L(Hβ)=1.21x10^{42} erg/s. Considerando una esfera, el volumen calculado equivale a un radio de:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 1.33 \times 10^{16}\ cm = 887\ AU = 4 \times 10^{-3}\ pc$$

La masa de hidrógeno será la densidad de protones por el volumen:

$$M_H = m_H \times N_H \times V = 1.63 \times 10^{31}\ kg = 8.2\ M_\odot$$

26. ¿Cuántos átomos de hidrógeno deberían crearse por metro cúbico para que la densidad del Universo en expansión permanezca constante e igual a un valor de $3x10^{-28}$ kg m^{-3}?

27. La teoría de la Relatividad Especial nos dice que no hay forma de moverse a velocidad mayor que la de la luz. Según la definición clásica del desplazamiento al rojo hay galaxias y cuásares que violan esta ley.

a) Derivar la relación relativista exacta entre v (velocidad) y z (redshift).
b) Construir una tabla con las velocidades de alejamiento clásica y relativista según diferentes desplazamientos al rojo.

28. Suponiendo que el Sol dista del centro de la galaxia 30000 años-luz y que tarda $2x10^8$ años en dar una vuelta completa a la misma: ¿cuál es el desplazamiento al rojo que observaría un supuesto extraterrestre que mirase nuestra galaxia de cara por el hecho de existir un movimiento en dirección perpendicular a la dirección del observador?

29. ¿Cuál debe ser la densidad crítica para que una galaxia típica pueda tener la velocidad de escape del Universo?

30. Demostrar que en el espacio-tiempo, y según la métrica

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \frac{1}{c^2}(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$$

la "línea recta" entre dos sucesos no es el camino más corto entre los mismos (considerar un diagrama del Universo bidimensional para simplificar).

31. Muchos desplazamientos al rojo observados son bastante pequeños, de modo que en la expresión $z = \frac{R(t_0)}{R(t_e)} - 1$, t_e no está demasiado lejos de t_0. Hacer un desarrollo en serie de $R(t_e)$ en potencias de (t_e-t_0) y emplearlo para encontrar otro desarrollo de z en potencias de (t_0-t_e).

32. Utilizando la fórmula de la curvatura de Gauss para una superficie bidimensional (ver más abajo), mostrar que k=0 para una plano (empleando coordenadas polares), y que $k=1/R^2$ para la superficie de una esfera de radio R (empleando coordenadas esféricas).
La curvatura de Gauss (aplicable a métricas ortogonales, es decir, aquellas que verifican $g_{12}=g_{21}=0$, es decir, cuyo tensor métrico es diagonal) viene dada por:

$$k = \frac{1}{2g_{11}g_{22}}\left\{-\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial(x^2)^2} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial(x^1)^2} + \frac{1}{2g_{11}}\left[\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)^2\right] + \frac{1}{2g_{22}}\left[\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)^2\right]\right\}$$

33. El intervalo en el espacio-tiempo entre los eventos

(x_1,y_1,z_1,t_1) (x_2,y_2,z_2,t_2)

está definido por:

$$(\Delta s)^2 \equiv (c\Delta t)^2 - (c\Delta x)^2 - (c\Delta y)^2 - (c\Delta z)^2$$

a) Usar una transformación lorentziana para demostrar que Δs tiene el mismo valor en todos los sistemas de referencia (el espacio es invariable bajo una transformación de Lorentz).
b) Si $(\Delta s)^2>0$, entonces el intervalo es de tipo tiempo. Mostrar que en este caso,

$$\Delta\tau \equiv \frac{\Delta s}{c}$$

es el tiempo propio entre dos eventos. Asumiendo que t1<t2, ¿podría el segundo evento estar causado por el primero?
c) Si $(\Delta s)^2=0$, entonces el intervalo es de tipo luz o nulo. Demostrar que solo la luz podría haber viajado entre los dos eventos. ¿Podría el segundo evento estar causado por el primero?
d) Si $(\Delta s)^2<0$, entonces el intervalo es de tipo espacio. ¿Cuál es el significado físico de $\sqrt{-(\Delta s)^2}$? ¿Podría el segundo evento estar causado por el primero?

34. Las expresiones generales para las componentes de la velocidad de un rayo de luz medidas en un sistema de referencia S son:

$$v_x = c\sin\theta\cos\phi$$

$$v_y = c\sin\theta\sin\phi$$

$$v_z = c\cos\theta$$

donde θ y ϕ son las coordenadas angulares esféricas.

a) Demostrar que:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = c$$

b) Usar las ecuaciones de transformación de velocidades para demostrar que, medido en el sistema de referencia S':

$$v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z} = c$$

y así confirmar que la velocidad de la luz es c en cualquier sistema de referencia.

OTROS

35. tema 17 (BHs)

36. 24.3 (extinción)

37. 24.9 (energía térmica y magnética)

38. 24.22, 24.23, 24.24 (amount of dark matter)

39. 24.36 (estructura del núcleo de la Galaxia)

40. 25.2 25.8 (Tully-Fisher)

41. 25.4 (surface brightness dimming)

42. 25.20 (Faber-Jackson)

43. 25.24 (Schechter function)

44. 27.3 (distancia con Cefeidas, extinción)

45. 27.4 (incertidumbres magnitudes y distancias)

46. 27.12 (rayos-X en cúmulos!!)

47. 27.14 (masa de Virgo con teorema virial)

48. 28.1 (emisión radio AGN!!)

49. 28.4 (AGN evolution)

50. 28.7 (física de un SMBH)

51. 28.11 (jets de un AGN)

52. 28.16, 28.17 (masa de cúmulo con lente!!!)