

## BAB 3

### Fungsi Nonlinear

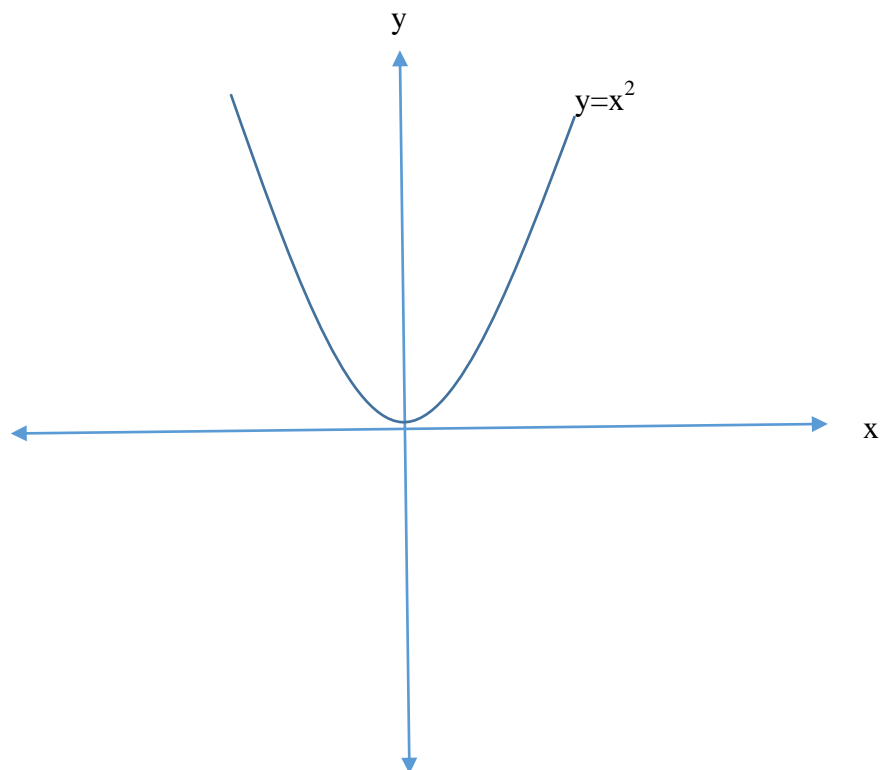
Sebagian dari model ekonomi linear yang ada sesungguhnya merupakan penyederhanaan dari hubungan – hubungan yang non-linear, merupakan linearisasi dari model non-linear.

#### 3.1. Fungsi Kuadrat ( Fungsi Kuadrat )

Fungsi kuadrat merupakan merupakan fungsi polinom berderajat dua bentuk umum persamaan fungsi kuadrat adalah :

$$y = a + bx + cx^2 \text{ atau } y = cx^2 + bx + a \text{ dimana } c \neq 0.$$

Contoh fungsi kuadrat dalam bentuk grafik di gambarkan sebagai berikut :



##### 3.1.1 Penyelesaian Persamaan Kuadrat

Penyelesaian persamaan kuadrat merukan pencarian akar-akar dari persamaan kuadrat.

Contoh : Tentukan penyelesaian fungsi kuadrat berikut

1.  $5x^2 - 80 = 0$
2.  $2q^2 - 85q + 200 = 0$

Penyelesaian

1.  $5x^2 - 80 = 0$

$$x^2 = \frac{80}{5}$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \sqrt{16}$$

$$x = \pm 4$$

2.  $2q^2 - 85q + 200 = 0$

$$(2q - 5)(q - 40) = 0$$

$$q = \frac{5}{2} \text{ atau } q = 40$$

### 3.1.2 Persamaan Simultan Kuadrat

Tentukan titik keseimbangan pasar (equilibrium) dari fungsi permintaan dan penawaran berikut:

$$P = 200q^{-1} \text{ \& } P = 30 + 2q$$

Penyelesaian:

Equilibrium terjadi bila permintaan = penawaran

$$200q^{-1} = 30 + 2q$$

$$\hline : q^{-1}$$

$$200 = 30q + 2q^2$$

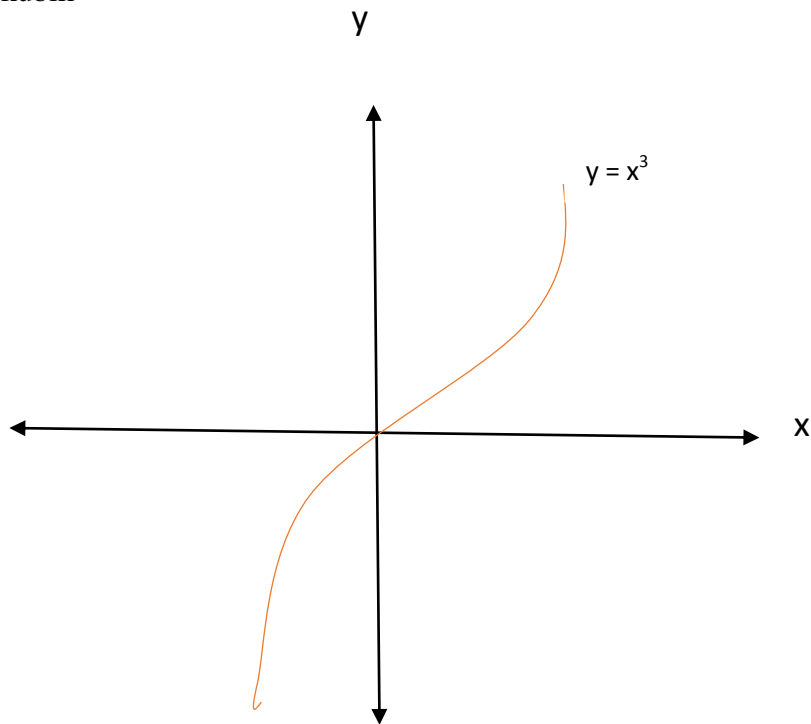
$$0 = 2q^2 + 30q - 200$$

$$0 = (2q-10)(q+20)$$

$$q = \frac{10}{2} = 5 \quad \text{atau } q = -20$$

### 3.2. Fungsi kubik

Fungsi kubik adalah fungsi polinomial berderajat 3. Bentuk umum persamaan fungsi kubik adalah  $y = a + bx + cx^2 + dx^3$  dengan  $d \neq 0$ . Contoh kurva fungsi kubik



Contoh soal

Penerimaan total yang diperoleh sebuah perusahaan ditunjukkan oleh persamaan  $R = -0,1q^2 + 20q$ , sedangkan biaya total yang dikeluarkan  $C = 0,25q^3 - 3q^2 + 7q + 20$ . Hitunglah profit perusahaan jika dihasilkan jika terjual barang sebanyak 10 dan 20 unit.

Penyelesaian

Profit ( $\pi$ ) diperoleh dari

$$\pi = R - C$$

$$\pi = (-0,1q^2 + 20q) - (0,25q^3 - 3q^2 + 7q + 20)$$

$$\pi = -0,25q^3 + 2,9q^2 + 13q - 20$$

sehingga

$$q = 20 \text{ maka } \pi = -0,25(20^3) + 2,9(20^2) + 13(20) - 20 = -600$$

artinya ketika  $q=20$  perusahaan mengalami kerugian.

$$q = 10 \text{ maka } \pi = -0,25(10^3) + 2,9(10^2) + 13(10) - 20 = 150$$

artinya ketika  $q=10$  perusahaan mengalami untung.

### 3.3. Fungsi Eksponensial

Fungsi eksponensial atau eksponensial banyak digunakan untuk mengukur tingkat pertumbuhan (growth rates) pada permasalahan ekonomi seperti tingkat suku bunga, nilai investasi dan pertumbuhan penduduk. Bentuk umumn fungsi eksponensial adalah  $y = A^x$  dengan kostanta dan  $A > 1$ . Sedangkan fungsi eksponensial natural yaitu

$$y = e^x$$

dengan  $e=2,7182818$ .

Fungsi eksponensial juga berkaitan erat dengan logaritma natural, jika fungsi eksponen  $y = e^x$  maka

$$\ln y = \ln e^x$$

$$\ln y = x \ln e$$

$$\ln y = x \log e$$

$$\ln y = x$$

Fungsi eksponensial dapat digunakan untuk menghitung tingkat pertumbuhan penduduk. Rumus yang digunakan untuk menghitung tingkat pertumbuhan peduduk adalah

$$y = Ae^{rt}$$

sehingga

$$A = \frac{y}{e^{rt}}$$

$$A = ye^{-rt}$$

dimana

y= jumlah penduduk yang akan datang

A = penduduk sekarang atau saat ini

e = 2, 7182818

r = annual rate atau tingkat pertumbuhan penduduk tahunan ( % )

t = waktu ( tahun)

#### Contoh Soal

- a. Populasi penduduk pada suatu negara berkembang memiliki tingkat pertumbuhan penduduk sebesar 3% pertahun. Jika diketahui populasi saat ini adalah 4,5 juta, tentukan prediksi jumlah penduduk 15 tahun mendatang.

Penyelesaian

$$y = Ae^{rt}$$

$$y_{15} = 4,5 \cdot e^{0,003 \cdot 15}$$

$$y_{15} = 7,057 (\text{dalam juta})$$

- b. Ramalan pertumbuhan perekonomian pertahun adalah 2,5%. Jika Gross National Product (GNP) atau Produk nasional bruto sebesar \$56, tentukan ramalan GNP 21 bulan mendatang.

Penyelesaian

$$t = 21 \text{ bulan} = \frac{21}{12} = 1,75 \text{ tahun}$$

$$y = Ae^{rt}$$

$$y = 56 \cdot e^{0,025 \cdot 1,75}$$

$$= 58,504 (\text{dalam \$})$$

- c. Seorang manager dari penangkasan hewan liar berniat untuk menumbuhkan populasi hewan liar 10 tahun mendatang menjadi 900

spesies. Berapa jumlah hewan liar yang dibutuhkan saat ini untuk mencapai tujuan manager tersebut. Jika diketahui tingkat pertumbuhan pertahun 8,5%.

$$A = ye^{-rt}$$

$$A = 900 e^{0,085(10)}$$

$$= 384,67 \approx 385 \text{ spesies}$$

Tingkat pertumbuhan (*Rate of Growth*) dapat ditentukan melalui persamaan y dengan menggunakan logaritma natural

$$y = Ae^{rt}$$

$$\frac{y}{A} = e^{rt}$$

$$\ln \frac{y}{A} = \ln e^{rt}$$

$$\ln \frac{y}{A} = rt \ln e$$

$$\ln \frac{y}{A} = rt \log e$$

$$\ln \frac{y}{A} = rt$$

$$\frac{1}{t} \left( \ln \frac{y}{A} \right) = r$$

sehingga dapat ditentukan juga persamaan waktu yaitu

$$t = \frac{1}{r} \left( \ln \frac{y}{A} \right)$$

Contoh soal :

- Dalam waktu 13 tahun populasi penduduk dari suatu negara naik secara kontinu dari 8,5 juta menjadi 11,9 juta. Tentukan tingkat pertumbuhan penduduknya.

Penyelesaian :

$$r = \frac{1}{t} \ln \left( \frac{y}{A} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{15} \ln \left( \frac{11,9}{8,2} \right) \\
&= \frac{1}{15} \ln ( 1,45122) \\
&= 6,62483 \\
&= 2,483\%
\end{aligned}$$

### 3.4. Latihan Soal

1. Tentukan penyelesaian dari persamaan kuadrat berikut  $x^2 - 5x + 6 = 0$ .
2. Diketahui biaya rata-rata produksi dari sebuah produk adalah  $AC = 40x^{-1} + 10x$ .  
x merupakan output. Berakah x agar biaya rata-rata \$40.
3. Biaya total produksi dari PT.  $TC = 6 - 2q + 2q^2$ .  
Ketika  $q > 2$ , apakah TC mencapai \$150?.
4. Populasi penduduk India saat ini berjumlah 32 juta dan terus bertambah pada tingkat pertumbuhan sebesar 3,5%. Berapakah jumlah populasi penduduk India dalam waktu 20 tahun jika tingkat pertumbuhan ini berlanjut?
5. Stok sumber daya R menyusut terus pada tingkat 8,5% setiap tahun. Berapa banyak yang akan tersisa dalam 30 tahun jika stok saat ini 725.000 unit?
6. Seorang ahli stastistik memperkirakan bahwa populasi suatu negara N tumbuh terus menerus dan dapat ditentukan oleh fungsi berikut  
 $N = 3.620.000e^{0,02t}$   
Dimana t adalah jumlah tahun setelah tahun 2000. Beraapa tingkat pertumbuhan populasi? Akankah populasi mencapai 10 juta pada tahun 2050.
7. Dalam ekonomi industri maju, populasi diamati tumbuh dengan stabil dari 50 menjadi 55 juta selama 20 tahun terakhir. Berapa tingkat pertumbuhan pertahunnya.
8. Cadangan mineral M diamati menurun dari 830 juta ton menjadi 675 ton selama 25 tahun terakhir. Dengan asumsi penurunan ini telah berlanjut, hitung tingkat penurunan tahunan dan kemudian prediksi cadangan apa yang akan tersisa dalam 10 tahun mendatang.

9. Dengan asumsi bahwa stok minyak akan terus terkuras pada tingkat yang sama (sebanding dengan jumlah yang tersisa), jumlah minyak yang tersisa diladang minyak (B), diukur dalam barel minyak, telah diperkirakan sebagai

$$B = 2.430.000.000e^{-0,09t}$$

Dimana t adalah jumlah tahun setelah tahun 2000. Berapa proporsi stok minyak yang diekstraksi setiap tahun? Berapa banyak minyak yang akan tetap pada tahun 2020?