BAB 9

DERET TAK HINGGA

9.1 BARISAN TAK HINGGA

Barisan Tak Hingga

Barisan tak hingga adalah fungsi yang domainnya merupakan himpunan bilangan bulat positif dan rangenya merupakan himpunan bilangan real.

Barisan dinotasikan dengan

$$a_1, a_2, \ldots \text{ dengan } a_n = f(n)$$

$$\text{atau } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ atau } \{a_n\}$$

Dalam barisan yang didefinisikan secara rekursif, suku barisan ditentukan oleh suku sebelumnya.

$$a_n = f(a_{n-1})$$

Contoh

1. $a_n = 1 - \frac{1}{n}$
2. $b_n = 1 - (-1)^n \frac{1}{n}$
3. $c_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$
4. $d_n = 0,99$

Apa yang terjadi pada suku barisan jika $n \to \infty$?

Konvergen atau Divergen?

Barisan $\{a_n\}$ **konvergen** ke L jika $\lim_{n \to \infty} a_n = L$.

Definisi

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

jika untuk setiap ε bilangan positif, terdapat N bilangan positif sehingga

$$n \geq N \Longrightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

Barisan yang tidak konvergen ke bilangan hingga manapun disebut **divergen**.

Contoh.

Tunjukan $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ konvergen ke 1.

Sifat Limit Barisan

Misalkan $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ dua barisan konvergen dan k suatu konstanta.

i. $\lim_{n\to\infty} k = k$

ii. $\lim_{n\to\infty} ka_n = k \lim_{n\to\infty} a_n$

iii. $\lim_{n\to\infty} a_n \pm b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$

iv. $\lim_{n\to\infty} a_n . b_n = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n$

v. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ dengan syarat $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$

Beberapa Sifat Penting

Misalkan $a_n = f(n)$.

Jika $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ maka $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Teorema Apit

Misalkan $\{a_n\}$ dan $\{c_n\}$ dua barisan yang konvergen ke L dan $a_n \le b_n \le c_n$ untuk $n \ge K$.

Maka $\{b_n\}$ juga konvergen ke L

Jika $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ maka $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Contoh

1. Tentukan

   a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p}$, dengan p bilangan bulat positif.

   b) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{7n^2+1}$

   c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{e^n}$

   d) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin^3 n}{n}$

2. Misalkan $-1 < r < 1$, tunjukan $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.

   Bagaimana jika $|r| \geq 1$?

Teorema Barisan Monoton

Jika $\{a_n\}$ barisan tak turun dan $a_n \leq U$, untuk $n \geq N$, maka

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \text{ untuk suatu } A \leq U.$$

Jika $\{b_n\}$ barisan tak naik dan $b_n \geq L$, untuk $n \geq M$, maka

$$\lim_{n\to\infty} b_n = B, \text{ untuk suatu } B \geq L.$$

Contoh

Buktikan barisan $\{a_n\}$ dengan $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ konvergen.

9.2 Deret Tak Hingga

Deret Tak Hingga

Deret tak hingga adalah jumlahan dari suku-suku barisan tak hingga.

$$a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Jumlah parsial adalah jumlahan sejumlah berhingga suku-suku barisan tak hingga.

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Suatu deret tak hingga konvergen dengan jumlah S, jika barisan jumlah parsialnya juga konvergen ke S.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Jika barisan jumlah parsial divergen, maka deretnya juga divergen. Suatu deret yang divergen tidak memiliki jumlah.

Deret Geometri

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

a dinamakan suku pertama dan r rasio (pengali)

Jika $|r| < 1$, deret geometri konvergen. Selain itu, deret geometri divergen.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \Leftrightarrow |r| < 1$$

Contoh.

Tentukan nilai deret $\frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \frac{4}{81} + \cdots$

Uji Kedivergenan

HANYA untuk menguji kedivergenan, BUKAN kekonvergenan.

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{divergen}$$

Contoh.

Periksa kekonvergenan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2n^3+2n}$

Deret Harmonik

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Apakah Uji Kedivergenan dapat digunakan?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen

Deret Kolaps

$$\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

Contoh.

Periksa kekonvergenan deret

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

Sifat

Sifat Linear

Jika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ adalah deret yang konvergen dan c konstanta real, maka:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Jika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen dan $c \neq 0$ konstanta real tak nol maka $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ juga divergen.

Pengelompokan Suku-Suku Deret

Bolehkah suku-suku deret dikelompokkan?

Pandang

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots$$

Sifat Deret yang konvergen suku-sukunya dikelompokkan tanpa mengubah jumlahannya.

9.3 Deret Positif: Uji Integral

Uji Jumlah Terbatas

Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ adalah deret dengan suku-suku tak negatif.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen jika dan hanya jika $S_n \leq U$, untuk $n \geq N$.

Contoh

Tunjukkan $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$ konvergen.

Uji Integral

Misalkan f fungsi kontinu, positif, dan tak naik pada selang $[1, \infty)$.

Misalkan $a_k = f(k)$ untuk semua bilangan bulat positif k.

Maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen jika dan hanya jika $\int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergen

Contoh

1. Tentukan kekonvergenan deret $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

2. Deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ diaproksimasi dengan menggunakan 5 suku pertama dari deret. Aproksimasi galat yang terjadi dengan menggunakan integral tak wajar.

Deret-p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$$

Deret-p konvergen jika $p > 1$ dan divergen jika $p \leq 1$.

Contoh

Tentukan kekonvergenan deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0,001}}$.

9.4 Deret Positif: Uji Lainnya

Uji Banding

Misalkan $0 \leq a_n \leq b_n$ untuk $n \geq N$.

i. Jika $\sum b_n$ konvergen maka $\sum a_n$ juga konvergen.

ii. Jika $\sum a_n$ divergen maka $\sum b_n$ juga divergen.

Contoh Periksa kekonvergenan

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n^2-4}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(n+1)}$
3. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)^2}$

Uji Banding Limit

Misalkan $a_n \geq 0, b_n > 0$, dan $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$.

i. Jika $0 < L < \infty$, maka $\sum a_n$ and $\sum b_n$ konvergen atau divergen bersama-sama.

ii. Jika $L = 0$ dan $\sum b_n$ konvergen, maka $\sum a_n$ juga konvergen.

Contoh Periksa kekonvergenan

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n^3-2n^2+11}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+19n}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

Uji Hasil Bagi

Misalkan $\sum a_n$ deret positif dan $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$.

i. Jika $\rho < 1$, maka $\sum a_n$ konvergen.

ii. Jika $\rho > 1$, maka $\sum a_n$ divergen.

iii. Jika $\rho = 1$, maka tidak ada kesimpulan.

Contoh Periksa kekonvergenan deret berikut.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

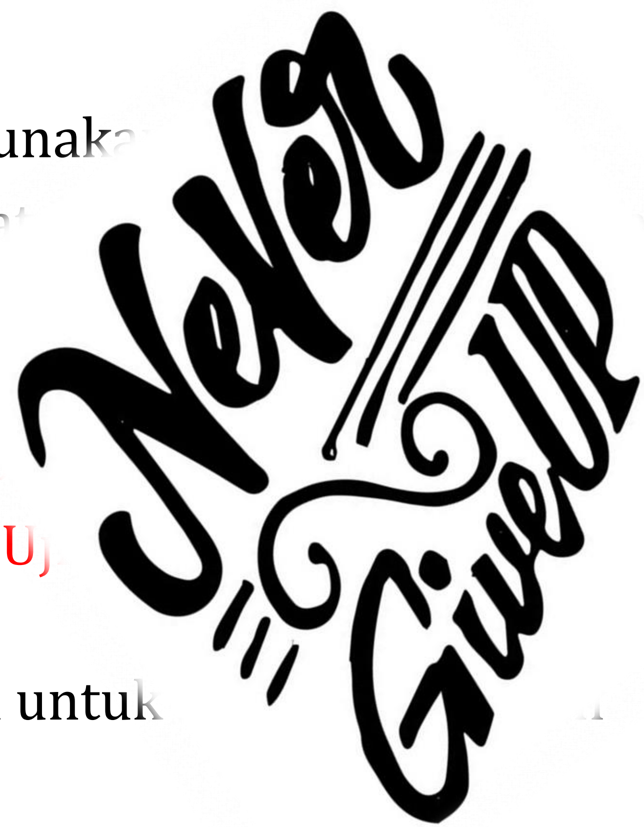
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{100}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Bagaimana Menguji Kekonvergenan Deret Positif?

Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ deret positif.

1. Jika $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen (Uji Ked... genan Deret)
2. Jika a_n memuat $n!$, r^n, atau n^n, gunak...
3. Jika a_n hanya melibatkan pangk... Uji Banding Limit.
4. Jika $\int f(x)dx$ diketahui, di ma... prasyarat Uji Integral, gunakan ...
5. Jika uji-uji di atas gagal, cobalah U... Terbatas.
6. Jika masih gagal, carilah formula untuk... hitung limitnya.



9.5 Deret Ganti Tanda, Kekonvergenan Mutlak dan Bersyarat

Uji Deret Ganti Tanda

Misalkan $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$ deret ganti tanda dengan $a_n > a_{n+1} > 0$.

Jika $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, maka deret tersebut konvergen.

Jika deret tersebut diaproksimasi oleh S_n maka galatnya $\leq a_{n+1}$.

Contoh Periksa kekonvergenan deret berikut.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ (deret harmonik ganti tanda)
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{2^n}$

Uji Kekonvergenan Mutlak

Bagaimana kekonvergenan deret berikut?

$$1+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\frac{1}{36}+\cdots$$

Jika $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konvergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ juga konvergen.

Jika $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konvergen, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ dikatakan konvergen mutlak.

Kekonvergenan Bersyarat

Kekonvergenan TIDAK mengakibatkan kekonvergenan mutlak.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ konvergen, tetapi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen.

Dalam kasus seperti ini, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dikatakan konvergen bersyarat.

Contoh. Tentukan apakah deret berikut konvergen multak, konvergen bersyarat, atau divergen.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{2^n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3+3n}{n^5-4n^2+1}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{n^2}$

Uji Rasio Mutlak

Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ deret (sebarang) dan $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho$.

i. Jika $\rho < 1$, maka $\sum a_n$ konvergen mutlak.

ii. Jika $\rho > 1$, maka $\sum a_n$ divergen.

iii. Jika $\rho = 1$, maka tidak ada kesimpulan.

Contoh. Periksa kekonvergenan deret berikut.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n!}$$

Teorema Penukaran Tempat

Suku-suku dalam deret yang konvergen mutlak boleh ditukar tanpa mengubah kekonvergenan dan jumlahan deret tersebut.

9.6 Deret Pangkat

Deret Pangkat

Deret pangkat dalam x adalah

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Dua pertanyaan:

1. Untuk nilai x berapa saja suatu deret pangkat konvergen?
2. Jika suatu deret pangkat konvergen, berapa jumlahannya?

Contoh.

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + \cdots$$

yang merupakan deret geometri dengan pengali x.

Diketahui bahwa

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + \cdots = \frac{a}{1-x} \Leftrightarrow |x| < 1$$

Himpunan Kekonvergenan

Himpunan kekonvergenan adalah himpunan semua nilai x yang mengakibatkan suatu deret pangkat konvergen.

Contoh. Tentukan himpunan kekonvergenan dari deret berikut.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n}$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$

Himpunan kekonvergenan deret pangkat merupakan salah satu dari:

1. $\{0\}$ (jari-jari kekonvergenan 0).
2. Selang $(-R, R)$ yang dapat ditambah dengan salah satu atau kedua titik ujungnya (jari-jari kekonvergenan R).
3. Himpunan bilangan real (jari-jari kekonvergenan ∞).

Deret Pangkat dalam $(x - a)$

Deret pangkat dalam $(x - a)$ adalah

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots$$

Contoh. Tentukan himpunan dan jari-jari kekonvergenan dari deret berikut.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)^2}$$

9.7 Operasi pada Deret Pangkat

Turunan dan Integral

Misalkan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = S(x)$ untuk x di dalam suatu selang I.

Maka, untuk x di dalam selang I berlaku:

i. $\sum_{n=0}^{\infty} D_x(a_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} =$
$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = S'(x)$$

ii. $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} =$
$$a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \cdots = \int_0^x S(t) dt$$

Contoh

1. Turunkan dan integralkan deret pangkat
$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}, \text{untuk} -1 < x < 1,$$
untuk memperoleh dua deret pangkat baru.

2. Lakukan substitusi $x = -t^2$ pada deret pangkat dari $\frac{1}{1-x}$, kemudian integralkan untuk memperoleh deret pangkat untuk $\tan^{-1} x$.

3. Pandang deret pangkat $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = S(x)$ untuk $x \in \mathbb{R}$. Turunkan untuk memperoleh $S(x)$.

Operasi Aljabar

Dua deret pangkat yang konvergen dapat dijumlahkan dan dikurangkan suku per suku.

Dua deret pangkat yang konvergen dapat dikalikan dan dibagi, seperti pada perkalian dan pembagian polinom.

9.8 Deret Taylor & Maclaurin

Deret Taylor & Maclaurin

Diberikan fungsi f dan bilangan real a. Akan dicari $c_0, c_1, c_2, \cdots$ sehingga:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots$$

Teorema Ketunggalan Taylor

Misalkan fungsi f dapat diturunkan secara terus-menerus, maka fungsi tersebut dapat dinyatakan secara tunggal dalam deret pangkat

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Deret pangkat tersebut dinamakan Deret Taylor dari f di sekitar $x = a$.

Dalam hal $a = 0$ deret dinamakan Deret MacLaurin.

Teorema Taylor

Misalkan f dapat diturunkan terus-menerus pada selang $(a-r, a+r)$. Deret Taylor

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

merepresentasikan $f(x)$ pada selang tersebut tersebut jika dan hanya jika $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$, dengan $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, untuk $c \in (a-r, a+r)$.

Contoh.

1. Tentukan deret Maclaurin dari $f(x)=\sin(x)$ dan tunjukkan hasilnya berlaku untuk semua $x \in R$.
2. Carilah deret Maclaurin untuk $\ln(x\ +\ 1)$, kemudian gunakan 5 suku pertama deret untuk mengaproksimasi $\int_0^1 \ln(x+1)\,dx$.

Beberapa Deret Maclaurin

1. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad -1 < x < 1$
2. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad -1 < x < 1$
3. $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad -1 < x < 1$
4. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$
5. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$
6. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$
7. $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$
8. $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$
9. $(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \cdots \qquad -1 < x < 1$

   dengan $\binom{p}{k} = \frac{p\cdot(p-1)\cdot\cdots\cdot(p-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot k}$

9.9 Aproksimasi Taylor

Aproksimasi Taylor

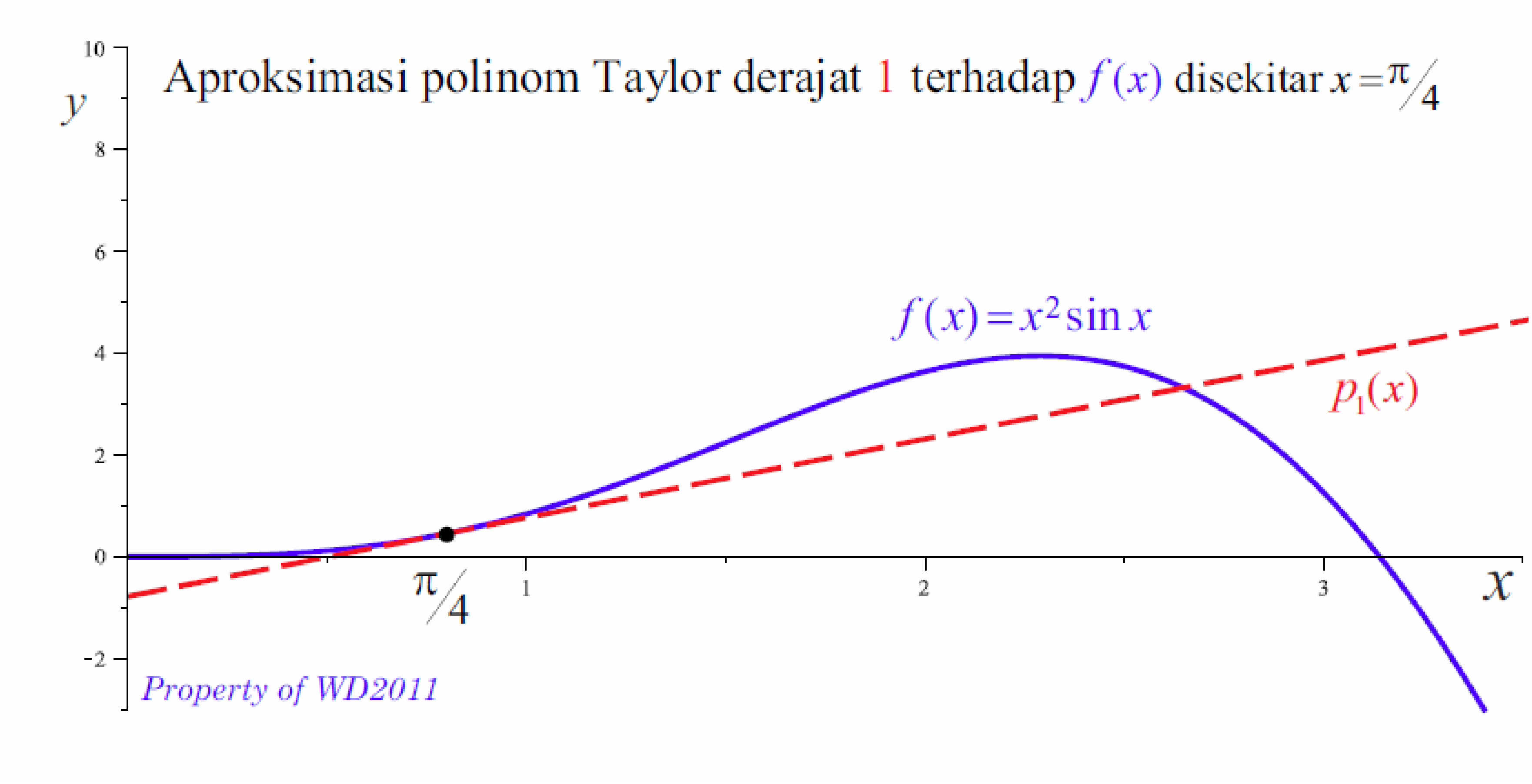
Aproksimasi linear untuk f di sekitar a adalah

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Untuk memperoleh aproksimasi yang lebih baik, digunakan polinom dengan derajat yang lebih tinggi. Aproksimasi ini dinamakan polinom Taylor derajat n di sekitar a.

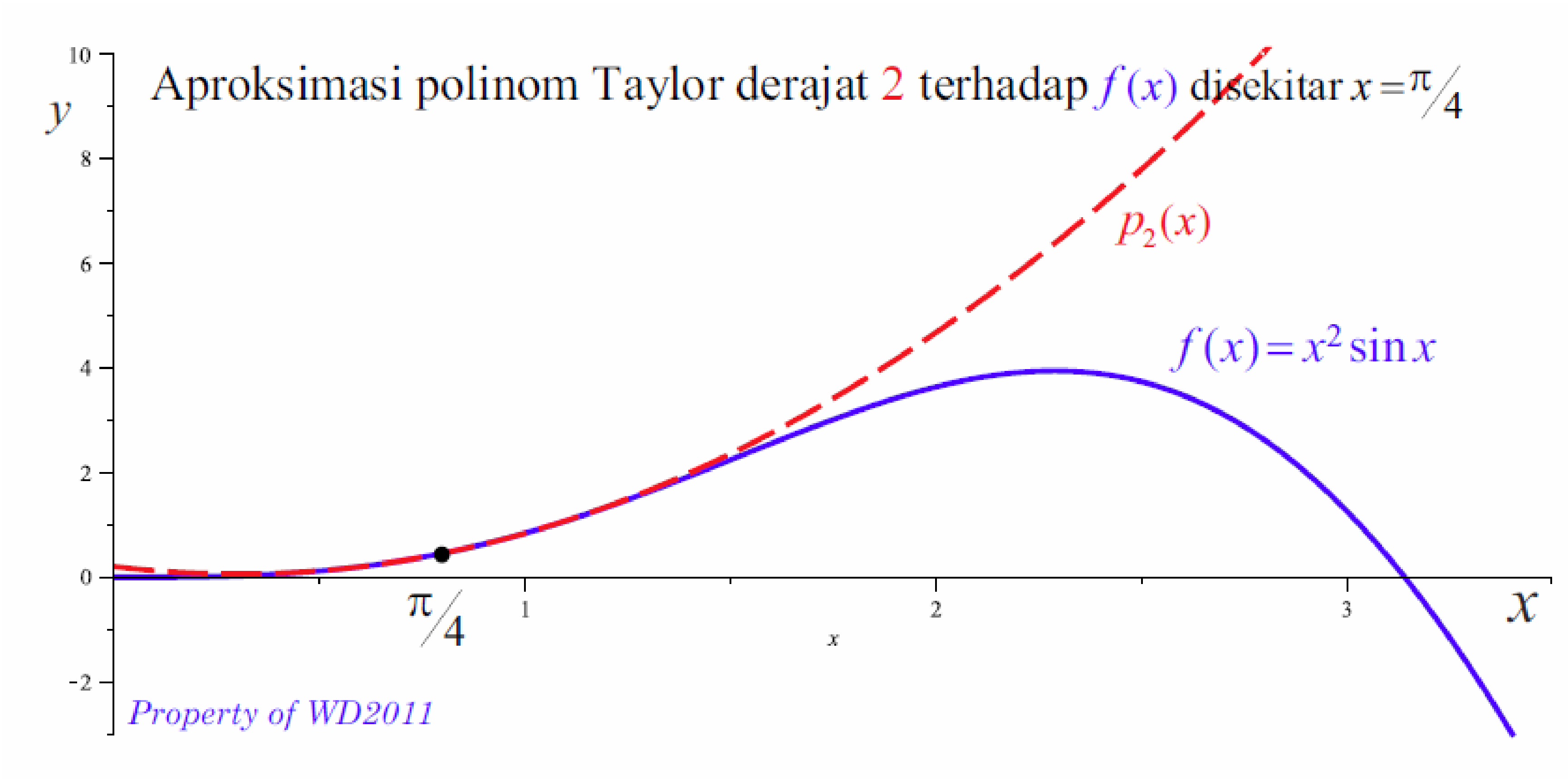
$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

Contoh



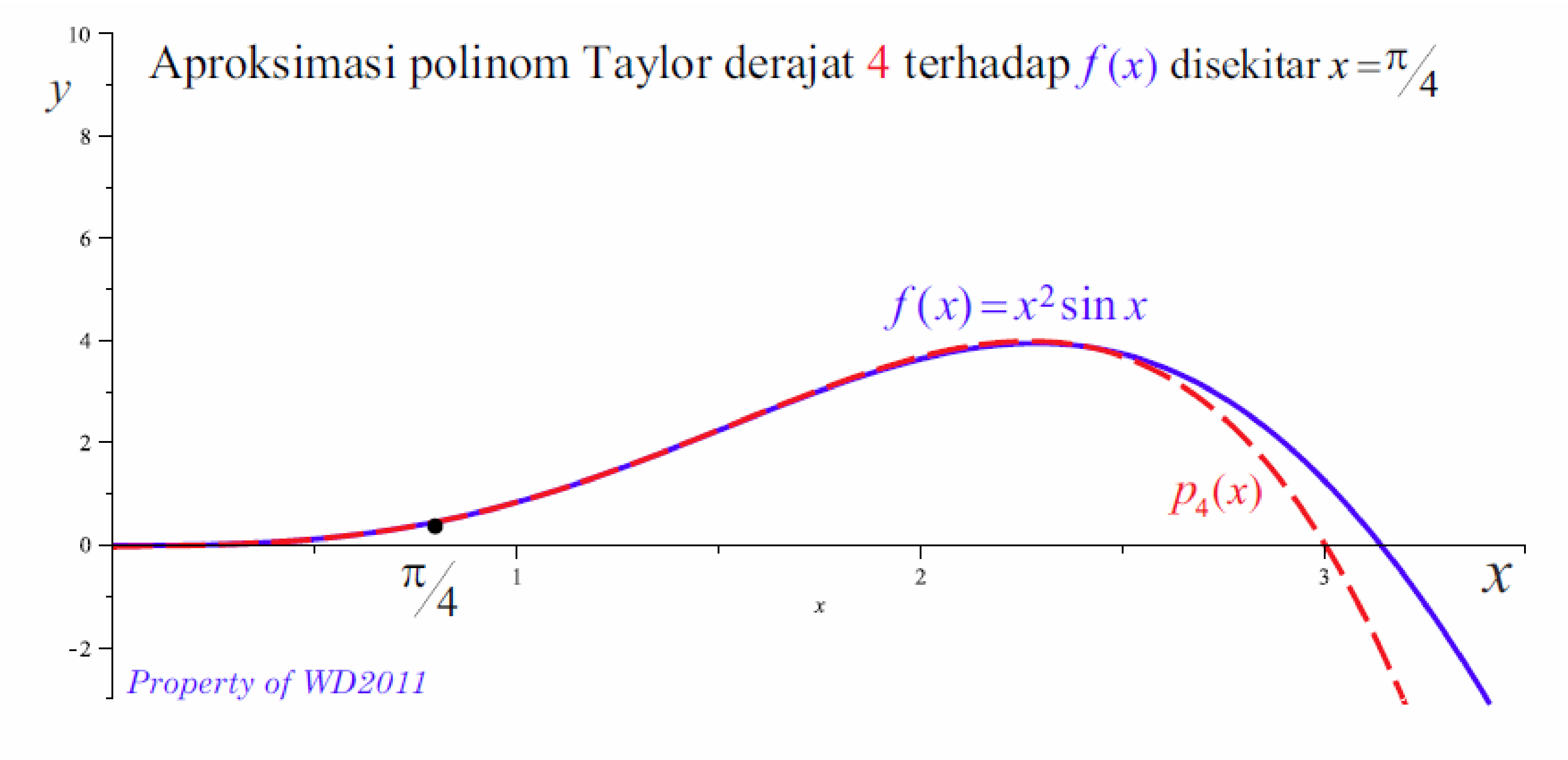
Aproksimasi polinom Taylor derajat 1 terhadap $f(x)$ disekitar $x = \pi/4$
y
$f(x) = x^2 \sin x$
$p_1(x)$
$\pi/4$
x
10
8
6
4
2
0
-2
1
2
3
Property of WD2011

Contoh

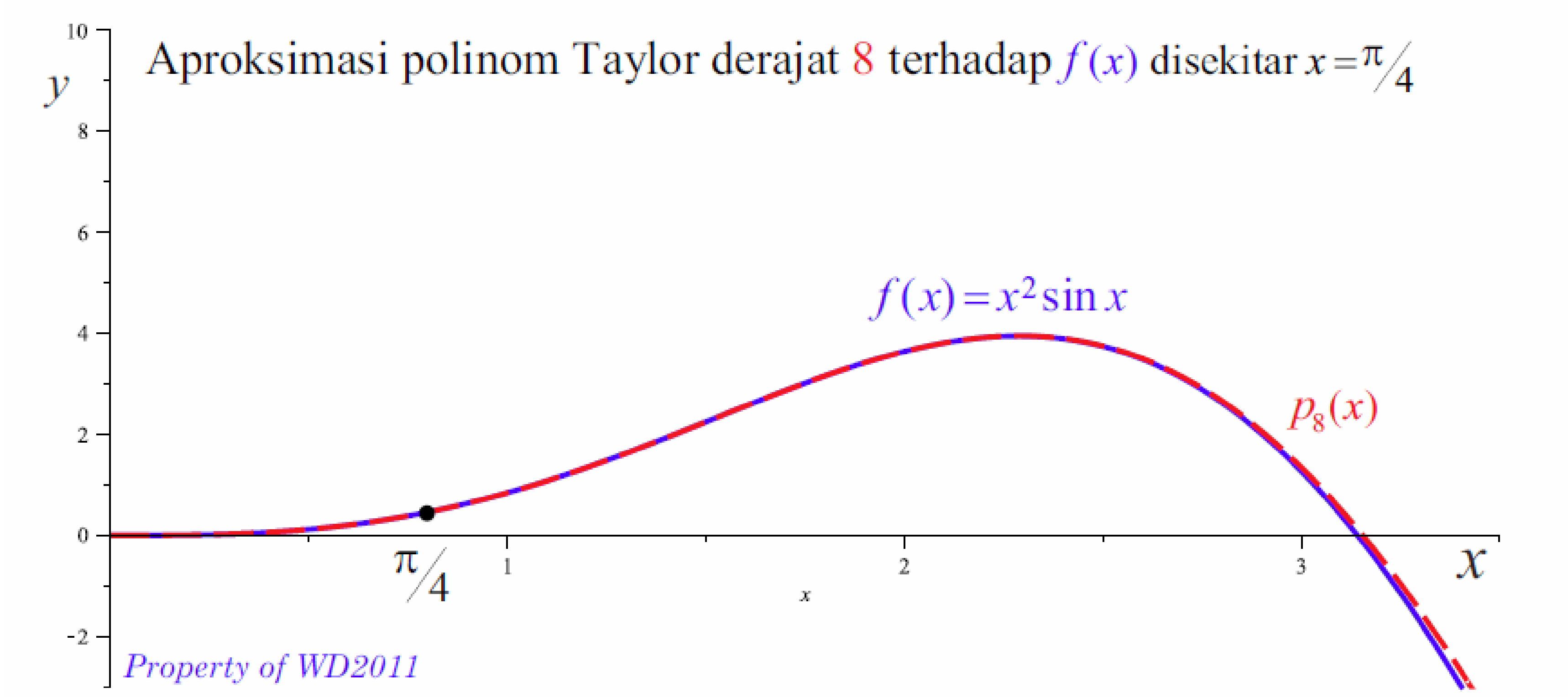


Aproksimasi polinom Taylor derajat 2 terhadap $f(x)$ disekitar $x = \pi/4$
y
10
8
6
4
2
0
-2
$p_2(x)$
$f(x) = x^2 \sin x$
$\pi/4$
1
2
3
x
x
Property of WD2011

Contoh


Aproksimasi polinom Taylor derajat 4 terhadap $f(x)$ disekitar $x = \pi/4$
y
10
8
6
4
2
0
-2
$f(x) = x^2 \sin x$
$p_4(x)$
$\pi/4$
1
2
3
x
x
Property of WD2011

Contoh



Aproksimasi polinom Taylor derajat 8 terhadap $f(x)$ disekitar $x = \pi/4$
y
10
8
6
4
2
0
-2
$f(x) = x^2 \sin x$
$p_8(x)$
$\pi/4$
1
2
3
x
x
Property of WD2011

Rumus Sisa Taylor

Misalkan f dapat diturunkan sampai $n+1$ kali di sekitar a.

Maka

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

dengan $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, untuk c di antara x dan a.

Contoh.

1. Hampiri nilai ln(0, 9) dengan polinom Taylor derajat empat dan taksirlah batas galatnya.
2. Tuliskan polinom Maclaurin derajat n dari $f(x) = e^x$. Lalu hampiri $e^{0.8}$ dengan galat tidak melebihi 0,001.
3. Galat suatu hasil perhitungan numerik adalah $E = \frac{|c^2 - \sin c|}{c}$ dengan $2 \leq c \leq 4$. Tentukan maksimum galat tersebut.