BAB I
PENDAHULUAN

A. Geometri Euclid

Euclid *(±325-265 SM) dari Alexandria, Mesir adalah matematikawan kuno yang menghasilkan karya monumental dalam Geometri, yaitu the Elements. Buku itu menjadi buku teks sekolah yang memuat geometri dan Teori Bilangan, buku itu terdiri dari 13 bagian buku.*

Buku 1 sampai 6 memuat tentang Geometri Datar yaitu segitiga, segiempat, lingkaran, segibanyak, perbandingan dan kesebangunan. Buku 7 sampai dengan 10 tentang teori Bilangan, buku 11 tentang geometri ruang yang berhubungan dengan geometri datar. Buku ke-12 membahas tentang limas, kerucut dan tabung dan buku ke-13 membahas bidang banyak. Buku 1 sampai 6 memuat 2 definisi, 5 postulat, 5 aksioma, dan 48 dalil. Pada buku Euclid dibedakan antara aksioma dan postulat. Postulat berlaku untuk sains tertentu sedangkan aksioma berlaku umum.

Contoh definisi yang dikemukakan diantaranya "*Suatu bidang adalah yang hanya mempunyai panjang dan lebar*". Definisi ini mempunyai kelemahan yaitu perlu adanya penjelasan tentang panjang dan lebar, untuk itu perlu didefinisikan panjang dan lebar. Masih banyak definisi yang dikemukakan Euclid yang masih perlu adanya definisi baru.

Diskusi

Carilah definisi yang dikemukan Euclid yang Anda pandang mempunyai kelemahan. Diskusikan definisi itu dan Ubah sehngga tidak mempunyai kelemahan lagi.

Euclid mengemukakan 5 aksioma dan 5 postulat. Aksioma (berlaku umum) yang dikemukakan Euclid ada lima yaitu:

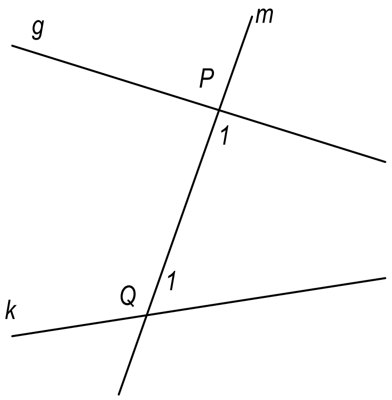
1. Benda-benda yang sama dengan benda yang sama, satu dengan yang lain juga sama.
2. Jika suatu yang sama ditambah dengan suatu yang sama, jumlahnya sama.
3. Jika suatu yang sama dikurangi dengan suatu yang sama, sisanya sama.
4. Benda-benda yang berimpit satu sama lain, benda-benda tersebut sama.
5. Seluruhnya lebih besar dari bagiannya.

Postulat-postulat (berlaku khusus pada sains tertentu) yang dikemukakan Euclid ada lima yaitu:

1. Melalui dua titik sebarang dapat dibuat garis lurus.
2. Ruas garis dapat diperpanjang secara kontinu menjadi garis lurus.
3. Melalui sebarang titik dan sebarang jarak dapat dilukis lingkaran.
4. Semua sudut siku-siku sama.
5. Jika suatu garis lurus memotong dua garis lurus dan membuat sudut-sudut dalam sepihak kurang dari dua sudut-siku-siku, kedua garis itu jika diperpanjang tak terbatas, akan bertemu dipihak tempat kedua sudut dalam sepihak kurang dari dua sudut siku-siku.

B. Geometri Non-Euclid

Geometri Non-Euclides timbul muncul karena para ahli matematika berusaha membuktikan kebenaran dari postulat yang kelima dari Euclid dengan mendasarkan keempat postulat sebelumnya. Postulat kelima itu adalah "*Jika suatu garis lurus memotong dua garis lurus dan membuat sudut-sudut dalam sepihak kurang dari dua sudut-siku-siku, kedua garis itu jika diperpanjang tak terbatas, akan bertemu dipihak tempat kedua sudut dalam sepihak kurang dari dua sudut siku-siku*".

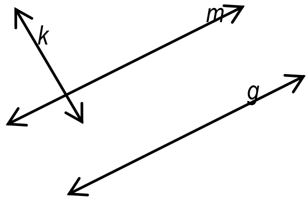


Garis *m* memotong garis *g* dan *k* sedemikian hingga $\angle P_1 + \angle Q_1 < 180^o$. Jika garis g dan diperpanjang maka kedua garis itu berpotongan *dipihak tempat kedua sudut dalam sepihak kurang dari 180^o*

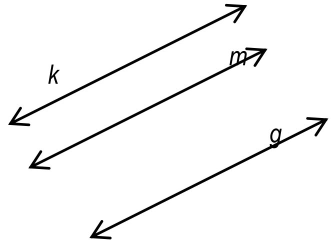
Beberapa matematikawan menganggap bahwa postulat kelima di atas bukan postulat, tetapi dapat dibuktikan menggunakan empat postulat yang lain. Matematikawan tersebut diantaranya Proclus (410-485) dari Aleksandria, Girolamo Sacceri (1607-1733) dari Irlandia, Karl Friedrich Gauss (1777-1855) dari Jerman, Wolfgang Bolyai (1775-1856), Yanos Bolyai (1802-1860) dari Hongaria, dan Ivanoviteh Lobachevsky (1793-1856) dari Rusia. Usaha matematikawan tersebut gagal tetapi usaha itu tidak sia-sia karena usaha tersebut mengakibatkan munculnya geometri Non-Euclid.

Saccheri meninggal tahun 1733. Hasil karyanya nampaknya hanya sedikit mempengaruhi perkembangan geometri sebab para penggantinya sampai dengan abad 19 terus mencoba membuktikan postulat kesejajaran Euclides. Pada gilirannya usaha-usaha pembuktian pada abad itu dilakukan oleh ahli-ahli matematika sekaliber Gauss (1777–1855) dan Legendre (1752–1833). Meskipun demikian, kegagalan-kegagalan yang terjadi pada abad 20 pada akhirnya menimbulkan keraguan di benak para ahli matematika. Sehingga pada tahun 1830, J. Bolyai (1802–1860), seorang perwira AD Hungaria, N.I Lobachevsky (1793–1856), seorang profesior matematika Rusia pada Universitas Kazan, dan Si Raksasa Gauss sendiri telah mengembangkan teori-teori Geometri yang berdasarkan pada suatu kontradiksi postulat kesejajaran Euclides. Secara khusus, mereka beranggapan bahwa ada lebih dari satu garis yang sejajar dengan suatu garis tertentu yang melalui suatu titik di luar garis tersebut. Gauss, yang tidak suka pertentangan, enggan menerbitkan ide-idenya, oleh karena itu Bolyai dan Lobacheskylah yang biasanya dianggap sebagai pencipta teori baru itu. Selanjutnya pada tahun 1854 ahli matematika terkenal dari Jerman B. Riemann (1826 – 1866) memperkenalkan suatu teori baru non-Euclides yang lain yang mendasarkan pada asumsi bahwa tidak ada garis-garis yang sejajar.

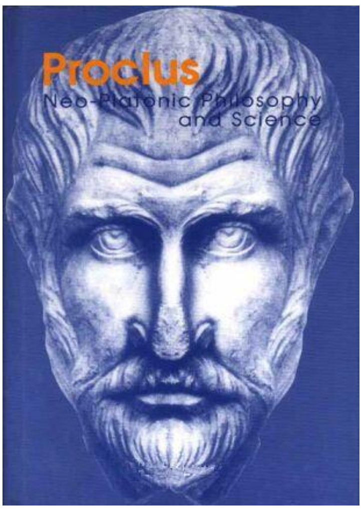
Dengan mendasar bahwa postulat kelima susah dipahami maka Proclus berusaha mengganti dengan postulat yang ekuivalen yaitu "*Jika suatu garis lurus m emotongsalah satu dari dua garis paralel maka ia juga memotong yang lain*". Dan postulat pengganti lainnya yaitu "*Garis-garis lurus yang paralel dengan suatu garis lurus yang sama adalah paralel satu sama lain*"



Garis m dan g sejajar. Jika k memotong m maka k juga memotong



Garis m dan g sejajar. Jika k sejajar m maka k juga sejajar g.

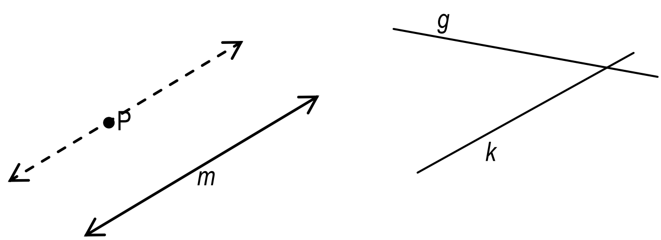


Proclus dilahirkan di Konstantinopel pada tanggal 8 Februari 412. Ia tinggal di keluarga yang statua sosialnya tinggi. Ayahnya memiliki kedudukan yang sangat penting di pengadilan Byzantine Empire's. Karena proclus ingin memiliki kedudukan yang sama, ia memutuskan belajar mengenai pidato, filosofi dan matematika di Alexandria, Mesir

Setelah menyelesaikan belajarnya, ia kembali ke Konstantinopel dan bekerja sebagai pengacara selama 1 periode. Ketika menjadi seorang pengacara, ia baru menyadari bahwa ia lebih menyukai filosofi. Karena itu, ia kembali ke Alexandria dan memulai mempelajari Aristoteles. Pada periode yang sama, ia juga memulai mempelajari matematika. Karena merasa tidak puas dengan cara mengajar ilmu filosofi yang ada di Alexandria, akhirnya ia pergi ke Atena.Proclus memutuskan menetap Atena. Hidupnya sangat makmur dan terkenal sangat dermawan terhadap teman-temannya. Ia tidak pernah menikah sampai akhir hidupnya. Proclus lebih banyak mengomentari dialog dari Plato. Ia berfikir bahwa sistem ilmu filosofi lebih komplek dan rumit dibandigkan yang dikatakan Plato. Komentar-komentar tersebut dikumpulkan dan dibukukan. Buku pertamanya berisi mengenai Euclid's yang berjudul Elements of Geometry. Proclus menulis dua hal yang utama kerja sistematis pada bukunya yang berjudul Elements of Theology. Proclus meninggal dunia pada tanggal 17 April 485 ketika berusia 73 tahun..

Disamping Proclus, matematikawan John Playfair juga mencoba mengganti postulat kelima dengan Aksioma Playfair yaitu:

1. melalui satu titik yang diketahui, tidak pada suatu garis yang diketahui, hanya dapat dibuat suatu garis paralel dengan garis itu. Atau,
2. dua garis yang berpotongan tidak mungkin paralel dengan garis yang sama.



Melalui titik P diluar garis *m* hanya dapat dibuat sebuah garis yang sejajar dengan *m*. Jika *g* dan berpotongan maka *g* dan *k* tidak mungkin sejajar.

John Playfair dilahirkan pada tanggal 10 Maret 1748 di Benvie, Angus, Skotlandia. Dia mempunyai dua saudara laki-laki yaitu James Playfair (seorang Arsitek) dan William Playfair (seorang Insinyur). Playfair mendapatkan pendidikannya di rumah hingga umur 14 tahun.

Kemudian ia masuk Universitas St Andrews. Pada tahun 1766, ketika usianya 18 tahun, ia mencalonkan untuk jabatan pada matematika di Perguruan Tinggi Marischal, Aberden. Tetapi ia tidak berhasil sehingga tuntutannyapun menjadi lebih tinggi. Enam tahun kemudian, ia membuat penerapan untuk jabatannya sebagai filosofi alam, tetapi ia *tidak berhasil lagi. Lalu pada tahun 1773, ia ditawari dan diterima sebagai penasehat pada perkumpulan gereja Liff dan Benvie, namun ia berhenti melakukan kegiatannya ketika ayahnya meninggal.*

Kemudian ia melanjutkan kembali kegiatannya untuk mengangkat pelajaran matematika dan fisikanya. Pada tahun 1782, ia berhenti lagi dari kegiatannya, lalu berencana menjadi tutor di Ferguson dari Raith. Karena rencananya ini, ia mampu seringkali berada di Edinburgh untuk mengolah kesusastraan dan masyarakat ilmiah, sehingga membuat ia menjadi terkenal. Buktinya, ia Pada tahun 1785, ketika Dugald Stewart disukseskan Ferguson dengan filosofi moral, Playfair terlebih dahulu sukses dengan matematika hadir pada saat pembukaan sejarah alam John Walker.

Kemudian pada tahun 1795, Playfair berhasil menciptakan suatu rumusan tentang postulat persamaan Euclid yang disebut "Aksioma Playfair". Pada tahun 1795 juga, Playfair selesai menulis bukunya yang berjudul "Element's of Geometry". John Playfair yang tinggal di Matthew Stewart, Hutton, Robison akhirnya meninggal pada tanggal 20 Juli 1819.

Ada dua rnacam Geometri Non-Euclides. Yang pertama adalah yang ditemukan dalarn waktu yang hampir bersamaan oleh 3 tokoh berlainan dan masing-rnasing bekerja sendiri. Tokoh-tokoh itu adalah Karl Friedrich Friedrich Gauss dari Jerman, Yonos Bolyai dari Hongaria dan Nicolay Ivanovitch Lobachevsky dari Rusia. Geometri ini disebut Geometri Hiperbolik atau terkenal juga dengan Geometri Lobachevsky.

Geometri Non-Euclides yang kedua ialah Geometri yang diketemukan oleh G.F.B Bernhard Riemann (1826 – 1866) dari Jerman, Geometri ini disebut Geometri Elliptik atau Geometri Rienmann.

Jika kita perhatikan kembali postulat parallel dari Geometri Euclides bunyinya kurang lebih adalah sebagai berikut *"melalui satu titik di luar sebuah garis dapat dibuat tidak lebih dari satu garis yang parallel dengan garis tersebut".* Sedangkan postulat parallel dari Geometri Hiperbolik atau Geometri Lobachevsky yang ditemukan dalam tahun 1826 adalah sebagai berikut: *"Melalui satu titik di luar sebuah garis dapat dibuat lebih dari satu garis (tepatnya dua garis) yang parallel dengan garis tersebut"*. Perlu kita perhatikan bahwa dalam Geometri Hiperbolik garis yang tidak memotong garis yang lain tidak berarti bahwa garis itu parallel dengan garis tersebut.

Dalam tahun 1854 G.F. Benhard Riemann mengumumkan penemuannya. Ia tidak mengindahkan postulat parallel dan dalam Geometrinya setiap dua garis berpotongan dan tidak ada garis-garis yang parallel. Geometri Riemann ini disebut Geometri Elliptik. Jika ditulis dalam bentuk seperti di atas terdapat: *"Melalui suatu titik di luar sebuah garis tidak ada garis yang dapat dibuat yang parallel dengan garis tersebut".*

Demikianlah salah satu perbedaan antara Geometri Euclides, Geometri Lobachevsky dan Geometri Riemann yang dapat disebut pula sebagai Geometri Parabolik, Geometri Hiperbolik dan Geometri Elliptik.

C. Perkembangan Geometri

Euclides telah mengumpulkan rnaterinya dari beberapa sumber. maka tidak mengherankan bahwa dari Geometri Euclides dapat diambil sarinya berupa dua Geometri yang berlainan dalam dasar logikanya;

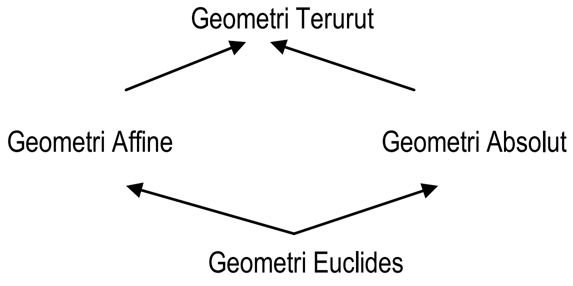
pengertian pangkalnya dan Aksiomanya. Kedua Geometri itu ialah Geometri Affine dan Geometri Absolut atau Geometri Netral.

Yang pertama-tama memperkenalkan Geometri Affine ialah Leonhard Euler dari Jerrnan (1707 -1793). Dalam Geometri ini garis parallel tunggal, sesuai postulat Playfair, memegang peranan yang penting sekali. Karena dalam Geometri ini lingkaran tidak disebut-sebut dan sudut-sudut tak pemah diukur maka dapat dikatakan. bahwa Geometri ini mempunyai dasar postulat I, II dan V dari Postulat Euclides. Postulat III dan IV tidak berarti sama sekali.

Geometri Absolut pertama-tama diperkenalkan oleh Y. Bolyai dari Hongaria (1802 -1860). Geornetri ini didasarkan atas 4 postulat pertama dari Euclides dan melepaskan postulat kelima. Dengan demikian Geometri Affine dan Geometri Absolut mempunyai dasar persekutuan dua postulat pertama dari Euclides. Ada pula suatu inti dari dalil-dalil yang berlaku untuk keduanya yaitu pengertian keantaraan ("intermediacy"). Pengertian ini terkandung dalam definisi keempat dari Euclides.

Suatu garis Iurus (ruas garis) ialah garis yang terletak rata dengan titik-titik padanya atau Suatu garis lurus (ruas garis) ialah yang terletak rata antara ujung-ujungnya. Pengertian ini memberikan kemungkihan untuk memandang keantaraan sebagai pengertian pangkal yaitu sebagai relasi yang tidak didefinisikan. Pengertian ini dipakai untuk mendefinisikan ruas garis sebagai himpunan titik-titik antara 2 titik yang diketahui.

Kemudian ruas garis dapat diperpanjang menjadi garis tak berhingga. Jika B terletak antara A dan C kita dapat mengatakan bahwa A, B dan C terletak berurutan pada garis itu. Geometri yang menjadi dasar dari Geometri Affine dan Geometri Absolut ini disebut Geometri "Orderied" (Geometri terurut), karena urutan memegang peranan penting (“Geometri. "Ordered" ini didasarkan dua postulat pertama dari Euclides tetapi penyajiannya lebih teliti. Mengingatat hal-hal di atas mala (“Geometri Affine dan (Geometri Absolut termuat dalam Geometri Ordered)” Sedangkan (Geometri Euclides termuat dalam Geometri Afifine dari Geometri Absolut. Jadi gambarannya sebagai berikut :

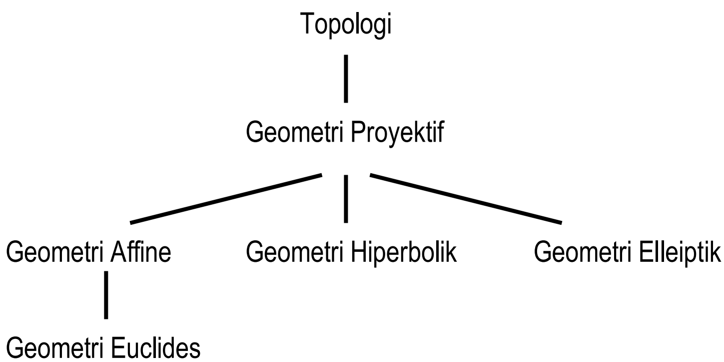


Seperti telah kita ketahui Geometri Non-Euclides timbul karena para matematikaawan berusaha untuk membuktikan postulat kelima dari Euclides. Jadi Geometri Non-Euclides masih berdasarkan empat postulat pertama dari Euclides dan hanya berbeda pada postulat kelimanya. Dengan demikian Geometri Non-Euclides termuat dalam Geometri Absolut.

Topologi adalah cabang Geometri yang paling umum, tetapi yang termuda, yang sekarang masih terus berkembang. Dapat dikatakan, bahwa Topologi lahir pada tahun 1895. Tokoh-tokohnya antara lain Leonhard Euler, Henri Poincare (1854 – 1912) dari Perancis dan Georg Cantor (1845 – 1918) dari Jerman.

Beberapa orang tokoh dari Geometri Proyektif ialah antara lain Arthur Cayley (1821 – 1895) dari Inggris, Jean Victor Poncelet (1788 – 1867) dari Perancis dan R. G. Christian von Staudt (1798 – 1867) dari Jerman dan beberapa lainnya. Dapat dikatakan bahwa Geometri Proyektif mulai diakui sebagai sistem formal yang berdiri pada tahun 1859.

Menurut pandangan Felix Klein (1849 – 1925) dari Jerman tentang Geometri, maka dapat digambarkan iktisar Geometri sebagai berikut :



D. Kekurangan Logika Dalam Geometri Euclides

Hampir dua ribu tahun, unsur-unsur karya Euclides (300 M) dipandang sebagai suatu model penalaran matematik. Sejak itu, pelajaran tentang unsur-unsur "elemen" atau teks yang ekuivalen menjadi faktor yang esensial dalam pendidikan liberal. Dari generasi ke generasi diajar dengan menggunakan pemikiran deduktif dari pengajaran geometri Euclides. Pada akhir abad ke-19, dari penelitian secara mendalam terhadap ide-ide dasar dari Euclides, para ahli matematika menemukan kekurangan-kekurangan dalam generasi Euclides. Hal tersebut tidak dianggap "tepat (mutlak)" saat ini. Materi atau obyek kita dalam bab ini adalah untuk memberikan ilustrasi dan menjelaskan kekurangan logika tertentu pada geometri Euclides serta menunjukkan mengapa hal itu tidak sesuai dengan standart yang baku (kebakuan).

Banyak siswa matematika beranggapan bahwa geometri Euclides merupakan model yang sempurna dari pemikiran yang logis. Perkembangan tersebut dimulai dengan pernyataan dari asumsi dasar, kemudian setiap teorema dibuktikan, sehingga langkah-langkah logika diturunkan dari asumsi-asumsi ini. Namun dalam Euclides dan dalam buku teks sekolah lanjutan yang standart, terdapat beberapa kejanggalan logis dalam berfikir yang tidak diketahui secara pasti. Perbedaan tersebut muncul disebabkan asumsi-asumsi yang berdiri sendiri-sendiri yang didasarkan pada bukti yang nampak (terlihat) atau pandangan instuisi yang dibuat. Hal tersebut mematahkan (merusak) susunan yang terurut dari penyimpulan-penyimpulan yang logis. Kita akan menjelaskan hal tersebut dengan menunjukkan bahwa penggunaan secara sendiri-sendiri dari bukti pengamatan dalam cara yang biasa digunakan pada geometri sekolah lanjutan barangkali ditemukan bukti dari teorema yang menakjubkan sebagai berikut:

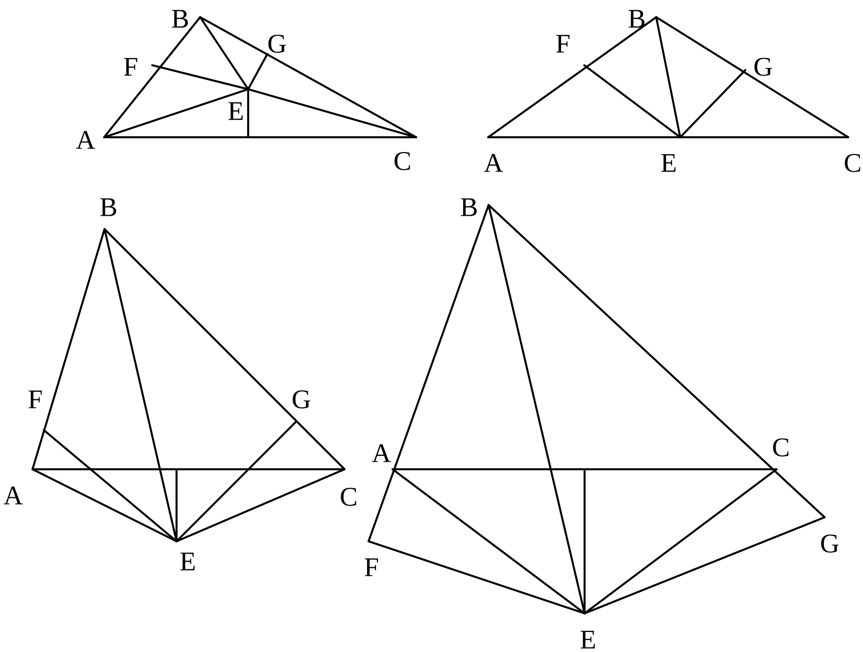
Setiap segitiga adalah samakaki
Terdapat suatu segitiga dengan dua sudut siku-siku

Kita juga akan membahas beberapa teorema geometri yang buktinya dalam buku teks sekolah lanjutan kurang logis dengan menunjukkan dimana asumsi-asumsi yang berdiri sendiri tersebut dibuat dan menunjukkan bagaimana bukti-bukti perlu diperbaiki agar menjdai logis.

1. Bukti bahwa setiap segitiga adalah samakaki

Andaikan ΔABC tidak samakaki, maka garis bagi sudut B tidak tegak lurus pada AC, sebaliknya jika garis bagi sudut B tegak lurus pada AC, maka ΔABC harus samakaki. Selanjutnya garis bagi dari sudut B memotong garis sumbu AC di titik E yang mungkin terletak di dalam atau di luar ΔABC.

Dari E dibuat tegak lurus AB di F dan tegak lurus BC di G.



Pada segitiga siku-siku BFE dan BGE didapatkan:

$\angle FBE = \angle GBE$ (definisi garis bagi sudut) dan

BE = BE (identitas), sehingga

$\Delta BFE \cong \Delta BGE$ (hipotenusa, sudut lancip)

sehingga diperoleh:

(*) BF = BG (bagian dari Δ yang kongruen)

Pada segitiga siku-siku FAE dan GCE diperoleh:

AE = CE (E sebuah titik pada garis sumbu AC)

FE = GE (E sebuah titik pada garis bagi $\angle B$)

$\Delta FAE \cong \Delta GCE$ (hipotenusa, kaki sudut)

sehingga diperoleh:

(**) FA = GC (bagian dari Δ yang kongruen)

Dalam kasus tiga diagram yang pertama, dengan menjumlahkan (*) dan (**) didapatkan:

BF + FA = BG + GC atau BA = BC

Dalam kasus diagram ke empat, dengan mengurangkan (**) dari (*) diperoleh:

BF – FA = BG – GC juga didapat BA = BC.

Dalam hal ini ΔABC samakaki.

2. Dimana letak kesulitannya?

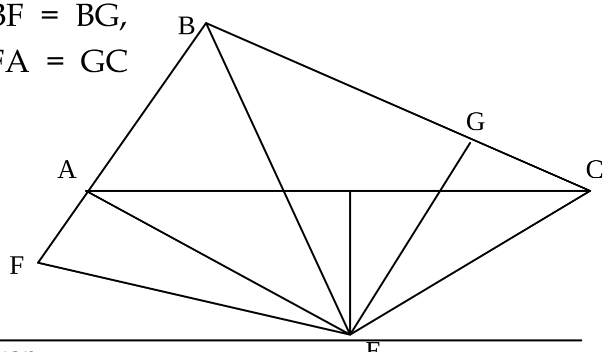
Hal ini tidak mendapatkan perhatian selama bukti terlihat sesuai dengan bukti-bukti standart dalam geometri sekolah lanjutan dan lebih efektif dari beberapa langkah yang bertentangan dengan kenyataan sehari-hari. Hal ini mungkin terjadi pada kita bahwa suatu ketelitian menggambar diagram mungkin tidak memperhatikan kunci terjadinya paradoks (suatu hal yang berlawanan). Misalnya kita menggambar salah satu dan perhatikan diagram bahwa titik E terletak di luar ΔABC, F terletak pada perpanjangan AB di belakang A, dan G terletak diantara B dan C. Maka seperti di atas,

$\Delta BFE \cong \Delta BGE$,

$\Delta FAE \cong \Delta GCE$,

BF = BG,

FA = GC



Sekarang kita dapat menentukan BA = BC dari persamaan sebelumnya baik dengan menjumlahkan maupun dengan pengurangan. Dengan menjumlahkan, didapatkan:

BF + FA = BG + GC

Walaupun BG + GC benar sama dengan BC, BF + FA tidak sama dengan BA, karena BF sendiri lebih panjang dari BA. Melalui cara yang sama, dengan pengurangan didapatkan:

BF – FA = BG – GC

Dapat dilihat bahwa BF – FA = BA, tetapi BG – GC < BC

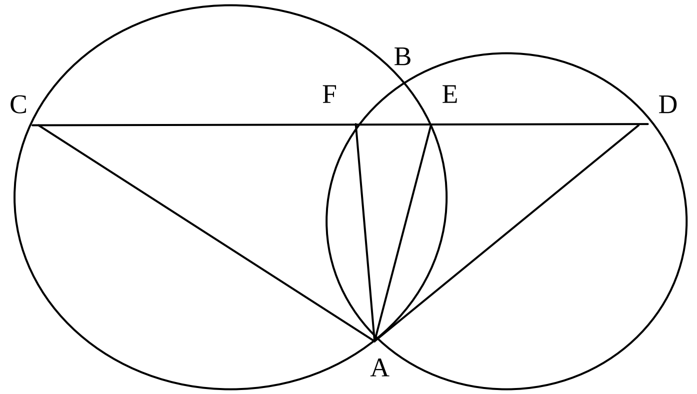
Apakah pengguguran tersebut suatu paradok? Jawabnya adalah tidak. Kita telah menunjukkan secara sepintas bahwa ilustrasi seperti pada gambar 1.2 pembuktiannya keliru, dan demikian juga barangkali tidak setiap segitiga adalah samakaki. Kita tidak mengetahui, apakah dalam segitiga sebarang mesti salah dalam pembuktiannya seperti itu. Hal itu mungkin tepat untuk salah satu dari bentuk sebelumnya dan dengan demikian buktikan menjadi segitiga samakaki.

Kita dapat menyelesaikan paradoks (lawan azas) dengan membuktikan bahwa masalah pada gambar 1.2, secara essensial hanya suatu kasus (suatu bentuk kejadian khusus). Karena itu, untuk suatu segi tiga sebarang ABC, garis bagi $\angle B$ memotong garis sumbu AC di titik E yang terletak diluar segitiga dan garis tegak lurus dari E ke AB dan BC sedemikian hinga salah satu kakinya jatuh pada salah satu sisi segitiga dan sekaligus terletak diantara dua titik, sedangkan kaki yang lainnya terletak pada perpanjangan sebuah sisi segitiga dan tidak terletak diantara dua titik. (Hal ini betul-betul perlu diperhatikan pada latihan di akhir bab ini)

Analisa kita menunjukkan bahwa dalam penggunaan logika yang komplit pada geometri, kita mesti memahami konsep-konsep “di dalam” dan “di luar” suatu segitiga, dan konsep sebuah titik pada sebuah garis yang terletak diantara dua titik pada garis tersebut.

Sebuah Segitiga Dengan Dua Sudut Siku-Siku

Selanjutnya perhatikan “bukti” bahwa terdapat suatu segitiga dengan dua sudut siku-siku. Dua buah lingkaran berpotongan di titik A dan B. (lihat gambar 1.3), Misal AC dan AD sebagai diameternya, yang masing-masing melalui titik A. CD memotong kedua lingkaran masing-masing di E dan F.



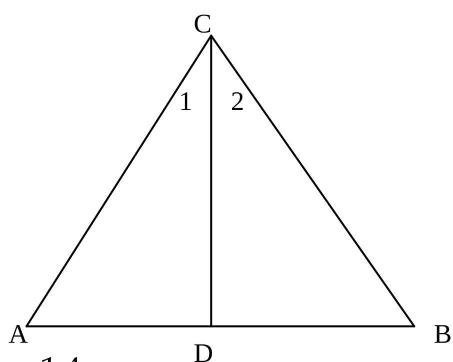
Gambar 1.3

$\angle AEC$ adalah siku-siku, selama $\angle AEC$ sudut keliling pada setengah lingkaran AEC. Dengan cara yang sama, $\angle AFD$ juga merupakan sudut siku-siku. Dengan demikian, ΔAEF mempunyai dua sudut siku-siku. Dalam hal ini, ketelitian menggambar suatu diagram dapat *memberi kesan* bahwa CD akan melalui titik B. Tetapi kita tidak dapat membantah bahwa CD melalui titik B, sebab CD memang harus melaluinya jika suatu diagram dilukis dengan amat teliti.

3. Bukti Suatu Teorema

Hasil-hasil di atas tidak terpikirkan di sekolah lanjutan sebagai suatu teorema, dan tentu saja mereka tidak melakukannya. Hasil-hasil tersebut adalah teorema. Namun demikian, pembuktiannya tidak cukup logis. Sebagai contoh, perhatikan pembuktian berikut ini yang diambil dari sebuah buku teks dalam geometri bidang.

Teorema: ***Sudut alas suatu segitiga samakaki adalah sama***



Gambar 1.4

Diketahui: ΔABC , AC = BC

Buktikan: $\angle A = \angle B$

Bukti

Pernyataan	Alasan
Lukis garis bagi $\angle C$	Setiap sudut mempunyai garis bagi
Perpanjang garis tersebut	Suatu garis dapat diperpanjang

Pada ΔACD dan ΔBCD, AC = BC	Hipotesis
$\angle 1 = \angle 2$	Definisi garis bagi sudut
CD = CD	Identitas
$\Delta ACD \cong \Delta BCD$	s, sd, s (sisi, sudut, sisi)
$\angle A = \angle B$	Unsur-unsur yang Berse- suaian dari segitiga-segitiga yang kongruen adalah sama.

Sambil membaca buktinya, amatilah diagramnya sejenak, sehingga kita merasakan hal tersebut lebih meyakinkan, apakah hal tersebut merupakan argumen yang valid. Cara mengujinya, jika kita benar memahami diagramnya dan memeriksa kembali argumennya, maka terdapat suatu kesulitan pada langkah ke-2. Alasan yang diberikan garis boleh diperpanjang. Tidak memberi alasan memperpanjang garis tersebut sampai memotong garis kedua. Hal yang mungkin terjadi, dua garis sejajar.

Misalkan untuk sementara kesulitan tersebut dapat diatasi, dan kita tahu bahwa garis bagi $\angle C$ memotong AB di titik D. Langkah ke-3, 4, 5 dan 6 nampaknya dapat diterima (dibenarkan). Namun pada langkah ke-7 kita dapatkan $\angle A = \angle B$. Hal tersebut dimaksudkan: $\angle CAD = \angle CBD$ .... (1)

Sudut-sudut tersebut merupakan sudut yang berkorespondensi pada segitiga konruen ACD dan BCD. Namun hal tersebut bukan merupakan tujuan (sasaran) yang ingin dibuktikan.

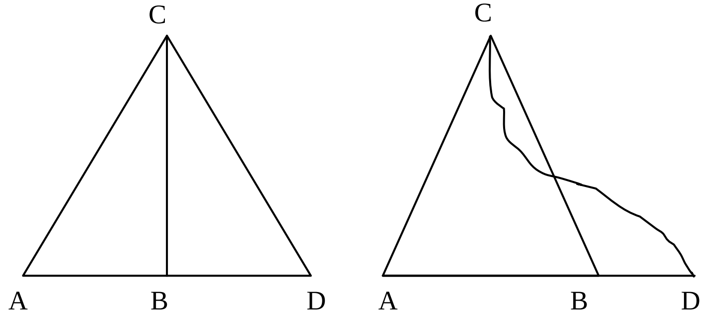
Sudut alas ΔABC adalah $\angle CAB$ dan $\angle CBA$, dan kita harus membuktikan: $\angle CAB = \angle CBA$ ....(2)

Tetapi dari diagram, hal tersebut terlihat jelas bahwa:

$$\angle CAD = \angle CAB$$
$$\angle CBD = \angle CBA,$$

sehingga (2) mengikuti dari (1) dengan substitusi.

"***Terlihat jelas***" bahwa kesimpulan berdasar gambar begitu kuat sehingga kita tidak pernah mempertentangkan hal itu. Namun hal tersebut belum sesuai dengan bukti logis. Dalam usaha mendapatkan $\angle CAD = \angle CAB$, kita mesti mengetahui bahwa D terletak pada sisi AB dari $\angle CAB$. Dengan demikian maka sudut tersebut merupakan sudut yang saling bersuplemen. Demikian pula untuk $\angle CBD = \angle CBA$, kita harus mengetahui bahwa D terletak pada sisi BA dari $\angle CBA$. Selanjutnya, untuk melengkapi bukti, kita perlu mengetahui bahwa D pada *segmen garis AB*, atau D *diantara* A dan B. Hal yang tidak menguntungkan, tidak ada sesuatu *dalam bukti* (sebagai batas diagram) untuk membenarkannya. Untuk pembuktian tersebut, D diletakkan pada perpanjangan AB, dalam hal ini B diantara A dan D. (lihat gambar 1.5)



Pandang diagram yang sesuai, yang mengilustrasikan kemungkinan tersebut. Kita mungkin dikagetkan olehnya dan mengatakan "hal tersebut tidak dapat terjadi". Bagaimana mungkin sebuah garis bagi $\angle ACB$ terletak di luar sudut. Atau bagaimana mungkin sebuah garis melalui titik C pada $\angle ACB$ dapat keluar dari sudut, sementara garis tersebut harus di dalam sudut? Jadi, garis lurus tidak memenuhi keadaan tersebut. Apakah kita mengartikan "**lurusnya**" kapur yang menggores di papan tulis? Sudah tentu hal tersebut tidak memenuhi aturan ini. Tetapi kita keluar jalur. Kita tidak membuat studi visual dari goresan-goresan kapur, tetapi studi logis dari apakah suatu kesimpulan tertentu dapat dideduksi dari asumsi-asumsi dasar kita.

Pada postulan-postulat dasar yang oleh Euclides (atau teks geometri sekolah lanjutan yang standart) diasumsikan secara eksplisit, hal itu tidak dimungkinkan untuk membuktikan bahwa D diantara A dan B. Apakah Euclide seringkali melakukan asumsi secara eksplisit sifat-sifat tertentu dari geometri lukis yang bukan postulat. Akibatnya banyak dasar pembuktian yang tidak logis. Untuk mengarahkannya kepada bukti yang valid, kita harus memisahkan sifat-sifat secara eksplisit, yang secara diam-diam (dan terkadang tidak disadari) diasumsikan dari diagram.

Pada saat ini kekuranglogisan sedapat mungkin dikurangi (dihilangkan) dengan mengasumsikan postulat baru:

Garis bagi suatu sudut memotong segmen garis yangdiapit oleh sisi-sisi sudut (kaki sudut) tersebut

Maka D ada dan akan terletak diantara A dan B. Analisis menunjukkan lagi kebutuhan untuk memberi karakter konsep ***Diantara*** untuk suatu titik pada garis dan konsep tentang ***di dalam*** dan ***di luar*** dari bangun geometri, khususnya untuk sudut. Dalam perlakuan yang standart, konsep "di dalam" tidak dibicarakan.

Suatu titik diobservasi terletak di dalam suatu bangun hanya dalam dasar berupa pernyataan visual tanpa analisis. Secara logika, hal ini tidak memenuhi syarat. Terdapat sifat-sifat yang penting tentang “di dalam” dan “di luar” yang harus disertakan dalam pembahasan tentang geometri, salah satu diantaranya sebagai postulat, teorema atau definisi.

Contoh: ***Sebuah garis yang memuat titik dari sebuah sudut dan sebuah titik di dalam sudut, memotong setiap segmen garis yang bergerak sepanjang sisi-sisi sudut tersebut***.

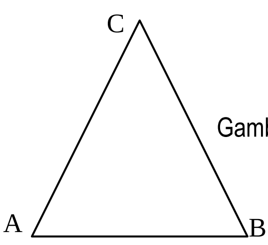
(Bandingkan hal itu dengan postulat yang telah dibicarakan di atas, tentang garis bagi suatu sudut).

Teorema bahwa sudut alas segitiga samakaki adalah sama, dapat dibuktikan secara valid dengan menggunakan perbedaan dan pendekatan yang lebih sederhana. Bukti berikut yang dilengkapi Papus (300 m) didasarkan pada validitas prinsip s sd s (sisi sudut sisi) ketika diaplikasikan pada suatu segitiga dan segitiga itu sendiri.

Diketahui: ΔABC, AC = BC

Buktikan: $\angle BAC = \angle ABC$

Bukti: Pandang ACB dan BCA sebagai segitiga dengan titik sudut A, C, B bersesuaian dengan titik sudut B, C, A, maka:



Gambar 1.6

Pernyataan	Alasan
AC = BC	ditentukan
BC = AC	ditentukan
$\angle ACB = \angle BCA$	identitas

sehingga unsur-unsur AC, BC, $\angle ACB$ dari ΔACB adalah sama dengan unsur-unsur yang bersesuaian BC, AC, $\angle BCA$ dari ΔBCA.

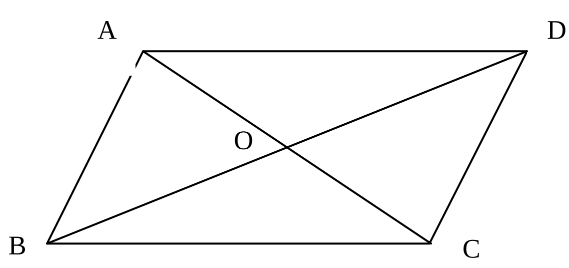
Karena itu $\Delta ACB \cong \Delta BCA$	s, sd, s (sisi, sudut, sisi)
$\angle BAC = \angle ABC$	Unsur-unsur yang bersesu-aian dari segitiga yang kongruen adalah sama

5. Kesalahan Bukti Lainnya

Kita akan memeriksa bukti yang sudah di kenal dalam geometri di sekolah lanjutan, untuk menunjukkan betapa mudahnya langkah logis yang dipergunakan menyimpang dalam suatu argumen.

Teorema:

Diagonal-diagonal dari suatu jajarangenjang saling membagi dua sama panjang satu dengan lainnya



Diketahui: Jajarangenjang ABCD diagonal AC dan BD berpotongan di titik O.

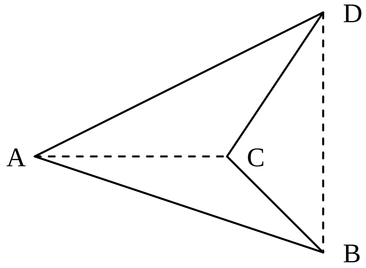
Buktikan: AO = OC dan BO = OD

Bukti:

Pernyataan	Alasan
AD//BC, AB//DC	Dari hepotesis ABCD jajaran genjang
$\angle CAD = \angle ACB$, $\angle ADB = \angle CBD$	Akibat dari sudut dalam berseberangan dari garis-garis sejajar adalah sama
AD = BC	Sisi-sisi berhadapan dari jajaran genjang adalah sama
$\Delta AOD \cong \Delta COB$	sd, s, sd (sudut, sisi, sudut)
AO = OC, BO = OD	Unsur-unsur yang bersesuaian dari segitiga yang kongruen, sama

Bukti yang dikemukakan akan benar-benar logis, selama setiap langkah dapat memberikan alasan yang tepat. Kesalahan terdapat dalam pernyataan dari apa yang akan dibuktikan, yang diasumsikan tersendiri bahwa diagonal AC dan BD berpotongan di O. Tidak ada sesuatupun pada hepotesis yang menjamin asumsi tersebut. Hal itu tentu saja secara visual jelas, dan tentu saja ingin hal tersebut menjadi pernyataan yang valid (postulat atau teorema) dalam permasalahan geometri kita.

Untuk menunjukkan kekeliruan terbawa dalam pembuktian bahwa diagonal dari persegi panjang berpotongan, selidiki bahwa sifat tersebut berhubungan dengan sifat bahwa diagonal dari jajaran genjang seluruhnya berada dalam bangun itu. Hal tersebut tidak benar untuk setiap poligon, juga tidak untuk setiap segi empat (quadilateral). Pada gambar 1.8, terlihat bahwa titik-titik pada diagonal AC yang digambar terputus-putus seluruhnya terdapat di dalam segiempat ABCD, sedangkan diagonal BD seluruhnya di luar. Jelaslah bahwa, diagonal-diagonal tersebut tidak berpotongan.



Untuk menghindari pengertian yang sulit mengenai konsep "di dalam" dan "di luar" dari jajaran genjang, kita mengangkat postulat berikut:

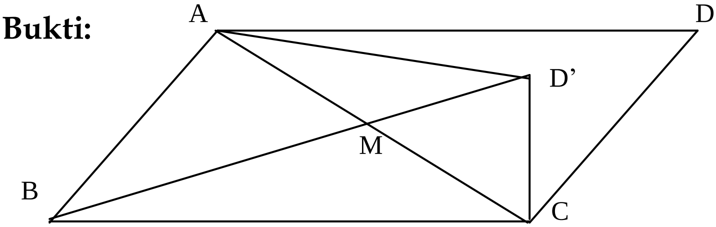
Diagonal-diagonal dari sebuah jajarangenjang berpotongan

Dengan menggunakan postulat tersebut, bukti dapat divalidasi dengan mudah. Tetapi postulat tersebut agaknya dispesialisasikan. (Mungkinkah untuk suatu contoh, kita membuat postulat sejenis untuk suatu trapesium?) Kita akan heran jika suatu pendekatan berbeda tidak memungkinkan kita untuk membuktikan suatu teorema tanpa mengasumsikan postulat tertentu. Analisis berikut mengingatkan kita suatu metode untuk mengerjakan hal tersebut.

Analisis: Ditentukan M titik tengah dari AC. Untuk menunjukkan AC dan BD membagi dua sama panjang satu sama lainnya, ekuivalen dengan

menunjukkan bahwa M adalah titik tengah dari BD. Hal tersebut sukar untuk dilakukan secara langsung, selama kita belum mengetahui dengan jelas bahwa M terletak pada BD. Hal tersebut dimaksudkan bahwa kita memperpanjang BM sama panjangnya, mulai dari M sampai ke titik D (lihat gambar 1.9), kemudian tunjukkan bahwa D adalah titik yang sama dengan D. Secara mendetail hal itu diberikan dalam bukti berikut.
Diketahui: Jajarangenjang ABCD
Buktikan: AC dan BD saling membagi dua sama panjang satu sama lainnya.

Bukti:



Pernyataan	Alasan
Ditentukan M titik tengah AC sedemikian sehingga AM = MC	Suatu segmen garis mempunyai titik tengah
Panjang BM sama panjangnya mulai dari M sampai D′, sehingga BM = MD′	Segmen garis dapat diperpanjang sepanjang panjangnya sendiri
$\angle AMD' = \angle CMB$	Sudut bertolak belakang sama besarnya.
$\Delta AMD' \cong \Delta CMB$	sisi, sudut, sisi
$\angle MAD' = \angle MCB$	Unsur yang bersesuaian dari

	segitiga-segitiga yang kongruen adalah sama
AD′ // BC	Jika dua garis dipotong oleh garis transversal sehingga membuat sepasang sudut dalam berseberangan yang sama, maka kedua garis tersebut sejajar
AD//BC	Sesuai hipotesis ABCD jajaran genjang
Garis AD′ dan AD posisinya sama (berhimpit) sehingga D′ terletak pada garis AD	Melalui sebuah titik yang tidak terletak pada suatu garis yang ditentukan, terdapat hanya satu garis yang sejajar dengan garis tersebut.

Dengan cara yang sama, dengan menggunakan $\Delta CMD' \cong \Delta AMB$, kita tunjukkan bahwa garis CD′ dan CD berimpit, sehingga D′ terletak pada garis CD.

D′ dan D berimpit	Dua garis dapat berpotongan hanya pada satu titik
BM = MD	Dengan substitusi D untuk D′ pada pernyataan 2.

Dengan demikian M merupakan titik tengah BD, sedangkan AC dan BD saling membagi dua sama panjang, selama keduanya memiliki titik tengah yang sama, yaitu M.

Walaupun bukti tersebut memvalidasi teorema tanpa mengasumsikan postulat tambahan, cara ini tidak langsung terarah menuju permasalahan yang sebenarnya dari perpotongan diagonal-diagonal sebuah segiempat (sebagai contoh, bukti tersebut tidak dapat membantu kita dalam pembuktian diagonal-diagonal sebuah trapesium berpotongan). Permasalahan ini membutuhkan studi yang mendalam mengenai kedudukan (posisi) dan urutan sifat-sifat dari titik-titik dan garis-garis yang akan dibahas belakangan dalam buku ini.

6. Kesimpulan

Dari pembahasan kita terdahulu dapat dijelaskan bahwa:

a) Geometri Euclides seperti yang kita pahami, bukan merupakan studi ketelitian melukis gambar geometri, dan bukan merupakan cabang menggambar permesinan.
b) Dari sudut pandang logika, kita tidak bisa menerima jika untuk menentukan bahwa suatu titik terletak diantara dua titik, dilakukan dengan ***mengamati*** dalam gambar, juga untuk menentukan bahwa dua ruas garis sama dengan ***pengukuran*** pada gambar.
c) Perlakuan standart pada geometri di sekolah lanjutan cukup logis, yakni sifat-sifat tertentu diasumsikan tersendiri dengan dasar gambar atau instuisi ruang. Selama kita dapat menunjukkan bahwa suatu teorema kurang terpecahkan secara logis, kita harus memisahkan asumsi-asumsi

khusus dan menggunakannya secara formal pada pengembangan dari subyeknya (pokok materinya).

Untuk kritik-kritik lebih lanjut dan pembahasan historis mengenai geometri Euclid dan non Euclid, kita dapat membahas masalah menciptakan suatu dasar untuk geometri Euclid dan geometri lainnya yang terlepas dari topik-topik yang dimunculkan di sini.

7. Implikasi Untuk Pengajaran

Kekritisan kita pada permasalahan yang lazim, memungkinkan seseorang menyimpulkan bahwa kita menganggap geometri benar-benar sesuai untuk siswa sekolah lanjutan dan secara logis standart perlakuan dalam buku ini akan diajarkan pada siswa-siswa sekolah lanjutan. Kekritisan kita diarahkan pada ketidak-lengkapan geometri sekolah, seperti kepastian permasalahan yang bersifat matematis dari suatu subyek.

Geometri Euclides, seperti semua cabang matematika lainnya, hendaknya diajarkan pada tingkat abstraksi yang berbeda, sebab apa yang cocok utnuk siswa kelas 10, belum tentu sesuai untuk mahasiswa tingkat kedua perguruan tinggi atau siswa lulusan tahun pertama. Pada tingkat sekolah lanjutan, kita yakin bahwa geometri dapat menyajikan metri-metri yang bersifat esensial, seperti pembuktian (penemuan) materi secara deduktif seperti yang dianjurkan dan dapat dipakai pada pembuktian sesuatu yang bersifat fisik, bukan seperti pengetahuan matematika yang abstrak. Hal ini akan menolong dalam menumbuhkan dan memelihara kepekaan siswa bahwa berpikir deduktif adalah kegiatan yang berguna, bukan hanya permainan logika, dimana siswa merasakan pentingnya benda-benda konkrit, dan kebenaran harus ada dan melengkapi setiap penemuan-penemuan baru. Bagi siswa-siswa yang terbelakang (lamban dalam cara berpikirnya), hal ini lebih membantunya dari pada benda yang abstrak, selama ia mempunyai pemahaman terhadap benda-benda yang konkrit yang memunculkan teori yang abstrak dan memberinya pemahaman. Sungguh merupakan kesalahan yang besar jika menghapus pengalaman dan hal-hal yang konkrit dari permasalahan kita dalam mengajar pada tingkat kedua (atau juga pada tingkat yang lebih tinggi) dengan kedok membantu apresiasi berpikir abstrak atau menempatkan siswa dalam hubungannya dengan matematika modern. Hal ini dapat melahirkan perasaan tidak suka pada berpikir abstrak.

Pertimbangan yang sama diperlukan pada masalah pertanyaan tingkat kekakuan pada materi-materi yang diajarkan. Pengertian kekakuan, lebih dimaksudkan pada kualitas tiap orang (personal) dari pokok persoalan yang dikuasai pada waktu tertentu. Hal itu menunjukkan kualitas berpikir bahwa perkembangan dan pendewasaan (pematangan), sering terlambat digunakan untuk merespon dan menumbuhkan kesadaran. Suatu usaha untuk mempercepat sebelum waktunya, dapat mengakibatkan siswa hanya berbuat seperti apa yang tertulis (dipelajarinya), bukan didasarkan oleh kekritisannya yang tajam.

Bagaimanapun, kita merasa bahwa suatu pengertian kekakuan perkembangan geometri yang diuraikan dalam buku ini, penting untuk para guru. Mereka dapat mengkaitkannya dengan masalah-

masalah yang lebih luas dari pokok permasalahan yang ada pada tingkat yang lebih tinggi dan dalam pemahamannya sendiri, mencoba untuk menjadikan geometri menarik dan signifikan bagi siswa sesuai tingkatannya.

LATIHAN 1

Agar jelas, yang dimaksud dengan $\overline{AB}$ dalam soal ini, adalah ruas garis (segmen garis) AB.

1. Dua buah lingkaran berpotongan di titik A dan B. $\overline{AC}$ dan $\overline{AD}$ masing-masing merupakan diameternya yang berpangkal di A. Tunjukkan bahwa B terletak pada garis CD.
2. Dari titik P pada garis BA dari $\angle ABC$, ditarik garis tegak lurus ke sisi BC. Tunjukkan bahwa sisi yang tegak lurus memotong sisi BC dari $\angle ABC$ atau perpanjangan sisi BC. Bagaimana jika $\angle ABC$ lancip, siku-siku atau tumpul?
3. Dalam ΔABC, $\overline{AB} \neq \overline{BC}$. Buktikan bahwa garis bagi $\angle B$ dan garis sumbu $\overline{AC}$ berpotongan hanya pada satu titik.
4. Dalam ΔABC, $\overline{AB} \neq \overline{BC}$. E merupakan titik perpotongan garis bagi $\angle B$ dengan garis sumbu $\overline{AC}$. Buktikan bahwa titik A, B, C dan E terletak pada lingkaran. (Ingatkan lebih tepat soal ini mengarah pada kesimpulan bahwa E terletak di luar ΔABC)
5. Pada ΔABC, garis bagi $\angle B$ memotong lingkaran luar di titik E selain dari B. Buktikan bahwa $\overline{BE}$ merupakan diameter lingkaran tersebut jika dan hanya jika $\overline{AB} = \overline{BC}$

6. Pada ΔABC, $\overline{AB} \neq \overline{BC}$. Garis bagi $\angle B$ memotong garis sumbu $\overline{AC}$ di titik E. Tunjukkan bahwa satu dari $\angle BAE$ dan $\angle BCE$ adalah sudut lancip dan sudut yang lainnya tumpul.
7. Pada ΔABC, $\overline{AB} \neq \overline{BC}$. Garis bagi $\angle B$ memotong garis sumbu $\overline{AC}$ di titik E. Dari E dibuat garis tegak lurus ke sisi $\overline{AB}$ dan $\overline{BC}$. Tunjukkan bahwa salah satu garis tersebut jatuh pada ruas garis sisi segitiga ABC dan garis yang lain jatuh pada perpanjangan sisi yang lainnya.
8. Buktikan bahwa setiap segitiga mempunyai sebuah titik tinggi.
9. Berapa banyak titik tinggi yang dapat dimiliki sebuah segitiga? Jelaskan jawabanmu.
10. Berikan tanggapanmu mengenai bukti dari proposisi bahwa:

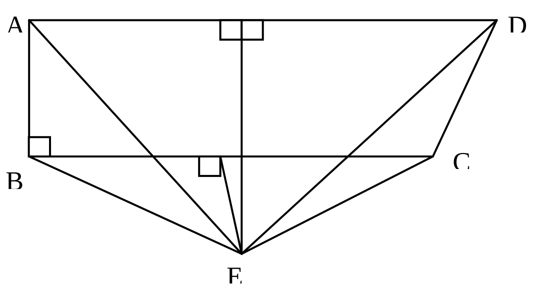
Ada sudut siku-siku adalah tumpul

Diketahui: $\angle ABC$ siku-siku

Tentukan D sehingga $\angle BCD$ tumpul dan $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Tunjukkan $\angle ABC = \angle BCD$

Bukti:



- Tarik AD. E merupakan titik perpotongan garis sumbu $\overline{AD}$ dan garis sumbu $\overline{BC}$.
- Hubungkan E ke A, B, C dan D.

- $\overline{EB} = \overline{EC}$, karena E terletak pada garis sumbu $\overline{BC}$.
- $\overline{EA} = \overline{AD}$, karena E terletak pada garis sumbu $\overline{AD}$.
- Sehingga $\Delta EAB \cong \Delta EDC$, akibatnya: $\angle EBA = \angle ECD$ ……….. (1)
- Karena $\overline{EB} = \overline{EC}$, maka $\angle EBC = \angle ECB$ ………. (2)
- Dengan mengurangi (1) dan (2) diperoleh: $\angle ABC = \angle BCD$.

11. Berikan kritikmu terhadap bukti dari proposisi berikut:

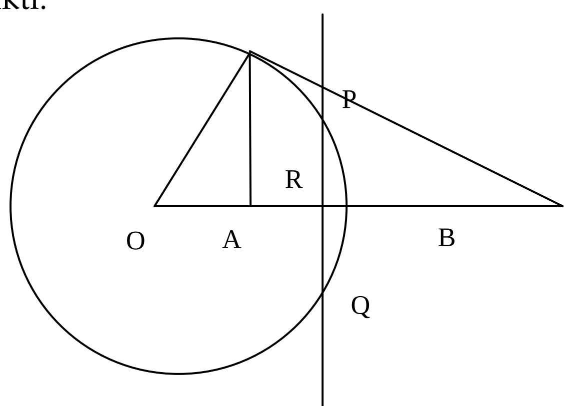
Setiap titik dalam lingkaran, yang buka pusat lingkaran, terletak pada lingkaran

Diketahui: O (o,r). A merupakan titik dalam lingkaran

selain o.

Buktikan: A terletak pada lingkaran.

Bukti:



- Buktikan B pada perpanjangan garis $\overline{OA}$ yang melalui A, sedemikian hingga OA.OB = r^2 ………………… (1)

- Buat garis sumbu $\overline{AB}$ sehingga memotong lingkaran O di titik P dan Q, dan R merupakan titik tengah $\overline{AB}$
- OA = OR – RA dan
  OB = OR + RA ……………… (2)
- Dari (1) dan (2) diperoleh r^2 = (OR – RA) (OR + RA)

$$= \overline{OR}^2 - \overline{RA}^2$$

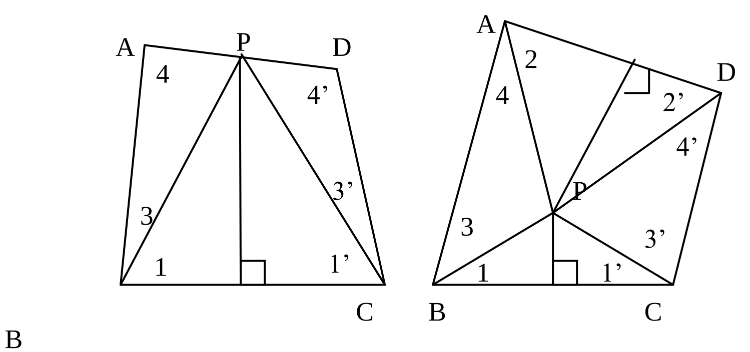
$$= (r^2 - \overline{PR}^2) - (\overline{AP}^2 - \overline{PR}^2) = r^2 - \overline{AP}^2$$

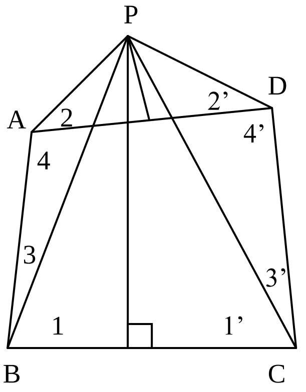
- Sehingga diperoleh $\overline{AP}^2 = 0$, AP = 0.
- Karena itu A berimpit dengan P dan terletak pada lingkaran.

12. Berikan kritikanmu terhadap bukti dari proposisi berikut:

Jika sepasang sisi yang berhadapan dari sebuah segiempat sama, maka sepasang sisi yang lainnya sejajar

Diberikan: segiempat ABCD, AB = CD
Buktikan: AD//BC   Gambar 1.12





Bukti:

- Jika garis sumbu $\overline{BC}$ dan garis sumbu $\overline{AD}$ sejajar atau berhimpit, sudah tentu AD // BC.
- Andaikan P titik potong garis sumbu $\overline{BC}$ dan garis sumbu $\overline{AD}$, maka P akan terletak pada segiempat ABCD, di dalam segiempat ABCD atau di luar segiempat ABCD.
- Untuk setiap kemungkinan, berakibat $\overline{PB} = \overline{PC}$ dan $\overline{PA} = \overline{PD}$. (P terletak pada garis sumbu $\overline{BC}$ dan $\overline{AD}$)
- Andaikan P tidak terletak dalam segiempat ABCD, sehingga $\angle 1 = \angle 1'$ .... (1)

  $\angle 2 = \angle 2'$ .... (2)

  $\Delta ABP \cong \Delta DCP$ (sisi, sisi, sisi)

  agar supaya $\angle 3 = \angle 3'$ .... (3)

  $\angle 4 = \angle 4'$ .... (4)
- Andaikan P terletak pada segiempat ABCD. Maka dengan menjumlahkan:

  (1) dan (3) diperoleh $\angle B = \angle C$ .... (5)

  (2) dan (4) diperoleh $\angle A = \angle D$ .... (6)
- Selama $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0$

  Maka dari (5) dan (6) akan diperoleh $\angle A + \angle B = 180^0$

  Sehingga dapat disimpulkan AD // BC.
- Jika P terletak di luar segiempat ABCD, (5) dan (6) masih terkait dengan (1), (2), (3), (4), maka

dalam kasus yang satu dengan menjumlahkan dan dalam kasus yang lain dengan pengurangan.

- Jika P terletak di dalam segiempat ABCD, dapat dilakukan dengan cara yang sama, tetapi menggunakan argumen yang sederhana.

13. Berikan kritikanmu terhadap bukti dari ***teorema*** berikut yang diambil dari buku teks. Carilah bagaimana memperbaikinya dan tunjukkan seberapa banyak ***asumsi yang tersembunyi*** dapat kamu temukan.

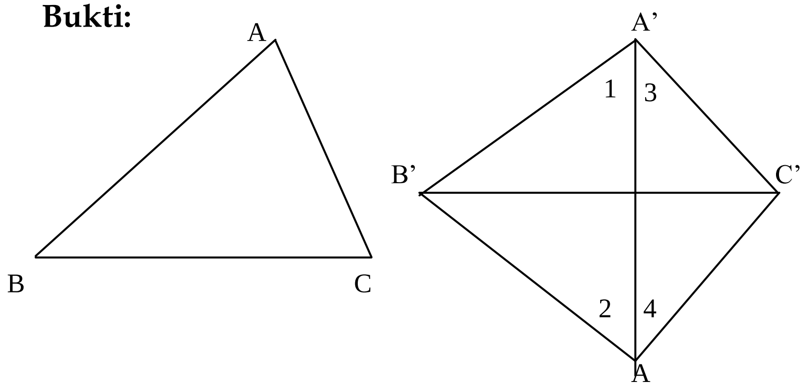
    Teorema:

Dua buah segitiga kongruen jika ketiga sisi seitiga yang pertama, berturut-turut sama dengan ketiga sisi segitiga yang lainnya

Diberikan: ΔABC dan $\Delta A'B'C'$, AB = A'B', BC = B'C', AC = A'C'.

Tunjukkan: $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

Bukti:



Pernyataan	Alasan
Tempatkan ΔABC sedemi= kian sehingga BC dan B′C′ berhimpit. A dan A′ terletak pada sisi yang berlainan dari sisi B′C′	Bangun geometri dapat dipi-ndah karena tidak merubah sisi atau bentuk, semua sisi yang sama dibuat berhimpit.
Hubungkan AA′	Dua titik menentukan sebuah garis
$\Delta AB'A'$ samakaki	AB = A′B′ karena hepotesis
$\angle 1 = \angle 2$	Sudut alas sebuah segitiga samakaki sama
$\Delta AC'A'$ samakaki	AC = A′C′ karena hepotesis
$\angle 3 = \angle 4$	Sudut alas segitiga samakaki sama
$\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$	Sesuatu yang sama ditambah dengan sesuatu yang sama maka jumlahnya sama
$\angle A' = \angle A$	Substitusi
$\Delta AB'C' \cong \Delta A'B'C'$	s, sd, s (sisi, sudut, sisi)

14. Ulangi beberapa pembuktian di buku teks sekolah tinggi untuk mengetahui bagaimana sebenarnya.
15. Rumuskan beberapa sifat dasar dari pendefinisian dua titik pada sebuah garis yang terdapat dalam geometri sekolah tinggi
16. Rumuskan beberapa sifat dasar dari titik-titik di dalam (di luar) segitiga. Buatlah sebuah definisi

sederhana mengenai sebuah ide bahwa sebuah titik berada di dalam (di luar) segitiga.

17. Sama seperti soal no.16, ganti segitiga dengan sudut.
18. Sama seperti soal no.16, ganti segitiga dengan tetrahedron (polihedron yang mempunyai empat buah bidang muka atau sisi) atau limas segitiga.