Denken over wiskunde, onderwijs en ICT

Paul Drijvers

Universiteit Utrecht

Freudenthal Instituut
voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen

Denken over wiskunde, onderwijs en ICT

Denken over wiskunde, onderwijs en ICT

Rede
uitgesproken bij de aanvaarding
van het ambt van gewoon hoogleraar
in de Didactiek van de Wiskunde
aan de Faculteit Bètawetenschappen
van de Universiteit Utrecht

door

Paul Drijvers

op donderdag 21 mei 2015

Universiteit Utrecht

Uitgave
Freudenthal Instituut voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen (FI), Universiteit Utrecht

ISBN 978-90-70786-33-5

Druk All Print, Utrecht

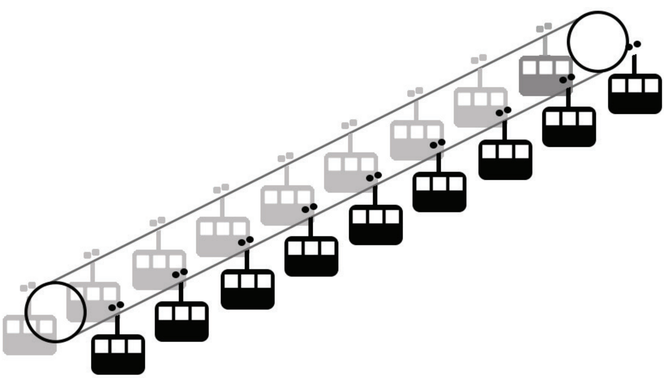
Grafische vormgeving
Jenty Heijstek (omslag)
Nathalie Kuijpers (binnenwerk)

Toelichting
Het raster op de omslag kan van pas komen bij het oplossen van het probleem op de achterflap

Mijnheer de Rector, collega's, familie en vrienden,

Ergens midden jaren zestig van de vorige eeuw waren we op vakantie in Zwitserland. Vanaf de camping waren we met de auto naar een station van een kabelbaan gereden, in een gondel de berg op gegaan, boven wat gewandeld en toen weer met de kabelbaan naar beneden. In de auto terug naar de camping stelde mijn vader, van achter het stuur, de volgende vraag: "Tijdens onze afdaling ben ik 17 gondels tegengekomen. Hoeveel van die gondels zijn er in totaal?" Ik moet hier bij vertellen, voor zover u dat nog niet had begrepen, dat mijn vader wiskundeleraar was. Hij heeft hier in Utrecht college gelopen bij onder andere Freudenthal; mijn ouders zouden hier vandaag graag bij aanwezig zijn geweest. Op zijn vraag veren de vijf kinderen op van de achterbank: "34! Nee, 35!" Tot op een gegeven moment de jongste "18" zegt en daarmee de anderen tot zwijgen brengt.

Wat is hier aan de hand? De antwoorden 34 en 35 verraden een statische blik, zoals schematisch weergegeven in Figuur 1: onder in beeld de stijgende gondels, boven de dalers, dus in totaal 2 keer zo veel gondels als de 17 die mijn vader zag, al dan niet plus 1. Het juiste antwoord, 18, zie je echter vanuit een dynamisch perspectief: je ziet die kabelbaan draaiend voor je en realiseert je dat je tijdens de afdaling alle andere gondels tegenkomt. Een animatie op een beeldscherm, zoals mijn collega Frans van Galen heeft gemaakt, roept dit beeld onmiddellijk op[1].



Figuur 1. Statisch beeld van de kabelbaan

1 Zie http://www.uu.nl/medewerkers/phmdrijvers

Dit voorbeeld gaat over een aspect van wiskundig denken: het vermogen om flexibel heen en weer te schakelen tussen een statisch en een dynamisch perspectief, al naar gelang de situatie en de vraag. Dergelijke blikwisselingen – wiskundige wendbaarheid zoals Martin Kindt het wellicht zou noemen – spelen een grote rol bij het oplossen van problemen en bij het wiskundig denken dat daarbij aan de orde is. De animatie laat zien dat ICT-representaties zulke blikwisselingen kunnen oproepen. Hiermee is de toon gezet voor deze inaugurale rede, waarin wiskundig denken en ICT-gebruik de belangrijkste onderwerpen zijn.

Wiskundig denken

Waarom wiskundig denken?

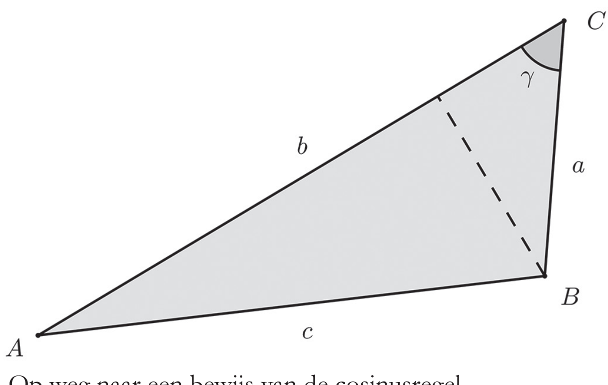
Laat ik maar met de deur in huis vallen: in de wiskundeles moet meer worden nagedacht. Een van de belangrijkste doelen van wiskundeonderwijs is dat leerlingen worden uitgedaagd om hun hersens te gebruiken en daarbij de kracht van de wiskunde inzetten. Het gaat erom dat leerlingen alert en fris naar problemen kunnen kijken en kritisch kunnen denken en redeneren. Ik ben er stellig van overtuigd dat dit voor de leerling een fundamentele waarde van wiskundeonderwijs kan zijn, niet alleen ten behoeve van een exacte vervolgopleiding of beroepspraktijk, maar ook in andere praktijken en in het persoonlijke leven.

In deze overtuiging en ervaring sta ik niet alleen. Grote wiskundigen en didactici hebben dit standpunt in het verleden uitgedragen. Denk bijvoorbeeld aan Pólya's veelgeciteerde hartekreet: "*First and foremost, it* [wiskundeonderwijs, PD] *should teach those young people to THINK*" (Pólya, 1963, p. 605). Of aan het pleidooi van Skemp (1976) voor relationeel naast instrumenteel inzicht. Van Streun (2001) breekt een lans voor productie in plaats van reproductie, voor *weten waarom* in plaats van *weten dat*. Specifiek voor algebra pleit Arcavi (1994) voor *symbol sense* in plaats van *symbol pushing*.

Maar vandaag de dag is er nog steeds alle reden om dit standpunt opnieuw onder de aandacht te brengen. Bij wijze van anekdotisch voorbeeld vertelde een docent me onlangs hoe zijn leerlingen in klas

3 de vergelijking $(x - 3)^2 + 5 = 30$ niet konden oplossen zonder de ingewikkelde en foutgevoelige procedure van haakjes wegwerken en *abc*-formule. De leerlingen van de brugklas die daarna binnenkwamen en de vergelijking nog op het bord zagen staan, kozen zonder problemen de handige oplossingsroute via $(x - 3)^2 = 25$ en $x - 3 = 5$ of $x - 3 = -5$. Vergelijkbare voorbeelden, maar dan bij het oplossen van vergelijkingen in een ICT-omgeving, zijn te vinden in Bokhove en Drijvers (2012). Leren onze leerlingen wel om eerst te kijken, te denken en dan pas te doen?

Een tweede voorbeeld betreft een docent die me bij een nascholing over wiskundig denken vertelde dat de cosinusregel in klas 3 als een *deus ex machina*, dus zonder bewijs, wordt geponeerd. Leerlingen moeten maar aannemen dat $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ waar is, terwijl een bewijs helemaal niet zo moeilijk is: een kwestie van een geschikte loodlijn trekken en twee keer de stelling van Pythagoras gebruiken (zie Figuur 2). Niet alleen kunnen de leerlingen deze voor hen bekende stelling zo nog eens zinvol toepassen, ook ervaren ze dat je er dus zeker van kunt zijn dat de cosinusregel op basis daarvan klopt! Voor het bewijzen van de *abc*-formule geldt iets dergelijks; daarover verderop meer.



Figuur 2. Op weg naar een bewijs van de cosinusregel

Wel bemoedigend is de grote belangstelling voor wiskundig denken momenteel. Dit voorjaar trok een online cursus getiteld *Mathematical Thinking* van Keith Devlin van Stanford University bijvoorbeeld een enorm aantal deelnemers. De *Common Core Standards*, leidend voor de wiskundecurricula in het overgrote deel van de staten in de VS, vermelden leerdoelen zoals *Make sense of problems and persevere in solving them*, *Reason abstractly and quantitatively*, *Model with mathematics* en *Use appropriate tools strategically* die duidelijk refereren aan wiskundig denken[2]. In Nederland heeft de vernieuwingscommissie wiskunde gepleit voor wiskundig denken als een centraal onderwijsdoel en daarmee als een belangrijk element van de vakvernieuwing wiskunde voor havo en vwo die de komende zomer in klas 4 wordt ingevoerd (cTWO, 2007, 2013).

Wat verstaan we onder wiskundig denken?

Als we wiskundig denken als een centraal doel van wiskundeonderwijs zien, rijst de vraag wat we daar nu precies onder verstaan. Daarbij is een afbakening gewenst, want wiskunde heeft niet het alleenrecht op denken. Wat is specifiek aan wiskundig denken in vergelijking met wetenschappelijk denken of analytisch denken? Hoe verhoudt het zich tot wat Ottevanger et al. (2014) karakteristieke werkwijzen van natuurwetenschappen noemen, zoals modelontwikkeling en redeneervaardigheden?

In de literatuur vinden we verschillende visies op wiskundig denken. De hierboven genoemde Devlin stelt: "*Mathematical thinking is a whole way of looking at things, of stripping them down to their numerical, structural, or logical essentials, and of analyzing the underlying patterns*" (Devlin, 2011, p. 59). De National Research Council (1989, p. 31) schrijft: "[…] *mathematics offers distinctive modes of thought which are both versatile and powerful, including modeling, abstraction, optimization, logical analysis, inference from data, and use of symbols*". Schoenfeld zegt het weer anders:

> Learning to think mathematically means (a) developing a mathematical point of view – valuing the processes of mathematization and abstraction and having the predilection to apply them, and (b) developing competence with tools of the trade, and using those tools in the service of the goal of understanding structure – mathematical sense-making. (Schoenfeld, 1992, p. 335)

Wat opvalt is dat deze definities nogal vaag zijn: "*a way of looking at things*", "*offers*" maar niet "*is*", "*including*", "*learning to think*" in plaats

2 http://www.corestandards.org/Math/Practice

van "*think*". Ook zien we opsommingen van elementen van wiskundig denken. Dreyfus en Eisenberg (1996) benoemen bijvoorbeeld analogie, structuur, representatie, visualisatie en omkeerbaarheid als aspecten van wiskundig denken. Recenter is de omschrijving van de vernieuwingscommissie wiskunde cTWO, die eveneens een lijst van denkactiviteiten geeft:

> Centrale denkactiviteiten [in het wiskundeonderwijs van havo en vwo, PD] zijn modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren en bewijzen. (cTWO, 2007, p. 21)

In de syllabi voor de centrale examens wiskunde 2017 (havo) en 2018 (vwo) komt dit rijtje terug, waaraan wordt toegevoegd dat ICT daarbij functioneel kan worden gebruikt (CvTE, 2015a).

Al met al is wiskundig denken dus nog niet scherp gedefinieerd. Parafraserend op een recent artikel in *Euclides* (Drijvers, 2015) waag ik een poging tot een werkdefinitie:

> *Wiskundig denken is bedenken hoe je wiskundig gereedschap kunt gebruiken om een probleem aan te pakken.*

Enkele termen uit deze omschrijving verdienen nadere toelichting. Ten eerste zit het wiskundige dus in het gereedschap. Dat vat ik ruim op: het kan specifiek en concreet zijn, zoals de *abc*-formule voor het oplossen van kwadratische vergelijkingen, maar het omvat ook het ontwikkelen van strategieën en theoretisch-methodisch gereedschap zoals logisch redeneren, bewijzen, inductie en deductie. In feite maakt juist dit gereedschap het denken tot wiskundig denken. Ten tweede is ook het woord "gebruiken" breder bedoeld dan het misschien lijkt: het gaat niet alleen om het toepassen van een bestaande, kant-en-klare methode, maar ook, of zelfs juist, om het ontwikkelen daarvan, of om het op maat maken en aanpassen van een bestaande methode voor een specifiek doel. Een "probleem", ten slotte, is niet zomaar een opgave, maar een vraag waarvoor de leerling nog geen kant-en-klare oplossingsmethode ter beschikking heeft, een niet-standaard opgave van binnen of buiten de wiskunde, die de leerling (nog) niet routinematig kan oplossen.

Hoe verhoudt zich mijn werkdefinitie tot de opsomming van wiskundige denkactiviteiten volgens cTWO? Onlangs heb ik voorgesteld om deze in te perken tot drie kernaspecten van wiskundig denken die cruciaal zijn bij het gebruiken van wiskundig gereedschap, namelijk probleemoplossen, modelleren en abstraheren (Drijvers, 2015). Laat ik deze drie kernaspecten nader uitwerken.

Probleemoplossen

Wiskunde gaat uiteindelijk over problemen en oplossingen (Halmos, 1980). Probleemoplossende vaardigheden zijn ook buiten de wiskunde belangrijk en waardevol, maar wiskunde is wel het vakgebied dat hiervoor handvatten biedt en waarbinnen goed aan de ontwikkeling hiervan kan worden gewerkt.

> Solving a problem means finding a way out of a difficulty, a way around an obstacle, attaining an aim which was not immediately attainable. Solving problems is the specific achievement of intelligence, and intelligence is the specific gift of mankind: problem solving can be regarded as the most characteristically human activity. (Pólya, 1962, p. v).

Probleemoplossen heeft verschillende kanten, zoals het stellen van het probleem, het probleem begrijpen, een aanpak bedenken, die aanpak uitvoeren en monitoren, en terugkijken op het proces om te verifiëren of het doel is bereikt en om de denkstappen te expliciteren. In praktijk wisselen deze fasen elkaar vaak af. Aangenomen dat voor het probleem geen standaardprocedure beschikbaar is (anders is het geen echt probleem), omvatten probleemoplossende vaardigheden heuristieken om met het nieuwe om te gaan. Denk aan manieren om aan een probleem te beginnen zoals een schets maken, iets afleiden uit de gegevens, of juist terugredeneren vanuit de gewenste uitkomst, een probleemaanpak bedenken, een randgeval zoeken, een getallenvoorbeeld doorrekenen, een meerstapsstrategie uitvoeren zonder de draad kwijt te raken, of weten hoe je zaken die je al kunt of kent in een nieuwe situatie creatief kunt inzetten (Pólya, 1945; Schoenfeld, 1992; Van Streun, 2001). Het ontwikkelen en expliciteren van dergelijke heuristieken is een centraal leerdoel van onderwijs in probleemoplossen.

Op het eerste gezicht heeft het iets paradoxaals om probleemoplossen te onderwijzen: je wilt leerlingen problemen laten oplossen, in de hoop dat ze daardoor leren om te gaan met andere problemen, die nieuw zijn en waarin de oplossingen die ze hebben leren kennen niet direct toepasbaar zijn. Dat is dus een subtiele zaak. Door het werken aan geschikte problemen en door een goede manier van lesgeven kunnen leerlingen probleemoplossende vaardigheden ontwikkelen die de specifieke problemen die ze al hebben gezien overstijgen. De eerste resultaten van het onderzoek *Wiskundige denkactiviteiten in praktijk*[3] dat ik samen met een aantal scholen uitvoer, suggereren dat de sleutel daarvoor ligt in het voorbeeldgedrag van de docent en in het expliciteren van het probleemoplossingsproces en de bijbehorende heuristieken.

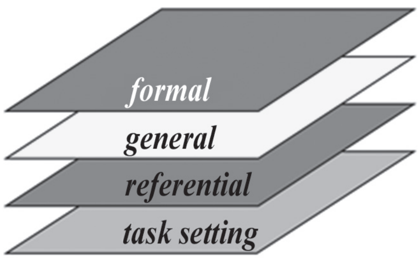
Modelleren

Modelleren betreft de relaties tussen wiskunde en problemen uit de wereld om ons heen en de manier waarop dergelijke problemen kunnen worden aangepakt met wiskundige middelen. Het doel is dan bijvoorbeeld het begrijpen van een fenomeen, het voorspellen van een ontwikkeling of het optimaliseren van een proces. De vernieuwingscommissie wiskunde omschrijft modelleren als “een praktisch en creatief proces waarbij realistische problemen in wiskundige vorm worden vertaald” (cTWO, 2007, p. 25). Een probleem wordt dus geformuleerd in wiskundige termen, bijvoorbeeld door het opstellen van formules en (differentiaal)vergelijkingen, of het maken van een meetkundige figuur. In een ruimere opvatting wordt bij modelleren ook gedacht aan het doorlopen van een cyclus van het vertalen van het probleem naar wiskunde, vervolgens het wiskundige probleem oplossen en ten slotte de oplossing terugvertalen naar het oorspronkelijk probleem (Drijvers, 2012; Spandaw & Zwaneveld, 2012). In het wiskundeonderwijs is modelleren om drie redenen van belang. Ten eerste ontleent wiskunde haar bestaansrecht ook aan de

3 Mogelijk gemaakt door het Nationaal Regieorgaan Onderwijsonderzoek, Projectnummer 405-14-502

toepasbaarheid ervan, die je door middel van wiskundige modellen vormgeeft. Ten tweede draagt modelleren eraan bij dat leerlingen wiskunde als betekenisvol en voorstelbaar ervaren. Ten derde kunnen betekenisvolle wiskundige modellen een aanloop zijn naar abstractere wiskunde.

In tegenstelling tot wat men zeker in het buitenland soms denkt, wordt in het Nederlandse wiskundeonderwijs niet zo veel gemodelleerd. In examens, zelfs die van wiskunde A waarin modelleren een centrale rol speelt, komt modelleren niet of nauwelijks aan de orde en als dat het geval is, wordt het model veelal gegeven (Van Streun, 2014). In schoolmethoden en onderwijspraktijken zijn de probleemsituaties vaak gekunsteld en zelden realistisch, niet in de zin van voorkomend uit de werkelijkheid en evenmin in de zin van voorstelbaar en betekenisvol (Drijvers, 2006). Als een terzijde wil ik opmerken dat de huidige indeling van het vak wiskunde in havo en vwo in wiskunde A, B, C en D een ongelukkige is, waarin wiskunde C en D nauwelijks of niet levensvatbaar zullen blijken te zijn.



Figuur 3. Het vierlagenmodel voor emergent modelleren (naar Gravemeijer, 1999)

Terug naar het modelleren. In het licht van modelleren als proces naar abstractie is het begrip emergent modelleren verhelderend (Gravemeijer, 1999). In deze optiek ligt de waarde van het modelleren niet alleen in het resulterende model, maar ook in de betekenis daarvan die tegelijkertijd ontstaat. Aanvankelijk is deze betekenis sterk gekoppeld aan de realistische of paradigmatische probleemsituatie. Geleidelijk aan verschuift de aandacht zich naar de wiskundige relaties die een rol spelen in het oplossingsproces en ontwikkelt zich algemenere en formelere kennis. Denk bijvoorbeeld aan een probleemsituatie met vaste en variabele kosten. Aanvankelijk hebben de bijbehorende formules en grafieken alleen betekenis in termen van deze context. Ze vormen een model van de situatie. Naarmate deze en vergelijkbare situaties verder worden onderzocht, ontwikkelt de lineaire functie zich in de denkwereld van de leerling tot een wiskundig object dat zijn betekenis ontleent aan een netwerk van wiskundige relaties, waarmee de leerling kan redeneren. De lineaire functie wordt dan onderdeel van een nieuw stukje wiskundige werkelijkheid, waarvan de betekenis uitstijgt boven de concrete situatie, al kan de leerling daarop in geval van nood wel terugvallen. In Figuur 3 zijn deze lagen van betekenis gevisualiseerd.

Het interessante van emergent modelleren voor mijn betoog hier is dat het in feite zowel het modelleren van een probleem omvat als ook het van daaruit abstraheren. Als in modelleeropgaven minder nadruk komt te liggen op numerieke uitkomsten of parameterwaarden, kunnen modelleren en abstraheren op een natuurlijke manier in elkaars verlengde liggen. Dit leidt me tot het derde aspect van wiskundig denken.

Abstraheren

Bij abstraheren gaat het erom dat de leerling uit concrete probleemsituaties overeenkomsten en verschillen destilleert, die vervolgens leiden tot de vorming van betekenisvolle wiskundige objecten met eigenschappen en relaties. Tall drukt dit als volgt uit: "*Abstraction is the isolation of specific attributes of a concept so that they can be considered separately from the other attributes*" (Tall, 1988, p. 2). Geleidelijk aan verschuift het accent zo van het oplossen van de concrete problemen naar het inzicht in en redeneren met de wiskundige begrippen die daarin een rol spelen en waarbij de leerling zich wat kan voorstellen. Daarmee is abstraheren een van de krachtigste aspecten van de wiskunde: je gaat op een hoger niveau redeneren over zaken en verbanden op een manier die nog steeds iets voor je betekent. Tegelijkertijd is het ook een van de moeilijkste aspecten, al stelt Mason (1989) dat deze moeilijkheid wellicht voor een deel veroorzaakt wordt doordat leerlingen te weinig betrokken zijn, te weinig deelnemer zijn in het proces van het abstraheren.

Skemp maakt onderscheid tussen het proces van het abstraheren en het resultaat daarvan, de abstractie of het concept:

> *Abstracting* is an activity by which we become aware of similarities […] among our experiences. *Classifying* means collecting together our experiences on the basis of these similarities. An abstraction is some kind of lasting change, the result of abstracting, which enables us to recognise new experiences as having the similarities of an already formed class. […] To distinguish between abstracting as an activity and abstraction as its end-product, we shall […] call the latter a *concept*. (Skemp, 1986, p. 21, cursivering in origineel)

Het abstraheren kan in gang worden gezet door bijvoorbeeld te generaliseren over een bepaalde categorie van voorbeelden, door het gemeenschappelijke uit een aantal situaties te halen, waardoor dat op zichzelf een nieuwe wereld wordt. Een andere manier is om operaties van een hogere orde op concepten toe te passen waardoor deze lagere dan meer een objectkarakter krijgen. Denk bijvoorbeeld aan het differentiëren, waarbij de functies die daaraan onderworpen worden meer het karakter van een object krijgen. Sfard gebruikt in dit verband de term reïficatie (Sfard, 1991).

Het resultaat van dit abstractieproces is dat je je beweegt op een hoger niveau van abstracte wiskundige objecten en hun relaties, en daarmee kunt redeneren. Dan heb je dus in feite het abstracte concreet gemaakt, wat de voltooiing is van het abstractieproces (Mason, 1989). Bij moeilijkheden kun je terugvallen op een lager niveau van concreetheid, van betekenis. Deze kijk op het abstractieproces is in lijn met het hierboven besproken idee van emergent modelleren.

Het valt te betreuren dat abstraheren zo weinig plaats heeft in het Nederlandse wiskundeonderwijs. Modelleren en abstraheren lijken tegenpolen te zijn en de nadruk ligt op toepassingen. Deze benadering doet de leerling te kort. Ook bij toepassingen en modellen gaat het wiskundigen immers niet om de uitkomst maar om het inzicht, de eigenschappen, de methoden. In de theorie van Realistisch Wiskundeonderwijs, die in Nederland als richtinggevend wordt beschouwd maar niet altijd goed is begrepen, heeft behalve modelleren – horizontaal mathematiseren in termen van Treffers (1987) – ook het abstraheren of verticaal mathematiseren een belangrijke rol (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2013). Abstraheren is een belangrijke kracht van de wiskunde; die onbenut laten geeft geen goed beeld van het vak.

Wiskundig denken onderwijzen

Samengevat is wiskundig denken omschreven als het gebruiken en ontwikkelen van wiskundig gereedschap om een probleem op te lossen. Kenmerkende wiskundige denkactiviteiten zijn probleemoplossen, modelleren en abstraheren. In het voortgezet onderwijs staat wiskundig denken te weinig centraal. Echte problemen komen nauwelijks aan de orde of worden opgesplitst in kleine deelstappen, modellen worden vaak al weggegeven of betreffen gekunstelde contexten. Aan abstraheren wordt nauwelijks toegekomen. De uitdaging ontbreekt en de spanning is ver te zoeken. Wat valt hieraan te doen en op welke manier kan wiskundig denken worden onderwezen?

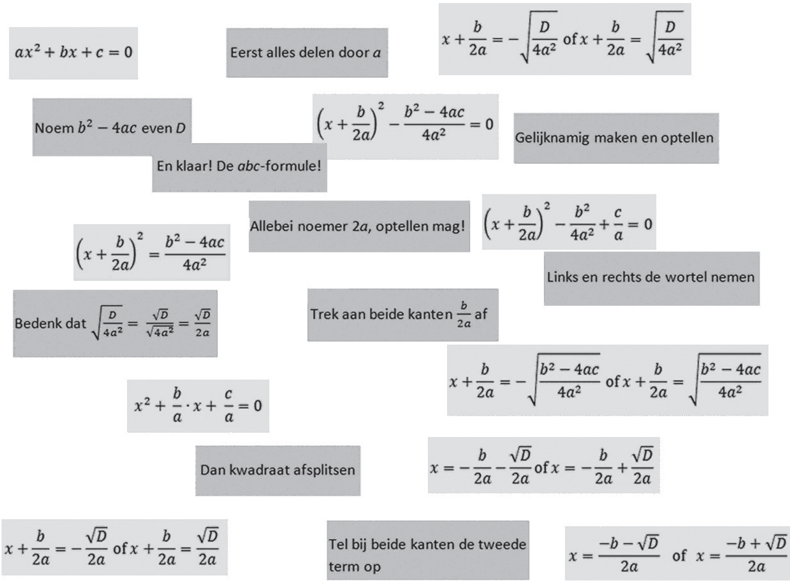
Het antwoord op deze vraag is tweeledig en ligt voor de hand: ten eerste door leerlingen goede problemen te geven waarin probleemoplossen, modelleren en abstraheren aan de orde komen, en ten tweede door als docent de mogelijkheden van dergelijke problemen in de klas optimaal te benutten.

Wat zijn geschikte problemen? Laat ik beginnen met een voorbeeld, binnen het hierboven genoemde onderzoek naar wiskundige denkactiviteiten ontwikkeld in samenwerking met docente Irene Vis. Zoals eerder opgemerkt wordt de *abc*-formule voor het oplossen van kwadratische vergelijkingen in veel klassen niet bewezen. Dat is een ongewenste situatie en er zijn verschillende manieren om dit bewijs toch aan de orde te laten komen. Bij de formules en omschrijvingen in Figuur 4 kan leerlingen bijvoorbeeld worden gevraagd om deze op volgorde te zetten zodat ze een sluitend bewijs vormen. Dat kan met ICT-middelen zoals een digitaal schoolbord, maar ook met strookjes papier. Er zijn verschillende varianten, die het mogelijk maken om rekening te houden met de verschillen binnen de klas:

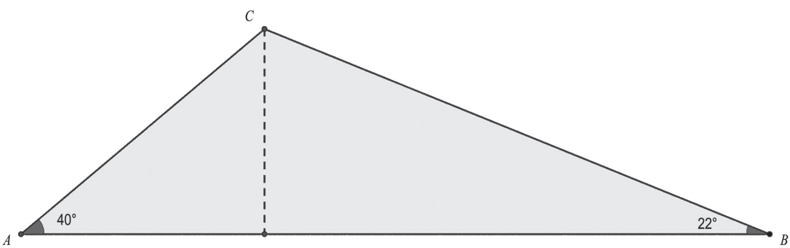
- Leerlingen krijgen de formules en omschrijvingen zoals afgebeeld in Figuur 4;
- Iets eenvoudiger: Leerlingen krijgen paren bestaande uit een formule en de omschrijving van de volgende stap;
- Iets moeilijker: Leerlingen krijgen alleen de beginformule en eindformule, maar alle tien omschrijvingen. De vraag is dan om de omschrijvingen op volgorde tussen de begin- en eindformule te leggen en de tussenliggende stappen zelf uit te voeren;
- Nog moeilijker: Leerlingen krijgen begin- en eindformule en de vraag om met kwadraat afsplitsen van de ene naar de andere kant te komen. Als ze vastlopen, krijgen ze van de docent de omschrijving van de stap uit Figuur 4 die past bij waar ze zijn.

Om docenten te helpen denkactiverende mogelijkheden van opgaven te beoordelen, wordt momenteel gewerkt aan een lijst met criteria die aan dergelijke opgaven kunnen worden gesteld en met handvatten om dergelijke opgaven te ontwerpen of aan te passen. Met het oog op probleemoplossen is het bijvoorbeeld goed als een opgave een verrassingselement heeft, iets dat de leerling niet verwacht en dat de opgave daarmee boeiend maakt. Vanuit het perspectief van modelleren kan een criterium zijn dat de leerling kwalitatief over een model moet nadenken of dat eigenschappen van het type model onderzocht worden. Een criterium met betrekking tot abstraheren kan zijn dat op basis van verschillende situaties een wiskundig concept of methode wordt gevormd. Vanzelfsprekend hoeft een opgave niet aan alle criteria te voldoen om geschikt te zijn. Overigens is er al veel denkactiverend lesmateriaal beschikbaar, zoals de opgavenbundel over algebra van Martin Kindt (2004).

Ten tweede is de manier waarop de wiskundedocent in de les aandacht besteedt aan wiskundig denken cruciaal. Dat zit soms in kleine zaken. In een les die ik onlangs bijwoonde werd een op het eerste gezicht vrij saaie opgave naar de lengte van lijnstuk *AB* (zie Figuur 5) ineens toch nog spannend toen de docente, Mascha Klerx, de leerlingen vertelde dat ze per drietal één gegeven naar keuze zouden krijgen. De vraag welk gegeven nu het meest informatief is, is op zichzelf al interessant. Het feit dat de verschillende drietallen dus over verschillende informatie beschikten maakte het oplossen spannend en de klassikale nabespreking levendig.

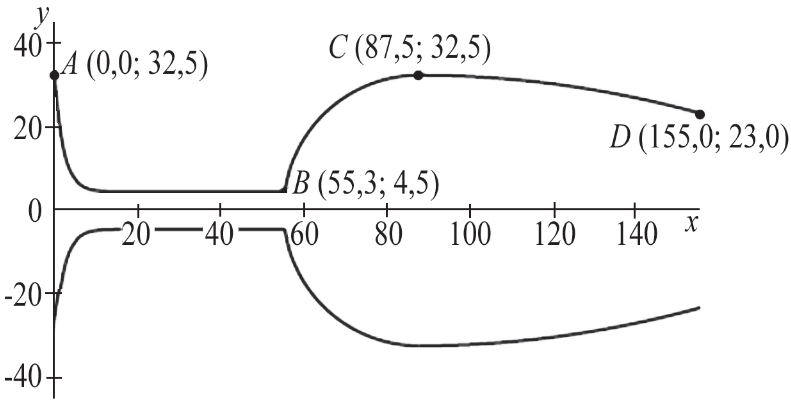


Figuur 4. Bouwstenen voor een bewijs van de *abc*-formule voor kwadratische vergelijkingen



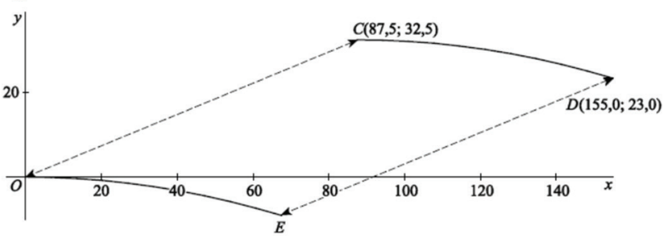
Figuur 5. Een gewone vraag naar de lengte van *AB* die toch nog denkactief wordt

Het is nodig om docenten te equiperen met werkvormen en technieken die denkactiviteiten in de les bevorderen. Zowel in de initiële lerarenopleiding als in professionaliseringsaanbod, waaraan momenteel in samenwerking met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren wordt gewerkt, verdient het verwerven van een dergelijk repertoire aandacht. In het eerdergenoemde onderzoek wordt momenteel een aantal van dergelijke technieken ontwikkeld en geïdentificeerd. Denk bijvoorbeeld aan het hanteren van een nieuwe werkvorm, zoals in de voorbeelden hierboven, maar ook aan het stellen van de juiste vragen



Om CD te tekenen wordt een bergparabool gebruikt met C als top. Een formule van deze parabool kan worden gevonden door eerst kromme CD te verschuiven zo dat C terechtkomt op $O(0, 0)$. In figuur 3 zijn de kromme CD en de beeldkromme OE getekend en is ook de verschuiving weergegeven.
Kromme OE is deel van een bergparabool met top O en heeft dus een formule van de vorm $y = a \cdot x^2$, met $a < 0$. Nu kan gebruik gemaakt worden van de translatie die kromme OE afbeeldt op kromme CD. In figuur 3 is ook deze translatie weergegeven.

figuur 3



5p **4** Stel een formule op voor kromme CD.

Om CD te tekenen wordt een bergparabool gebruikt met C als top.

5p **4** Stel een formule op voor kromme CD.

Figuur 6. Een opgave uit het centraal examen vwo wiskunde B 2012: boven regulier en onder pilot.

aan leerlingen, zoals omkeervragen, vragen naar randgevallen of uitzonderingen, vragen naar wat algemeen is in de situatie of de werkwijze. Vanzelfsprekend zijn een goede kennis van de wiskundige inhoud en een goede feeling voor de bijbehorende didactiek voorwaarden voor een dergelijke uitvoering van denkactief onderwijs.

Wiskundig denken toetsen

Wil wiskundig denken een grotere plaats krijgen in het wiskunde-onderwijs, dan zal dit ook zichtbaar moeten worden in de toetsen, die immers hun schaduw vooruit werpen op het onderwijs. Enige ervaring met het toetsen van wiskundig denken is opgedaan in de examens voor de pilotscholen, die voorop liepen bij de invoering van de nieuwe 2015 curricula voor havo en vwo. Laten we eerst een voorbeeld bekijken.

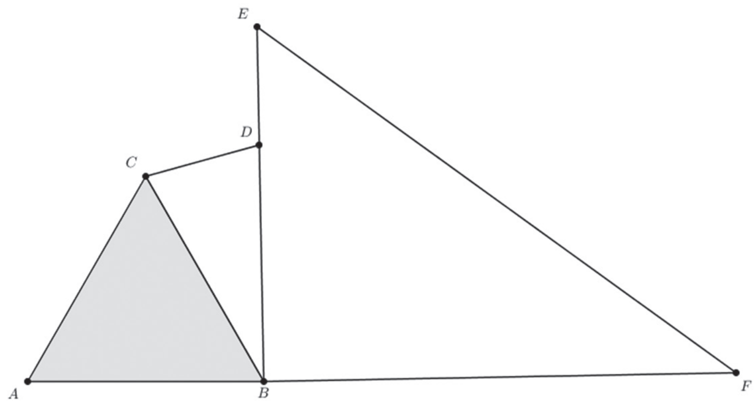
In Figuur 6 staat een deel van een opgave uit het centraal examen vwo wiskunde B 2012 over een wijnglas. De afbeelding boven staat in zowel het reguliere als het pilotexamen. Vraag 4, waarin wordt gevraagd naar een kwadratische formule om het deel *CD* van het glas te modelleren, kent echter in de reguliere variant (midden in Figuur 6) een uitgebreide inleiding waarin een aanpak wordt gesuggereerd. De pilotvariant onder koerst vrijwel zonder toelichting recht op de vraag af en doet daarmee een groter beroep op de denkactiviteit van de leerling en reduceert tegelijkertijd ook het leeswerk. De p-waarde, het gemiddelde percentage behaalde punten, verschilde vrij veel: 51,8 voor de reguliere leerlingen (N = 15683) tegen 39,8 voor de pilotleerlingen (N = 243). Het hopelijk denkactiverende wiskundeonderwijs dat op de pilotscholen is gegeven weegt kennelijk niet op tegen deze drastische inkorting.

Uit een inventarisatie van Van Streun (2014) blijkt dat de pilotexamens bij de nieuwe wiskundecurricula slechts in beperkte mate beroep doen op wiskundig denken. Als we de resultaten van reguliere leerlingen en pilotleerlingen bekijken op alle vragen van de examens die exact gelijk zijn en tevens als denkactief te beschouwen zijn, dan vinden we voor het havo een gemiddeld verschil in p-waarde van +6,6 over de eerste tijdvakken van 2011 tot en met 2014 in het voordeel van de pilotleerlingen. Het gaat overigens slechts om vijf vragen. Voor de vier betreffende vragen van het vwo presteren de pilotleerlingen wat lager dan de reguliere met een verschil van -2,1 over de eerste tijdvakken van 2012 tot en met 2014 (Kodde-Buitenhuis, in voorbereiding). De leerlingaantallen zijn te klein en de pilotsituaties te specifiek om hieraan vergaande conclusies te verbinden, maar deze resultaten suggereren dat de beoogde vooruitgang op het gebied van wiskundig denken in de nieuwe programma's op het vwo vooralsnog minder goed wordt bereikt dan op het havo. Gelet op de richtinggevende werking die van de centrale examens uitgaat, verdient het aanbeveling om bij de examenconstructie wat meer durf te tonen op dit gebied. Als we echt werk willen maken van denkactief wiskundeonderwijs, geeft de aanpassing van de opgave in Figuur 6 ondanks de matige resultaten de weg aan die we verder moeten bewandelen.

Natuurlijk is er geen enkele reden om met wiskundig denken te wachten tot de tweede fase van havo en vwo. Integendeel, het moet hier juist om een doorlopende leerlijn gaan, die uitstekend kan starten in de onderbouw. Bij wijze van voorbeeld geeft Figuur 7 een opgave uit het eerdergenoemde onderzoek. Gegeven is een gelijkzijdige driehoek *ABC* met zijde 4. Daaraan wordt een gelijkbenige driehoek *BDC* gelegd, zo dat de lengte van *CD* gelijk is aan 2. Punt *E* ligt op het verlengde van *BD* met *ED* eveneens gelijk aan 2. *BF* en *EF* hebben lengtes 8 en 10, respectievelijk. De vraag is of de hoek bij *B* inderdaad gestrekt is, dus of *B* wel op *AF* ligt, zoals in de figuur het geval lijkt te zijn.

Het verrassende van dit probleem is dat je je dus kunt afvragen of een hoek die op het oog gestrekt is, dat ook werkelijk is. Deze opgave, die beroep doet op probleemoplossen in een vrij abstracte situatie, kunnen leerlingen van vwo-3 tot een goed einde brengen, en zou in een toets over goniometrie kunnen voorkomen. Ook in de diagnostische tussentijdse toets (DTT), die in de tweede helft van klas 2 (vmbo) of 3 (havo-vwo) kan worden afgenomen, ligt het voor de hand om overstijgende doelen te toetsen zoals het vermogen tot wiskundig denken. De toetswijzer DTT[4] bevat een aantal voorbeelden die inderdaad als zodanig kunnen worden gekwalificeerd.

4 https://www.hetcvte.nl/nieuws/20141216/conceptversie_toetswijzer_dtt



Figuur 7. Het probleem van de gestrekte hoek

Samengevat is het toetsen van wiskundig denkvermogen niet eenvoudig, maar wel voorwaarde voor een daadwerkelijke plaats voor deze vaardigheid in doorlopende leerlijnen.

ICT in het wiskundeonderwijs

ICT is niet meer uit ons leven weg te denken. Bewust en vaak ook onbewust maken we gebruik van allerlei technologieën. De vraag rijst dus of en op welke manier de inzet van ICT kan bijdragen aan leren, aan het leren van wiskunde, en gelet op het voorafgaande in het bijzonder aan het wiskundig denken van leerlingen. Daarover gaat het tweede deel van deze oratie.

Historie

Laten we eerst eens terugkijken op de snelle ontwikkeling van ICT voor wiskundeonderwijs gedurende de laatste decennia. Oorspronkelijk, zo in de jaren '80 en '90 van de vorige eeuw, zagen we vooral specifieke, *dedicated* ICT-tools opkomen. Denk aan computeralgebra voor het manipuleren van formules (Heid, 1988), aan educatieve programmeertalen zoals LOGO (Hoyles & Sutherland, 1989), aan spreadsheetprogramma's voor het maken van tabellen en grafieken (Healy & Sutherland, 1992), aan software voor dynamische meetkunde (Laborde & Capponi, 1994) en aan software voor het verwerken van statistische gegevens (Van de Giessen & Van Blokland, 1999).

Vervolgens vervaagt geleidelijk de scheiding tussen deze verschillende typen toepassingen. De grafische rekenmachine integreert bijvoorbeeld mogelijkheden voor grafieken, tabellen en statistiek. Computeralgebrasystemen hebben grafische mogelijkheden. Het meetkundeprogramma Geogebra is uitgebreid met een module voor computeralgebra. Tevens zien we een verschuiving van software die lokaal geïnstalleerd moet worden, met alle praktische bezwaren van dien, naar online applicaties die altijd en overal toegankelijk zijn. Denk bijvoorbeeld aan de animatie van de kabelbaan aan het begin van deze oratie. In projecten als Wisweb en Rekenweb zijn bij het Freudenthal Instituut grote aantallen interactieve applets ontwikkeld (Boon, 2004), die op hun beurt ook weer zijn geïntegreerd in de Digitale WiskundeOmgeving (Boon & Tacoma, 2011).

Zo ontstaan brede leeromgevingen waarin inhoud wordt aangeboden, maar die ook een leerlingvolgsysteem en een auteursomgeving bieden. Deze volgsystemen bieden mogelijkheden voor *learning analytics*: het op grond van data van leerlingen en analytische leerlingmodellen voorspellen van leerprocessen en het adviseren van leerlingen. Bovendien is de grens met toetsomgevingen steeds moeilijker te trekken. Binnen scholen verandert de infrastructuur, zijn digitale schoolborden gangbaar en maken laptops, tablets en smartphones, verbonden via draadloze netwerken, hun entree. Ook buiten school zien we online oefenomgevingen[5] die door grote aantallen leerlingen worden gebruikt, en zogeheten *massive open online courses* (MOOCs). Deze online onderwijsmogelijkheden roepen de vraag op hoe ze vruchtbaar met traditioneel onderwijs kunnen worden gecombineerd in *blended learning* of *flipping the classroom* leerarrangementen.

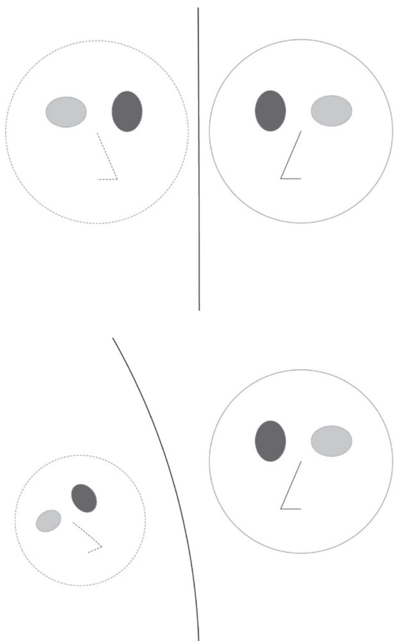
Optimisme

Indertijd gingen deze ICT-ontwikkelingen gepaard met bevlogen optimisme ten aanzien van de toekomst van het wiskundeonderwijs. De aanzet hiertoe werd gegeven door Papert, die in zijn als visionair beschouwde boek *Mindstorms* een pleidooi hield voor programmeren binnen zogeheten *microworlds*. In dit boek stelt hij: "*The computer presence has catalyzed the emergence of ideas*" (Papert, 1980, p. 186). In dit optimisme

5 Zie bijvoorbeeld https://www.khanacademy.org/

stond hij niet alleen: velen geloofden indertijd dat ICT een hefboom zou zijn die het wiskundeonderwijs ingrijpend zou veranderen. Wiskundig denken zou (weer) centraal komen te staan door simulaties en exploraties binnen ICT-omgevingen; interactief en leerlinggestuurd onderwijs zou eindelijk werkelijkheid kunnen worden.

Het volgende voorbeeld van deze *emergence of ideas* is geïnspireerd op een litho van de graficus Maurits Escher uit 1935 getiteld *Hand met reflecterende bol*, ook wel *Zelfportret met spiegelende bol* genoemd. We zien daarop een afbeelding van Escher in een kamer, alsof hij in een kerstbal kijkt die hij voor zich houdt. Laten we dit in het tweedimensionale vlak simuleren. Boven in Figuur 8 ziet u een gestileerd gezicht dat in een spiegel kijkt.



Figuur 8. Beelden bij een zich krommende spiegel

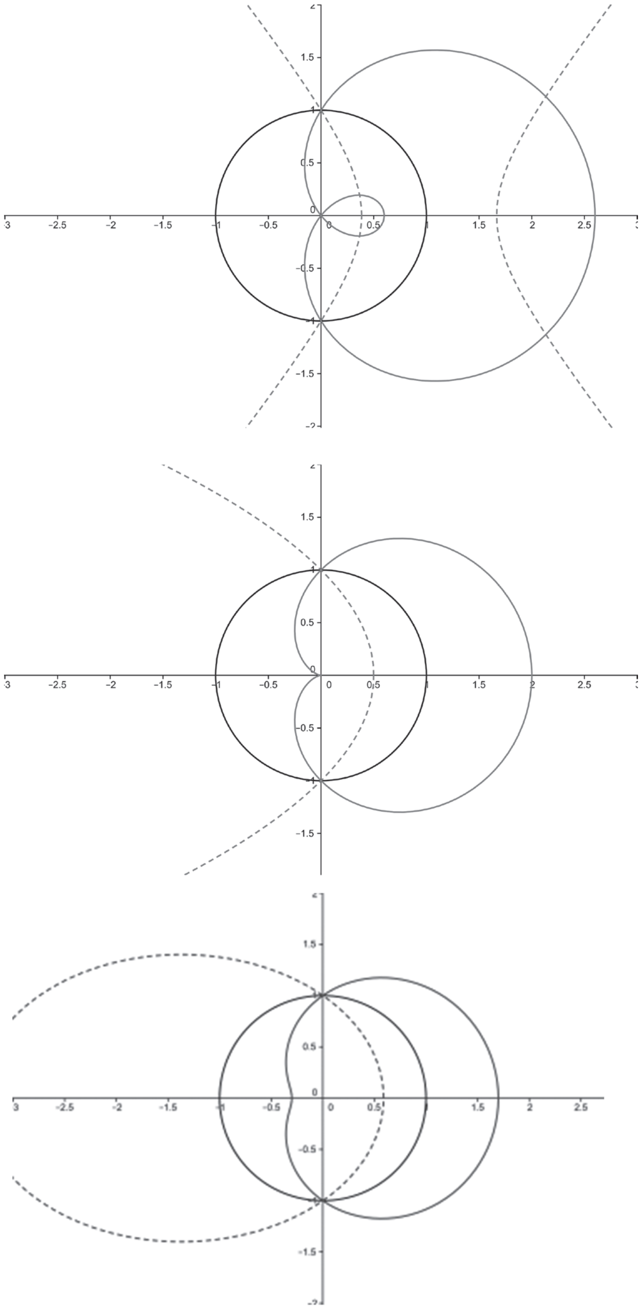
Deze bijzondere spiegel kunnen we echter laten krommen; in feite zijn we begonnen met een cirkelvormige spiegel met een grote straal, die we geleidelijk aan verkleinen. Deze animatie in Geogebra, software voor dynamische meetkunde[6], suggereert dat “spiegelen in een cirkel” gepaard gaat met een draaiing en een verkleining (of een vergroting, als de spiegel de andere kant op kromt). Maar er is meer aan de hand: misschien kunt u onder in Figuur 8 zien dat het beeld van de oorspronkelijk rechte neus bij de gebogen spiegel niet langer recht meer is, maar ook gebogen.

Dit prikkelt de nieuwsgierigheid: wat doet deze afbeelding nu precies? Dan is het handiger om met objecten te beginnen waarvan we de eigenschappen beter kennen dan gezichten, zoals bijvoorbeeld rechte lijnen. Een interactieve exploratie met Geogebra, hier niet afgebeeld, leidt tot het vermoeden dat lijnen bij “spiegeling in de eenheidscirkel”, ook wel inversie geheten, overgaan in cirkels en vice versa. Dit kan vervolgens met algebra worden bewezen.

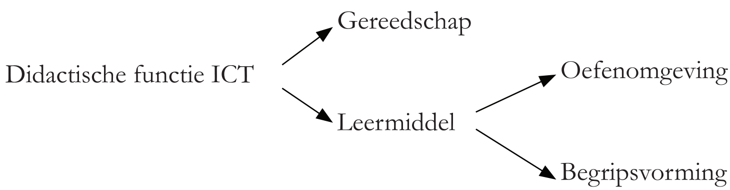
Aangemoedigd door dit succes kunnen we ook onderzoeken wat er met de bekende kegelsnedes ellips, parabool en hyperbool gebeurt onder inversie. We zien in Figuur 9 in het midden de cardioïde of hartkromme verschijnen als inversie van de parabool! In het algemeen krijgen we zo de slaklijnen van Pascal als inversies. Ook dit vermoeden laat zich met algebra elegant bewijzen, zeker als de poolvergelijking van de vorm $R = 1 + a \cdot \cos(\theta)$ wordt gebruikt (Drijvers, in druk). Het is dit type voorbeelden dat laat zien hoe “spelen” met ICT kan uitnodigen tot wiskundig denken, bewijzen en conceptvorming; activiteiten zoals deze vormen de basis voor het hierboven beschreven optimisme.

In de literatuur worden verschillende didactische functies van ICT in het wiskundeonderwijs onderscheiden. Figuur 10 toont een dergelijke indeling. Een eerste didactische functie van ICT is die van wiskundig gereedschap, dat werk uit handen neemt en aandacht vrijmaakt voor de primaire leerdoelen. De tweede functie, die van ICT als oefenomgeving, is meer gericht op het leren zelf, en dan met name op het oefenen van wiskundige vaardigheden. De derde functie richt zich op de begripsvorming. Het voorbeeld van de inversie hierboven, en het optimisme rond ICT-gebruik bij wiskunde in het algemeen, lijken vooral op deze derde functie betrekking te hebben.

6 www.geogebra.org



Figuur 9. Slaklijnen als inversies van kegelsnedes (Drijvers, in druk)



Figuur 10. Drie didactische functies van ICT in de wiskundeles (Drijvers & Zwaneveld, 2012, p. 273)

Realisme

Inmiddels lijkt het oorspronkelijke optimisme plaats te maken voor realisme. In termen van de drie didactische functies van ICT in de wiskundeles (zie Figuur 10) wordt ICT tot op heden vooral gebruikt als gereedschap om bijvoorbeeld vergelijkingen op te lossen, of als oefenomgeving voor procedurele vaardigheden; de begripsvorming en het wiskundig denken die men in het verleden voor ogen had, staan minder centraal. Ook de invoering van de grafische rekenmachine (GR) in Nederland in de jaren '90 ging gepaard met hoge verwachtingen ten aanzien van de mogelijkheden voor een exploratieve en dynamische benadering van wiskunde, een samenhangende kijk op wiskunde en flexibel probleemoplossend gedrag (Doorman, Drijvers, & Kindt, 1994; Drijvers, 2000). Momenteel staat het gebruik van deze machine bij het centraal examen havo/vwo echter ter discussie en wordt de GR vooral gebruikt als gereedschap voor het bepalen van snijpunten van grafieken en kansen bij verschillende kansverdelingen. De massale invoering van digitale schoolborden, een andere grote vernieuwing op ICT-gebied, heeft niet geleid tot interactiever onderwijs. In een studie naar deze invoering, die in Engeland eerder plaatsvond dan in Nederland, lezen we dat "*the mere introduction of such technologies is insufficient to promote greater interactivity in the classroom, and indeed, that use may have had detrimental effects*" (Rudd, 2007, p. 2).

De vraag is dus wat we werkelijk weten over het effect van het gebruik van ICT in de wiskundeles. Wat kunnen we leren van reviewstudies, die de resultaten van andere studies samenvatten? Het aantal van dergelijke studies is beperkt. Afgezien van Lagrange et al. (2003), toch al weer meer dan een decennium oud, zijn er drie reviewstudies relevant:

Cheung en Slavin (2013), Li en Ma (2011) en Rakes et al. (2010). De studie van Higgins, Ziao en Katsipataki (2012) is een meta-analyse van dergelijke reviewstudies. In Tabel 1 worden de resultaten van deze studies samengevat. In de tweede kolom staat het aantal studies waarop de reviewstudie betrekking heeft, met tussen haakjes het aantal effectgroottes dat is meegenomen. De resulterende effectgroottes in de derde kolom kunnen opgevat worden als de gemiddelde verschillen tussen de experimentele en de controlegroepen, uitgedrukt in standaardafwijkingen. In de vierde kolom staan de belangrijkste overstijgende conclusies van de betreffende reviewstudie.

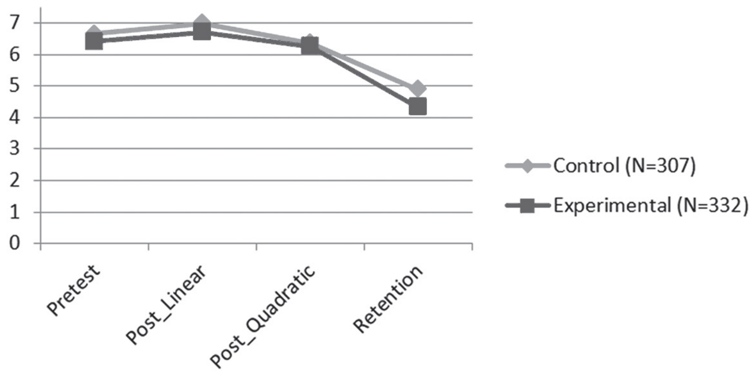
Tabel 1. Effectgroottes gerapporteerd in reviewstudies naar het effect van ICT in wiskundeonderwijs

Reviewstudie	# studies	Effectgrootte (EG, Cohen's *d*)	Conclusie
Cheung & Slavin 2013	74	0.15	Positieve maar bescheiden effecten. Een ondersteuning, maar geen doorbraak.
Higgins et al. 2012	Meta-analyse	Niet gerapporteerd	Geen overtuigende casus. Consistente positieve effecten.
Li & Ma 2011	46 (85 EG)	Gewogen: 0.28 Ongewogen: 0.71	Kleine maar positieve significante resultaten. Kleinschalige studies rapporteren hogere EG.
Rakes et al. 2010	82 (109 EG)	0.20 - 0.32	Focus op algebra; positieve significante resultaten. Interventies gericht op inzicht hogere EG dan die gericht op procedurele vaardigheid.

Het beeld dat uit Tabel 1 naar voren komt, is dat er een significant positief effect uitgaat van het gebruik van ICT in de wiskundeles met een bescheiden effectgrootte in de orde van $d = 0.2$. Daarnaast trekken de reviewstudies een aantal andere conclusies die het vermelden waard zijn. Ten eerste lijken de effectgroottes van studies in het primair onderwijs groter te zijn dan in het voortgezet onderwijs. Ten tweede, in weerwil van het type gebruik dat we veel zien, worden juist de hoogste effectgroottes gerapporteerd bij studies die zich richten op begripsontwikkeling. Ten derde zou men op basis van de ontwikkeling van ICT-tools voor wiskunde, de toegenomen ervaring van leerling en docent met ICT en de verbeterde ICT-voorzieningen op school en thuis, kunnen verwachten dat de effectgroottes in de loop van de tijd toenemen. Dit is echter niet het geval. Mogelijk zijn deze positieve effecten er wel, maar worden ze gecompenseerd door andere invloeden zoals strakkere onderzoeksdesigns en grotere studies. Immers, en dat is een vierde punt, het zijn juist de methodologisch zwakkere en de kleinere studies die de hoogste effectgroottes rapporteren (Cheung & Slavin, 2012). Dit laatste geeft wel te denken over de mogelijkheden voor de opschaling van succeservaringen.

Bij een overzicht als dit kunnen wel wat vraagtekens worden geplaatst. Ten eerste zijn deze reviewstudies gebaseerd op studies die zelf al weer ouder zijn, dus de vraag is hoe actueel de bevindingen nog zijn. Ten tweede zijn alleen (quasi)experimentele studies opgenomen en blijft bijvoorbeeld ontwerponderzoek grotendeels buiten beeld. De belangrijkste beperking van studies zoals vermeld in Tabel 1 is echter dat alle vormen van ICT en ICT-gebruik worden samengevoegd, waardoor eventuele claims erg algemeen worden. Als we in de zin "ICT heeft een positieve invloed op wiskundeprestaties" de afkorting "ICT" vervangen door de woorden "pen en papier", dan snapt iedereen dat dit een te ruime formulering is. Net als bij pen en papier is het medium geen garantie voor succes. Er zijn slechte en goede boeken, op kladpapier staan geniale invallen en fouten naast elkaar. Met ICT-gebruik is het niet anders: dat is niet per definitie goed. De waarde ervan hangt af van vele factoren, zoals het type ICT, het type gebruik, de onderwijssituatie, de doelgroep, et cetera. Kennelijk is het aantonen van de waarde van ICT voor het leren van wiskunde en het benutten van de breed erkende mogelijkheden genuanceerder dan we eerder dachten. Juist vanwege deze nuances zijn nieuwe en meer specifieke reviewstudies en replicatiestudies wenselijk.

Ondanks deze kanttekeningen is het beeld van het effect van de inzet van ICT dus slechts gematigd positief en voldoen ICT-rijke interventies niet altijd aan de verwachtingen. Als voorbeeld van het laatste zien we in Figuur 11 hoe een experimentele groep, bestaande uit 332 leerlingen van klas 2 van havo/vwo, uiteindelijk minder goed presteert dan de controlegroep (*N* = 307), terwijl de applets waarmee de experimentele groep werkte toch al beproefd waren. Een mogelijke verklaring is het zogeheten *spill-over* effect: docenten in deze studie gaven les aan zowel experimentele als controleklassen en waren wellicht beter in staat om de inzichten die ze opdeden in de nieuwe digitale aanpak van lineaire en kwadratische vergelijkingen vorm te geven in reguliere lessen dan in lessen met de ICT waarmee ze minder vertrouwd waren. Algemeen gesproken kunnen er allerlei redenen zijn waarom "ICT in de klas niet werkt", waarbij ook de mogelijkheid dat het een verkeerd middel op een verkeerd moment is niet mag worden uitgesloten.



Figuur 11. Resultaten van een ICT-interventie in klas 2 (naar Drijvers, Doorman, Kirschner, Hoogveld, & Boon, 2014)

Instrumentele genese en orkestratie

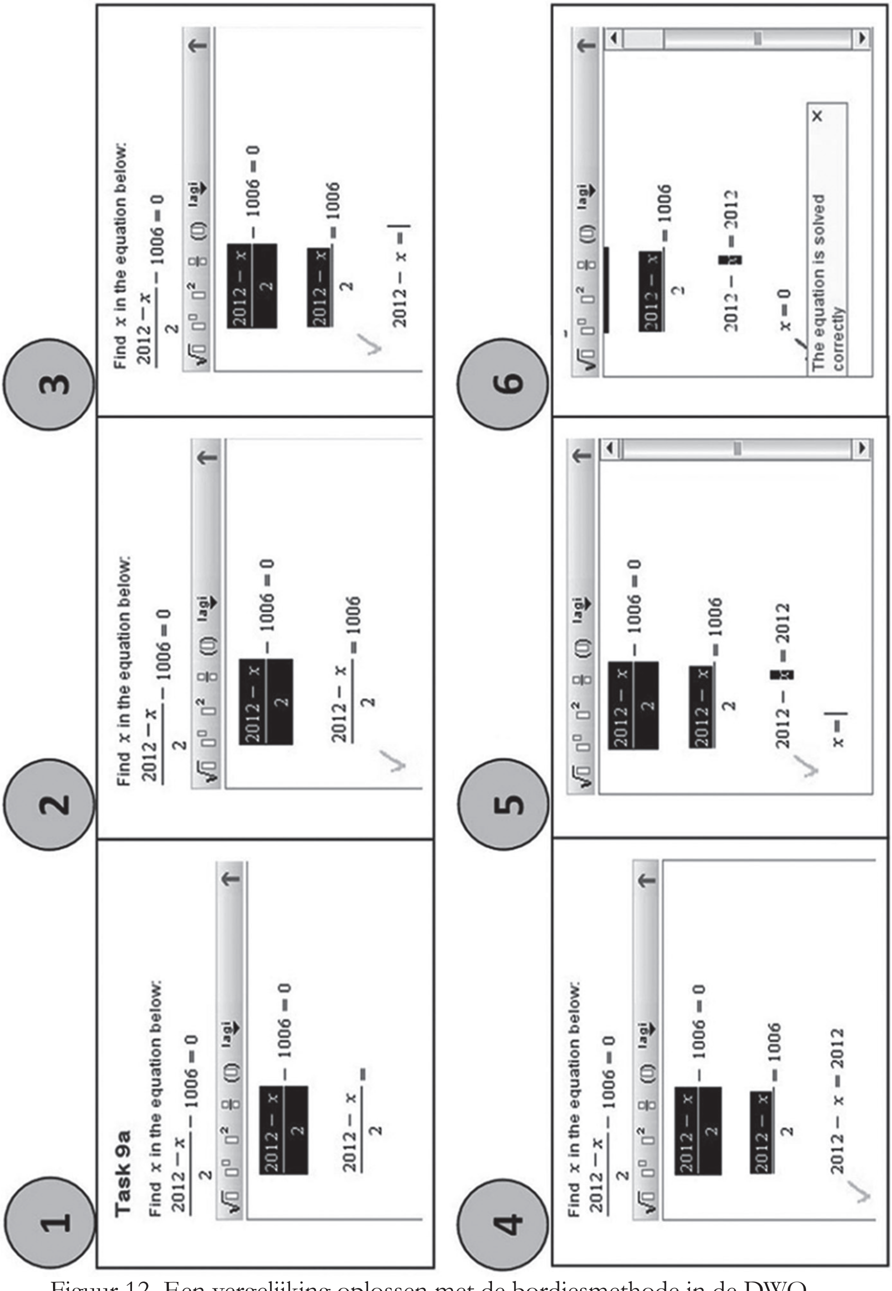
Als we geen algemene uitspraken kunnen doen over het effect van ICT op de wiskundeprestaties van leerlingen, wat maakt dan dat het wel of niet werkt? Een eerste bepalende factor is hoe goed de mogelijkheden en onmogelijkheden van de ICT aansluiten bij het bij een opgave benodigde wiskundige denken; de tweede factor is in hoeverre de docent in staat is deze match in de les uit te buiten. Bij een verdere uitwerking hiervan komt een tweetal theoretische noties van pas, namelijk instrumentele genese en instrumentele orkestratie. Maar laten we eerst twee voorbeelden bekijken.

In Figuur 12 is afgebeeld hoe een leerling het applet "Vergelijkingen met bordjes"[7] gebruikt om een vergelijking stap voor stap op te lossen volgens de zogeheten bordjesmethode. Om te beginnen selecteert de leerling met de muis een expressie binnen de vergelijking. Deze expressie verschijnt op de volgende regel, gevolgd door het = teken (zie scherm 1). Vervolgens typt de leerling de waarde van de expressie in, waardoor een nieuwe, eenvoudiger vergelijking ontstaat. Na een druk op de ENTER-toets verschijnt een vinkje om aan te geven dat de waarde correct is (scherm 2). Dit proces herhaalt zich tot een vergelijking van de vorm $x = \ldots$ ontstaat, waarna het applet aangeeft dat de vergelijking is opgelost.

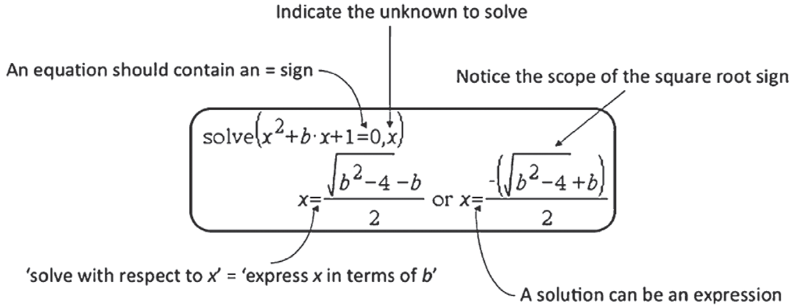
De resultaten van het onderzoek van Jupri, Drijvers en Van den Heuvel-Panhuizen (2014) suggereren dat deze aanpak werkt, in de zin dat leerlingen ervan leren om vergelijkingen op te lossen. Uit de didactiek van de algebra is bekend dat er twee zaken lastig zijn voor leerlingen in de toepassing van de bordjesmethode. Ten eerste moet de leerling in staat zijn om een goede expressie te selecteren. Dat vraagt om wat Arcavi (1994) *symbol sense* noemt, het vermogen om binnen een complexer geheel geschikte deelexpressies te herkennen. Vervolgens is de vraag welke waarde de gekozen deelexpressie heeft, een kwestie van globale substitutie (Gravemeijer, 1990). Met elk van deze twee denkstappen correspondeert een techniek binnen het applet, namelijk het *highlighten* van een expressie, respectievelijk het toekennen van een waarde daaraan. Er is dus een nauw verband tussen denken en doen, tussen verstandig kijken naar de vergelijking en met de hand de muis bewegen, tussen inzicht in de wiskunde die aan de orde is en techniek om het applet te gebruiken. De kennis uit de didactiek van de algebra rond *symbol sense* en globale substitutie hebben richting gegeven aan het ontwerp, waardoor dit samenspel van inzicht en techniek als het ware in het applet is "ingebakken".

Het tweede, wat complexere voorbeeld betreft het oplossen van een geparametriseerde kwadratische vergelijking met computeralgebra. Dat lijkt eenvoudig een kwestie van het intypen van het *solve* commando, maar leerlingen van klas 3 en 4 vwo blijken hiermee grote problemen te

7 Het applet is ontworpen door Peter Boon en is te vinden op www.fisme.uu.nl/dwo



Figuur 12. Een vergelijking oplossen met de bordjesmethode in de DWO (Jupri, Drijvers, & Van den Heuvel-Panhuizen, 2014).



Figuur 13. Schematische weergave van moeilijkheden bij het gebruik van het solve commando (Drijvers, Godino, Font, & Trouche, 2013)

hebben (Drijvers, Godino, Font, & Trouche, 2013). Zoals weergegeven in Figuur 13 vraagt het verstandig gebruik van *solve* in dit geval om een ruimere interpretatie van oplossen en oplossing: oplossen betekent hier dat x in b moet worden uitgedrukt; de oplossing is dan geen getal, maar een expressie. Omdat leerlingen niet gewend zijn aan vergelijkingen met meerdere variabelen, vergeten ze om de onbekende te specificeren en realiseren ze zich niet dat je een vergelijking *naar* een onbekende oplost. Verder zien sommige leerlingen geen verschil tussen een expressie en een vergelijking, waardoor ze de "= 0" vergeten.

De interpretatie van het antwoord, ten slotte, doet een beroep op inzicht in de reikwijdte van het wortelteken. Succesvol gebruik van het *solve* commando vraagt dus weer een samenspel tussen inzicht in de algebra en technische vaardigheid, in dit geval syntactische kennis. De twee gaan hand in hand, omdat de syntax van *solve* inhoudelijke achtergronden heeft en omdat algebraïsch inzicht deze syntax begrijpelijker maakt. Weer kunnen we technische moeilijkheden van leerlingen koppelen aan vakinhoudelijke moeilijkheden die bekend zijn vanuit de didactiek van de algebra. Het aardige is, dat de technische moeilijkheden waarmee leerlingen geconfronteerd worden de behoefte aan vakinhoudelijke inzichten kunnen oproepen.

Algemeen gesproken is er bij het gebruik van een ICT bij wiskunde sprake van een subtiel samenspel, een wisselwerking tussen enerzijds de technieken die je toepast en waartoe de ICT uitnodigt, en anderzijds de wiskundige kennis, het wiskundig denken van waaruit de leerling aan dit gebruik sturing geeft. De mens-machine interactie hangt sterk samen met de wiskundige inzichten van de leerling en daarin ligt ook juist de pedagogische potentie van het medium. Een theorie die recht doet aan dit samenspel is de theorie van instrumentele genese[8] (Artigue, 2002; Trouche, 2004). In deze theorie is een instrument een psychologisch construct, waarin een betekenisvolle relatie bestaat tussen een (deel van een) ICT-omgeving, ook wel artefact genoemd, de leerling, en de wiskundige taak die moet worden uitgevoerd. Instrumentele genese, zeg maar instrumentwording, komt er op neer dat de leerling mentale schema's ontwikkelt voor het gebruik van de ICT voor het uitvoeren van dergelijke taken. Zo'n schema bevat technische en wiskundige elementen. Cruciaal is, dat deze met elkaar in lijn zijn en elkaar zo versterken. Een criterium voor wat werkt met ICT in de wiskundeles is dan ook dat de handelingen die de leerling met de ICT uitvoert sporen met de wiskundige begrippen en methoden die de basis van deze handelingen vormen. Een goed voorbeeld hiervan is het technisch selecteren van een expressie met de muis en het inzicht wat een geschikte expressie daarvoor is in Figuur 12. Of het inzicht dat een vergelijking met meer variabelen naar verschillende onbekenden kan worden opgelost, dus dat je in de solve techniek de onbekende moet expliciteren in Figuur 13. Daarnaast zullen de ICT-technieken ook moeten sporen met de technieken die leerlingen met pen en papier gebruiken (Kieran & Drijvers, 2006).

De instrumentele genese van de leerling is dus een proces dat plaatsvindt tijdens het werken met ICT aan een bepaald type taken. Dat is een proces waarin van alles mis kan gaan en dat vaak de nodige tijd kost. Hierbij is de rol van de docent van belang: als de docent zich goed bewust is van de mogelijkheden en beperkingen van de ICT en van de samenhang tussen de ICT-technieken en de beoogde wiskundige inzichten, dan kan hij dit proces op de juiste manier begeleiden. Waar docenten bij ICT-gebruik nog wel eens een stapje terug doen in de veronderstelling dat de ICT de sturing van het leren overneemt, is het juist van groot belang dat een docent de vinger aan de pols houdt tijdens de instrumentele genese. Hiervoor wordt, om de muzikale metafoor voort te zetten, de term instrumentele orkestratie gebruikt

8 Het woord 'instrumenteel' heeft hier een andere betekenis dan in de eerdergenoemde tegenstelling relationeel – instrumenteel zoals gebruikt door Skemp (1976).

(Trouche, 2004). Bij instrumentele orkestratie gaat het erom dat de docent middelen inzet (werkvormen, leerarrangementen) die de instrumentele genese bevorderen. Daarbij moeten we ons de docent overigens niet voorstellen als een autoritaire dirigent van een symfonieorkest, maar eerder als een meespelende *jazz band leader* (Drijvers & Trouche, 2008; Trouche & Drijvers, 2010). Uit eigen onderzoek blijkt dat het van docenten een professionele ontwikkeling vraagt om dergelijke instrumentele orkestratie vorm te geven en dat het repertoire aan orkestraties zich enerzijds in de loop van de tijd uitbreidt en anderzijds de visie van de docent op onderwijs reflecteert (Drijvers, Doorman, Boon, Reed, & Gravemeijer, 2010; Drijvers, Tacoma, Besamusca, Doorman, & Boon, 2013).

Samengevat zien we dat ICT werkt in de wiskundeles als ten eerste het beoogde wiskundige denken nauw samenhangt met de technische mogelijkheden en onmogelijkheden van de ICT. Onderzoek van deze samenhang vraagt om een vakinhoudelijke, vakdidactische en technische analyse. Ten tweede is van belang dat de docent in staat is het leerproces rond het ICT-gebruik en de bijkomende instrumentele genese te orkestreren. Ik zie het als de taak van het Freudenthal Instituut, en als die van mijzelf, om de waarde van ICT in het wiskundeonderwijs vanuit vakinhoudelijk en vakdidactisch perspectief te onderzoeken en te benutten.

Blended learning en online onderwijs

Online onderwijs wordt op steeds grotere schaal aangeboden en gevolgd. Sinds 2008 mogen met name de zogeheten *massive open online courses* of MOOCs zich in een toenemende populariteit verheugen: midden 2012 claimde Coursera, een verspreider van dergelijke cursussen, al 1.4 miljoen registraties (Daniel & Uvalić-Trumbić, 2014). Deze MOOCs – waarbinnen ook varianten worden onderscheiden met vergelijkbare afkortingen – richten zich vooral op het hoger onderwijs en worden door universiteiten ontwikkeld en aangeboden. Voor het vakgebied didactiek van de wiskunde is er een aantal interessante MOOCs beschikbaar, zoals de cursussen *How to learn math*[9] en *Mathematical*

9 https://lagunita.stanford.edu/courses/Education/EDUC115-S/Spring2014/about

Thinking[10] van Stanford University en *Enseigner et former avec le numérique en mathématiques*[11] van ENS Lyon.

Deze opkomst van MOOCs roept een aantal vragen op. Vragen naar het business model, naar de accreditatie, maar ook naar de kwaliteit. Een recent onderzoek van Margaryan, Bianco en Littlejohn (2015) prijst de organisatie en presentatie van veel MOOCs maar is kritisch over de kwaliteit van het ontwerp, die vermoedelijk samenhangt met de vakdidactische uitwerking:

> We found that the majority of MOOCs scored poorly on most instructional design principles. However, most MOOCs scored highly on organisation and presentation of course material. The results indicate that although most MOOCs are well-packaged, their instructional design quality is low. (Margaryan, Bianco, & Littlejohn, 2015, p. 77)

Kennelijk is hier nog werk aan de winkel. Tegelijkertijd zijn er ook succesverhalen. Zo meldt Hoar (2014) dat een cursus gericht op de voorkennis voor wiskunde op collegeniveau zeer succesvol was, ongeacht de leeftijd, achtergrond en motivatie van de deelnemers. Toch is het beeld dat de effectiviteit van MOOCs nog nader onderzocht moet worden.

Omdat de onderwijsvormen van MOOCs wat eenzijdig zijn en interactie en persoonlijk contact hierin veelal de zwakke schakels zijn, staat een combinatie van traditioneel en online onderwijs sterk in de belangstelling. Hiervoor wordt de term *blended learning* gebruikt. Hoewel voor *blended learning* verschillende omschrijvingen bestaan (Friesen, 2012), geeft het volgende een goed beeld:

> In its basic and simplest definition, blended learning is an instructional methodology, a teaching and learning approach that combines face-to-face classroom methods with computer mediated activities to deliver instruction. The strengths of this instructional approach is its combination of both face to face

10 https://www.coursera.org/course/maththink

11 https://www.france-universite-numerique-mooc.fr/courses/ENSCachan/20007/Trimestre_3_2014/info

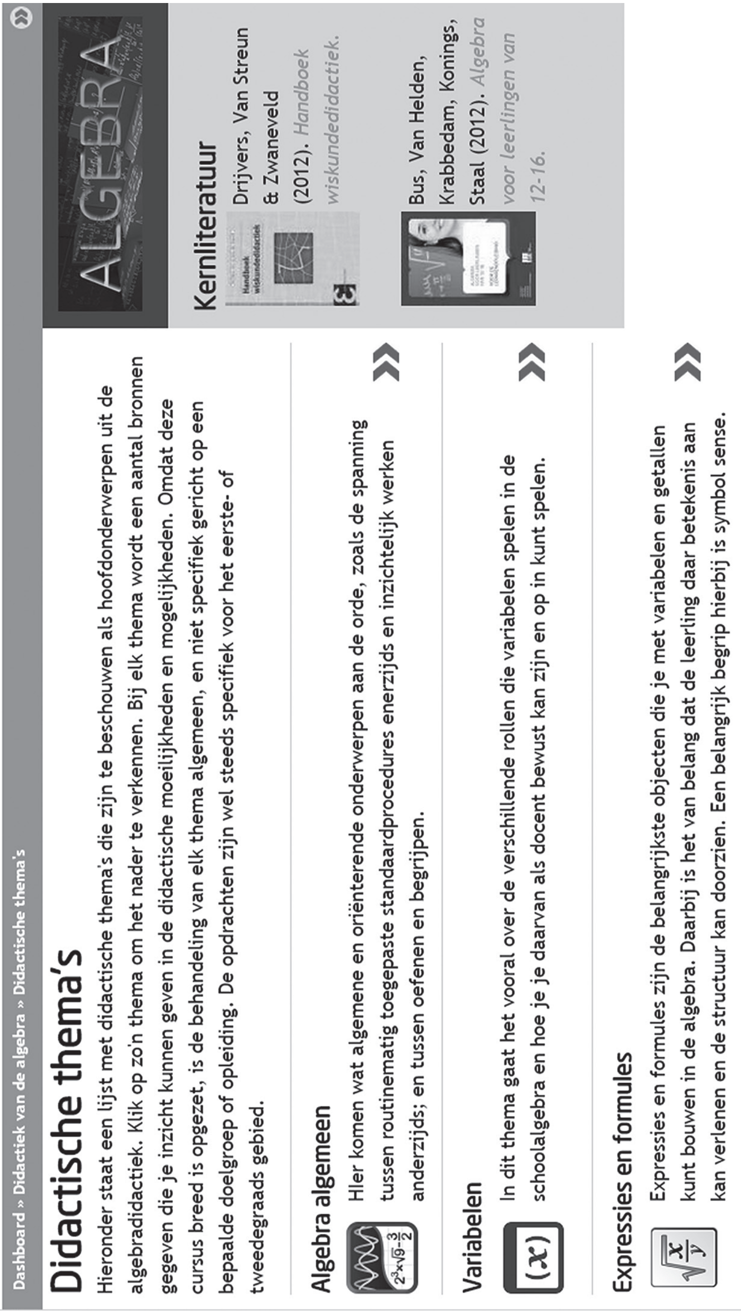
and online teaching methods into one integrated instructional approach.[12]

Interessant aan zowel MOOCs als *blended learning* is dat ze het repertoire aan mogelijke orkestraties drastisch veranderen. Nieuwe mogelijkheden voor onderwijsvormen en (virtuele) samenwerking ontstaan. Daarnaast stelt de combinatie van digitaal werk en werk met papieren media specifieke eisen aan het proces van instrumentele genese. Immers, het intypen van een formule met een formule-editor is bijvoorbeeld iets anders dan een formule op papier opschrijven. Aandacht voor transfer van technieken en representaties is nodig (Kieran & Drijvers, 2006).

Ook binnen de UU wordt werk gemaakt van blended learning en dat is een goede zaak. Aan twee van dergelijke projecten hoop ik de komende tijd een bijdrage te leveren. Het eerste betreft het met USO-middelen gesubsidieerde project “Een innovatief remediërend digitaal leerarrangement voor statistiek”, dat onder leiding van prof. Jeuring van start is gegaan. Het behelst de ontwikkeling van blended leerarrangementen statistiek voor studenten biologie, economie en sociale wetenschappen waarbij de virtuele component gebruik maakt van de Digitale WiskundeOmgeving.

Het tweede initiatief betreft een online module rond vakdidactiek wiskunde, die een dynamische aanvulling vormt op het Handboek Wiskundedidactiek (Drijvers, Van Streun, & Zwaneveld, 2012). In samenwerking met Theo van den Bogaart (HU) wordt een prototype ontwikkeld (zie Figuur 14) voor de didactiek van de algebra. De ontwikkeling van dergelijk online onderwijsmateriaal is een manier om landelijke samenwerking en kwaliteitsverhoging van eerste- en tweedegraads lerarenopleidingen gestalte te geven. Op deze manieren hoop ik bij te dragen aan eigentijds en kwalitatief hoogstaand vakinhoudelijk en vakdidactisch onderwijs op deze universiteit.

12 http://www.educatorstechnology.com/2014/04/the-four-important-models-of-blended.html



Figuur 14. Schermafdruk van een pagina uit de prototypische module "Didactiek van de algebra"

ICT bij het toetsen van wiskunde

Een goede toets is een afspiegeling van het onderwijs dat daaraan vooraf ging. Dat geldt zowel voor het aspect van wiskundig denken, als ook voor het gebruik van ICT. Als ICT in het wiskundeonderwijs een plaats heeft, dan verdient het die ook bij wiskundetoetsen. Het is vanuit deze optiek dat leerlingen van havo en vwo bij het centraal examen sinds de invoering van de nieuwe tweede fase in 1999 een grafische rekenmachine kunnen gebruiken, ook al is dit soms onderwerp van verhitte debatten. Het aandeel van het GR-gebruik is bij de examens wiskunde B vrij klein en het vertoont een dalende trend. Bij de examens wiskunde A en wiskunde C is de rol van de GR groter, omdat de nadruk daar ligt op het gebruiken van wiskunde en in mindere mate op de procedurele vaardigheden. Het voordeel van het gebruik van de GR is dat ook situaties aan de orde kunnen komen waarin de leerling de formules niet met pen en papier aan zou kunnen, en waarin een numerieke oplossing volstaat. De kritiek dat de procedurele vaardigheden niet meer kunnen worden getoetst door de aanwezigheid van de GR is ondervangen door het gebruik van specifieke formuleringen om exacte antwoorden af te dwingen (Drijvers & Tjon Soei Sjoe, 2013) en door de technische beperking van de mogelijkheden van de grafische rekenmachine met een zogeheten examenstand (CvTE, 2015b).

Overigens gaat men in sommige andere landen duidelijk verder met het gebruik van ICT bij het eindexamen. In Frankrijk kunnen leerlingen computeralgebra gebruiken bij het baccalauréat. In enkele Scandinavische landen en in Australië bestaat het examen uit twee delen. Bij het eerste deel wordt geen ICT gebruikt, terwijl de kandidaten tijdens het tweede deel toegang hebben tot computeralgebrasystemen en software voor meetkunde en statistiek.

Behalve ICT-middelen bij min of meer conventionele toetsing met pen en papier zijn ook geheel digitale toetsen in opkomst, die via de computer worden afgenomen. Voorbeelden van dergelijke toetsen in eigen land zijn de rekentoets VO, de digitale eindexamens wiskunde VMBO en de diagnostische tussentijdse toets. Voor de eindtoets basisonderwijs kunnen scholen kiezen uit een digitale of papieren variant. In principe kent digitale toetsing een aantal voordelen: als een grote bank met items wordt gebruikt, dan zijn afnamemomenten flexibel. Adaptieve toetsing, waarbij de toetsopgaven worden aangepast aan het niveau van de leerling, is mogelijk. Daarnaast kan de beoordeling sneller en objectiever zijn en kan er in het geval van formatieve toetsing onmiddellijke feedback worden gegeven.

De praktijk van de digitale toetsing van wiskunde is echter nog weerbarstig. Om uit te stijgen boven het niveau van meerkeuzevragen en de leerling een zekere rijkdom aan invoermogelijkheden te geven, zal een toetsomgeving voor wiskunde moeten beschikken over wiskundig gereedschap zoals een formule-editor, een grafiekentooI en een meetkundeomgeving (Fife, 2011). Voor een intelligente beoordeling van de responsen van leerlingen is een wiskundig expertsysteem op de achtergrond, zoals een computeralgebrasysteem, een voorwaarde (Sangwin, 2013). De aansturing daarvan is een subtiele kwestie. In het algemeen zullen we het geen probleem vinden als een leerling schrijft:

$$3 + 2x \text{ in plaats van } 2x + 3$$

Minder tevreden zijn we in sommige gevallen als het antwoord is:

$$1 + 1 + 1 + 2x \text{ in plaats van } 2x + 3$$

De automatische beoordeling van formules, zonder dat de toetsontwerper zelf met alle mogelijke varianten rekening hoeft te houden, is een van de uitdagingen van het maken van een geschikte toetsomgeving voor wiskunde. Daarnaast vraagt adequate feedback op het werk van leerlingen om een leerlingmodel dat in staat is om nauwkeurig te analyseren welke aanpak de leerling volgt, welke fout daarbij wordt gemaakt en welke hint daarbij moet worden gegeven of welke deelscore daaraan moet worden toegekend (Heeren & Jeuring, 2014). Hoewel veel van de hier genoemde componenten beschikbaar zijn en zich verder ontwikkelen, is het ideale systeem voor digitale toetsing momenteel nog niet beschikbaar.

Zo lang dit het geval is, kan het geen kwaad om kritisch te zijn over digitale toetsing. Hoewel ik ervan overtuigd ben dat dit op de langere termijn de weg is die we zullen inslaan, is op korte termijn het gevaar dat de technologische beperkingen de kwaliteit van de toetsen beperken. Om te voorkomen dat leerlingen hiervan de dupe worden, kan het in zulke gevallen verstandig zijn nog even vast te houden aan de traditionele toetsvormen.

Het overigens niet ondenkbaar dat het hierboven gemaakte onderscheid tussen traditioneel toetsen met gebruik van ICT-hulpmiddelen zoals de grafische rekenmachine enerzijds en geheel digitale toetsing anderzijds zal vervagen. Het CvTE stelde onlangs voor deze mogelijkheid nader te gaan onderzoeken voor de centrale examens wiskunde van havo en vwo:

> CvTE gaat voor de langere termijn de mogelijkheden onderzoeken van digitale toetsing of, als tussenscenario, een examen waarbij gebruik gemaakt kan worden van digitale hulpmiddelen zoals een virtuele grafische rekenmachine of Geogebra. (CvTE, 2015b).

Om goede digitale toetsing van wiskunde mogelijk te maken, zal er dus allereerst gewerkt moeten worden aan een toetsomgeving met volwassen mogelijkheden voor het gebruik van wiskundig gereedschap bij het ontwerpen, maken en beoordelen van de toetsen. Dit zal veel menskracht en geduld vragen. Ten tweede is het van belang dat er consensus ontstaat over de doelen van het wiskundeonderwijs die getoetst moeten worden en daarbinnen over de verhouding tussen procedurele vaardigheden en wiskundig denken.

Tot slot

Samengevat heb ik er in deze rede allereerst voor gepleit om wiskundig denken centraal te stellen in het wiskundeonderwijs. Het is de kern van de wiskunde en de belangrijkste waarde van wiskundeonderwijs voor leerlingen. Er moet meer worden nagedacht in de wiskundeles! Ik heb een drietal kernaspecten van wiskundig denken benoemd en door middel van voorbeelden aangegeven op welke manier onderwijs dat zich hierop richt gestalte kan krijgen. Toch is een sterkere theoretische en praktische verankering nog nodig om deze ontwikkeling tot een succes te maken.

Vervolgens ben ik ingegaan op de rol van ICT in het wiskundeonderwijs. Niet alle bevlogen en hooggespannen verwachtingen zijn tot dusver werkelijkheid geworden. We moeten onder ogen zien dat ICT geen wondermiddel is en dat het benutten van de potentie ervan vraagt om diepe doordenking van de specifieke vakdidactische achtergronden van de leerling-machine-interactie, het type activiteiten dat aan de orde is en de manier waarop dit in de klas kan worden vormgegeven. Als dat gebeurt, kan ICT ook voor het bevorderen van wiskundig denken een uitstekend hulpmiddel zijn.

In de realisatie van beide punten, wiskundig denken en ICT-gebruik, spelen wiskundedocenten een belangrijke rol. Daarbij wordt veel gevraagd van hun vakinhoudelijke en vakdidactische kennis. Daarom is zowel de initiële als de *in-service* lerarenopleiding cruciaal. ICT kan hierbij niet alleen als onderwerp van scholing functioneren; het kan tevens een vehikel zijn om de opleiding op een eigentijdse en interactieve manier vorm te geven. Van de landelijke samenwerking, die bij het opzetten van een dergelijke virtuele opleiding gewenst is, kan een kwaliteitsimpuls uitgaan.

Een en ander brengt mij op de agenda van mijn leerstoel voor de komende jaren. Een eerste punt op deze agenda is het verder uitwerken van het idee van wiskundig denken in zowel theoretische als praktische zin. Het spreekt hierbij vanzelf dat docenten, lerarenopleiders en onderzoekers de handen ineen moeten slaan om een inbedding in de praktijk en in de opleiding te combineren met een onderzoeksmatige onderbouwing. Dat kan op een generiek niveau gebeuren, maar dient ook te worden gespecificeerd voor verschillende deelgebieden. Het onderzoek van Peter Kop naar de algebraïsche expertise rond formules en grafieken is een voorbeeld van zo'n uitwerking voor algebra.

Een tweede onderwerp is het gebruik van ICT in het wiskundeonderwijs. Er moeten wegen worden gevonden om de mogelijkheden van ICT beter te benutten, we moeten beter weten wat werkt en waarom. Ook hier gaat het weer om zowel theoretische kennis als om *good practices*, die in interactie tussen wetenschap en praktijk tot stand zullen moeten komen. Dit betreft niet alleen de praktijk van het voortgezet onderwijs, maar ook die van het hoger onderwijs. Ook daar is er behoefte aan domeinspecifieke uitwerking, want het is niet vanzelfsprekend dat ICT in het statistiekonderwijs van de UU op basis van dezelfde principes wordt ingericht als het meetkundeonderwijs in het VO met software voor dynamische meetkunde. Specifiek voor de lerarenopleiding streef ik naar een verdere uitbouw van *blended* modules vakdidactiek wiskunde, die in samenwerking met de verschillende opleidingen in Nederland en wellicht ook daarbuiten tot stand kunnen komen. Daarnaast zal digitale toetsing een punt van aandacht zijn, waarin de samenwerking tussen de UU en Cito verder gestalte kan krijgen.

Ten derde nog een punt van algemenere aard. Zoals blijkt uit een recent verschenen rapport voor Platform Wiskunde Nederland staat het wiskundig-didactisch onderzoek in Nederland er niet goed voor (Verhoef, Drijvers, Bakker, & Konings, 2014). Wat het niet beter maakt, is dat de sfeer in de wiskunde- en wiskundeonderwijscommunity in dit kleine land zich soms meer kenmerkt door animositeit dan door synergie, wat ons imago en onze zaak naar de buitenwereld toe geen goed doet. Mijn ambitie is dan ook dat mijn leerstoel fungeert als centraal knooppunt van kennis, samenwerking en uitwisseling op het gebied van vakdidactiek wiskunde, als bindend element dat bruggen slaat tussen de verschillende gremia die de zaak van goed wiskundeonderwijs aan het hart gaat. We zijn te klein om vele eilandjes in stand te houden en ik zal dan ook zoeken naar vormen van landelijke samenwerking voor de bundeling en disseminatie van wiskundig-didactisch onderzoek.

Ik rond af met een woord van dank. Allereerst dank ik het College van Bestuur van de Universiteit Utrecht, het bestuur van de Faculteit Bètawetenschappen en het Departement Wiskunde voor mijn benoeming als gewoon hoogleraar in de didactiek van de wiskunde en het in mij gestelde vertrouwen. Terugkijkend op de voorgeschiedenis van deze benoeming dank ik de begeleiders van mijn master thesis – toen nog doctoraalscriptie geheten – Arnoud van Rooij en Louis Maassen. Jaren later heb ik veel geleerd van mijn promotoren Koeno Gravemeijer en Jan de Lange. Mijn collega's van het Freudenthal Instituut – te veel om op te noemen – vormden en vormen nog steeds een inspirerende omgeving, waarin naast kwaliteit ook gedrevenheid een grote plaats heeft. Mijn collega's bij Cito vormen hierop een interessante en prettige aanvulling; veelbelovende dwarsverbanden tussen mijn beide werkkringen tekenen zich af. Uit mijn internationale netwerk wil ik met name Carolyn Kieran en Luc Trouche bedanken, niet alleen voor hun gastvrijheid in Montréal respectievelijk Lyon, maar ook voor hun inhoudelijke input. Ten slotte natuurlijk een woord van dank voor Else en onze zoons Jefte en Manu. Ze hebben me aan de keukentafel scherp gehouden en met de benen op de grond. Else, voor je grote vertrouwen met de ideale mix van enerzijds meedenken en steunen en anderzijds ruimte en vrijheid geven: dankjewel!

Ik heb gezegd.

Referenties

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics,14*(3), 24–35. http://flm.educ.ualberta.ca/index.php?do=extras&lang=en.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*, 245–274.

Bokhove, C., & Drijvers, P. (2012). Effects of a digital intervention on the development of algebraic expertise. *Computers & Education, 58*(1), 197–208.

Boon, P. B. J. (2004). WELP: letterrekenen met applets. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs, 23*, 22–27.

Boon, P. B. J., & Tacoma, S. G. (2011). Ontwikkelen van digitaal lesmateriaal voor wiskunde. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs, 31*, 20–24.

Cheung, A. C. K., & Slavin, R. E. (2013). The effectiveness of educational technology applications for enhancing mathematics achievement in K-12 classrooms: A meta-analysis. Educational Research Review, 9, 88–113.

College voor Toetsen en Examens (2015a). *Wiskunde B VWO. Syllabus Centraal Examen 2018 (bij het nieuwe examenprogramma)*. Utrecht: CvTE. https://www.examenblad.nl/examenstof/syllabus-2018-wiskunde-b-vwo/2018/f=/syllabus_wiskunde_b_vwo_2018.pdf.

College voor Toetsen en Examens (2015b). *De toekomst van de grafische rekenmachine*. https://www.hetcvte.nl/nieuws/20150306/de_toekomst_van_de_grafische.

Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs (2007). *Rijk aan betekenis. Visie op vernieuwd wiskundeonderwijs*. Utrecht: cTWO. http://www.fi.uu.nl/ctwo/.

Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs (2013). *Denken & doen, wiskunde op havo en vwo per 2015*. Utrecht: cTWO. http://www.fi.uu.nl/ctwo/publicaties/docs/CTWO-Eindrapport.pdf.

Daniel, J., & Uvalić-Trumbić, S. (2014). *Are MOOCs the long-awaited technological revolution in higher education?* Digital Transformations Conference, Montreal, 16th October 2014. https://oerknowledgecloud.org/content/are-moocs-long-awaited-technological-revolution-higher-education.

Devlin, K. (2011). *Mathematics Education for a New Era: Video Games as a Medium for Learning*. Boca Raton, FLA: Taylor & Francis.

Doorman, L. M., Drijvers, P., & Kindt, M. (1994). *De grafische rekenmachine in het wiskundeonderwijs*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1996). On different facets of mathematical thinking. In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), *The Nature of Mathematical Thinking* (pp. 253–284). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Drijvers, P. (2000). Studenten met een grafische rekenmachine: wat kunnen we van ze verwachten? *Nieuw Archief voor Wiskunde, 5*/1(4), 399–405.

Drijvers, P. (2006). Context, abstractie en vaardigheid in schoolalgebra. *Nieuw Archief voor Wiskunde, 5/7*, 198–203.

Drijvers, P. (2012). Wat bedoelen ze toch met... modelleren? *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs, 31*(4), 34–37.

Drijvers, P. (2015). Kernaspecten van wiskundig denken. *Euclides, 90*(5), 4–8.

Drijvers, P. (in druk). Digital technology in mathematics education: a reflective look into the mirror In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 75*(2), 213–234.

Drijvers, P., Doorman, M., Kirschner, P., Hoogveld, B., & Boon, P. (2014). The effect of online tasks for algebra on student achievement in grade 8. *Technology, Knowledge and learning, 19*, 1–18.

Drijvers, P., Godino, J. D., Font, V., & Trouche, L. (2013). One episode, two lenses; A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 23–49.

Drijvers, P., Tacoma, S., Besamusca, A., Doorman, M., & Boon, P. (2013). Digital resources inviting changes in mid-adopting teachers' practices and orchestrations. *ZDM Mathematics Education, 45*, 987–1001.

Drijvers, P., & Tjon Soei Sjoe, K. (2013). (Werk)woorden in de centrale examens wiskunde havo/vwo. *Euclides, 88*(4), 162–164.

Drijvers, P., & Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Vol. 2. Cases and perspectives* (pp. 363–392). Charlotte, NC: Information Age.

Drijvers, P., van Streun, A., & Zwaneveld, B. (Red.), *Handboek Wiskundedidactiek*. Utrecht: Epsilon.

Drijvers, P., & Zwaneveld, B. (2012). ICT in het wiskundeonderwijs. In P. Drijvers, A., van Streun, & B. Zwaneveld (Red.), Handboek Wiskundedidactiek (pp. 265-298). Utrecht: Epsilon.

Fife, J. H. (2011). *Automated scoring of CBAL mathematics tasks with m-rater. Research Memorandum*. Princeton, NJ: ETS. http://www.ets.org/Media/Research/pdf/RM-11-12.pdf.

Friesen, N. (2012). *Defining Blended Learning*. http://learningspaces.org/papers/Defining_Blended_Learning_NF.pdf.

Gravemeijer, K. (1990). Globaal kijken, een kenmerk van algebraïsche deskundigheid. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs, 10*(2), 29–33.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning, 1*, 155–177.

Halmos, P. (1980). The heart of mathematics. *American Mathematical Monthly, 87*, 519-524.

Healy, L., & Sutherland, R. J. (1992). *Exploring Mathematics with Spreadsheets*. New York: Simon & Schuster Education.

Heeren, B., & Jeuring, J. (2014). *Feedback services for stepwise exercises. Technical report UU-CS-2014-005*. Utrecht: Department of Information and Computer Sciences, Utrecht University. http://www.cs.uu.nl/research/techreps/repo/CS-2014/2014-005.pdf.

Heid, M. K. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*, 3–25.

Higgins, S., Xiao, Z., & Katsipataki, M. (2012). *The Impact of Digital Technology on Learning: A Summary for the Education Endowment Foundation*. Report. Durham: Durham University.

Hoar, R. (2014). MOOC *Research Initiative Final Report*. http://www.moocresearch.com/wp-content/uploads/2014/06/C9134_HOAR_MathMOOCResearchReport-NoBud-2.pdf.

Hoyles, C., & Sutherland, R. J. (1989). *Logo Mathematics in the Classroom*. London: Routledge.

Jupri, A., Drijvers, P., & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Student difficulties in solving equations from an operational and a structural perspective. *Mathematics Education, 9*(1), 39–55.

Kieran, C., & Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 11*(2), 205–263.

Kindt, M. (2004). *Positive Algebra. A collection of productive exercises*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Kodde-Buitenhuis, J. W. (in voorbereiding). *Wiskundig denken in de pilot examens van de nieuwe wiskundecurricula havo/vwo.* Intern rapport. Arnhem: Cito.

Laborde, C., & Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*, 165–210.

Lagrange, J.-B., Artigue, M., Laborde, C., & Trouche, L. (2003). Technology and Mathematics Education: a Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation. In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 239–271). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Li, Q., & Ma, X. (2011). A meta-analysis of the effects of computer technology on school students' mathematics learning. *Educational Psychology Review, 22*, 215–243.

Margaryan, A., Bianco, M., & Littlejohn, A. (2015). Instructional quality of Massive Open Online Courses (MOOCs). *Computers & Education, 80*, 77–83.

Mason, J. (1989). Mathematical abstraction as the result of a delicate shift of attention. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 2–8.

National Research Council (1989). *Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education*. Washington, DC: National Academy Press.

Ottevanger, W., Oorschot, F., Spek, W., Boerwinkel, D. J., Eijkelhof, H., de Vries, M., van der Hoeven, M., & Kuiper, W. (2014). *Kennisbasis natuurwetenschappen en technologie voor de onderbouw vo. Een richtinggevend leerplankader*. Enschede: SLO.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*. New York: Basic Books.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.

Pólya, G. (1962). *Mathematical Discovery. On understanding, learning, and teaching problem solving* (Vol. 1). New York – London – Sydney: Wiley & Sons.

Pólya, G. (1963). On learning, teaching, and learning teaching. *The American Mathematical Monthly, 70*(6), 605–619.

Rakes, C. R., Valentine, J. C., McGatha, M. B., & Ronau, R. N. (2010). Methods of instructional improvement in Algebra: A systematic review and meta-analysis. *Review of Educational Research, 80*(3), 372–400.

Rudd, T. (2007). *Interactive whiteboards in the classroom*. Bristol, U.K.: Futurelab. http://archive.futurelab.org.uk/resources/documents/other/whiteboards_report.pdf.

Sangwin, C. (2013). *Computer aided assessment of mathematics*. Oxford, U.K.: Oxford University Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334–370). New York: MacMillan.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1–36.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20–26.

Skemp, R. R. (1986). *The Psychology of Learning Mathematics* (2nd ed.). Harmondsworth, U.K.: Penguin.

Spandaw, J., & Zwaneveld, B. (2012). Modelleren, van werkelijkheid naar wiskunde en weer terug. In P. Drijvers, A. van Streun, & B. Zwaneveld (Red.), *Handboek Wiskundedidactiek* (pp. 235–264). Utrecht: Epsilon.

Tall, D. (1988). *The Nature of Advanced Mathematical Thinking. Discussion paper for the working group on advanced mathematical thinking*. PME-XII, Vezprém, Hungary. https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1988i-nature-of-amt-pme.pdf.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiskobas project*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Trouche, L. (2004). Managing complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*, 281–307.

Trouche, L., & Drijvers, P. (2010). Handheld technology: Flashback into the future. *ZDM Mathematics Education, 42*(7), 667–681.

Van de Giessen, C., & Van Blokland, P. (1999). *VU-Stat voor Windows.*

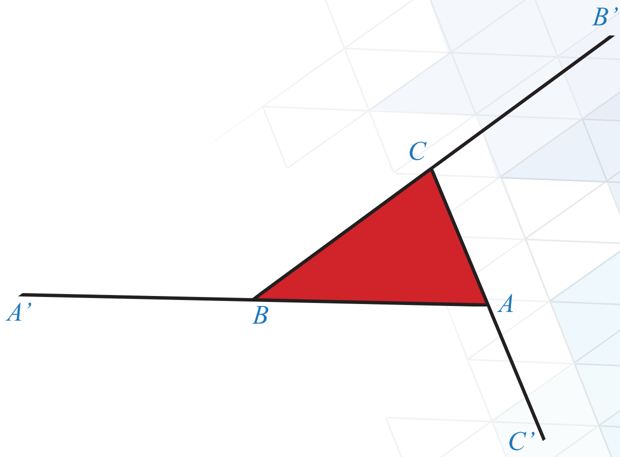
Kennismaken en toepassen. Groningen: Wolters-Noordhoff.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2013). Realistic Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer.

Van Streun, A. (2001). *Het denken bevorderen*. Oratie. Groningen: RUG.

Van Streun, A. (2014). *Onderwijzen en toetsen van wiskundige denkactiviteiten*. Enschede: SLO.

Verhoef, N., Drijvers, P., Bakker, A., & Konings, T. (2014). *Tussen wal en schip: wiskundig-didactisch onderwijsonderzoek in Nederland. Rapport Onderwijsonderzoekscommissie*. Amsterdam: Platform Wiskunde Nederland.



Punt A' is het beeld van A onder spiegeling in B.
Punt B' is het beeld van B onder spiegeling in C.
Punt C', ten slotte, is het beeld van C onder spiegeling in A.
Stel nu dat alleen driehoek $A'B'C'$ is gegeven.
Hoe kun je dan de oorspronkelijke driehoek ABC reconstrueren?