EXPERIENCIA ALEATORIA: aquella cuyo resultado no podemos prever porque éste depende del azar.
Cada uno de los resultados obtenidos en la experiencia aleatoria se llama CASO y al conjunto de todos los casos se llama ESPACIO MUESTRAL (E).
Los SUCESOS son subconjuntos del espacio muestral. A los casos también se les llama SUCESOS INDIVIDUALES.
El espacio muestral se llama SUCESO SEGURO o SUCESO TOTAL.

Ej. Experiencia aleatoria: lanzar un dado

E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

este será el espacio muestral, formado por todos los sucesos individuales o casos posibles

Suceso: salir cara par = { 2, 4, 6}

caso

SUCESO IMPOSIBLE: el que nunca se verifica
SUCESOS INCOMPATIBLES: cuando no se pueden verificar a la vez.
SUCESOS COMPATIBLES: cuando sí se verifican a la vez
SUCESO CONTRARIO : Dado un suceso cualquiera A, se llama suceso contrario al que se verifica cuando no se verifica A. Se designa como A´ o A.
SUCESOS EQUIPROBABLES: los que tienen las mismas probabilidades de salir

Ej. En una urna hay 10 bolas de 4 colores diferentes: 4 rojas, 2 verdes, 3 azules y 1 negra. La experiencia aleatoria es sacar una bola y anotar su color.

E = {4R, 2V, 3A, 1N}

Ej. Lanzar un dado

A= {1, 3, 5} Suceso: salir impar
B= { 2, 4, 6} Suceso: salir par

No se pueden verificar a la vez y son sucesos incompatibles

A= {1, 3, 5} Suceso: salir impar
B= { 3, 5} Suceso: salir 3 o 5

Se pueden verificar a la vez y son sucesos compatibles

Suceso: salir mayor que 6. Es un suceso imposible. Nunca se va a verificar.

A= {1, 3, 5} Suceso: salir impar
A´ = { 2, 4, 6} Suceso contrario a A

Al lanzar un dado regular todos los sucesos individuales son equiprobables.

DIFERENCIA ENTRE SUCESOS CONTRARIOS Y SUCESOS INCOMPATIBLES

Dos sucesos CONTRARIOS son <u>SIEMPRE</u> INCOMPATIBLES

Dos sucesos INCOMPATIBLES no siempre son CONTRARIOS

Tenemos un dado de 8 caras, y consideramos los sucesos:

A: múltiplos de 2 = { 2, 4, 6, 8 }

B: múltiplos de 5 = { 5 }

C: salir cara par = { 2, 4, 6 }

D: salir cara impar = {1, 3, 5 }

Para ser **SUCESOS CONTRARIOS** se debe cumplir que

A U B = { E }
A   B = {   }

A y B son sucesos INCOMPATIBLES porque no tienen elementos comunes y se cumple que

A   B = {   }

A y B son sucesos INCOMPATIBLES pero no son sucesos CONTRARIOS., pues no se cumple que A U B = { E }

Los sucesos C y D son INCOMPATIBLES pues se cumple C   D = {   }
Son CONTRARIOS pues se cumple C U D = { E }

REGLA DE LAPLACE: Dado un experimento aleatorio en el que todos los resultados son equiprobables, se tiene que:

p(A) = probabilidad de un suceso A= $\dfrac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}}$

ej. Tenemos una caja con bolas de colores, tal y como indica la tabla:

rojas	40
Verdes	25
Azules	15
negras	10

Total 90

P(roja) = 40/90
P(azul) = 15/90
P(verde) = 25/90
P(negra) = 10/90

Ej. En una baraja hay 40 cartas. Hallar la probabilidad de sacar rey.

P(rey) = 4/40 = 0,1

Ej. Tirar 2 dados numerados del 1 al 6.

Los posibles resultados son : {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} pero es menos probable que salga 12 = 6 + 6 y 2 = 1 + 1 a que salgan los valores

5 = 3 + 2 = 4 + 1 = 2 + 3 = 1 + 4

7 = 3 + 4 = 5 + 2 = 4 + 3 = 2 + 5 = ...

Para analizar las posibilidades hacemos una tabla de doble entrada

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

P(5) = 4/36

P(12) = 1/36

P(7) = 6/36 =1/6

P(9) = 4/36

P(6) = 5/36

P(6) = 21/36

PROBABILIDAD DE UN SUCESO (P(s))

La probabilidad de un suceso aleatorio es el grado de confianza que podemos tener en que ese suceso ocurra. Se expresa mediante un número comprendido entre 0 y 1.

- Si P(S) es próximo a 1: suceso muy probable
- Si P(S) es próximo a 0: suceso poco probable
- Si P(S) = 1 : suceso SEGURO
- Si P(S) = 0 : suceso imposible

Si decimos que P(S) = 1/3, quiere decir que el suceso ocurre 1 de cada 3 veces que se realiza la experiencia.

Ej. Tenemos una bolsa con 8 bolas rojas

P(roja) = 8/8 = 1 Suceso seguro

P(verde) = 0/8 = 0 Suceso imposible

PROBABILIDAD DE UN SUCESO CONTRARIO

Experiencia: extracción de una carta de la baraja española (40 cartas)

Consideramos el suceso A: "salir espadas"

P(A)= 10/40

El suceso contrario a A es A´: "no salir espadas" y su probabilidad es

P(A´)= 30/40

Se observa que

$$P(A) + P(A') = 1 \quad \text{y por tanto}$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

La probabilidad de un suceso contrario de A es igual a la unidad menos la probabilidad del suceso A.

Ej: se lanza un dado cúbico. Hallar la probabilidad de A´, B´, C´, siendo:

A= "salir múltiplo de 3"
B= "salir mayor que 7"
C= "salir menor que 7"

$P(A) = 2/6 = 1/3$	$P(A') = 1- 1/3 = 2/3$
$P(B) = 0/6 = 0$	$P(B') = 1 - 0 = 1$
$P(C) = 6/6 = 1$	$P(C') = 1-1 = 0$

Otro ej: Tenemos una bolsa con 8 bolas rojas
P(roja) = 8/8 = 1 Suceso seguro
P(verde) = 0/8 = 0 Suceso imposible

FRECUENCIA Y PROBABILIDAD. LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

FRECUENCIA ABSOLUTA o frecuencia de un suceso, es el nº de veces que ocurre ese suceso **f(s)**

FRECUENCIA RELATIVA de un suceso, es la proporción de veces que ha ocurrido ese suceso. Se designa como **fr(s)**

Ej. Lanzamos un dado 60 veces

Cara	1	2	3	4	5	6
Nº de veces	7	12	10	8	14	9

Si la experiencia la hacemos lanzando el dado 1000 veces, tenemos otra tabla de frecuencias

Cara	Nº veces	fr
1	157	0,157
2	171	0,171
3	160	0,160
4	166	0,166
5	171	0,171
6	175	0,175

Esta es la ley de LOS GRANDES NÚMEROS: al repetir muchas veces, N, una experiencia aleatoria, la **fr** de cada suceso, **S**, toma valores muy próximos a la de su probabilidad **P(S)**.

fr (S)   P(S)

y cuanto mayor es **N** , más próximos están estos valores

ej. ¿Cuál es la probabilidad de nacer varón?

Si empleamos los datos del registro de una maternidad, tenemos que, un año, del número total de nacimientos que fue 1827, 894 fueron varones. Por tanto:

A este valor le llamamos PROBABILIDAD EXPERIMENTAL.

EJERCICIOS

1. De los siguientes experimentos, indica cuáles son aleatorios:
    a. Extracción de una carta de una baraja
    b. Soltar al vacío una bola y anotar el tiempo que tarda en caer
    c. Anotar el nº de matrícula de los coches que pasan
    d. Calentar un hielo en el microondas y anotar el tiempo que tarda en derretirse

2. Formar un espacio muestral para los experimentos aleatorios:
    a. Se lanza al aire una moneda
    b. Se lanza al aire un dado de quinielas
    c. Se extrae una carta de la baraja española
    d. Se lanza un dado cúbico de caras del 1 al 6
    e. Se extrae el primar premio de una rifa de papeletas numeradas del 1 al 1000
3. Se lanza un dado de 6 caras y se consideran los sucesos:

    A= obtener múltiplo de 3   A: { 3,6 }

    B= obtener múltiplo de 5   B: { 5 }

    Calcular:
    a. A U B
    b. A   B
    c. A - B
4. Dadas las seis caras de un dado y considerando los sucesos:

    A: múltiplos de 3

    B: números primos

    C: nú,meros mayores de 4

    D: números menores de 4

    E: { 1,4,6 }

    F: {3}

    a. Dar dos sucesos compatibles
    b. Dar 4 sucesos in compatibles dos a dos
    c. Dar dos sucesos contrarios dos a dos
    d. Dar el suceso contrario para cada uno de ellos
    e. Dar el suceso A U B

5. En una urna hay 3 bolas rojas, 2 verdes y 5 azules. Se extrae una bola. Calcular la probabilidad de que sea: roja, azul, negra, roja o azul, roja,verde o azul; de que no sea verde; de que no sea ni verde ni azul.

EXPERIMENTOS COMPUESTOS

Un experimento compuesto se define como aquel que está formado por varios experimentos simples.
En los experimentos compuestos cada resultado viene dado por un camino del diagrama en arbol.
El número de resultados posibles de un experimento compuesto se obtiene multiplicando los resultados posibles de los experimentos simples que lo componen.

Ej. Consideramos un experimento aleatorio consistente en el lanzamiento de un dado cúbico y una moneda. Se tarta de un experimento compuesto formado por dos experimentos simples, el lanzamiento de un dado más el lanzamiento de una moneda.
Lo ponemos en forma de árbol

Dado	moneda	resultado
1	C	(1,c)
	x	(1,x)
2	C	(2,c)
	X	(2,x)
3	C	(3,c)
	X	(3,x)
4	C	(4,c)
	X	(4,x)
5	C	(5,c)
	X	(5,x)
6	C	(6,c)
	x	(6,x)

El nº de resultados viene dado por 6 x 2 = 12

Otro ej:
Hallar el nº de resultados posibles en cada uno de estos experimentos compuestos:

- Se lanzan 3 monedas al aire
- Se lanzan 3 dados cúbicos al aire con las caras numeradas del 1 al 6
- Se lanza un dado cúbico y se extrae una carta de una baraja española
- El impreso de la matrícula de un centro tiene las siguientes casillas:
    - Casilla 1: sexo
    - Casilla 2: idioma (Inglés, francés y alemán)
    - Casilla 3: optativas (taller de matemáticas, taller de astronomía, teatro y energías renovables)

Probabilidad De Experimentos Compuestos:

- Si consideramos el experimento compuesto que consiste en el lanzamiento de un dado cúbico y una moneda ¿Cuál es la probabilidad de obtener un tres y cara en la moneda?

  Casos favorables: 1
  Casos posibles: 6 x 2 = 12 P(3 y cara) = 1/12

  Otra forma:
  P(3) = 1/6
  P(cara) = 1/2
  P(3 y cara) = 1/6 x 1/2 = 1/12

- Se lanza una moneda 3 veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 caras?
  - P(salir cara) = $\frac{1}{2}$
  - P(3 caras) = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ = 1/8

- Se lanzan 4 dados. Hallar la probabilidad de obtener siempre número impar.

Dado 1	Dado 2	Dado 3	Dado 4
Par			
Impar	Par		
	Impar	Par	
		Impar	Par
			Impar
P(impar) = 1/2	P(impar)=1/2	P(impar)=1/2	P(impar)= 1/2

P(4 veces impar) = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ = 1/16

PROBABILIDAD CONDICIONADA. SUCESOS DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES

De una baraja española se extrae al azar una carta, y a continuación otra. Hallar la probabilidad de que las dos sean de copas en los siguientes casos:

a) Devolviendo la carta extraída después de la primera extracción
b) Sin devolver la primera carta

Llamamos C_1 al suceso "sacar copa en la primera extracción"
C_2 al suceso "sacar copa en la 2ª extracción"

a) CON DEVOLUCIÓN

P(1) = 10/40 P(2) = = 10/40

P(dos copas) = 10/40 10/40 = 100/1600 = 1/16

En las extracciones con devolución el resultado de la primera extracción no influye en el resultado de la segunda.

b) SIN DEVOLUCIÓN

P(1) = 10/40 P(2) = = 9/39

P(dos copas) = 10/40 9/39 = 90/1560 = 3/52

A la probabilidad $P(c_2)$ = 9/39 se la llama PROBABILIDAD DE C_2 CONDICIONADA POR C_1 y se expresa $P(C_2 / C_1)$.

En a) el resultado de la 1ª extracción no influye en el resultado de la segunda Y son SUCESOS INDEPENDIENTES.

En b) el resultado de la 2ª extracción sí influye en el resultado de la 2ª y por ello so SUCESOS DEPENDIENTES.

Ejemplo 1:
De una urna con 5 bolas, 3 con la letra A y dos con la letra N, se extrae una bola 3 veces seguidas y se escriben en la pizarra las letras obtenidas en el orden en que van apareciendo. Hallar la probabilidad de obtener la palabra ANA en los siguientes casos:

a) Devolviendo a la urna la bola extraída después de cada extracción.

$P(A_1)$ = 3/5 P(N) = 2/5 $P(A_2)$ = 3/5

P(ANA) = 3/5 2/5 3/5 = 18/125

b) Sin devolver la bola extraída

$P(A_1)$ = 3/5 P(N) = 2/4 $P(A_2)$ = 2/3

P(ANA) = 3/5 2/4 2/3 = 12/60 = 4/20 = 1/5

Ejemplo 2:
Paloma tiene en una caja 11 cubos: 7 de color azul y 4 de color verde. Si se extrae sucesivamente dos cubos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo cubo sea verde si el 1º ha sido azul?

a) CON DEVOLUCIÓN
P(AZUL) = 7/11 P(VERDE) = 4/11
P(1º azul, 2º verde) = 7/11 4/11 = 28/121

b) SIN DEVOLUCIÓN

P(AZUL) = 7/11   P(VERDE) = 4/10

P(1º azul, 2º verde) = P(A) P(V/A) = 7/11 4/10 = 28/110 = 14/55

Ejemplo 3:
Un profesor va a elegir dos alumnos al azar entre 12 varones y 14 mujeres de clase mediante papeletas que tiene en une bolsa. Si extrae una papeleta y la devuelve antes de extraer la 2ª ¿Cuál es la probabilidad de que los dos alumnos sean mujeres? ¿y si no devuelve la papeleta?

a) CON DEVOLUCIÓN

$P(mujer_1)$ = 14/26 $P(mujer_2)$ = 14/26

P(2 mujeres) = 14/26 14/26 = 49/169

b) SIN DEVOLUCIÓN

$P(mujer_1)$ = 14/26 $P(mujer_2)$ = 13/25

P(2 mujeres) = 14/26 13/25 = 182/650 = 7/25

Ejemplo 4:
En una bolsa tenemos: 3 bolas rojas, 2 azules y dos verdes. Extrae tres de ellas sin reemplazamiento. Hallar la probabilidad de que:

a) Las tres sean ROJAS

Se trata de una extracción sin devolución.

P(1ª roja) = 3/7   P(2ª roja) = $P(R/R_1)$ = 2/6   P(3ª roja) = $P(R/R_2)$ = 1/5

P(tres rojas) = 3/7 2/6 1/5 = 6/210 = 1/35

b) Dos sean ROJAS y una AZUL

P(1ª roja) = 3/7   P(2ª roja) = $P(R/R_1)$ = 2/6   P(3ª azul) = P(A/R) = 2/5

P(dos rojas y 1 azul) = 3/7 2/6 2/5 = 12/210 = 2/35

c) Sea una de cada color

P(1ª roja) = 3/7   P(2ª razul) = P(A/R) = 2/6   P(3ª verde) = P(V/R y A) = 2/5

P(roja, azul, verde) = 3/7 2/6 2/5 = 12/210 = 2/35

Supongamos que realizamos la misma experiencia <u>CON DEVOLUCIÓN</u>

a) Las tres sean ROJAS

Se trata de una extracción sin devolución.

P(1ª roja) = P(2ª roja) = P(3ª roja) = 3/7

P(tres rojas) = 3/7 3/7 3/7 = 27/343

b) Dos sean ROJAS y una AZUL

P(1ª roja) = P(2ª roja) = 3/7 P(3ª azul) = 2/7

P(dos rojas y 1 azul) = 3/7 3/7 2/7 = 18/343

c) Sea una de cada color

P(1ª roja) = 3/7 P(2ª azul) = 2/7 P(3ª verde) = 2/7

P(roja, azul, vered) = 3/7 2/7 2/7 = 12/347

Ejemplo 5:
Una botella opaca contiene 20 bolas de color rojo, negro y verde. No sabemos cuántas, ni lo podemos ver. Si tumbamos la botella, como el tapón es transparente, podemos ver la que asoma. Hacemos esto 1000 veces y hemos obtenido los siguientes resultados:

Bola	R	N	V
Nº de veces	343	461	196

Podemos conocer la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa:

F(R) = 343 f_r(R) = 343/1000 = 0,343

F(N) = 461 f_r(N)= 461/1000 = 0,461

F(V) = 196 f_r(V) = 196/1000 = 0,196

Podemos calcular el número aproximado de bolas de cada color aplicando la ley de los grandes números que dice que f_r = P

Los casos favorables son las bolas que hay de cada color. Por tanto:

f_r(R) = 343/1000 = 0,343 = P (R) = n_R /20 ; 0,343 20 = n_R = 6,86

f_r(N)= 461/1000 = 0,461 = P(N) = n_N /20 ; 0,461 20 = n_N = 9,22

f_r(V) = 196/1000 = 0,196 = P(V) = n_V /20 ; 0,196 20 = n_V = 3,92

Aproximando:

ROJAS: 7 NEGRAS: 9 VERDES: 4

TOTAL: 20