BAB I
PENDAHULUAN

A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari modul Diklat Guru Matematika SMA ini diharapkan Anda dapat mengetahui:

1. Landasan dan objek kajian pembelajaran matematika
2. Hakikat dan prinsip matematika
3. Karakteristik pembelajaran matematika
4. Tujuan, ruang lingkup, standar kompetensi, dan kompetensi dasar materi bilangan
5. Tujuan, ruang lingkup, standar kompetensi, dan kompetensi dasar materi aljabar
6. Tujuan, ruang lingkup, standar kompetensi, dan kompetensi dasar materi geometrid an pengukuran
7. Tujuan, ruang lingkup, standar kompetensi, dan kompetensi dasar materi statistika dan peluang
8. Strategi, model, pendekatan, metode, dan teknik pembelajaran matematika
9. Pengembangan sumber belajar matematika
10. Inovasi pembelajaran matematika
11. Menyelesaikan soal-soal latihan materi esensial matematika

B. INDIKATOR KEBERHASILAN

Peserta Diklat Guru Matematika SMA dikatakan berhasil menguasai modul ini apabila mampu menyelesaikan soal-soal yang disajikan di akhir setiap pembelajaran. Soal-soal yang diberikan bernuansa mengukur kemampuan tinggi matematik yang melampaui kemampuan standar yang diminta oleh kurikulum. Tentu guru peserta Diklat memiliki kemampuan berkenaan dengan landasan, objek, hakikat, prinsip, dan karakteristik matematika. Di samping itu penguasaan terhadap materi esensial matematik seperti bilangan, aljabar, geometri-pengukuran, dan statistika-peluang menjadi keharusan bagi guru peserta Diklat. Penguasaan ragam metode bagi guru peserta Diklat terangkum dalam pengembangan metode pembelajaran matematika. Inovasi pembelajaran dan pengembangan sumber belajar turut menjadi tolok ukur keberhasilan guru dalam mengikuti Diklat.

C. DESKRIPSI SINGKAT MODUL

Modul ini diperuntukkan bagi guru-guru matematika SMA, selaku peserta Diklat pembelajaran matematika sekolah. Dalam modul ini Anda akan mempelajari hakikat, prinsip, dan karakteristik pembelajaran matematika. Materi esensial matematika yang mencakup empat cabang besar matematika yaitu bilangan, aljabar, geometri-pengukuran, dan statistika-peluang. Secara spesifik materi esensial matematika SMA ini akan membahas logika, eksponen, logaritma, pengakaran, persamaan kuadrat, sistem persamaan linier, fungsi, geometri ruang, geometri analitik, geometri transformasi, matriks, vektor, program linier, kalkulus, statistika, dan peluang.

Penyajian materi dalam modul ini akan disertai dengan tujuan materi, ruang lingkup materi, standar kompetensi materi, kompetensi dasar materi, indikator materi, dan uraian materi. Setiap bagian akan disertai dengan latihan dan refleksi terhadap materi, guna mengukur secara mandiri penguasaan materi oleh peserta pelatihan.

D. PETUNJUK PENGGUNAAN MODUL

Untuk mempelajari modul ini, hal-hal yang perlu anda lakukan adalah sebagai berikut.

1. Pelajari daftar isi serta skema modul dengan cermat, karena ia akan menuntun anda dalam mempelajari modul ini.
2. Untuk mempelajari modul ini haruslah berurutan, karena materi yang mendahului merupakan prasyarat untuk mempelajari materi berikutnya.

3. Pahamilah contoh-contoh soal yang ada, dan kerjakanlah semua soal latihan yang ada. Jika dalam mengerjakan soal anda menemui kesulitan, kembalilah mempelajari materi yang terkait.
4. Kerjakanlah soal evaluasi dengan cermat. Jika anda menemui kesulitan dalam mengerjakan soal evaluasi, kembalilah mempelajari materi yang terkait.
5. Jika anda mempunyai kesulitan yang tidak dapat anda pecahkan, catatlah, kemudian tanyakan kepada instruktur pada saat kegiatan pelatihan atau bacalah referensi lain yang berhubungan dengan materi modul ini. Dengan demikian, anda juga akan mendapatkan pengetahuan tambahan.

BAB II
HAKIKAT, PRINSIP, DAN KARAKTERISTIK PEMBELAJARAN MATEMATIKA

A. TUJUAN

Setelah mempelajari kegiatan belajar ini, diharapkan anda dapat mengetahui:

1. Landasan dan objek pembelajaran matematika
2. Hakikat dan prinsip matematika
3. Karakteristik pembelajaran matematika

B. URAIAN MATERI

1. LANDASAN DAN OBJEK PEMBELAJARAN MATEMATIKA

1.1. Landasan Pembelajaran Matematika

Sebagai warga negara Indonesia yang berhak mendapatkan pendidikan seperti yang tertuang dalam UUD 1945, tentunya harus memiliki pengetahuan umum minimum. Pengetahuan minimum itu diantaranya adalah matematika. Oleh sebab itu, matematika sekolah sangat berarti baik bagi para siswa yang melanjutkan studi maupun yang tidak. Inilah pengetahuan dasar (*basic science*) yang harus dikuasai oleh manusia Indonesia dalam membekali diri menghadapi tantangan kehidupan mendatang.

Matematika merupakan salah satu jenis dari enam materi ilmu yaitu matematika, fisika, biologi, psikologi, ilmu-ilmu sosial dan linguistik. Didasarkan pada pandangan konstruktivisme, hakikat matematika yakni anak yang belajar matematika dihadapkan pada masalah tertentu berdasarkan konstruksi pengetahuan yang diperolehnya ketika belajar dan anak berusaha memecahkannya.

“Ciri utama matematika adalah penalaran deduktif yaitu kebenaran suatu konsep atau pernyataan yang diperoleh sebagai akibat logis dari kebenaran sebelumnya. Namun demikian, dalam pembelajaran pemahaman konsep sering diawali secara induktif melalui pengalaman peristiwa nyata. Proses induktif-deduktif dapat digunakan untuk mempelajari konsep matematika”. Selama mempelajari matematika di kelas, aplikasi hasil rumus atau sifat yang diperoleh dari penalaran deduktif maupun induktif sering ditemukan meskipun tidak secara formal hal ini disebut dengan belajar bernalar (Depdiknas, 2003: 5-6).

Mata pelajaran Matematika perlu diberikan kepada semua peserta didik mulai dari tingkat sekolah dasar untuk membekali peserta didik dengan kemampuan berpikir logis, analitis, sistematis, kritis, dan kreatif, serta kemampuan bekerjasama. Kompetensi tersebut diperlukan agar peserta didik dapat memiliki kemampuan memperoleh, mengelola, dan memanfaatkan informasi untuk bertahan hidup pada keadaan yang selalu berubah, tidak pasti, dan kompetitif (Yunengsih, 2008: 2).

Perkembangan teknologi modern yang sangat pesat terjadi di bidang teknologi informasi dan komunikasi. Perkembangan teknologi informasi dan komunikasi ini dilandasi oleh perkembangan matematika di bidang teori bilangan, aljabar, analisis, teori peluang dan matematika diskrit. Untuk menguasai dan menciptakan teknologi di masa depan diperlukan penguasaan matematika yang kuat sejak dini. Indonesia sebagai negara berkembang tentunya tidak ingin tertinggal dan harus melakukan banyak perubahan di antaranya di bidang pendidikan.

KTSP adalah kurikulum operasional yang disusun oleh dan dilaksanakan di masing-masing satuan pendidikan. Undang-Undang Republik Indonesia Nomor 20 Tahun 2003 tentang Sistem Pendidikan Nasional dan Peraturan Pemerintah Republik Indonesia Nomor 19 tahun 2005 tentang Standar Nasional Pendidikan mengamanatkan kurikulum nasional pada KTSP jenjang pendidikan dasar dan menengah.

Pengembangan KTSP yang beragam mengacu pada standar nasional pendidikan untuk menjamin pencapaian tujuan pendidikan nasional. Delapan standar nasional pendidikan ini antara lain: (1) Standar Isi, (2) Standar proses, (3) Standar kompetensi lulusan, (4) Standar pendidik dan tenaga kependidikan, (5) Standar sarana dan prasarana, (6) Standar pengelolaan, (7) Standar pembiayaan, dan (8) Standar penilaian pendidikan.

Dua dari delapan standar nasional pendidikan di atas, yaitu standar isi (SI) dan standar kompetensi lulusan (SKL) merupakan acuan utama dalam mengembangkan kurikulum. Standar kompetensi dan kompetensi dasar dalam kurikulum menjadi arah dan landasan untuk mengembangkan materi pokok, kegiatan pembelajaran, dan indikator pencapaian kompetensi untuk penilaian. Mata pelajaran Matematika pada kurikulum satuan pendidikan SMA/MA meliputi aspek-aspek: (1) Logika Matematika, (2) Bentuk Pangkat, dan bentuk akar, (3) Fungsi dan Persamaan Logaritma, (4) Fungsi dan Persamaan Kuadrat, (5) Rumus jumlah dan hasil kali akar persamaan kuadrat, (6) Persamaan garis singgung lingkaran, (7) Komposisi fungsi dan fungsi invers, (8) Suku banyak, (9) Sistem persamaan linear dua/tiga variable, (10) Program linear, (11) Operasi matriks, (12) Sudut antara dua vector, (13) Panjang proyeksi dan vektor proyeksi, (14) Komposisi dua transformasi, (14) Invers dari fungsi eksponen dan logaritma, (15) Deret aritmetika, (16) Deret aritmetika dan geometri, (17) Jarak dan sudut antara dua objek pada dimensi tiga, (18) Aturan sinus dan kosinus, (19) Volume bangun ruang, (20) Persamaan trigonometri, (21) Rumus penjumlahan dan perkalian perbandingan trigonometri, (22) Limit fungsi, (23) Pemakaian turunan fungsi, (24) Integral, (25) Luas dan volume benda putar, (26) Ukuran pemusatan, (27) Kaidah pencaca -han, permutasi, dan kombinasi, dan (28) Peluang.

Pendidikan Nasional antara lain bertujuan mewujudkan *learning society* di mana setiap anggota masyarakat berhak mendapatkan pendidikan (*education for all*) dan menjadi pembelajar seumur hidup (*longlife education*). Empat pilar pendidikan dari UNESCO, yaitu *learning to know*, *learning to do*, *learning to live together*, dan *learning to be*. Impelementasi dalam pembelajaran matematika terlihat dalam pembelajaran dan penilaian yang sifatnya *learning to know* (fakta, skills, konsep, dan prinsip), *learning to do* (*doing mathematics*), *learning to be* (*enjoy mathematics*), dan *learning to live together* (*cooperative learning in mathematics*). Mempelajari kecenderungan pembelajaran matematika saat ini, penerapan keempat pilar UNESCO, serta pentingnya penguasaan kompetensi matematika untuk kehidupan peserta didik, juga telah dikeluarkan Standar Kompetensi Lulusan (SKL) oleh Pemerintah melalui Permen 23 Tahun 2006.

Adapun SKL untuk mata pelajaran matematika adalah: 1) Memahami konsep matematika, menjelaskan keterkaitan antarkonsep dan mengaplikasikan konsep atau algoritma, secara luwes, akurat, efisien, dan tepat, dalam pemecahan masalah; 2) Menggunakan penalaran pada pola dan sifat, melakukan manipulasi matematika dalam membuat generalisasi, menyusun bukti, atau menjelaskan gagasan dan pernyataan matematika; 3) Memecahkan masalah yang meliputi kemampuan memahami masalah, merancang model matematika, menyelesaikan model dan menafsirkan solusi yang diperoleh; 4) Mengomunikasikan gagasan dengan simbol, tabel, diagram, atau media lain untuk memperjelas keadaan atau masalah; 5) Memiliki sikap menghargai kegunaan matematika dalam kehidupan, yaitu memiliki rasa ingin tahu, perhatian, dan minat dalam mempelajari matematika, serta sikap ulet dan percaya diri dalam pemecahan masalah (Puskur, 2007).

1.2. Objek Pembelajaran Matematika

Menurut Tinggih (Hudojo, 2003: 40-41) matematika tidak hanya berhubungan dengan bilangan-bilangan serta operasi-operasinya, melainkan juga unsur ruang sebagai sasarannya. Namun penunjukan kuantitas seperti itu belum memenuhi sasaran matematika yang lain, yaitu yang ditujukan kepada hubungan, pola, bentuk, dan struktur.

Menurut Gagne, belajar matematika terdiri dari objek langsung dan objek tak langsung. Objek-objek langsung pembelajaran matematika terdiri atas: fakta, ketrampilan, konsep, dan prinsip matematika. Sedangkan objek tak langsung pembelajaran matematika adalah: kemampuan berpikir logis, kemampuan memecahkan masalah, sikap positif terhadap matematika, ketekunan, dan ketelitian.untuk saat ini, NCTM mengembangkan kemampuan matematika di ataranya: kemampuan (pemahaman, representasi, komunikasi, koneksi, penalaran-pembuktian, dan pemecahan masalah) matematik.

Begle (Hudojo, 2003: 41) menyatakan bahwa sasaran atau objek penelaahan matematika adalah fakta, konsep, operasi, dan prinsip. Objek penelaahan tersebut menggunakan simbol-simbol yang kosong dalam arti, dalam arti ciri ini yang memungkingkan dapat memasuki wilayah bidang studi atau cabang lain.

Fakta merupakan konvensi-konvensi yang diungkap dengan simbol tertentu. Beberapa contoh fakta sebagai berikut.

- Simbol “5” secara umum sudah dipahami sebagai bilangan “lima”. Jadi jika disajikan angka “5” orang dengan sendirinya akan terbayang dalam pikirannya bilangan “lima”.

- “3 + 4” yang dipahami sebagai “tiga tambah empat”
- “3 × 5 = 5 + 5 + 5 = 15”

Konsep adalah ide abstrak yang dapat digunakan untuk menggolongkan atau mengkalrifikasikan sekumpulan objek, apakah objek tertentu merupakan contoh konsep ataukah bukan. Konsep berhubungan ataukah bukan. Konsep behubungan era dengan definisi. Definisi adalah ungkapan yang membatasi suatu konsep. Dengan adanya definisi oarang dapat membuat ilustrasu atau gambar atau lambang dari konsep yang didefinisikan. Contoh tentang konsep sebagai berikut.

- Dalam matematika terdapat konsep yang amat penting yaitu “fungsi”’ “variabel”, “konstanta”.
- “segitiga” adalah suatu konsep. Dengan konsep itu kita dapat membedakan mana yang merupakan contoh segitiga dan mana yang bukan segitiga.
- “bilangan prima” merupakan konsep, karena dengan konsep itu , kita dapat membedakan mana yang merupakan bilangan prima dan mana yang bukan merupakan bilangan prima.

Prinsip adalah objek matematika yang kompleks. Prinsip dapat terdiri dari atas beberapa fakta, beberapa konsep yang dikaitkan oleh suatu relasi ataupun operasi. Secara sederhana dapatlah dikatakan bahwa prinsip adalah hubungan antara berbagai objek dasar matematika. Prinsip dapat berupa “aksioma”, “teorema”, “sifat” dan sebagainya. Contoh-contoh tentang prinsip adalah sifat distributif dalam aritmatika dan teorema *Pyhtagoras*.

Operasi (abstrak) adalah pengerjaan hitung, pengerjaan aljabar, dan pengerjaan matematika yang lain. Contoh-contoh tentang operasi adalah penjumlahan, perkalian, gabungan, irisan, sama dengan, lebih dari, konjungsi, dan disjungsi.

Dari uraian tersebut, jelas bahwa penelaahan matematika tidak sekedar kuantitas, tetapi lebih dititikberatkan kepada hubungan pola, bentuk, struktur, fakta, operasi dan prinsip. Sasaran kuantitas tidak banyak artinya dalam matematika. Hal ini berarti bahwa matematika itu berkenaan dengan gagasan yang berstruktur yang hubungan-hubungannya diatur secara logis, dimana konsep-konsepnya abstrak dan penalarannya deduktif.

2. Hakikat dan Prinsip Matematika

Proses pembelajaran matematika di kelas akan sangat ditentukan oleh pandangan seorang guru dan keyakinannya terhadap matematika itu sendiri. Karenanya, ketidaksempurnaan memahami 'matematika' dari seorang guru sedikit banyak akan menyebabkan ketidaksempurnaan pada proses pembelajarannya di kelas. Kata lainnya, pandangan dan keyakinan yang benar terhadap pengertian serta definisi matematika diharapkan akan dapat membantu proses pembelajaran matematika yang lebih efektif, efisien, dan sesuai dengan tuntutan zaman (Shadiq, 2007: 2).

Sampai saat ini belum ada definisi tunggal tentang matematika. Namun yang jelas, hakekat matematika dapat diketahui, karena obyek penelaahan matematika yaitu sasarannya telah diketahui, sehingga dapat diketahui pula bagaimana cara berpikir matematika itu.

Kata matamatika sudah tidak asing lagi bagi kita, matematika merupakan ratu dari ilmu pengetahuan dimana materi matematika di perlukan di semua jurusan yang di pelajarai oleh semua orang, disini saya memberikan sebuah pengertian matematika disertai fungsinya serta ruang lingkup pembelajarannya. Misalnya berhitung yang merupakan aktivitas sehari-hari manusia, tidaka ada aktivitas manusia tanpa menggunakan matematika.

Istilah mathematics (Inggris), mathematik (Jerman), mathematique (Perancis), matematico (Itali), matematiceski (Rusia), atau mathematick (Belanda) berasal dari perkataan latin mathematica, yang mulanya diambil dari perkataan Yunani, mathematike, yang berarti “relating to learning”. Perkataan mathematike berhubungan sangat erat dengan sebuah kata lainnya yang serupa, yaitu mathanein yang mengandung arti belajar (berpikir). Jadi berdasarkan etimologis (Tinggih dalam Erman Suherman, 2003: 16), perkataan matematika berarti “ilmu pengetahuan yang diperoleh dengan bernalar”.

Hudoyo (1988: 2-3) mengatakan bahwa, matematika sebagai teori logika deduktif yang berkenaan dengan hubungan-hubungan yang bebas dari isi materialnya dengan hal-hal yang ditelaah, penggolongan dan penelaahan tentang pola, berkenaan dengan ide abstrak yang tersusun secara hirarkis dan penalarannya deduktif.

Berdasarkan pendapat di atas, maka disimpulkan bahwa ciri yang sangat penting dalam matematika adalah disiplin berpikir yang didasarkan pada berpikir logis, konsisten, inovatif dan kreatif.

3. Karakteristik Pembelajaran Matematika

3.1. Memiliki objek kajian abstrak

Objek abstrak disebut juga objek mental yang ada dalam pikiran yang meliputi fakta, konsep, definisi, operasi, dan prinsip. Dari objek dasar disusun suatu pola dan struktur matematika, sehingga mempelajari matematika berarti bermain di wilayah otak (pikiran) manusia. Hanya mereka yang tajam penalarannya (intuisinya) yang akan dapat dengan mudah mempelajari matematika, sedangkan bagi mereka yang lemah, maka visualisasi konsep men Objek kajian matematika ini telah diuraikan pada bagian 1.2. di atas.

3.2. Berpola pikir deduktif

Matematika berpangkal dari hal yang umum diterapkan atau di arahkan ke hal yang bersifat khusus. Banyak penalaran matematika berkaitan dengan pembuktian secara deduktif. Ketika anak sudah mengenal konsep “lingkaran”, selanjutnya ia mengamati lingkungan sekitar, dan dapat mengatakan bangun-bangun yang diamati merupakan bentuk lingkaran atau tidak. Misalnya dari hasil pengamatan diperoleh teori rumus luas lingkaran, tetapi tetap harus dibuktikan secara deduktif. Namun demikian, pembelajaran dan pemahaman konsep matematika dapat diawali secara induktif melalui pengalaman peristiwa nyata ataupun secara intuisi.

3.3. Memiliki simbol yang kosong dari arti

Bekerja dalam matematika seringkali menggunakan simbol-simbol baik yang berupa huruf Latin, huruf Yunani, maupun simbol-simbol khusus lainnya. Rangkaian simbol-simbol tersebut dapat membentuk kalimat dalam matematika (model matematika). Model matematika dapat berupa: persamaan, pertidaksamaan, fungsi, ataupun bangun geometri. Model $z = x + y$ masih kosong dari arti, tergantung dari permasalahan yang menyebabkan model itu, bisa bilangan ataupun persoalan kehidupan, karena itu diperlukan kejelasan dalam lingkup model yang dipakai. Bila ruang lingkupnya bilangan, berarti x, y, dan z adalah simbol bilangan. Misalnya untuk ruang lingkup bilangan bulat, penyelesaian $4x = 10$ adalah tidak ada. Kosong dari arti membawa konsekuensi: memungkinkan matematika memasuki medan garapan dari ilmu yang lain dan persoalan kehidupan sehari-hari. Inilah koneksi matematik yang sekarang intens untuk dikembangkan.

3.4. Bertumpu pada kesepakatan

Aksioma (postulat) merupakan pernyataan pangkal (*undefined term*) yang sering dinyatakan tetapi kebenarannya diterima tanpa perlu dibuktikan. Beberapa aksioma dapat membentuk suatu sistem aksioma, yang selanjutnya dapat menurunkan lemma dan teorema. Matematika berangkat dari kesepakatan awal.

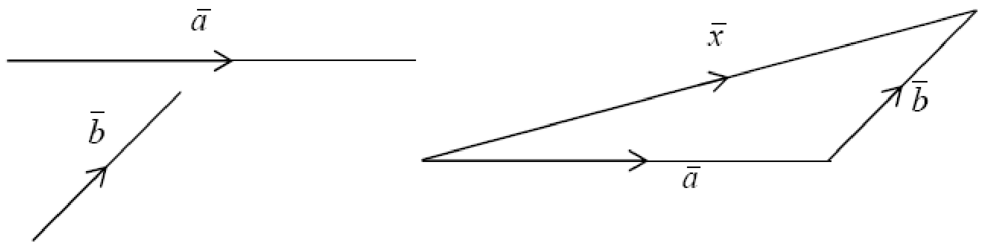
3.5. Memperhatikan semesta pembicaraan

Misalkan kita menemukan pernyataan matematika seperti “tidak mungkin ada nilai a yang memenuhi $3a + 1 = 2$”. Bagaimana reaksi kita? Apakah akan menyalahkan pernyataan tersebut? Pernyataan di atas akan dapat dinyatakan benar atau salah bergantung semesta pembicaraannya, kalau a bilangan riil ataupun bilangan rasional, maka ia mempunyai nilai yaitu a = 1/3. Sedangkan kalau semesta pembicaraannya berupa bilangan bulat, maka kita tidak akan menemukan nilai a. Semesta pembicaraan inilah yang menjadi pijakan untuk membuat suatu definisi dalam matematika.

Contoh lain, dalam semesta pembicaraan vektor di dimensi dua, terdapat model

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{x}$$

Di sini jelas bahwa huruf-huruf tersebut tidak berarti bilangan, tetapi haruslah suatu vektor, yang dalam sajian geometrik dapat dinyatakan oleh



3.6. Konsisten dalam sistemnya

Dalam matematika terdapat banyak sistem. Ada yang saling terkait dan ada yang saling lepas. Sistem-sistem aljabar dengan sistem-sistem geometri saling lepas. Dalam sistem aljabar ada sistem-sistem lagi yang saling terkait. Dalam satu sistem tidak boleh ada kontradiksi. Tetapi antar sistem ada kemungkinan timbul kontradiksi. Contoh: dalam geometri *Euclide* jumlah sudut-sudut segitiga adalah 180^{o}. Sedangkan di geometri non-*Euclide* jumlah sudut-sudut segitiga lebih dari 180^{o} ataupun kurang dari 180^{o}. Dalam matematika terdapat banyak sistem, ada yang saling terkait dan ada yang saling lepas, dalam satu sistem tidak boleh ada kontradiksi, tetapi antar sistem ada kemungkinan timbul kontradiksi.

C. RANGKUMAN

- Landasan pembelajaran matematika adalah Permen 23 Tahun 2006, tentang SKL mata pelajaran matematika: 1) Memahami konsep matematika, menjelaskan keterkaitan antarkonsep dan mengaplikasikan konsep atau algoritma, secara luwes, akurat, efisien, dan tepat, dalam pemecahan masalah; 2) Menggunakan penalaran pada pola dan sifat, melakukan manipulasi matematika dalam membuat generalisasi, menyusun bukti, atau menjelaskan gagasan dan pernyataan matematika; 3) Memecahkan masalah yang meliputi kemampuan memahami masalah, merancang model matematika, menyelesaikan model dan menafsirkan solusi yang diperoleh; 4) Mengomunikasikan gagasan dengan simbol, tabel, diagram, atau media lain untuk memperjelas keadaan atau masalah; 5) Memiliki sikap menghargai kegunaan matematika dalam kehidupan, yaitu memiliki rasa ingin tahu, perhatian, dan minat dalam mempelajari matematika, serta sikap ulet dan percaya diri dalam pemecahan masalah (Puskur, 2007).

- ❖ Objek penelaahan matematika adalah fakta, konsep, operasi, dan prinsip
- ❖ Pada hakikatnya matematika sebagai teori logika deduktif yang berkenaan dengan hubungan-hubungan yang bebas dari isi materialnya dengan hal-hal yang ditelaah, penggolongan dan penelaahan tentang pola, berkenaan dengan ide abstrak yang tersusun secara hirarkis dan penalarannya deduktif.
- ❖ Karakteristik Matematika adalah memiliki objek kajian abstrak, berpola pikir deduktif, memiliki simbol yang kosong dari arti, bertumpu pada kesepakatan, dan memperhatikan semesta pembicaraan.

D. LATIHAN

Kerjakan soal-soal di bawah ini

1. Saat ini sering diselenggarakannya OSN ataupun ajang Olimpiade Matematika bagi siswa SMA. Partisipasi sekolah pada ajang tersebut masih belum optimal. Guru menganggap siswa-siswa mereka belum mampu menghadapi sulitnya soal-soal olimpiade matematika, alih-alih mengatakan “gurunya saja belum bisa, apalagi muridnya”. Bagaimana pandangan Anda terhadap persoalan tersebut, padahal Permen 23 Tahun 2006 sudah mengharuskan pemecahan masalah matematik muncul dalam pembelajarn di kelas.

2. Mengingat objek penelaahan matematika adalah fakta, konsep, operasi, dan prinsip, maka tuliskan fakta, konsep, operasi, dan prinsip untuk materi operasi bilangan bulat.
3. Misalkan ada seseorang mendefinisikan matematika sebagai ilmu tentang bilangan dan perhitungan. Menurut Anda, bagian apakah yang kurang dalam definisi tersebut?
4. Matematika adalah ilmu yang dibangun dengan pola pikir deduktif, tetapi penyampaian materinya sebaiknya secara induktif. Berikan penjelasan maksud dari pernyataan tersebut.
5. Apakah maksud dari matematika sebagai ilmu yang bertumpu pada kesepakatan? Adakah hal-hal yang belum disepakati dalam matematika? Berikan contoh untuk mendukung jawaban Anda.

BAB III
MATERI ESENSIAL MATEMATIKA

A. TUJUAN

Setelah mempelajari bagian materi esensial matematika ini diharapkan Anda dapat mengetahui materi:

1. Logika matematika: pernyataan dan ingkarannya, nilai kebenaran pernyataan majemuk, serta menggunakan prinsip logika matematika dalam pemecahan masalah.
2. Aturan pangkat, akar dan logaritma, fungsi aljabar sederhana, persamaan dan pertidaksamaan kuadrat, persamaan lingkaran dan persamaan garis singgungnya, suku banyak, sistem persamaan linear, program linear, matriks, vektor, transformasi geometri, barisan dan deret, serta menggunakannya dalam pemecahan masalah.
3. Geometri: kedudukan titik, garis dan bidang, jarak, dan sudut.
4. Perbandingan, fungsi, persamaan, dan identitas trigonometri, melakukan manipulasi aljabar untuk menyusun bukti serta menggunakannya dalam pemecahan masalah
5. Limit, turunan, dan integral dari fungsi aljabar dan fungsi trigonometri, serta menerapkannya dalam pemecahan masalah
6. Satistika dan peluang: mengolah, menyajikan, dan menafsirkan data, memahami kaidah pencacahan, permutasi, kombinasi dan peluang kejadian serta menerapkannya dalam pemecahan masalah.

B. URAIAN MATERI

Dari sekian banyak materi esensial dalam matematika SMA, mengingat keterbatasan tempat, maka dalam modul ini hanya akan dibahas beberapa materi esensial. Semoga ini menjadi pemicu awal bagi guru matematika SMA selaku peserta diklat.

1. ALJABAR

1.1. Aturan Pangkat, Akar dan Logaritma

1.1.1. Eksponen

Perkalian dari bilangan riil $a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ sebanyak n kali, maka dinotasikan sebagai a^n, di mana n dinamakan sebagai pangkat (eksponen) dan a dinamakan sebagai basis (bilangan pokok). Bila a suatu bilangan real dan n suatu bilangan bulat positif, maka besaran a dipangkat n ditulis a^n, yang didefinisiskan sebagai:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ faktor}}$$

n : pangkat

a : bilangan pokok

Sifat-sifat:

Jika a bilangan rasional dan m, n bilangan bulat positif maka

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; dengan $m > n$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- Jika a bilangan rasional, $a \neq 0$, dan n adalah bilangan bulat positif maka

  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $a^0 = 1$, dengan a bilangan rasional dan $a \neq 0$. Buktikan sifat tersebut!

Persamaan Eksponen **a**dalah persamaan yang didalamnya terdapat pangkat yang berbentuk fungsi dalam x, dengan bentuk-bentuk sebagai berikut

- $a^{f(x)} = a^{g(x)}$; berarti $f(x) = g(x)$

  Kalau bilangan pokoknya sama maka pangkatnya dapat disamakan.

- $\sqrt{8^{2x-3}} = (32^{x+1})^{\frac{1}{4}}$

  $(2^3)^{(2x-3)\frac{1}{2}} = (2^5)^{(x+1)\frac{1}{4}}$

  $2^{\frac{(6x-9)}{2}} = 2^{\frac{(5x+5)}{4}}$

  $\frac{(6x-9)}{2} = \frac{(5x+5)}{4}$

  $24x - 36 = 10x + 10$

  $14x = 46$

  $x = \frac{23}{7}$

- $3^{x^2-3x+2} - 3^{x^2-3x+1} = 6$

  $9 \cdot 3^{x^2-3x} - 3 \cdot 3^{x^2-3x} = 6$

  $6 \cdot 3^{x^2-3x} = 6$

  $3^{x^2-3x} = 3^0$

  $x^2 - 3x = 0$

  $x(x - 3) = 0$

  $x_1 = 0$ atau $x_2 = 3$

- $2^{2x+2} - 2^{x+2} + 1 = 0$

  $2^2.2^{2x} - 2^2.2^x + 1 = 0$

  Misalkan : $2^x = p$

  $2^{2x} = (2x)^2 = p^2$

  $4p^2 - 4p + 1 = 0$

  $(2p - 1)^2 = 0$

  $2p - 1 = 0$

  $p = 1/2$

  $2^x = 2^{-1}$

  $x = -1$

- $3^x + 3^{(3-x)} - 28 = 10$

  $3^x + 3^3/3^x - 28 = 10$

  Misalkan: $3^x = p$

  $p + 27/p - 28 = 0$

  $p^2 - 28p + 27 = 0$

  $(p - 1)(p - 27) = 0$

  $p_1 = 1$ maka $3^x = 3^0$ sehingga $x_1 = 0$

  $p_2 = 27$ maka $3^x = 3^3$ sehingga $x_2 = 3$

- $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ maka $f(x) = 0$

  Bilangan pokok berbeda, pangkat sama. Pangkatnya = 0.

  - $3^{x^2-x-2} = 7^{x^2-x-2}$

    $x^2 - x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (x - 2)(x + 1) = 0$

    $x_1 = 2$ atau $x_2 = -1$

- $f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}$

  Bilangan pokok (dalam fungsi) sama, pangkat berbeda.Tinjau beberapa kemungkinan.

1. Pangkat disamakan $g(x) = h(x)$
2. Bilangan pokok $f(x) = 1$; $1^{g(x)} = 1^{h(x)} = 1$
3. Bilangan pokok $f(x) = -1$

   Dengan syarat, setelah nilai x didapat dari $f(x) = -1$, maka nilai pangkatnya yaitu $g(x)$ dan $h(x)$ kedua-duanya harus genap atau kedua-duanya harus ganjil. Jika $g(x)$ dan $h(x)$ genap: $(-1)^{g(x)} = (-1)^{h(x)} = 1$. Jika $g(x)$ dan $h(x)$ ganjil: $(-1)^{g(x)} = (-1)^{h(x)} = -1$.
4. Bilangan pokok $f(x) = 0$

   Dengan syarat, setelah nilai x didapat dari $f(x) = 0$, maka nilai pangkatnya yaitu $g(x)$ dan $h(x)$ kedua-duanya harus positif. $g(x)$ dan $h(x)$ positif maka $0^{g(x)} = 0^{h(x)} = 0$

- $(x^2 - 5x + 5)^{3x-2} = (x^2 - 5x + 5)^{2x+3}$
  1. Samakan pangkat

     $3x - 2 = 2x + 3$ maka $x_1 = 5$
  2. Bilangan pokok = 1

     $x^2 - 5x + 5 = 1$

     $x^2 - 5x + 4 = 0$ maka $(x - 1)(x - 4) = 0$, diperoleh $x_2 = 1$ atau $x_3 = 4$
  3. Bilangan pokok = -1

     $x^2 - 5x + 5 = -1$

     $x^2 - 5x + 6 = 0$ maka $(x - 2)(x - 3) = 0$, diperoleh $x = 2$ atau $x = 3$

     $g(2) = 4$; $h(2) = 7$; $x = 2$ tak memenuhi karena $(-1)^4 \neq (-1)^7$

     $g(3) = 7$; $h(3) = 9$; $x_4 = 3$ memenuhi karena $(-1)^7 = (-1)^9 = -1$
  4. Bilangan pokok = 0

     $x^2 - 5x + 5 = 0$ maka $x_{5,6} = (5 \pm \sqrt{5})/2$

     Kedua-duanya memenuhi syarat, karena:

     $g(5/2 \pm ½\sqrt{5}) > 0$

     $h(5/2 \pm ½\sqrt{5}) > 0$

     Harga x yang memenuhi persamaan di atas adalah:

     HP: $\{x|x = 5, 1, 4, 3, 5/2 \pm ½\sqrt{5}\}$

1.1.2. Bentuk Akar

Jika $a^n = p$ dengan a, p adalah bilangan real, dan n adalah bilangan bulat, dengan $n > 0$, maka $a = p^{\frac{1}{n}}$, didefinisikan $a = \sqrt[n]{p}$

- ❖ $\left(p^{\frac{1}{n}}\right)^n = p$; $p^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{p}$; $\left(\sqrt[n]{p}\right)^n = p$
- ❖ $\left(p^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = p^{\frac{1}{mn}}$
- ❖ $p^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{p^m} = \left(\sqrt[n]{p}\right)^m$
- ❖ $\sqrt[n]{pq} = \sqrt[n]{p}\ \sqrt[n]{p}$
- ❖ $\sqrt[n]{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt[n]{p}}{\sqrt[n]{q}}$ p
- ❖ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{p}} = \sqrt[mn]{p}$

Kita sudah memiliki informasi bahwa, $\sqrt{10} = \sqrt{2} \times \sqrt{5}$, dan secara umum dituliskan sebagai $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$. Juga diketahui bahwa $\left(\sqrt{p}\right)^2 = p$. Berdasarkan rumusan ini, kita akan menghitung hasil dari $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$.

Sebagian dari kita mungkin akan mengerjakannya dengan bentuk

$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \times (-1)} = \sqrt{+1} = 1$ (*)

Sebagian yang lain boleh jadi akan mengerjakannya dengan cara

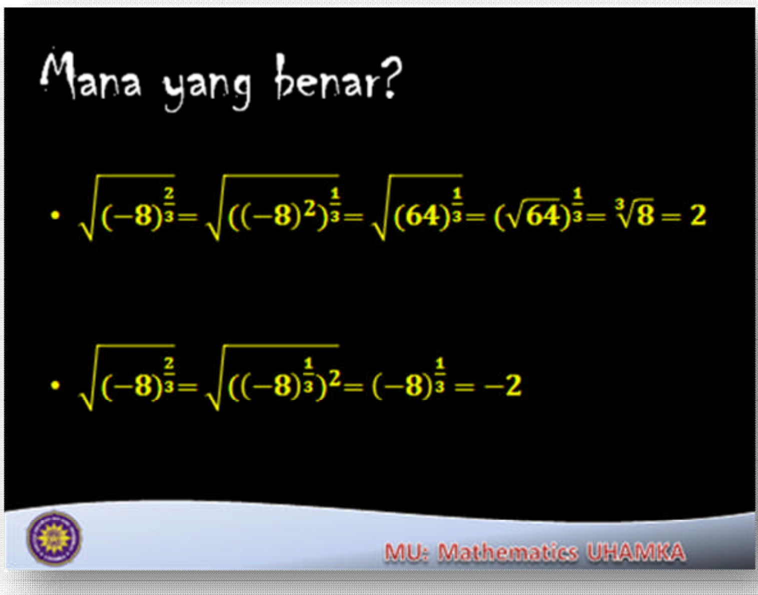
$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$ (**)

Dari (*) dan (**) dapat disimpulkan bahwa 1 = – 1.

Setiap memberikan pelatihan pemelajaran matematika bagi guru matematika SMA di Jakarta, Banten, dan Jawa Barat maupun dalam mengisi PLPG Matematika SMA, penulis selalu menyajikan slide di bawah ini.

Kemudian terjadilah konflik kognitif pada guru, membenarkan salah satu jawaban, atau secara aljabar membenarkan dua-duanya.

Penulis mengarahkan mereka untuk menggunakan kalkulator ataupun program *Microsoft Excel*, kemudian anggukan kepala pun terjadi, AHA hadirlah sebuah jawaban.



Jawaban dari mana yang benar juga ada di tangan pembaca, silahkan menginvestigasi permasalahan kekeliran pengakaran ini dengan menggunakan alat komputasi. Selain itu, gunakan buku-buku yang membahas tentang eksponen untuk memperkuat konsep kita.

1.1.3. Logaritma

Jika $x = a^n$ maka ${}^a\log x = n$, dan sebaliknya jika ${}^a\log x = n$ maka $x = a^n$.

${}^a\log x = n \Rightarrow x = a^n$, dengan a : bilangan pokok (basis), $a > 0$; $a \neq 1$;

Sifat-sifat:

Untuk $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ dan $y > 0$ serta a, x, dan $y \in \boldsymbol{R}$ berlaku:

- ${}^a\log a = 1$, ${}^a\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$
- ${}^a\log x + {}^a\log y = {}^a\log x$
- ${}^a\log x - {}^a\log y = {}^a\log \frac{x}{y}$
- ${}^a\log x^n = n\, {}^a\log x$
- ${}^{a^n}\log x = \frac{m}{n}\, {}^a\log x$
- Untuk a, $p > 0$, dan a, $p \neq 1$, serta a, p, dan $x \in \boldsymbol{R}$, berlaku:

$$^{a}\log x = \frac{^{p}\log x}{^{p}\log x} = \frac{1}{^{x}\log a}$$

- $^{a}\log x - {}^{x}\log y = {}^{a}\log y$
- $a\ {}^{a}\log x = x$
- $a^{n\ {}^{a}\log x} = x^{n}$

Mencari nilai x yang memenuhi persamaan logaritma

- $x \log (0{,}01) = -1/8$

  $x^{-1/8} = 10^{-2}$

  $(x^{-1/8})^{-8} = (10^{-2})^{-8}$

  $x = 10^{16}$
- $^{x}\log 81 - 2\ {}^{x}\log 27 + {}^{x}\log 9 + \frac{1}{2}\ {}^{x}\log 729 = 6$

  $^{x}\log 3^{4} - 2\ {}^{x}\log 3^{3} + {}^{x}\log 3^{2} + \frac{1}{2}\ {}^{x}\log 3^{6} = 6$

  $4\ {}^{x}\log 3 - 6\ {}^{x}\log 3 + 2\ {}^{x}\log 3 + 3\ {}^{x}\log 3 = 6$

  $3\ {}^{x}\log 3 = 6$

  $^{x}\log 3 = 2$

  $x^{2} = 3$

  $x = \pm\sqrt{3}$; $x > 0$
- $^{x}\log (x + 12) - 3\ {}^{x}\log 4 + 1 = 0$

  $^{x}\log(x + 12) - {}^{x}\log 4^{3} = -1$

  $^{x}\log\left(\frac{x + 12}{4^{3}}\right) = -1$

  $\frac{x + 12}{4^{3}} = \frac{x1}{x}$

  $x^{2} + 12x - 64 = 0$

  $(x + 16)(x - 4) = 0$

  $x = -16$ atau $x = 4$
- $^{2}\log^{2} x - 2\ {}^{2}\log x - 3 = 0$

  misalkan: $^{2}\log x = p$

  $p^{2} - 2p - 3 = 0$

  $(p - 3)(p + 1) = 0$

$p_1 = 3$ didapat ${}^2\log x = 3$, sehingga $x_1 = 2^3 = 8$

$p_2 = -1$ didapat ${}^2\log x = -1$, sehingga $x_2 = 2^{-1} = 1/2$

1.2. Fungsi Aljabar Sederhana

1.2.1. Mengkonstruksi Bentuk Aljabar

Perhatikan paradoks pengerjaan aljabar berikut ini

Andaikan $x = y$

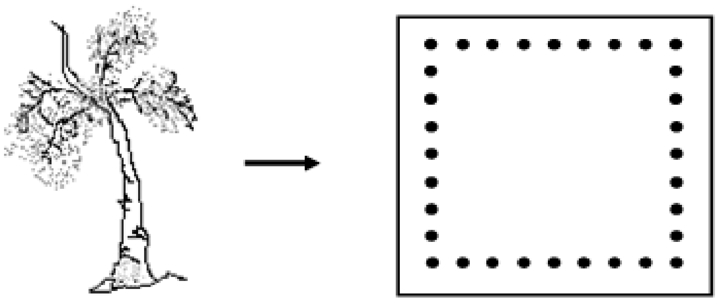
$x^2 = xy$	; kalikan dengan x
$x^2 - y^2 = xy - y^2$	; kurangkan dengan y^2
$(x - y)(x + y) = y(x - y)$	; difaktorkan
$(x + y) = y$	; dibagi dengan $(x - y)$
$2y = y$	; ganti x dengan y
$2 = 1$	; bagi dengan y

Sekarang kita memiliki bahwa 2 = 1

Dengan memperhatikan 2 = 1 di atas, jelas memberikan sebuah kesalahan. Temukanlah, di mana letak kesalahan dalam proses pengerjaan aljabar di atas.

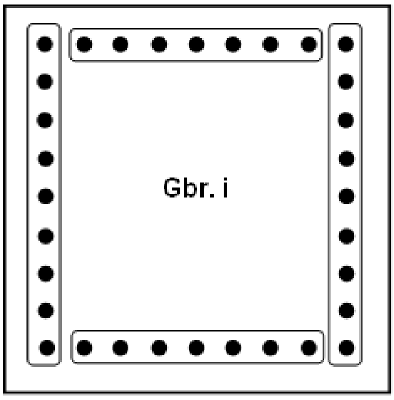
Pada kesempatan ini kita akan menggunakan permasalahan pohon sekeliling lahan berbentuk persegi, untuk mengkonstruksi bentuk aljabar. Kemudian pohon-pohon ini dihitung banyaknya dengan beragam cara, kemudian digambarkan secara geometrik untuk dilihat koneksi dengan geometri.

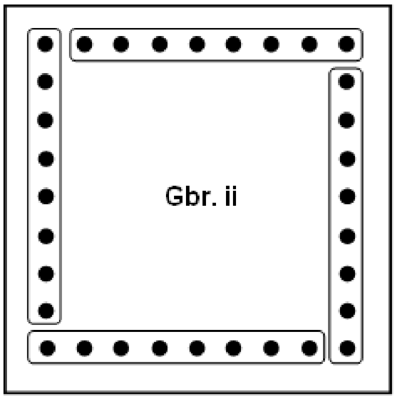
Jika pada sekeliling lahan berbentuk persegi dengan ukuran luas 400 m^2, akan ditanami pohon jati dengan jarak 2,5 m. Maka ada 9 pohon jati pada setiap sisi lahan.



Lalu bagaimana cara menghitung banyaknya pohon jati tersebut, apabila ada 9 pohon setiap sisi lahan?

Bagi orang bisaa langsung akan menganggap banyaknya pohon jati adalah 9 + 9 + 9 + 9 = 36, atau 4 × 9 = 36 pohon jati. Kita dapat menyajikan cara menghitung banyaknya pohon dengan cara-cara yang beragam, di antaranya:





Pada gambar *i*, banyaknya pohon:

9 + 9 + (9 – 2) + (9 – 2) = 32

9 + 9 + 7 + 7 = 32

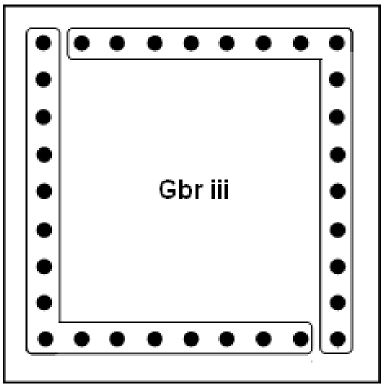
2 × 9 + 2 × 7 = 32

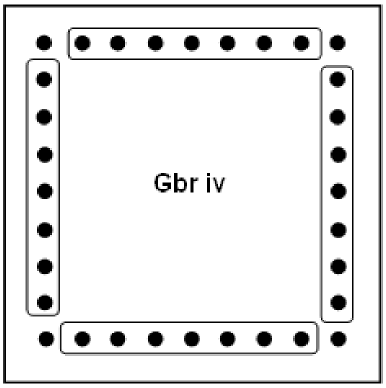
Pada gambar *ii*, banyaknya pohon:

4 × (9 – 1) = 32

8 + 8 + 8 + 8 = 32

4 × 8 = 32





Pada gambar *iii*, banyaknya pohon:

2 × 16 = 32

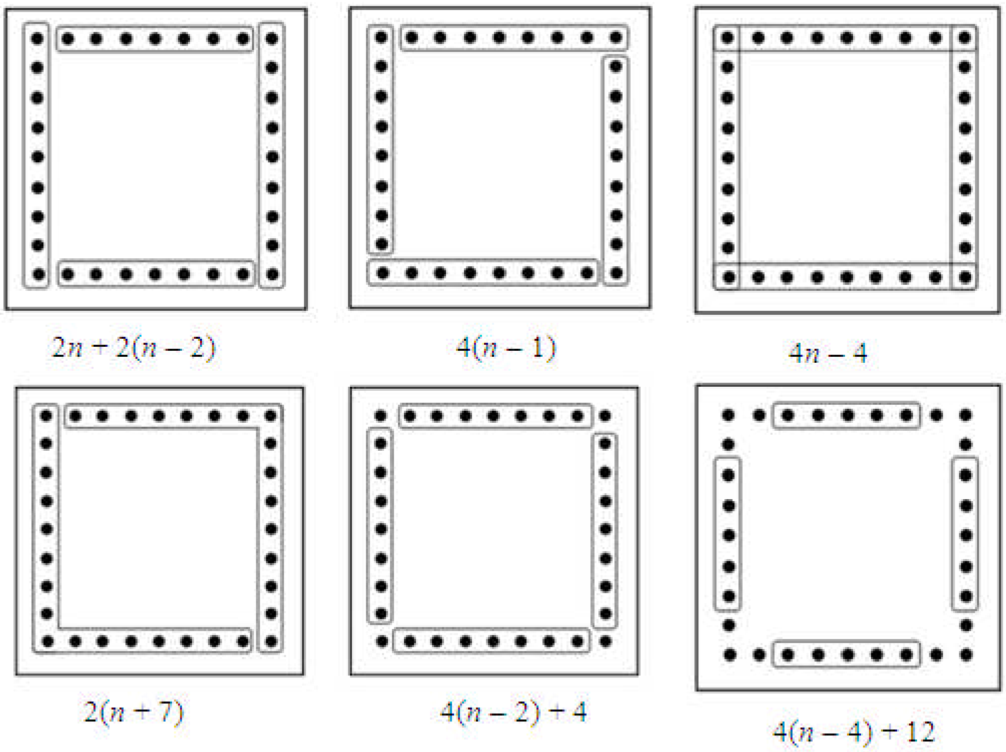
Pada gambar *iv*, banyaknya pohon:

4 × (9 – 2) + 4 = 32

4 × 7 + 4 = 32

Masih banyak lagi formasi penghitungan banyaknya pohon jati, kesemuanya menuntut kreativitas kita dalam hal daya tilik bidang. Open-ended memungkinkan kita untuk dapat melihat satu permasalahan secara berbeda dan beragam.

Jika diperumum untuk kondisi *n* banyaknya pohon, maka akan diperoleh beragam rumus yang nilainya sama. Ilustrasi berikut menunjukkan bahwa persegi dengan *n* pohon pada setiap sisi.



Dari keenam rumus di atas, kita dapat menunjukkan bahwa kesemuanya ekuivalen.

$2n + 2(n - 2) = 2n + 2n - 4$ $= 4n - 4$	$4(n - 1) = 4n - 4$
$2(n + 7) = 2n + 14$	$4(n - 2) + 4 = 4n - 8 + 4$ $= 4n - 4$
$4n - 4$	$4(n - 4) + 12 = 4n - 16 + 12$ $= 4n - 4$

Yang menarik di sini adalah munculnya $2(n + 7)$, kita harus menyamakannya dengan $4n - 4$.

$$2(n + 7) = 4n - 4$$

$$2n + 14 = 4n - 4$$

$$18 = 2n$$

$$n = 9$$

Konsep ini dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier, berkenaan dengan banyaknya pohon, banyaknya tiang pagar, banyaknya tiang bendera sekeling lapangan, banyaknya prajurit yang menjaga istana kerajaan. Walaupun dengan beragam persoalan, namun harus mempertahankan jarak dan bentuknya yang persegi Misalnya tentukan banyaknya pohon setiap sisi lahan berbentuk persegi apabila keseluruhan pohon sebanyak 2012.

$$2012 = 4n - 4$$
$$2016 = 4n$$
$$n = 1004$$

Jadi banyaknya pohon setiap sisi lahan adalah 1004.

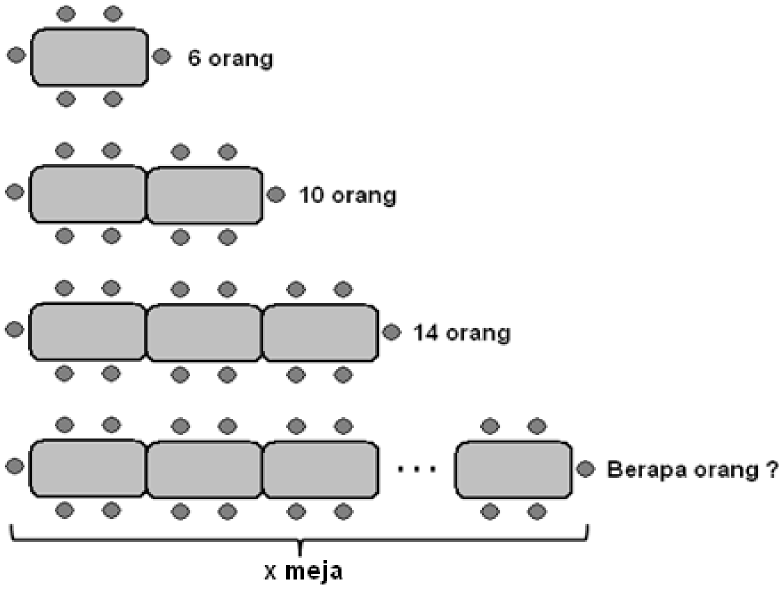
1.2.2. Fungsi

a. Pengertian Fungsi

Bayangkan suatu fungsi sebagai sebuah senapan, ia mengambil amunisi dari domain dan menembakkannya pada kodomain. Setiap peluru mengenai sebuah titik sasaran tunggal, tetapi dapat terjadi bahwa beberapa peluru akan mendarat pada sasaran yang sama, namun sangat sulit untuk terjadi bahwa dalam waktu yang bersamaan satu peluru akan mendarat di dua sasaran yang berbeda (Purcell-Varbeg, 1992: 48).

Istilah fungsi yang diperkenalkan oleh Leibniz (1646 – 1716) digunakan untuk menyatakan hubungan (relasi) khusus antara dua himpunan. Dapatkah seorang sopir menyetir dua mobil sekaligus (secara bersamaan)? Atau dapatkan satu mobil disetir oleh dua orang sopir sekaligus? Hal tersebut salah satu gambaran bagaimana korespondensi satu-satu bekerja pada persoalan kehidupan sehari-hari.

Pada suatu kelas terdapat beberapa meja yang menyerupai bentuk persegipanjang. Jika pada sisi terpanjang meja dapat diduduki oleh dua orang dan sisi terpendek diduduki oleh satu orang, seperti terlihat pada gambar di bawah ini.



Tentukan banyaknya orang yang dapat duduk jika tersedia susunan sebanyak 55 meja. Data tentang relasi antara banyaknya meja dengan banyaknya orang yang dapat duduk adalah merupakan fungsi dari meja ke orang.

Meja (x)	**Orang $f(x)$**	**Pengerjaan**
1	6	$4 \times 1 + 2 = 6$
2	10	$4 \times 2 + 2 = 10$
3	14	$4 \times 3 + 2 = 14$
4	18	$4 \times 4 + 2 = 18$
…	…	…
55		$\mathbf{4 \times 55 + 2 = 222}$
…	…	…
$\boldsymbol{x}$		$\mathbf{4}\boldsymbol{x}\mathbf{ + 2}$

Suatu fungsi dapat diilustrasikan oleh bagan berikut.

Definisi

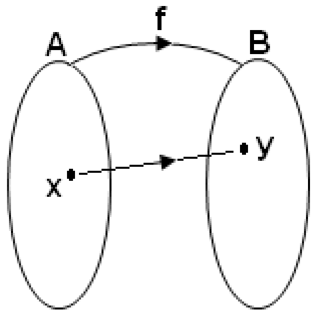
Relasi f dari himpunan A ke himpunan B disebut fungsi, apabila ia memasangkan setiap anggota A tepat satu ke anggota B, dituliskan sebagai

$$f : A \rightarrow B$$

notasi ini dapat dibaca dengan fungsi f memetakan A ke B.

Himpunan *A* dinamakan domain fungsi (*Df*) sedangkan himpunan *B* sebagai kodomain yang memuat daerah hasil (range) fungsi (*Rf*).

$\forall\ x \in A, \exists!\ y \in B, \ni f(x) = y.\ Df = A,\ Rf \subseteq B.$

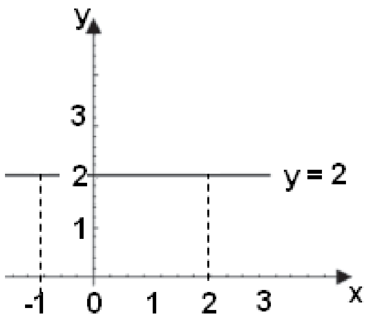


x merupakan prapeta dari *y* sedangkan *y* sebagai peta dari *x*, karena itu fungsi juga disebut sebagai pemetaan (*mapping*).

b. Macam-Macam Fungsi

❖ Fungsi Konstan

$f(x) = k \quad ; \forall\ x \in Df$



$f(-1) = 3$

$f(2) = 3$

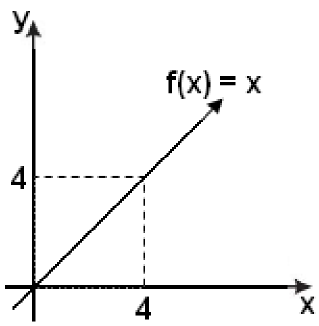
$f(x) = 3 \qquad ; \forall\ x \in \boldsymbol{R}$

$Df = \boldsymbol{R}$

$Rf = \{3\}$

❖ Fungsi Identitas

f dikatakan sebagai fungsi identitas, jika $\forall\ x \in Df$ berlaku $f(x) = x$



$f(4) = 4$

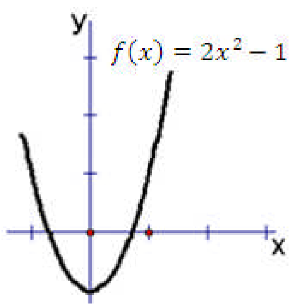
$Df = \boldsymbol{R}$

$Rf = \boldsymbol{R}$

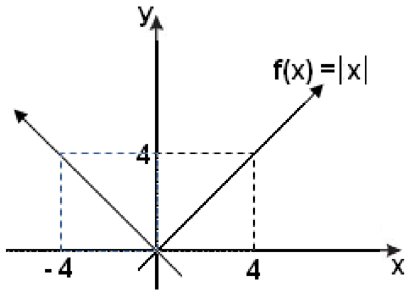
❖ Fungsi Kuadrat

$Df = \boldsymbol{R}$

$Rf = [-1, \infty)$



$f(1) = 1$



- Fungsi Harga Mutlak

  $f(x) = \begin{cases} -x & ; x < 0 \\ x & ; x \geq 0 \end{cases}$

  $Df = \mathbf{R}$

  $Rf = [0, \infty)$

- Masih banyak lagi fungsi, di antaranya: fungsi trigonometri, fungsi linier, fungsi polinom, fungsi genap-ganjil, fungsi periodic, fungsi bilangan bulat terbesar (fungsi tangga), dan fungsi turunan.

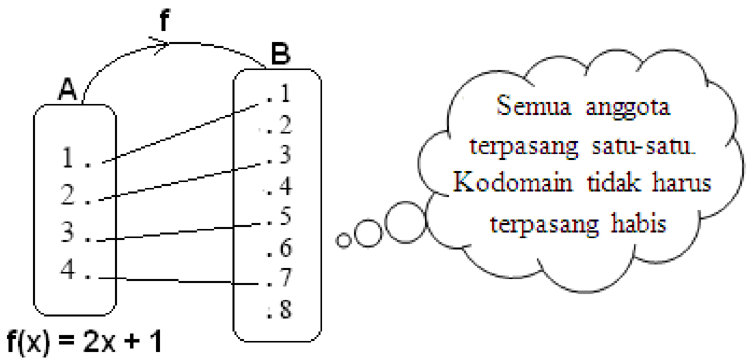
c. Jenis Fungsi

Kalau kita memperhatikan anggota-anggota pada domain dan kodomain fungsi yang direlasikan oleh f, maka dikenal tiga jenis fungsi, yaitu fungsi satu-satu (injektif), fungsi onto (surjektif), dan fungsi bijektif.

- **Fungsi satu-satu (injektif)**

  $f : A \to B$ dikatakan sebagai fungsi injektif, apabila setiap $a_1, a_2 \in A \ \exists \ f(a_1), f(a_2) \in B$, maka berlaku:

  $a_1 \neq a_2 \to f(a_1) \neq f(a_2)$ yang setara dengan $f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2$



Sebagai contoh $f(x) = 2x + 1$ merupakan fungsi injektif, karena kalau kita ambil $a_1 = 1 \neq 3 = a_2 \to f(a_1) = f(1) = 1 \neq 5 = f(3) = f(a_2)$.

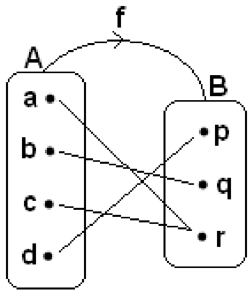
Atau

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$$
$$2x_1 = 2x_2$$
$$x_1 = x_2$$

Jadi $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$

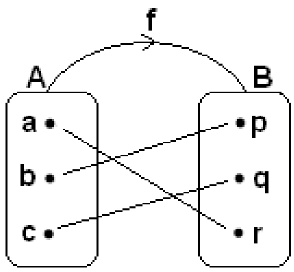
❖ **Fungsi onto (surjektif)**

$f : A \rightarrow B$ dikatakan sebagai fungsi surjektif (pada/onto), apabila setiap $b \in B$ $\exists\ a \in B$ sedemikian sehingga $f(a) = b$. Semua anggota kodomain terpasang habis dengan anggota domain, lebih dari satu anggota A boleh terpasang dengan satu anggota B. Pada jenis fungsi ini $Rf = B$. Fungsi surjektif diilustrasikan oleh diagram berikut ini



❖ **Fungsi bijektif**

$f : A \rightarrow B$ dikatakan sebagai fungsi bijektif apabila ia memenuhi fungsi injektif sekaligus sebagai fungsi surjektif. Fungsi ini biasa juga disebut sebagai korespondensi satu-satu. Fungsi bijektif diilustrasikan oleh diagram berikut ini



Kasus pemasangan sopir dengan mobil di awal materi fungsi merupakan salah satu contoh korespondensi satu-satu. Relasi guru-guru dengan NUPTK-nya merupakan fungsi bijektif.

d. Operasi pada Fungsi

Operasi pada fungsi meliputi: jumlah, selisih, hasil kali, hasil bagi, dan pangkat (Purcell-Varbeg, 1992: 54).

Jika f dan g dua buah fungsi, maka $\forall\ x \in Df$ berlaku

$\#[(f+g)(x)] = f(x)+g(x)$

$\#[(f-g)(x)] = f(x)-g(x)$

$\#[(f\cdot g)(x)] = f(x)\cdot g(x)$

$\# \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad ; g(x) \neq 0$

$\#[f(x)]^n = f^n(x) = \underbrace{f(x)\cdot f(x)\cdot f(x)\cdot \ldots \cdot f(x)}_{n \text{ kali}}$

Diberikan fungsi-fungsi

$f(x) = \frac{x-2}{3} \qquad g(x) = \sqrt{x}$

$\#[(f+g)(x)] = \frac{x-2}{3} + \sqrt{x}$

$\#[(f-g)(x)] = \frac{x-2}{3} - \sqrt{x}$

$\#[(f\cdot g)(x)] = \frac{x-2}{3}\sqrt{x}$

$\# \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x-2}{3\sqrt{x}}$

$\#[g(x)]^2 = \left[\sqrt{x}\right]^2 = x$

Di sini kita harus memperhatikan daerah asal dan daerah hasil fungsi.

e. Komposisi dan Invers Fungsi

Sebelumnya kita telah membahas fungsi dari suatu bilangan (memetakan bilangan). Sekarang kita akan membahas fungsi komposisi, yaitu fungsi yang memetakan fungsi dengan kata lain *f* sebagai fungsi dari fungsi (Morrison, 2006: 117).

Misalkan dua fungsi $f(x) = 2x + 1$ dan $g(x) = x^2$

$$f(3) = 7$$

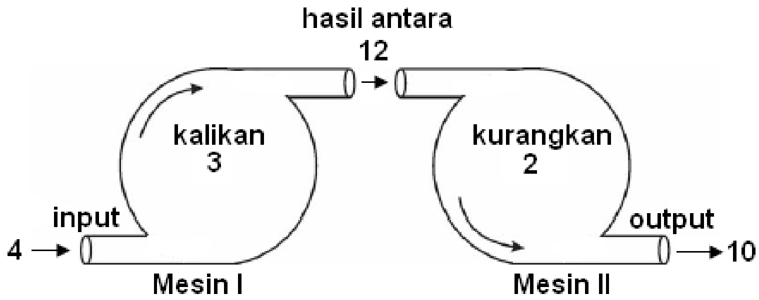
$$g(7) = 49$$

Kita dapat menuliskan $g[f(3)] = 49$.

$g(f(x))$ dinamakan sebagai fungsi komposisi, di mana f bekerja terlebih dahulu baru kemudian dilanjutkan oleh g. Kita menotasikan fungsi komposisi ini dengan

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Sebelumnya kita telah membayangkan fungsi sebagai sebuah senapan. Sekarang bayangkan fungsi sebagai sebuah mesin, yang menerima x sebagai masukan, bekerja (memproses) x, dan menghasilkan $f(x)$ sebagai keluaran. Terkadang dua buah mesin dapat diletakkan berdampingan untuk memproses seuatu yang lebih kompleks (Purcell-Varbeg, 1992: 56). Untuk memetakan sebuah bilangan, dilakukan dua proses dengan menggunakan 2 mesin, seperti pada gambar berikut ini (Kurniasih-Lestari, 2009: 111).

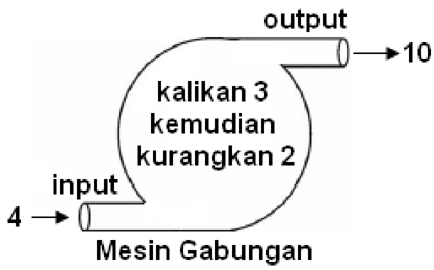


Mesin I memproses 4 menjadi 12 oleh pengerjaan (3 × 4), kemudian oleh Mesin II 12 diproses dengan mengurangkan 2 sehingga menghasilkan 10. Kalau x yang diproses oleh kedua mesin ini, maka alur pengerjaannya diilustrasikan oleh:

$$\text{Mesin} : x \xrightarrow{\text{Mesin I}} 3x \xrightarrow{\text{Mesin II}} 3x - 2$$

Mesin I : $3x$ dan Mesin II: $x - 2$.

Sedangkan kalau kedua mesin ini digabungkan (menjadi satu mesin), maka proses pengerjaannya dapat dilihat pada gambar berikut ini

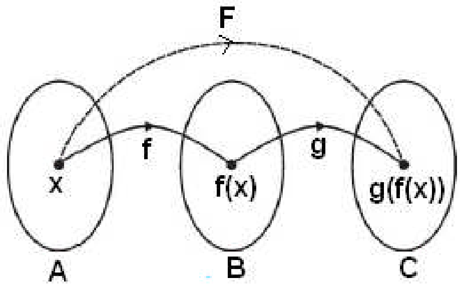


Mesin Gabungan: $3x - 2$.

Analog dengan ilustrasi di atas, komposisi fungsi g dan fungsi f yang dinotasikan dengan $(g \circ f)(x)$, dapat didefinisikan sebagai berikut.

Jika $f : A \to B$ dan fungsi $g : B \to C$, maka fungsi $F : A \to C$ melalui hubungan dua fungsi f dan g, dapat dinyatakan sebagai fungsi komposisi.

$$F : x \to g(f(x)) \text{ atau } F(x) = g(f(x)).$$



Contoh soal

Diketahui $f(x) = 2x - 1$ dan $g(x) = x^2 + 1$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = 2(x^2 + 1) - 1 = 2x^2 + 1$

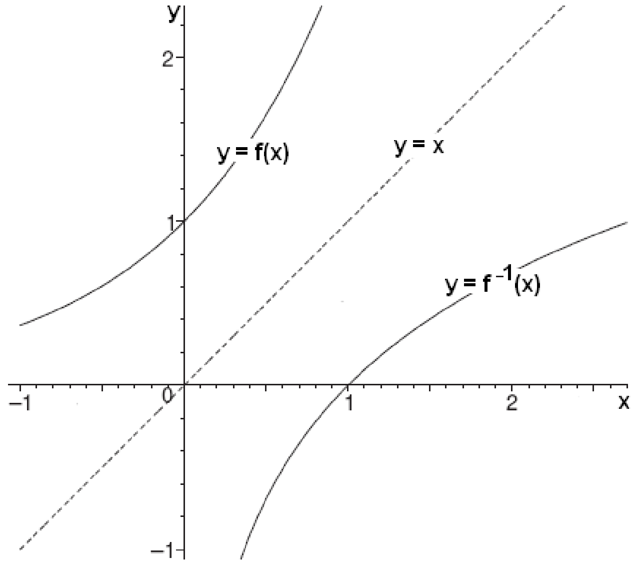
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x - 1) = (2x - 1)^2 + 1 = 4x^2 - 4x + 2$

Dari contoh soal ini, nampak bahwa $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$, yang berarti tidak berlaku sifat komutatif dalam fungsi komposisi, yang oleh (Purcell-Varbeg, 1992: 56) digambarkan sebagai “Jika kita membuka baju lalu mandi, maka kita akan memperoleh hasil yang agak berbeda dibandingkan dengan mandi dulu baru buka baju”.

f. Invers Fungsi

MEMBAHAS TERLEBIH DAHULU FUNGSI IDENTITAS DAN HUUNGANNYA DENGAN INVERS

Misalkan suatu fungsi $f : A \to B$ yang kontinyu dan monoton tegas. Karena $f(A) = B$, maka untuk setiap $y \in B$ terdapat satu dan hanya satu $x \in A$, sedemikian sehingga $f(x) = y$. Kita definisikan suatu fungsi $f^{-1} : B \to A$ oleh $x = f^{-1}(y)$, fungsi dinamakan sebagai invers fungsi dari f (Meljbro, 2006: 21-22). Grafik invers fungsi f^{-1} merupakan bayangan dari grafik f oleh pencerminan terhadap garis $y = x$. Suatu fungsi f mempunyai fungsi invers f^{-1} apabila f merupakan fungsi bijektif



Gambaran mengenai invers fungsi dapat dipahami melalui prinsip sepatu dan kaus kaki.

Misalkan a: pakai kaus kaki dan b: pakai sepatu, tentu saja kalau buka sepatu dan kaus kaki merupakan operasi kebalikannya, kita tuliskan sebagai a^{-1} dan b^{-1}.

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

Pakai kaus kaki → pakai sepatu → buka sepatu → buka kaus kaki.

SAJIKAN CONTOH FUNGSI YANG INVERSNYA MERUPAKAN FUNGSI DAN BUKAN MERUPAKAN FUNGSI

GAMBAR DALAM DIAGRAM PANAH

Contoh soal

Tentukan invers dari $y = 5x - 6$

Perhatikan $y = 5x - 6$

$y + 6 = 5x$;tambahkan dengan 6

$\frac{y+6}{5} = x$;bagi dengan 5

karena $\frac{y+6}{5} = x$ artinya $y^{-1} = \frac{x+6}{5}$

Ingat, invers adalah balikan. Jadi ketika mencari invers dari $y = 5x - 6$, maka kita cukup berpikir seperti:

$$y = 5x - 6$$

$-6 \rightarrow +6$

$\times 5 \rightarrow \div 5$

y	**Berpikir**	y^{-1}
$y = 3x + 4$	kurang 4, bagi 3	$y^{-1} = \frac{x-4}{3}$
$y = \frac{1}{4}x - 3$	Tambah 3, kali 4	$y^{-1} = 4(x+3)$
$y = \sqrt{2x-1}$	Kuadratkan, tambah 1, bagi 2	$y^{-1} = \frac{x^2+1}{2}$
$y = x^2 + 3$	kurang 3, akarkan	$y^{-1} = \sqrt{x-3}$

1.3. Persamaan dan Pertidaksamaan Kuadrat

1.3.1. Persamaan Kuadrat

MENJELASKAN HUBUNGAN ANTARA FUNGSI DENGAN AKARNYA, F(X) = 0

Persamaan kuadrat adalah suatu persamaan yang pangkat tertinggi variabel *x* nya adalah 2. Bentuk umum persamaan kuadrat adalah

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dengan $a, b, c \in \boldsymbol{R}$ dan $a \neq 0$.

Persamaan kuadrat dapat diselesaikan dengan cara:

❖ Memfaktorkan

$x^2 - 6x - 7 = 0$

$(x - 7)(x + 1) = 0$

$x = 7$ atau $x = -1$

- Melengkapkan bentuk kuadrat sempurna

$$x^2 - 6x - 7 = 0$$
$$(x - 3)^2 - 9 - 7 = 0$$
$$(x - 3)^2 = 16$$
$$x - 3 = \pm 4$$
$$x = 3 \pm 4$$

$x = 7$ atau $x = -1$

❖ Menggunakan rumus penyelesaian persamaan kuadrat

Rumus untuk mencari akar-akar persamaan kuadrat ini, di kalangan umum dikenal dengan istilah rumus *abc*.

$$x_{1.2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Untuk nilai $b^2 - 4ac$ dinamakan diskriminan dan dinotasikan dengan D.

$x^2 - 6x - 7 = 0$

$a = 1$, $b = -6$, dan $c = -7$

$$x_{1.2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2} = \frac{6 \pm 8}{2} = 3 \pm 4$$

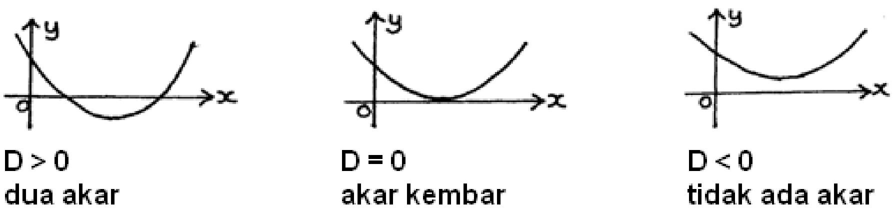
$x = 7$ atau $x = -1$

Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, maka berlaku (Olive, 2003: 68)

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad ; \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} \quad ; \quad x_1 - x_2 = \pm\frac{\sqrt{D}}{a}$$

MENJELASKAN HUBUNGAN AKAR DENGAN FUNGSI

Kemungkinan-kemungkinan akar dari persamaan kuadrat dapat diilustrasikan oleh gambar berikut ini



1.3.2. Pertidaksamaan Kuadrat

Pertidaksamaan kuadrat adalah pertidaksamaan yang pangkat tertingginya adalah dua. Pada prinsipnya ia sama dengan persamaan kuadrat, hanya saja menggunakan simbol ≠ (>, <, ≤, dan ≥). Bentuk umum pertidaksamaan kuadrat

❖ $ax^2 + bx + c < 0$

❖ $ax^2 + bx + c \leq 0$

; dengan $a, b, c \in \boldsymbol{R}$ dan $a \neq 0$.

- ❖ $ax^2 + bx + c > 0$
- ❖ $ax^2 + bx + c \geq 0$

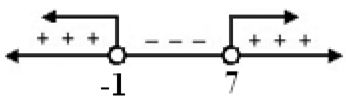
Suatu pertidaksamaan kuadrat dapat diselesaikan sebagaimana menyelesaikan persamaan kuadrat, hanya saja di sini akar-akarny harus diuji terlebih dahulu melalui garis bilangan. Adapun langkah-langkah penyelesaian pertidaksamaan kuadrat dengan garis bilangan yaitu :

- ➢ Mengubah bentuk pertidaksamaan kuadrat kebentuk umum yaitu bentuk kuadrat di ruas kiri sedangkan ruas kanan nol
- ➢ Menentukan pembuat nol atau harga nol dari bentuk kuadrat di ruas kiri yaitu dengan menyelesaikan persamaan $ax^2 + bx + c = 0$
- ➢ Membuat garis bilangan dan menempatkan pembuat nol pada garis bilangan itu.
- ➢ Menentukan tanda positif atau negatif pada garis bilangan dengan menyelidiki salah satu harga x
- ➢ Menentukan penyelesaian pertidaksamaan yang dimaksud sesuai dengan soal

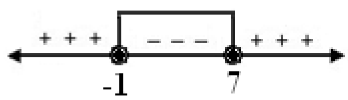
Tentukan himpunan penyelesaian dari $x^2 - 6x - 7 > 0$

Karena akar-akar dari $x^2 - 6x - 7 = 0$ adalah $x = 7$ atau $x = -1$;

maka penyelesaiannya adalah HP = $\{x \mid x < -1 \text{ atau } x > 7; x \in \boldsymbol{R}\}$, gambar i.



i



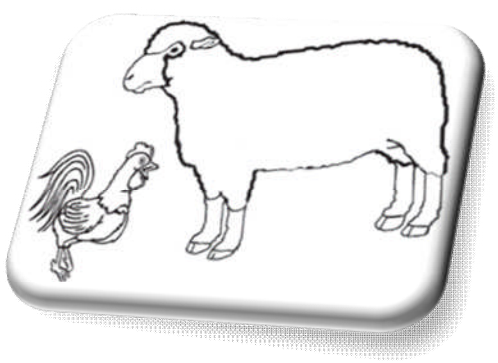
ii

Sedangkan untuk $x^2 - 6x - 7 \leq 0$, penyelesaiannya diilustrasikan oleh gambar ii, dengan HP = $\{x \mid -1 \leq x \leq 7; x \in \boldsymbol{R}\}$.

1.4. Sistem Persamaan Linear

1.4.1. Ayam dan Kambing

BERIKAN PENJELASAN TENTANG , BENTUK UMUM DAN METODE PENYELESAIAN



Kita terbisaa dengan penyelesaian sistem persamaan linier (SPL) apakah dua variabel atau lebih, dengan cara eliminasi-substitusi. Padahal kreativitas kita dapat saja menyelesaikan persoalan ini dengan tabel, pola, diagram, grafik, model dan sebagainya. Berikut diberikan kasus kambing-ayam di suatu kandang.

Dalam suatu kandang ada 10 ekor binatang yang terdiri dari ayam dan kambing, banyaknya kaki ada 32. Tentukan masing-masing banyaknya ayam dan kambing.

Secara kurikulum permasalahan ayam dan kambing ini merupakan urusan aljabar, yaitu materi sistem persamaan linier dua variabel (SPLDV), namun kita dapat menyelesaikannya tanpa perlu aljabar yang rumit, apalagi semata berpandangan dengan eliminasi dan substitusi. Aritmetika dan diagram-diagram sederhana pun dapat membantu kita dalam memperoleh jawaban banyaknya ayam maupun kambing yang diminta. Bahkan grafik geometri pun dapat kita gunakan guna mencari solusi persoalan tersebut.

a. Mendata semua informasi ke dalam tabel

Ayam	Kambing	Kepala	Kaki
1	9	10	38
2	8	10	36
3	7	10	34
4	**6**	**10**	**32**
5	5	10	30
6	4	10	28
7	3	10	26
8	2	10	24
9	1	10	22

Sehingga diperoleh data yang sesuai dengan informasi pada soal, yaitu banyak kepala ada 10 dan ada 32 kaki. Jadi binatang yang ada dalam kandanga adalah 4 ekor ayam dan 6 ekor kambing.

b. Tabel sederhana

Pada tabel sederhana ini, kita langsung mengandaikan banyaknya ayam dan kambing itu sama, yakni masing-masing 5 ekor. Kemudian menambahkan banyaknya ayam dan mengurangkan banyaknya kambing atau sebaliknya.

Ayam	Kambing	Kepala	Kaki
5	5	10	30
4	**6**	**10**	**32**
6	4	10	28

Ketika banyaknya ayam dan kambing masing-masing 5 ekor, diperoleh 30 kaki. Banyaknya kaki masih kurang dari yang diketahui, oleh karena itu kita harus menambah banyaknya kambing dan mengurangi banyakya ayam. Sehingga didapat informasi yang diminta, yaitu ayam 4 ekor dan kambing 6 ekor.

Di sini pun bisa menggunakan strategi, bahwa dengan mengurangkan satu ekor kambing sekaligus menambahkan satu ekor ayam akan menyebabkan kekurangan 2 kaki. Sehingga yang harus dilakukan adalah sebaliknya, yaitu menambahkan banyaknya kambing dan mengurangkan banyaknya ayam masingmasing satu ekor.

c. Andaikan semua binatang tersebut adalah kambing

Karena kambing berkaki empat, maka ada 40 kaki, sedangkan faktanya ada 32 kaki, berarti ada kelebihan 8 kaki. Nah 8 kaki tersebut adalah milik ayam. Karena ayam berkaki dua, maka ada 4 ekor ayam. Mengingat binatangnya ada 10 ekor, maka diperoleh kambing sebanyak 6 ekor.

d. Andaikan semua binatang tersebut adalah ayam

Karena ayam berkaki dua, maka ada 20 kaki, sedangkan faktanya ada 32 kaki, berarti kita kekurangan 12 kaki. Nah 12 kaki tersebut harus diberikan kepada kambing masing-masing 2 kaki, sehingga diperoleh 6 ekor kambing. Mengingat binatangnya ada 10 ekor, maka diperoleh ayam sebanyak 4 ekor.

e. Menggunakan SPLDV

Misalkan x : ayam

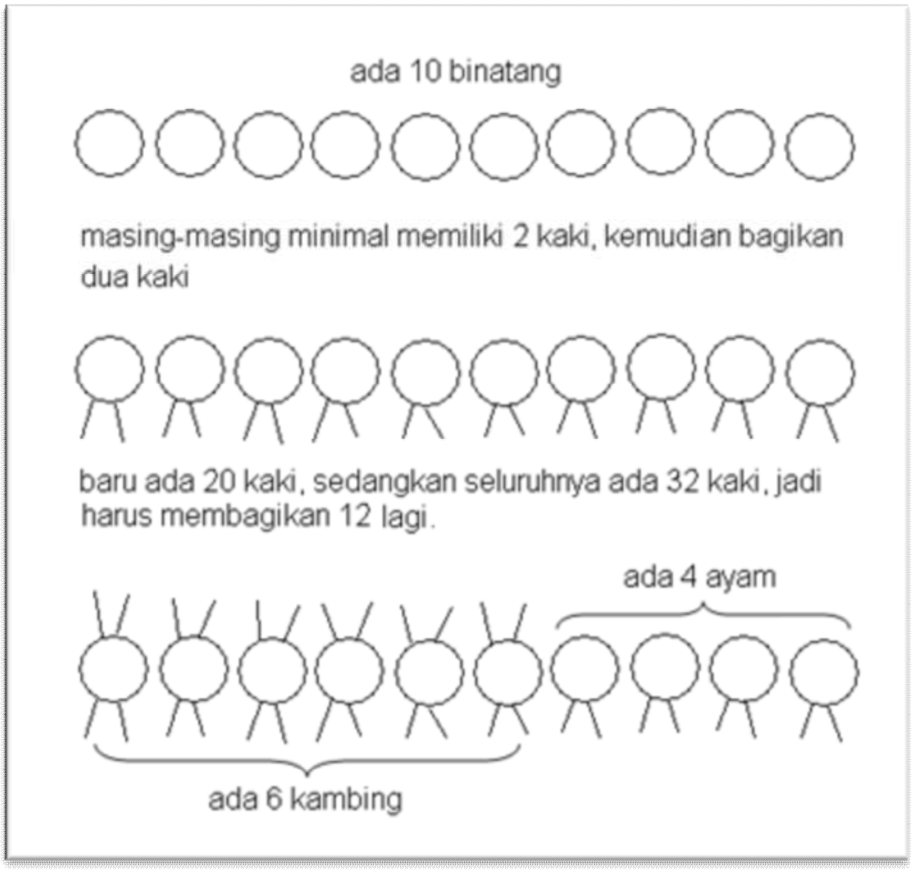
y : kambing

$$
\begin{array}{lll}
x + y = 10 & \text{kali } 2 & 2x + 2y = 20 \\
2x + 4y = 32 & & \underline{2x + 4y = 32 \quad -} \\
 & & 0 - 2y = -12 \\
 & & y = 6
\end{array}
$$

Untuk $y = 6$, dengan $x + y = 10$, maka diperolehn $x = 4$. Jadi ada 4 ekor ayam dan 6 ekor kambing. Cara ini umumnya dikenal dengan istilah eliminasi dan substitusi.

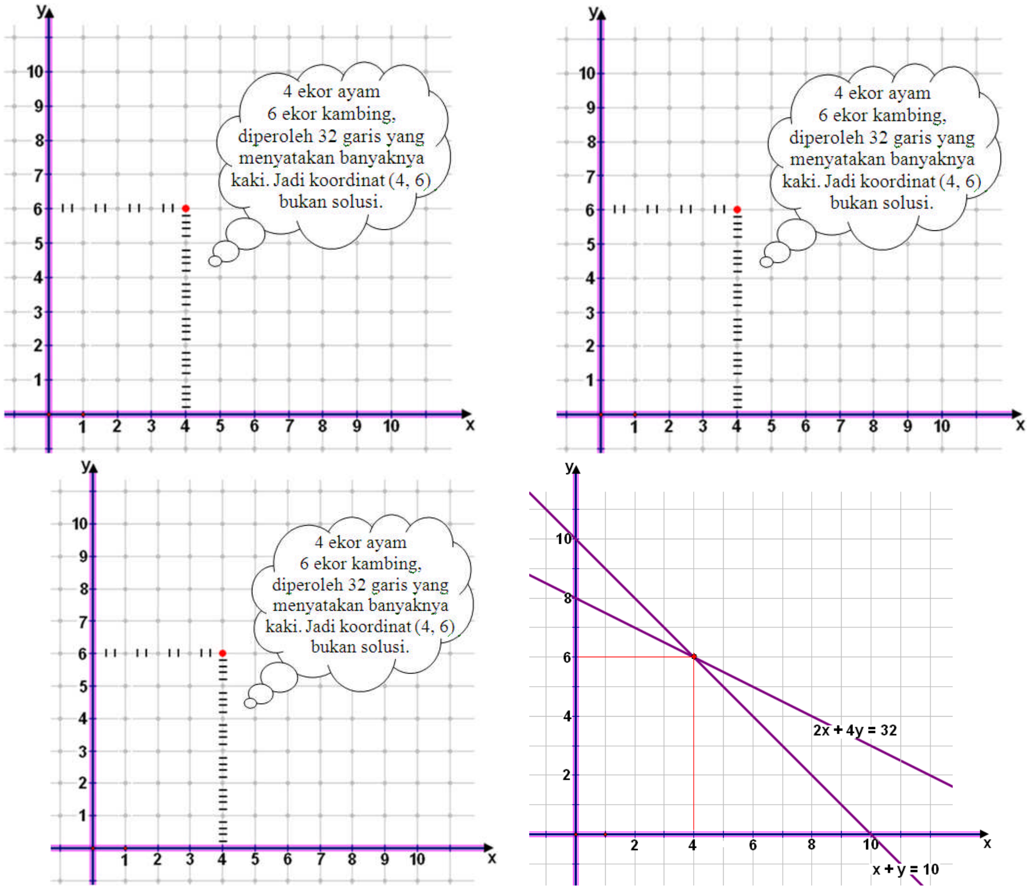
f. Membuat model

Model yang berupa gambar geometris tertentu (seperti lingkaran atau persegipanjang) dapat merepresentasikan ayam dan kambing. Model sangat efektif ketika benda aslinya sulit dihadirkan ke dalam kelas. Berikut disajikan model lingkaran sebagai ilustrasi pengerjaan.



Jadi didapat 4 ekor ayam dan 6 ekor kambing.

g. Sistem koordinat kartesius dan grafik



Pada grafik (gambar keempat) terlihat perpotongan dua garis pada titik koordinat (4, 6). Jadi diperoleh ayam sebanyak 4 ekor dan kambing sebanyak 6 ekor.

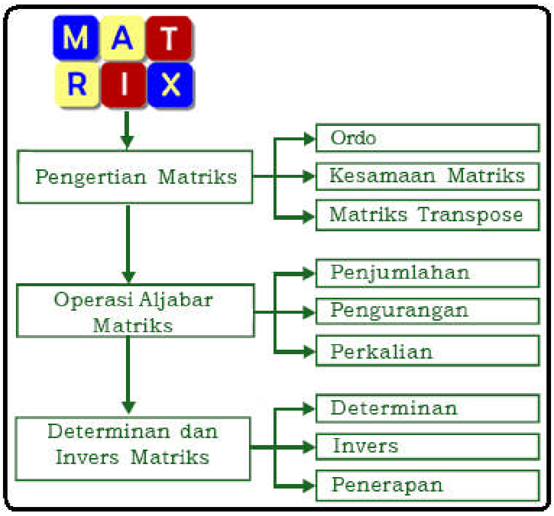
Permasalahan ayam dan kambing di atas, sementara ini dapat diselesaikan dengan delapan cara, namun masih memberikan hasil (jawaban) yang tunggal, yaitu ada 6 ekor kambing dan 4 ekor ayam. Sekarang kita rubah permasalahannya dengan mengurangi komponen dan konteks soal. Sebab meruba konteks atau fenomena merupakan bentuk pendekatan *open-ended* juga.

Seorang tukang kayu akan membuat bangku kaki tiga dan meja kaki empat selama sebulan. Jika pada akhir bulan ia sudah membuat 32 kaki, maka tentukan banyaknya meja dan bangku yang dia buat.

1.5. Matriks

1.5.1. DIAWALI DENGAN PENGERTIAN MATRIKS

1.5.2. Mengkonstruksi Matriks pada Kalender



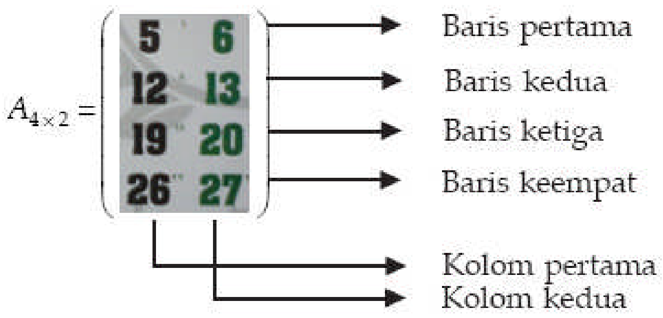
Kita dapat mengekplorasi dan menginvestigasi kalender untuk melihat angka-angka berdasarkan cara penataannya, operasi bilangan yang digunakan, dan pola bilangan atau barisan. Namun di sini kita akan mamanfaatkan kalender untuk konsep matriks.

Gambar 5. Kalender UHAMKA

Matriks Pada Kalender

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 10 & 11 \\ 17 & 18 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 18 & 19 & 20 \\ 25 & 26 & 27 \end{pmatrix}$$

Matriks $\boldsymbol{A}_{2\times 2}$, matriks $\boldsymbol{B}_{3\times 2}$, dan matriks $\boldsymbol{C}_{3\times 3}$, dikatakanlah bahwa matriks *A* berordo 2 kali 2, matriks *B* berordo 3 kali 2, dan matriks *C* berordo 3 kali 3. Ordo suatu matriks menyatakan banyaknya baris dikali banyaknya kolom suatu matriks dan akan menunjukkan banyaknya elemen suatu matriks.



MENYAJIKAN ILUSTRASI MATRIK YANG MEMILIKI HUBUNGAN FUNGSIONAL, SKOR PERTANDINGAN

1.5.3. Operasi pada Matriks

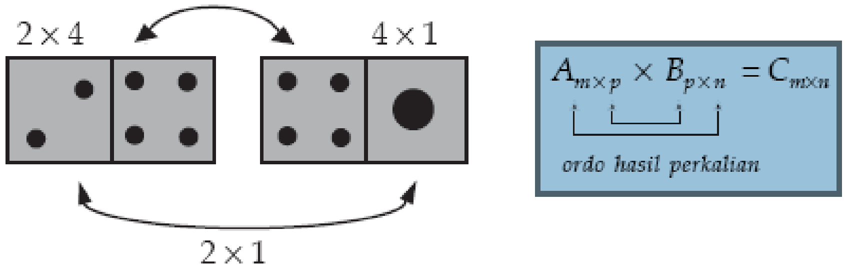
Sifat operasi penjumlahan dan pengurangan pada matriks, jika A, B, dan C adalah matriks, maka berlaku:

- $A + B = B + A$; komutatif
- $(A + B) + C = A + (B + C)$; asosiatif

Perkalian matriks ($A \times B$) hanya bisa dilakukan apabila banyaknya kolom matriks A sama dengan banyaknya baris matriks B.

- $\boldsymbol{A}_{2\times 3} \times \boldsymbol{B}_{3\times 3}$ dapat dikalikan yang hasilnya adalah $\boldsymbol{C}_{2\times 3}$
- $\boldsymbol{A}_{3\times 3} \times \boldsymbol{B}_{2\times 3}$ tidak dapat dikalikan yang hasilnya adalah $\boldsymbol{C}_{3\times 3}$

Perkalian dua buah matriks dapat diilustrasikan oleh gambar permainan kartu domino sebagai berikut



$$A \times B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$

1.5.4. Traspose Matriks

Jika **A** adalah suatu matriks *m* x *n*, maka tranpose **A** dinyatakan oleh $\mathbf{A}^t$ dan didefinisikan dengan matriks *n* x *m* yang kolom pertamanya adalah baris pertama dari *A*, kolom keduanya adalah baris kedua dari *A*, demikian juga dengan kolom ketiga adalah baris ketiga dari *A* dan seterusnya.

$$A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \text{maka } A^t{}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Beberapa Sifat Matriks Transpose :

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(A^T)^T = A$
- $k(A^T) = (kA)^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

1.5.5. Determinan Matriks

PENGRTIAN DETERMINAN

Determinan matriks berkaitan dengan matriks persegi (bujur sangkar), yaitu yang memiliki jumlah baris dan kolom sama banyak.

Jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Perhatikan kembali matriks-matriks pada kalender, diperoleh determinan setiap matriks 2 × 2 adalah -7

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 10 & 11 \\ 17 & 18 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 20 & 21 \\ 27 & 28 \end{vmatrix}$$

Det = 1×9 - 8×2
= 9 - 16
= -7

Det = 10 × 18 - 11 × 17
= 180 - 187
= -7

Det = 20×28 - 27×21
= 560 - 567
= -7

Determinan matriks berorodo 3 × 3 adalah

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \longrightarrow |B| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

$$= aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

Sedangkan untuk setiap matriks 3 × 3 pada kalender memiliki determinan nol.

	1	2	3	1	2	
	8	9	10	8	9	
	15	16	17	15	16	
405	160	272		153	300	384

Det = (153 + 300 + 384) – (405 + 160 + 272)

= 837 – 837

= 0

	15	16	17	15	16	
	22	23	24	22	23	
	29	30	31	29	30	
11339	10800	10912		10695	11136	11220

Det = (10695 + 11136 + 11220) – (11339 + 10800 + 10912)

= 33051 – 33051

= 0

Dengan bantuan *Microsoft Excel* dengan perintah "=MDETERM(C1:F4)" untuk matriks 4 × 4 seperti

memberikan nilai determinan = 0. Begitu pula kalau kita teruskan untuk matriks 5 × 5 hingga matriks $n \times n$ akan memberikan determinan yang nol, dengan catatan penataan angka-angkanya berdasarkan pola kalender ini.

1.5.6. Invers Matriks

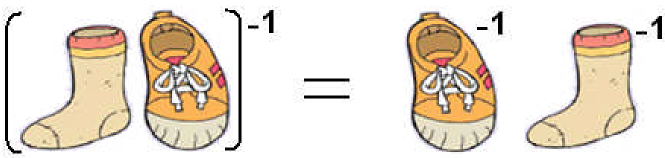
Matriks persegi A mempunyai invers, jika ada matriks B sedemikian hingga $AB = BA = I$, di mana I adalah matriks identitas, maka disebutlah $B = A^{-1}$. Syarat matriks mempunyai invers adalah $|A| \neq 0$.

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times Adj\ (A) = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

Invers matriks mempunyai sifat

- ❖ $(A^{-1})^{-1} = A$
- ❖ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Ilustrasi untuk sifat ini adalah dengan fakta memakai sepatu dan kaus kaki, dengan memisalkan bahwa:
A **: kaus kaki**
B **: sepatu**
Memakai kaus kaki kemudian memakai sepatu: AB
Membuka sepatu dan kaus kaki: $(AB)^{-1}$
Tentu yang bias dilakukan adalah membuka sepatu terlebih dahulu (B^{-1})**, kemudian baru membuka kaus kaki** (A^{-1})**, ditulis** $A^{-1}B^{-1}$**.**
Jadi $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$



- ❖ $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$

1.5.7. Penalaran dan Pemecahan Masalah Matriks

a. Diketahui matriks $W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, tentukan W_2^{2012}

Menghadapi permasalahan semacam ini adalah dengan menginvestigasi matriks W_2 untuk pangkat rendah terlebih dahulu. Dengan bantuan program *microsoft-Excel* diperoleh data-data sebagai berikut:

$$W_2^{\,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_2^{\,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_2^{\,4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_2^{\,5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Melihat informasi tersebut, muncul dugaan (conjecture) bahwa jika diteruskan pada panngkat yang lebih tinggi, maka diperoleh:

$$W_2^{\,2012} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2011 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2012 & 1 \end{bmatrix}$$

Sampai kepada proses generalisasi, kita dapat menyatakan bahwa

$$W_2^{\,n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n-1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix}$$

Bagian terakhir ini dapat dikatakan sebagai suatu teorema, apabila kita sudah dapat membuktikannya. Tentu saja bisa secara induksi matematika ataupun pembuktian tidak langsung lainnya.

b. Diketahui matriks $W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, tentukan W_3^{2012}

$$W_3^{\,2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$W_3^{\,3} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

$$W_3{}^4 = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 27 & 27 \\ 27 & 27 & 27 \\ 27 & 27 & 27 \end{bmatrix}$$

$$W_3{}^5 = \begin{bmatrix} 27 & 27 & 27 \\ 27 & 27 & 27 \\ 27 & 27 & 27 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 & 81 & 81 \\ 81 & 81 & 81 \\ 81 & 81 & 81 \end{bmatrix}$$

Nampak bahwa hasil pemangkatan matriks W_3 ini ternyata melibatkan pemangkatan dari 3, dalam hal ini sel-sel matriks merupakan pemangkatan dari bilangan 3, sehingga dapat menggunakan konsep pola bilangan pangkat dari 3, yaitu:

Tabel 7. ………………………..

n	1	2	3	4	5	6	…	2012	…	*n*
$\mathbf{3^{n\text{-}1}}$	1	3	9	27	81	243	…	3^{2011}	…	3^{n-1}

Melihat informasi tersebut, muncul dugaan (*conjecture*) bahwa jika diteruskan pada panngkat tinggi, maka diperoleh:

$$W_3{}^{2012} = \begin{bmatrix} 3^{2009} & 3^{2009} & 3^{2009} \\ 3^{2009} & 3^{2009} & 3^{2009} \\ 3^{2009} & 3^{2009} & 3^{2009} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3^{2011} & 3^{2011} & 3^{2011} \\ 3^{2011} & 3^{2011} & 3^{2011} \\ 3^{2011} & 3^{2011} & 3^{2011} \end{bmatrix}$$

Sampai kepada proses generalisasi, kita dapat menyatakan bahwa

$$W_3{}^n = \begin{bmatrix} 3^{n-2} & 3^{n-2} & 3^{n-2} \\ 3^{n-2} & 3^{n-2} & 3^{n-2} \\ 3^{n-2} & 3^{n-2} & 3^{n-2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{bmatrix}$$

Bagian terakhir ini dapat dikatakan sebagai suatu teorema, apabila kita sudah dapat membuktikannya.

Permasalahan ini dapat diteruskan kepada matriks dengan *m*-baris dan *m*-kolom (W_m), tentu saja yang semua sel nya adalah 1. Kita dapat menduga bahwa $W_m{}^n$ hasil akhirnya akan melibatkan pemangkatan bilangan *m*.

Perhatikan matriks W_m yang dinyatakan oleh

$$W_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Penulis menduga hasil dari pemangkatan dari W_m oleh *n* adalah

$$W_m{}^n = \begin{bmatrix} m^{n-1} & m^{n-1} & \cdots & m^{n-1} \\ m^{n-1} & m^{n-1} & \cdots & m^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m^{n-1} & m^{n-1} & \cdots & m^{n-1} \end{bmatrix}$$

c. Tentukan nilai determinan dari matriks $U = \begin{bmatrix} 20072008 & 20072010 \\ 20072012 & 20072014 \end{bmatrix}$

Untuk menyelesaikan soal ini kita dapat saja langsung menggunakan kalkulator ataupun *Microsoft Excel* dalam menentukan determinan suatu matriks. Namu pada kesempatan ini kita akan menggunakan strategi pemecahana masalah matematik "mulai dari yang sederhana", dalam artian kita dapat memulainya dengan bilangan-bilangan kecil, kemudian dilihat pola (kecenderungan) yang ada.

Berhubung matriks *U* di atas mempunyai elemen-elemen berupa bilangan genap berurutan, maka kita dapat menggunakan empat bilangn genap berurutan sederhana (kecil) untuk memulai investigasi menghitung determinan.

$$U_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \det(U_1) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -8$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \det(U_1) = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = -8$$

$$U_3 = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} \rightarrow \det(U_1) = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{vmatrix} = -8$$

Melihat kecenderungan yang ada, maka kita dapat menyimpulkan bahwa

$$U = \begin{bmatrix} 20072008 & 20072010 \\ 20072012 & 20072014 \end{bmatrix} \rightarrow \det(U) = \begin{vmatrix} 20072008 & 20072010 \\ 20072012 & 20072014 \end{vmatrix} = -8$$

Kita dapat mengujinya dengan melakukan perhitungan prosedural pencarian determinan matriks *U*.

$$\det(U) = \begin{vmatrix} 20072008 & 20072010 \\ 20072012 & 20072014 \end{vmatrix}$$
$$= 20072008 \times 20072014 - 20072012 \times 20072010$$
$$= 402885625584112 - 402885625584120$$
$$= -8$$

112 – 120 = -8

Untuk lebih meyakinkan kebenaran pola ini, maka perlu sebuah pembuktian secara deduktif, yakni dengan menggunakan bentuk umum empat bilangan genap berurutan: 2*n*, 2*n* + 2, 2*n* + 4, 2*n* + 6. Keempat bilangan genap ini disusun sebagai elemen-elemen suatu matriks

$$U_n = \begin{bmatrix} 2n & 2n+2 \\ 2n+4 & 2n+6 \end{bmatrix}$$

Kemudian dihitung determinan dari matriks *Un*,

$$\det(U) = \begin{vmatrix} 2n & 2n+2 \\ 2n+4 & 2n+6 \end{vmatrix}$$
$$= 2n \times (2n+6) - (2n+2) \times (2n+4)$$
$$= 4n^2 + 12n - 4n^2 - 12n - 8$$
$$= -8$$

Jadi benar bahwa pola yang terbentuk dalam mencari determinan matriks *U* dapat diperumum dengan memberikan hasil -8.

Sebagai latihan, silahkan menghitung determinan dari matriks-matriks berikut ini

$$V = \begin{bmatrix} 20122013 & 20122015 \\ 20122017 & 20122019 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

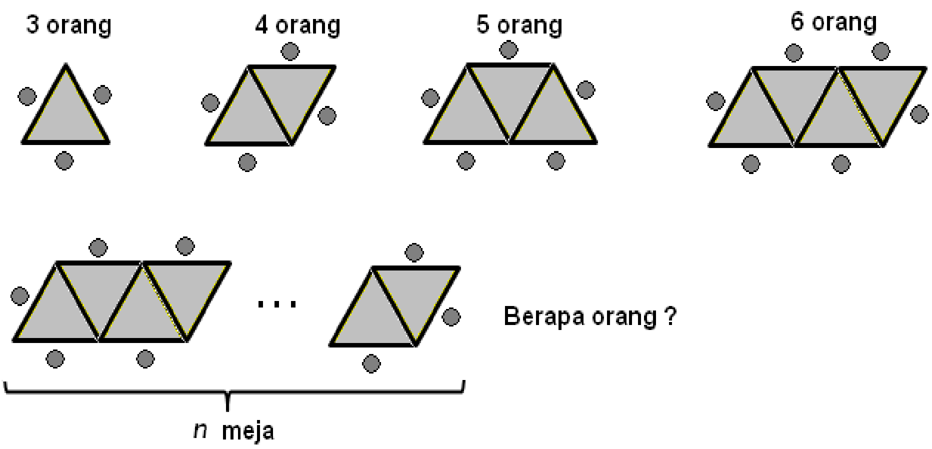
$$X = \begin{bmatrix} 5555555555 & 5555555556 \\ 5555555557 & 5555555558 \end{bmatrix}$$

1.6. Barisan dan Deret

MENJELSAKN DULU DEFINISI, POLA BILANGAN DAN BEDANYA DENGAN BARIDAN DAN DERET

1.6.1. Mengkonstruksi konsep barisan dan deret dari masalah kehidupan

Pada suatu kantin terdapat beberapa meja yang berbentuk segitiga sama sisi. Jika pada setiap sisi dapat diduduki oleh satu orang. Seterusnya tersusun seperti terlihat pada gambar di bawah ini.

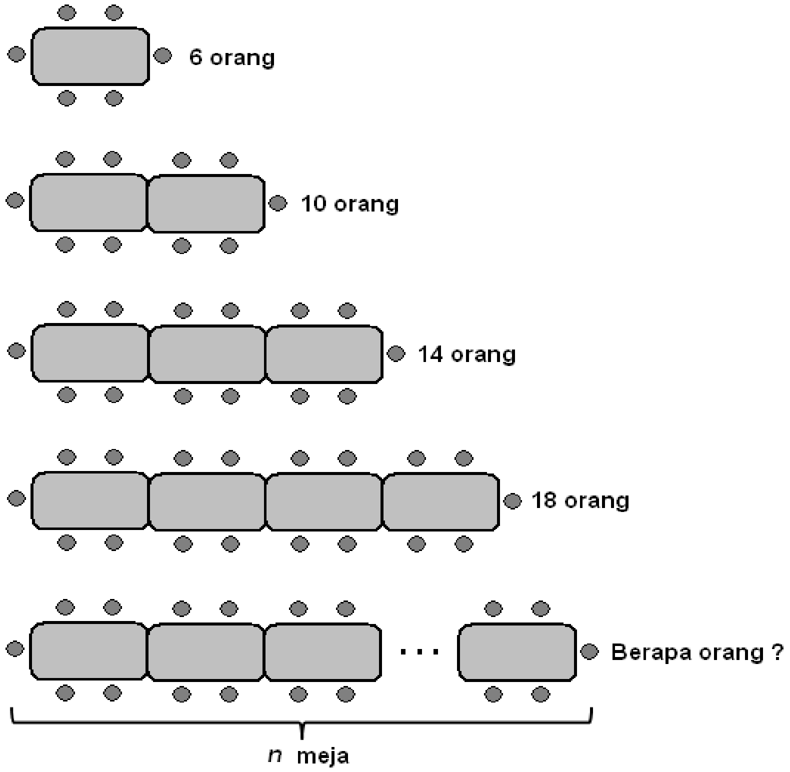


Kita akan menentukan banyaknya orang yang dapat duduk jika tersedia susunan sebanyak 55 meja, kemudian diteruskan untuk melakukan generalisasi untuk *n* meja. Kita akan mendata banyaknya meja beserta orang yang dapat duduk di setiap sisi meja dalam tabel berikut ini.

Meja (*n*)	**Orang (*Un*)**	**Pengerjaan**
1	3	1 + 2 =3
2	4	2 + 2 = 4
3	5	3 + 2 = 5
4	6	4 + 2 = 6
5	7	5 + 2 = 7
…	…	…
55		**55 + 2 = 57**
…	…	…
n		***n* + 2**

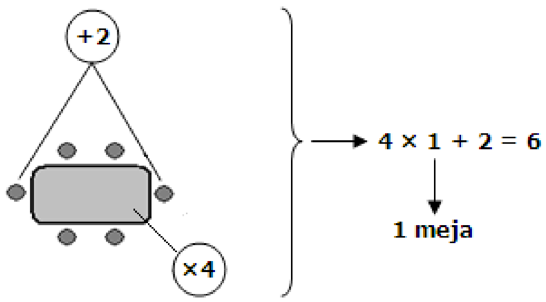
Jadi untuk *n* meja yang tersusun dapat duduk ***n* + 2** orang ***Un* = *n* + 2**

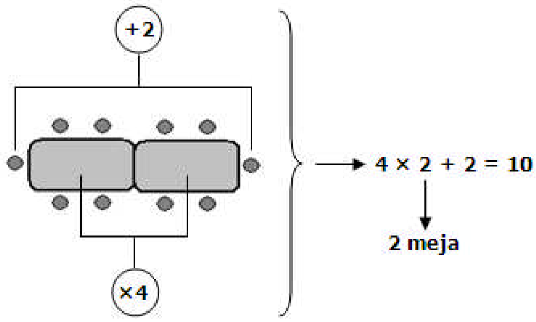
Pada suatu kelas terdapat beberapa meja yang menyerupai bentuk persegipanjang. Jika pada sisi terpanjang meja dapat diduduki oleh dua orang dan sisi terpendek dapat diduduki oleh satu orang. Seterusnya tersusun seperti terlihat pada gambar di bawah ini.



Kita akan menentukan banyaknya orang yang dapat duduk jika tersedia susunan sebanyak 55 meja generalisasi untuk n meja. Kita akan mendata banyaknya meja beserta orang yang dapat duduk di setiap sisi meja dalam tabel berikut ini.

- Untuk 1 meja dapat diduduki oleh 6 orang





Sisi pendek meja pada ujung setiap susunan selalu ditempati oleh masing-masing 1 orang, karena itu pengerjaannya dengan menambahkan 2 orang untuk setiap penambahan meja dalam susunan. Karena banyaknya orang yang menempati sisi panjang meja adalah 2 orang da nada dua sisi maka akan menjadi 4 orang, hal ini menunjukkan bahwa ada 4 orang dalam setiap sisi panjang meja, karena itu banyaknya meja dikalikan dengan 4. Jadi banyaknya orang yang dapat duduk adalah 4 kali banyaknya meja ditambah 2 orang, yang secara detil dapat dilihat pada tabel berikut.

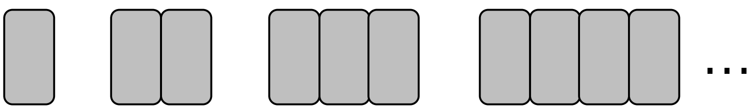
Meja (*n*)	**Orang (*Un*)**	**Pengerjaan**
1	6	$4 \times 1 + 2 = 6$
2	10	$4 \times 2 + 2 = 10$
3	14	$4 \times 3 + 2 = 14$
4	18	$4 \times 4 + 2 = 18$
…	…	…
55		$\mathbf{4 \times 55 + 2 = 222}$
…	…	…
$\boldsymbol{n}$		$\boldsymbol{4n + 2}$

Jadi untuk n meja yang tersusun dapat duduk $\boldsymbol{4n + 2}$ orang $\boldsymbol{Un = 4n + 2}$

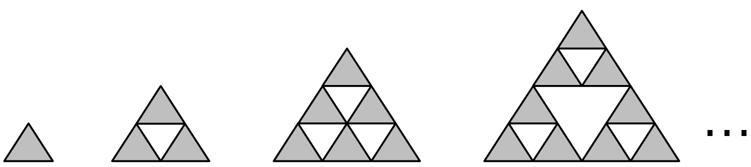
<u>Tantangan</u>

Pembaca dapat mengeksplorasi untuk variasi bentuk susunan meja, seperti gambar-gambar berikut

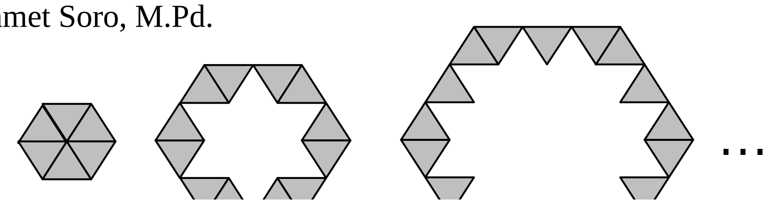
a.



b.

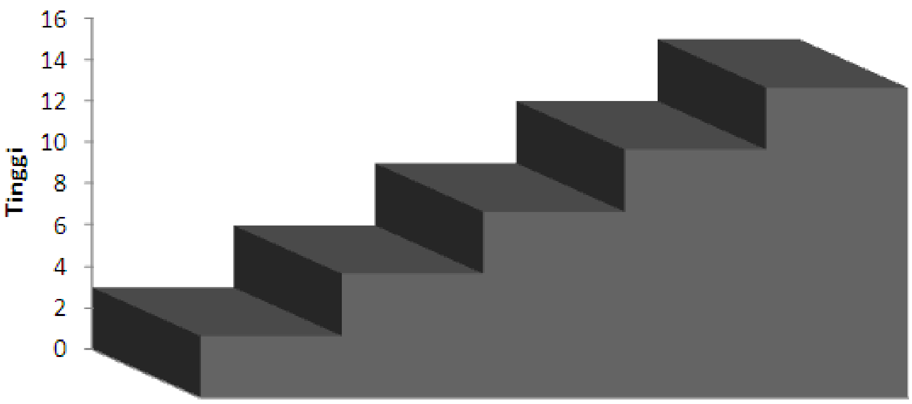


c.



Untuk tantangan (*a*), pembaca cukup mencari banyaknya orang yang dapat duduk pada sisi meja dari setiap susunan (sisi pendek 1 orang dan sisi panjang 2 orang), kemudian melakukan generalisasi terhadap pola yang terbentuk. Sedangkan untuk tantangan (*b*) dan (*c*), dua hal yang perlu pembaca prediksi, yaitu banyaknya meja maupun banyaknya orang pada setiap susunan yang nampaknya masing-masing akan membentuk pola tersendiri, sampai kepada mencari bentuk umum dari keduanya. Silahkan selidiki, kemungkinan dapat dikombinasikannya antara banyaknya meja dengan banyaknya orang yang duduk, sehingga kita dapat memprediksi kalau tersedia *n* meja maka dapat diduduki oleh berapa orang?

Perhatikan tangga pada gambar di bawah ini, peridiksilah tinggi tangga apabila terdapat **55** anak tangga, kemudian tentukan bentuk umum dari pola yang ada.



Berdasarkan gambar tangga di atas maka dapat diperoleh data hubungan banyaknya anak tangga dengan tinggi tangga, seperti terlihat pada tabel berikut

Anak Tangga	**Tinggi**	**Pengerjaan**
1	3	$3 \times 1 = 3$
2	6	$3 \times 2 = 6$

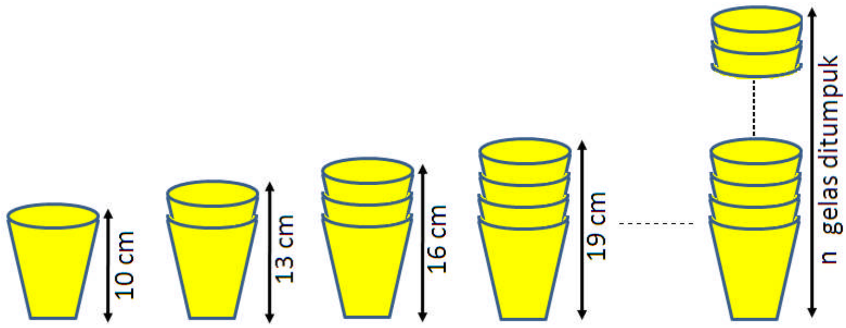
3	9	$3 \times 3 = 9$
4	12	$3 \times 4 = 12$
5	15	$3 \times 5 = 15$
…	…	…
55		$\mathbf{3 \times 55 = 165}$
…	…	…
n		$\mathbf{3}\boldsymbol{n}$

Jadi bentuk umum dari tinggi tangga adalah $\boldsymbol{Un} = \mathbf{3}\boldsymbol{n}$

1.6.2. Mengkonstruksi konsep barisan dan deret dengan memanfaatkan benda konkrit

Dengan menggunakan gelas, mangkok, piring, bangku dan sebagainya yang ditumpuk kita dapat mengkonstruksi suku-suku dari barisan aritmetika. Bagaimana matematika yang begitu anstrak bisa disajikan sangat konkrit, bahkan bisa dengan mudah dilakukan oleh orang tua di rumah ketika bersama anak-anaknya. Inilah matematika sebagai aktivitas manusia dalam pandangan Freudenthal dengan RME nya. Bahwasannya matematika saat ini sudah seharusnya kita bangun dari aktivitas yang akrab dengan anak didik, tidak lagi seperti selama ini cenderung mekanistik dan prosedural.

Dalam menyusun (menumpuk) benda-benda tersebut di atas terdapat selisih (beda) antara setiap satuannya, karena itu ia membentuk barisan aritmetika. Pada kesempatan ini hanya disajikan untuk tinggi tumpukan gelas, selebihnya diserahkan kepada pembaca untuk mengelaborasinya.



Kita akan menentukan tinggi tumpukan sebanyak 55 dan generalisasinya untuk n gelas. Berdasarkan ilustrasi gambar di atas, diperoleh data tentang suku-suku suatu barisan aritmetika

$$10, 13, 16, 19, \dots$$

Terdapat 54 gelas yang terlihat 3 cm bagian atasnya, sehingga tingginya adalah 54 × 3 cm = 162 cm, kemudian ditambahkan dengan tinggi gelas pertama yaitu 10 cm. Jadi tinggi tumpukan 55 gelas adalah 172 cm.

<u>Algoritma:</u>

Tinggi tumpukan 55 gelas = 10 cm + 54 × 3 cm = 172 cm

= 10 cm + (55 – 1) × 3 cm

Tinggi gelas pertama (suku pertama)

Banyaknya gelas

Selisih tinggi tumpukan gelas dengan tinggi tumpukan gelas sebelumnya (beda)

Sehingga kalau diperumum untuk tumpukan n gelas, maka diperoleh rumus suku ke-n dari suatu barisan aritmetika $\boldsymbol{U_n = a + b(n - 1)}$.

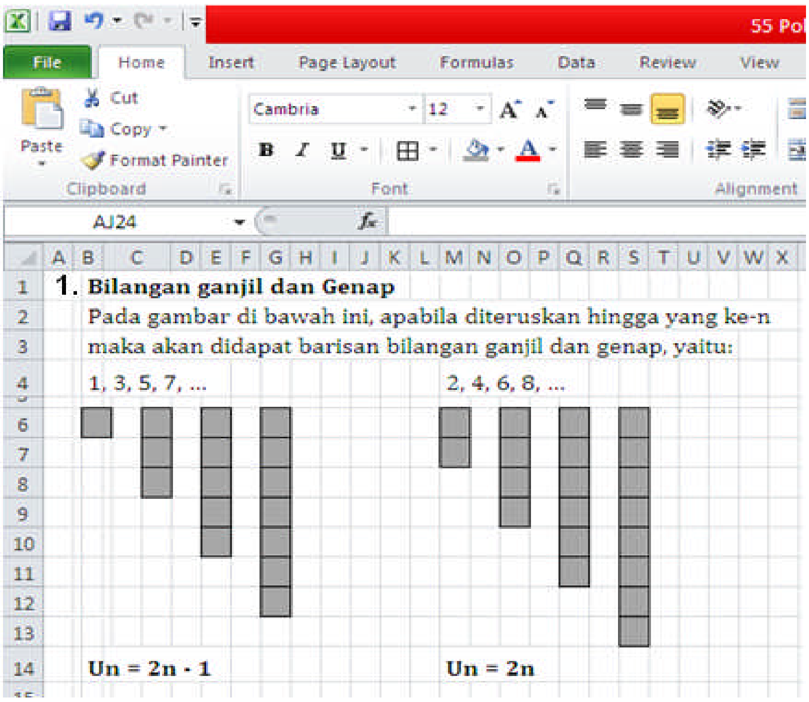
Kembali kepada kasus tinggi tumpukan gelas di atas, diperoleh data seperti pada tabel berikut

Banyak Gelas	**Tinggi**	**Pengerjaan**
1	10	3 × 1 + 7 = 10
2	13	3 × 2 + 7 = 13
3	16	3 × 3 + 7 = 16
4	16	3 × 4 + 7 = 19
…	…	…
55		**3 × 55 + 7 = 172**
…	…	…
n		**3*n* + 7**

Jadi bentuk umum dari tinggi tumpukan gelas adalah ***Un* = 3*n* + 7**

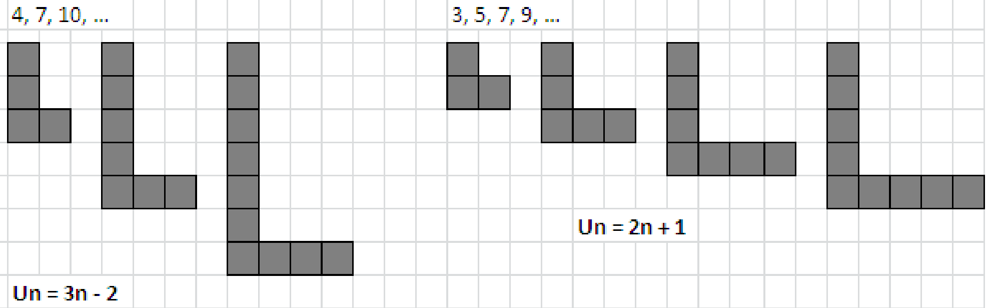
1.6.3. Mengkonstruksi barisan dan deret melalui penggunaan ICT (*Microsoft Excel*)

Penggunaan teknologi dalam pembelajaran menjadi hal yang mengemuka saat ini. Bagaimana tidak, kemajuan teknologi informasi yang sangat pesat memungkinkan kita (guru) untuk mengakses ilmu pengetahuan di dunia maya. Bahkan bisa jadi murid kita jauh lebih intens memanfaatkan teknologi ini, sehingga mereka memiliki pengetahuan yang lebih mutakhir tentang pelajaran. *Microsoft Excel* adalah bawaan *Windows* yang dapat kita manfaatkan untuk pembelajaran matematika, salah satunya untuk mengkonstruksi barisan dan deret.



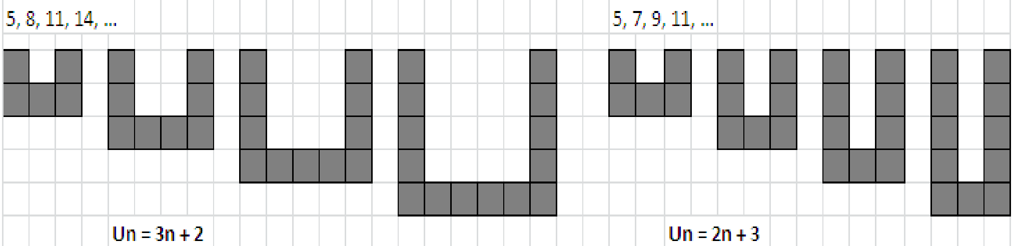
2. Barisan L

Pada gambar di bawah ini, apabila diteruskan hingga yang ke-n
maka akan didapat barisan bilangan yang menyerupai huruf L, yaitu:



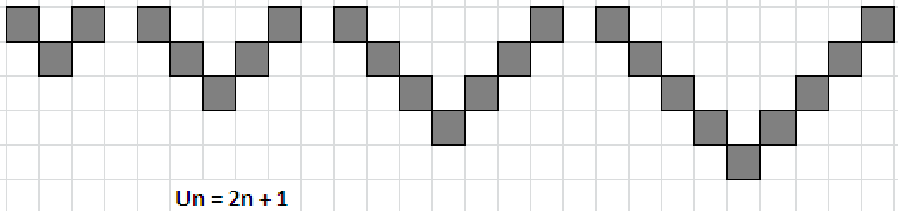
3. Bilangan U

Pada gambar di bawah ini, apabila diteruskan hingga yang ke-n
maka akan didapat barisan bilangan yang menyerupai huruf U, yaitu: 5, 8, 11, 14, ...



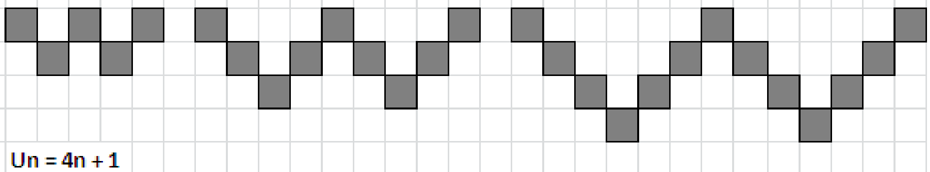
4. Bilangan V

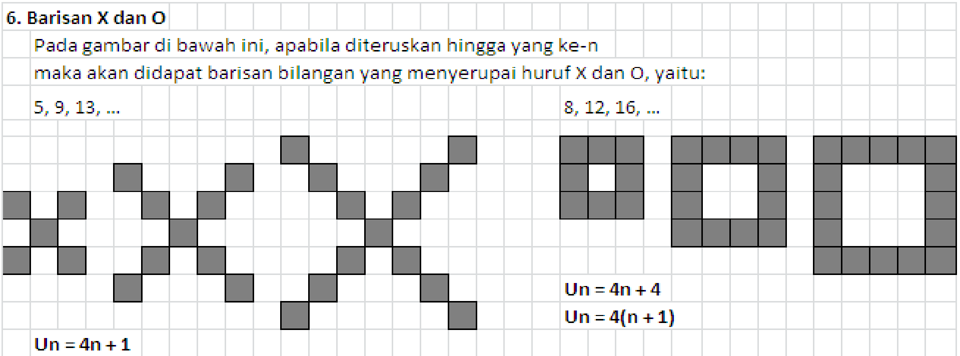
Pada gambar di bawah ini, apabila diteruskan hingga yang ke-n
maka akan didapat barisan bilangan yang menyerupai huruf V, yaitu: 3, 5, 7, 9, ...



5. Bilangan W

Pada gambar di bawah ini, apabila diteruskan hingga yang ke-n
maka akan didapat barisan bilangan yang menyerupai huruf W, yaitu: 5, 9, 13, ...





1.6.4. Ekplorasi Deret

g. Deret Bilangan Asli

Jika diberikan barisan bilangan asli 1, 2, 3, 4, …, *n*; maka jumlah barisan bilangan ini ditulis *Sn* = 1 + 2 + 3 + 4 + …, *n*; dan dinamakan sebagai deret bilangan asli. Dalam notasi sigma dituliskan sebagai

$$\sum_{i=1}^{n} i$$

Masalah ini menjadi penting untuk dikaji, karena maraknya ajang kompetisi matematika semacam OSN (Olimpiade Sains Nasional) digelar saat ini. Hal ini menjadi dasar bagi pemecahan masalah pola bilangan.

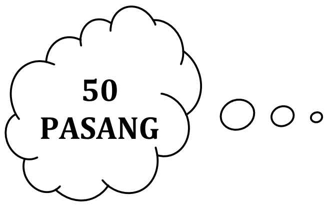
Sebelum mengeksplorasi permasalahan di atas, mari kita tengok kisah Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855). Gauss adalah matematikawan, astronom, dan fisikawan Jerman yang terkemuka dengan beragam kontribusinya di bidang ilmu pengetahuan. Ia dipandang sebagai salah satu matematikawan terbesar sepanjang masa selain Archimedes dan Isaac Newton. Dilahirkan di Braunschweig, Electorate Jerman 30 April 1777, sebagai putra yang kedua dari kaum buruh. Beberapa cerita kejeniusan Gauss, di antaranya:

> "Saat umurnya belum genap 3 tahun, ia telah mampu mengoreksi kesalahan daftar gaji tukang batu ayahnya, ia mengoreksi, secara mental dan tanpa kesalahan kalkulasi nya"

> “Ketika ia berumur 10 tahun, Gauss muda bisa menjawab dalam beberapa detik soal yang diberikan gurunya, sang guru pun terkagum-kagum ketika Gauss kecil memberikan rumus untuk menghitung jumlah suatu deret aritmatika (jumlah 100 bilangan asli pertama)

$$1 + 2 + 3 + ... + 100 = ...$$

Teknik yang Gauss gunakan adalah penjumlahan yang berurut dengan memasangkan setiap suku secara berkebalikan (dari tepi ke tengah) yang memberikan hasil jumlah sama, yaitu:



$$\left\{\begin{aligned} 1 + 100 &= 101 \\ 2 + 99 &= 101 \\ 3 + 98 &= 101 \\ &\;\;\dots \\ 50 + 51 &= 101 \end{aligned}\right.$$

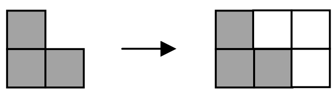
Karena terdapat 50 pasangan bilangan yang memberikan jumlah 101, maka jumlah keseluruhannya adalah

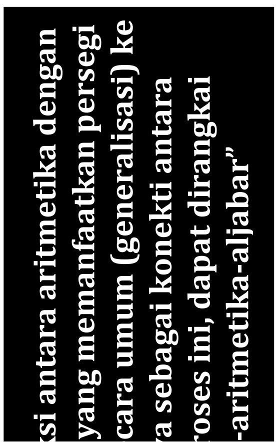
$$50 \times 101 = 5050$$

$$\frac{100}{2} \qquad 100 + 1 \longrightarrow \frac{100(100+1)}{2}$$

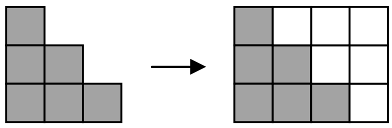
Ia menyatakan bahwa matematika sebagai "*Princess of Sciences*." Gauss meninggal dunia tanggal 23 Februari 1855 di Gottingen-Jerman.

Kembali kepada permasalahan kita di atas, yaitu menghitung jumlah dari $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$. Mungkin selama ini pembaca terbiasa dengan suguhan mekanistik dalam mencari jumlah n bilangan asli pertama, yaitu dengan konsep (rumus) n suku pertama (Sn). Pada kesempatan ini sajian penyelesaian dengan menggunakan benda konkrit kertas berpetak atau model persegi yang terbuat dari papan dan sejenisnya.

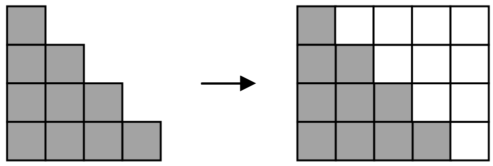




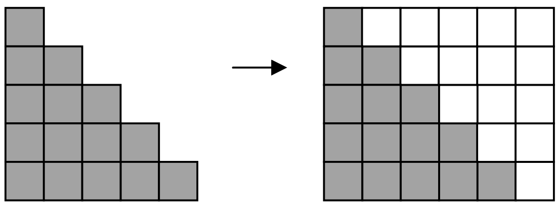
$$1 + 2 = \frac{2 \times 3}{2} = \frac{2 \times (2 + 1)}{2} = 3$$



$$1 + 2 + 3 = \frac{3 \times 4}{2} = \frac{3 \times (3 + 1)}{2} = 6$$



$$1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \times 5}{2} = \frac{4 \times (4 + 1)}{2} = 10$$

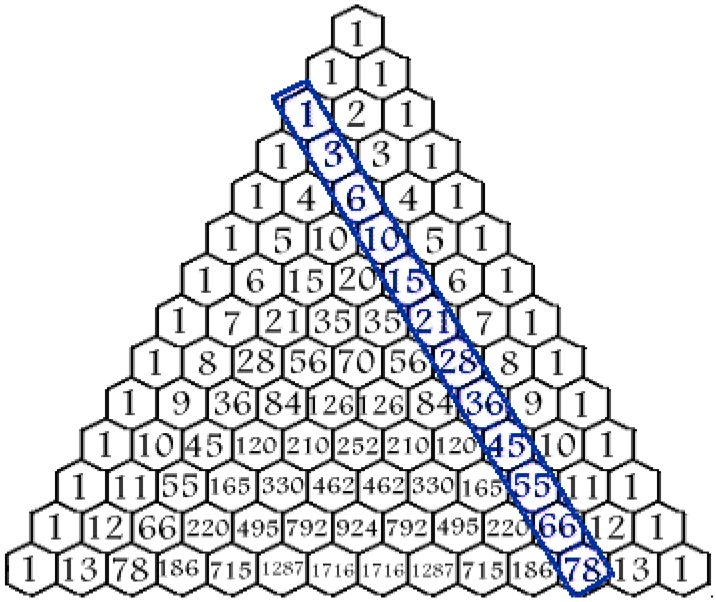


$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5 \times 6}{2} = \frac{5 \times (5 + 1)}{2} = 15$$

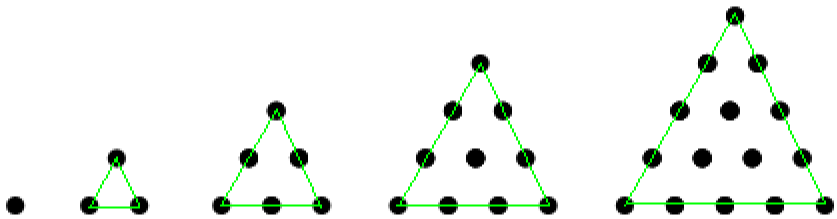
Sehingga dapat digeneralisasikan untuk *n* bilangan asli pertama, yaitu

$$\mathbf{1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}}$$

Berikutnya kita akan menghitung jumlah suku ke-*n* dari barisan bilangan asli ini dengan memanfaatkan pola bilangan pada segitiga *Pascal*.



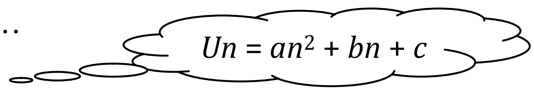
Diagonal ketiga dari segitiga *Pascal* di atas membentuk pola bilangan segitiga (*Triangular Numbers*), yaitu 1, 3, 6, 10, …



1 ___ 3 ___ 6 ___ 10 …

2 ___ 3 ___ 4

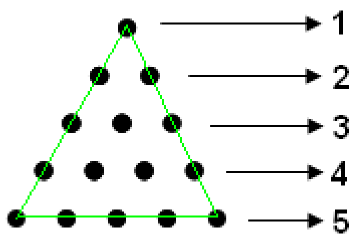
1 1



Dalam menentukan suku ke-*n* barisan aritmetika dengan beda tingkat dua ini, kita akan menggunakan solusi $Un = an^2 + bn + c$, yang memberikan nilai $a = b = ½$ dan $c = 0$, sehingga diperoleh

$$Un = \frac{n(n+1)}{2}$$

Un untuk barisan bilangan segitiga ini merupakan *Sn* bagi deret bilangan asli, yaitu 1 + 2 + 3 + 4 + …; sehingga diperoleh



$$Sn = \sum_{n=1}^{\infty} n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Bukti dengan induksi matematik

- Untuk n = 1; bernilai benar

$$1 = \frac{2}{2} = \frac{1(1+1)}{2}$$

- Andaikan benar untuk $n = k$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

- Akan ditunjukkan juga benar untuk $n = k + 1$

$$[1 + 2 + 3 + \cdots + k] + (k+1) = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right] + (k+1)$$

$$= \left[\frac{k(k+1)}{2}\right] + \frac{2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

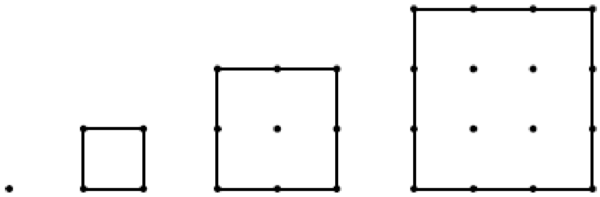
Jadi benar bahwa $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Francisco Maurolycus (1494 – 1575), gurunya Galileo, menggunakan induksi matematik pada tahun 1575 untuk membuktikan 1 + 3 + 5 + ... + (2n – 1) = n^2. Blaise Pascal (1623 – 1662) menggunakan induksi matematik dalam menyajikan segitiga Pascal untuk menentukan koefisien dari ekspansi binomial. Istilah induksi matematik sendiri diperkenalkan oleh Augustus De Morgan

h. Deret Bilangan Kuadrat

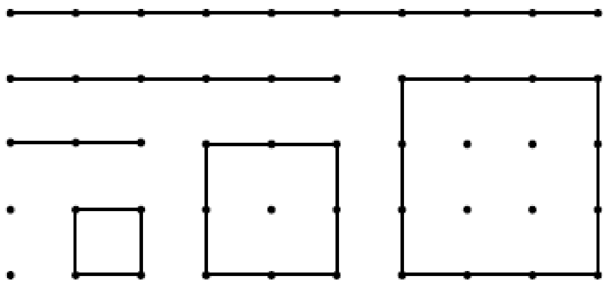
$$Sn = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

Untuk jumlah empat bilangan kuadrat pertama diperlihatkan oleh gambar



$$1^2 = 1$$
$$1^2 + 2^2 = 5$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

Gambar di atas dapat disusun sehingga membentuk persegipanjang, dengan ukuran 10 titik × 5 titik.



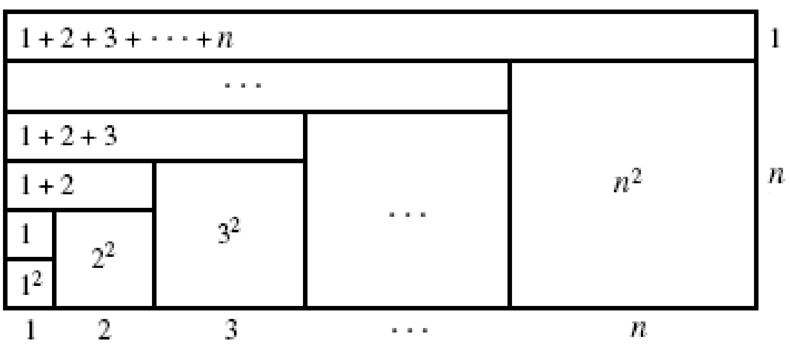
Banyaknya titik pada gambar di atas adalah

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) + (1 + 3 + 6 + 10) = (1 + 2 + 3 + 4)(4 + 1)$$

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) + 20 = 10 \times 5$$

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = 10 \cdot 5 - 20 = 30 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6}$$

Untuk menghitung hasil dari $Sn = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ kita dapat memanfaatkan gambar berikut



$$Sn + [1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \ldots + (1 + 2 + 3 + \ldots + n)]$$

$$= (1 + 2 + 3 + \ldots + n)(n + 1)$$

Karena jumlah n bilangan asli pertama adalah $n(n + 1)/2$, maka diperoleh:

$$Sn + \left[\frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2} + \cdots + \frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{n(n+1)^2}{2}$$

yang dapat dituliskan sebagai

$$S + \frac{1}{2}[1(1+1) + 2(2+1) + 3(3+1) + \cdots + n(n+1)] = \frac{n(n+1)^2}{2}$$

$$S + \frac{1}{2}[(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + (1 + 2 + 3 + \cdots + n)] = \frac{n(n+1)^2}{2}$$

$$S + \frac{1}{2}\left[S + \frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{n(n+1)^2}{2}$$

$$\frac{3}{2}S = \frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{4}$$

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

i. Deret Bilangan Kubik

$$Sn = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

$$1^3 = 1$$

$$1^3 + 2^3 = 9 = (1 + 2)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = (1 + 2 + 3)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$$

Dapat disimpulkan bahwa

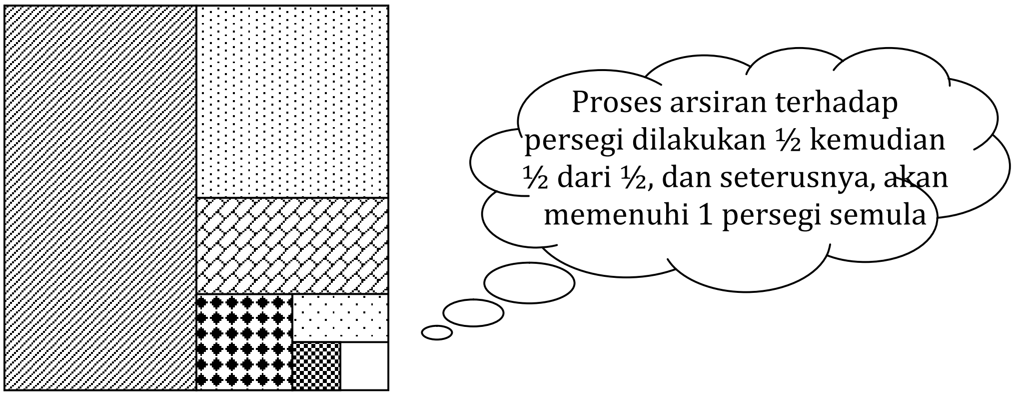
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$$

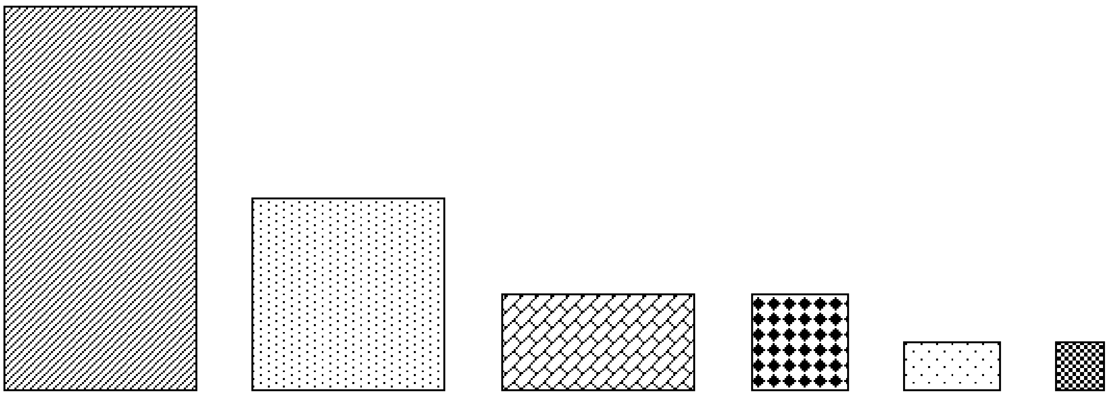
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

j. Deret Geometri Takhingga

Kali ini kita akan mengobservasi deret geometri takhingga, kemudian menghitung jumlahnya.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots$$





Berdasarkan model persegi di atas, maka dapat diprediksi jumlah deret geometri takhingga

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots=1$$

$$\text{Misalkan } a=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots \qquad (*)$$

$$2a=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots \qquad (**)$$

Kurangkan persamaan (*) dari persamaan (**), sehingga diperoleh a = 1

Kita mengelaborasi hasil ini kepada deret geometri takhingga yang lain, seperti

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots \quad \text{dan} \quad \frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{1024}+\cdots$$

$$\text{Misalkan } b=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots \qquad (\#)$$

$$3b=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots \qquad (\#\#)$$

Kurangkan persamaan (#) dari persamaan (##), sehingga diperoleh

$$2b=1$$

$$c=\frac{1}{2}$$

$$\text{Misalkan } c=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{1024}+\cdots \qquad (@)$$

$$4c=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{1024}+\cdots \qquad (@@)$$

Kurangkan persamaan (@) dari persamaan (@@), sehingga diperoleh

$$4c=1$$

$$c=\frac{1}{3}$$

Berdasarkan tiga pengerjaan di atas, diperoleh data-data

$$a=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1 \qquad b=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2} \qquad c=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{1}{3}$$

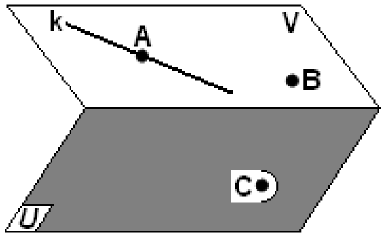
Sehingga dapat digeneralisasi menjadi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}=\frac{1}{x-1}$$

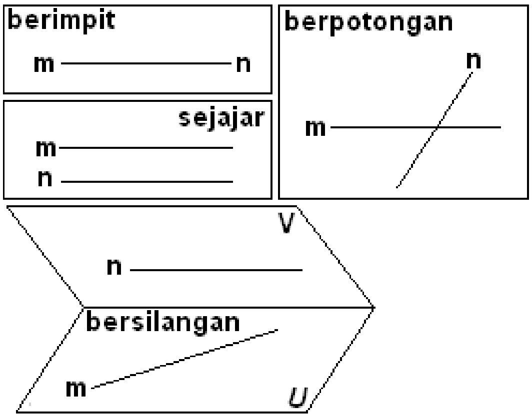
Bagian terakhir ini yang biasa digunakan untuk menghitung jumlah takhingga (S_∞) dari suatu deret geometri.

2. GEOMETRI DAN PENGUKURAN

2.1. Kedudukan Titik, Garis, dan Bidang



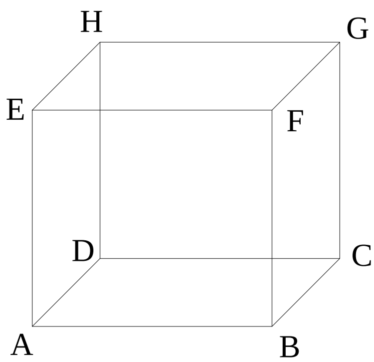
Kedudukan titik terhadap garis, jika diketahui sebuah titik *A* dan sebuah garis *k*, maka titik *A* teletak pada garis *k*, atau garis *k* melalui titik *A*. Sedangkan untuk titik *B* berada diluar garis *k*. Kedudukan titik terhadap bidang, jika diketahui sebuah titik *C* dan sebuah bidang *U*, maka titik *C* terletak pada bidang *U*, atau bidang *U* melalui titik *C*. Sedangkan untuk titik *A* dan *B* berada diluar bidang *U*, yaitu beradad pada bidang *V*.



Kedudukan garis terhadap garis. Untuk garis *m* dan *n* yang terletak pada sebuah bidang, akan terjadi garis *m* dan *n* berhimpit ($m = n$), garis *m* dan *n* berpotongan pada sebuah titik, garis *m* dan *n* sejajar ($m \,//\, n$), dan garis *m* dan *n* tidak terletak pada sebuah bidang (garis *m* dan *n* bersilangan), yaitu kedua garis tidak sejajar dan tidak berpotongan.

Kedudukan garis terhadap bidang. Diketahui garis *m*, *n* dan bidang *U*, *V*, dapat terjadi garis *m* terletak pada bidang *U*, garis *m* memotong bidang *V* (garis *m* menembus bidang *V*), dan garis *n* sejajar dengan bidang *U*.

Kedudukan bidang terhadap bidang. Jika diketahui bidang *U* dan bidang *V*, maka: bidang *U* dan bidang *V* berhimpit, bidang *U* dan bidang *V* sejajar, dan bidang *U* dan bidang *V* berpotongan.
Perpotongan kedua bidang berupa garis lurus yang disebut garis potong atau garis persekutuan.

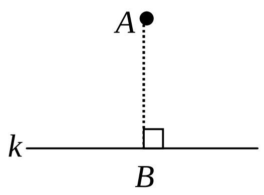


Untuk menguji pemahaman kita,
Perhatikan kubus *ABCD.EFGH*, kemudian isilah titik-titik di bawah ini

- Titik *E* terletak pada garis *EF*, …., dan ….
- Titik *A* tidak terletak pada garis *BC*, …., …., …., …., …., …., …., dan ….
- Titik *F* terletak pada bidang *BCGF*, …….., dan ……..
- Titik *C* tidak terletak pada bidang …….., …….., dan ……..
- Garis *DC* berhimpit dengan garis *CD*
- Garis *FG* sejajar dengan garis *EH*, …., …., …., dan ….
- Garis *GH* berpotongan dengan garis *CG*, …., …., …., dan ….
- Garis *DH* bersilangan dengan garis *FG*, …., …., …., dan ….
- Garis *AB* terletak pada bidang *ABCD* dan ….….
- Garis *FE* tidak terletak pada bidang *ABCD*, …….., …….., dan ……..
- Bidang *ADHE* berpotongan dengan bidang *EFGH*, …….., …….., dan ……..
- Bidang *ADHE* berimpit dengan bidang ……..
- Bidang *ADHE* sejajar dengan bidang ……..

2.2. Jarak Titik, Garis, dan Bidang

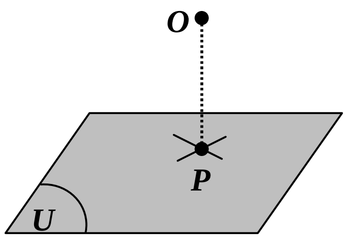
a. Jarak antara titik dan garis



Jarak antara titik dan garis merupakan panjang ruas garis yang ditarik dari titik tersebut sampai memotong garis secara tegak lurus. Jarak antara titik *A* dengan garis *k* adalah *AB*, karena $AB \perp k$.

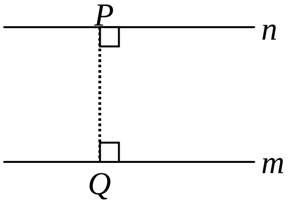
b. Jarak antara titik dan bidang

Jarak antara titik dan bidang adalah panjang ruas garis yang ditarik dari suatu titik diluar bidang sampai memotong tegak lurus bidang. Jarak titik *O* ke bidang *U* adalah *OP*, karena garis $OP \perp U$.

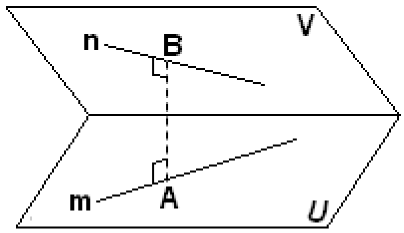


c. Jarak antara dua garis

Dua garis yang berpotongan tidak mempunyai jarak, sedangkan jarak antara dua garis yang sejajar adalah panjang ruas garis yang ditarik dari suatu titik pada salah satu garis sejajar dan tegak lurus garis yang lain.

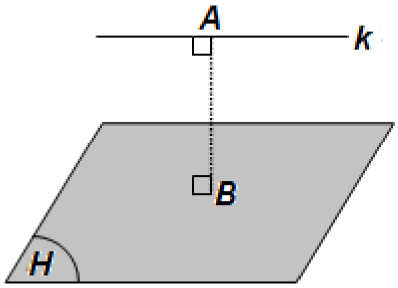


Jarak antara garis *m* dan *n* adalah *PQ*, karena *PQ* tegak lurus terhadap garis *m* dan *n*.



Jarak dua garis bersilangan adalah panjang ruas garis hubung yang letaknya tegak lurus pada kedua garis bersilangan itu. Jarak antara garis *m* dan *n* adalah *AB* karena *AB* tegak lurus terhadap garis *m* dan *n*.

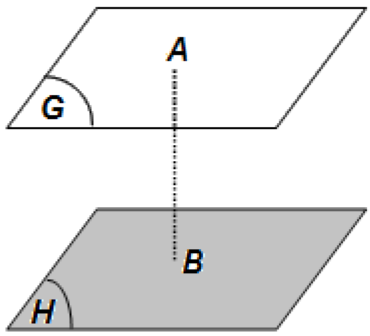
d. Jarak antara garis dan bidang



Jarak antara garis dan bidang yang sejajar adalah jarak antara salah satu titik pada garis tehadap bidang. Jarak antara garis *k* dan bidang *H* adalah *AB* karena $AB \perp H$.

e. Jarak antara dua bidang

Jarak antara dua bidang yang sejajar sama dengan jarak antara sebuah titik pada salah satu bidang ke bidang yang lain. Jarak antara bidang *G* dan *H* adalah *AB*.



Contoh :

Diketahui kubus *ABCD.EFGH* dengan panjang rusuk 10 cm. Hitunglah jarak antara :

- Titik *A* ke *H*
- Titik *A* ke *P* (*P* adalah titik tengah diagonal ruang)
- Titik *A* ke garis *CE*
- Titik *A* ke bidang *BCGF*
- Titik *A* ke bidang *BDHF*
- Titik *A* ke bidang *BDE*
- Garis *AE* ke garis *CG*
- Garis *AE* ke garis *CG*

➢ Bidang *ABCD* ke bidang *EFGH*

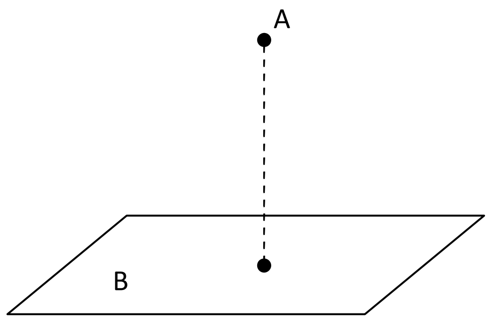
2.3. Proyeksi

a. Proyeksi titik pada bidang

Jika titik *A* di luar bidang *H*, maka proyeksi *A* pada bidang *H* ditentukan sebagai berikut :

❖ Dari titik *A* dibuat garis g yang tegak lurus bidang *H*

❖ Tentukan titik tembus garis *g* terhadap bidang *H*, misalnya titik *B*. Proyeksi titik *A* pada bidang *H* adalah *B*.



b. Proyeksi garis pada bidang

Menentukan proyeksi garis pada bidang sama dengan menentukan proyeksi dua buah titik yang terletak pada garis ke bidang itu, dan proyeksi garis tadi pada bidang merupakan garis yang ditarik dari titik-titik hasil proyeksi.

❖ Jika sebuah garis tegak lurus pada bidang maka proyeksi garis ke bidang itu berupa titik.

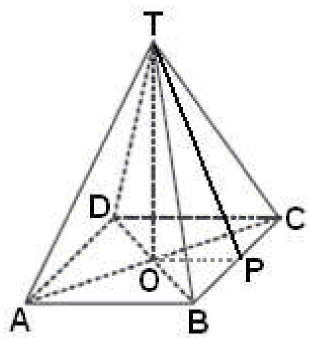
❖ Jika garis sejajar bidang maka proyeksi garis ke bidang merupakan garis yang sejajar dengan garis yang diproyeksikan.

Contoh :

Diketahui limas beraturan *T.ABCD* dengan *AB* = 5 cm dan *TA* = 8 cm.

Hitunglah panjang proyeksi:

- *TB* pada bidang *ABCD*



- *TB* pada bidang *TAC*
- Proyeksi *T* pada bidang *ABCD* adalah titik *O*. Jadi proyeksi *TB* pada bidang *ABCD* = *BO*

$$BO = ½ .AC$$
$$= ½ \sqrt{AB^2 + BC^2}$$
$$= ½ \sqrt{25 + 25}$$
$$= ½\ 5\sqrt{2}$$
$$\alpha = \frac{5}{2}\sqrt{2} \text{ cm}$$

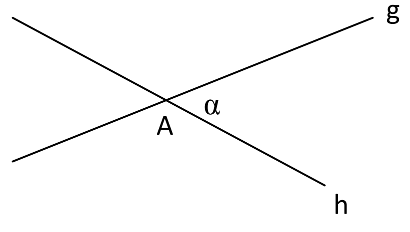
- Proyeksi *TB* pada bidang *TAC* = *TO*

$$TO = \sqrt{TB^2 - BO^2}$$
$$= \sqrt{64 - \frac{25}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{103}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{206} \text{ cm}$$

2.4. Sudut Antara Garis Dan Bidang

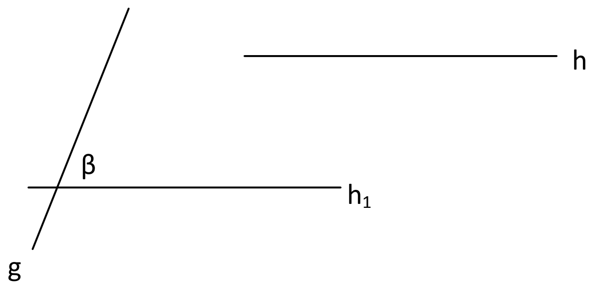
a. Sudut antara dua garis berpotongan

Sudut antara dua garis berpotongan diambil sudut yang lancip. Garis *g* berpotongan dengan garis *h* di titik *A*, sudut yang dibentuk adalah α.



b. Sudut antara dua garis bersilangan

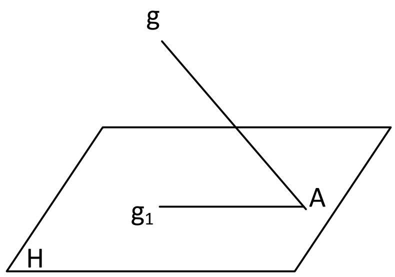
Sudut antara dua garis bersilangan ditentukan dengan membuat garis sejajar salah satu garis bersilangan tadi dan memotong garis yang lain dan sudut yang dimaksud adalah sudut antara dua garis berpotongan itu.



Garis g bersilangan dengan h, garis h_1 sejajar dengan h dan memotong g, sudut antara g dan h = sudut antara g dan h_1, yaitu β.

c. Sudut antara garis dan bidang

Sudut antara garis dan bidang hanya ada jika garis menembus bidang. Sudut antara garis dan bidang adalah sudut antara garis dan proyeksinya pada bidang itu.



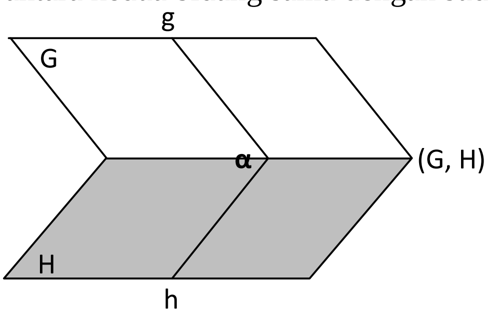
Garis g menembus bidang H dititik A. Proyeksi garis g pada bidang H adalah g_1. Sudut antara garis g dengan bidang H adalah sudut yang dibentuk garis g dengan g_1

d. Sudut antara bidang dengan bidang

Sudut antara dua bidang terjadi jika kedua bidang saling berpotongan. Untuk menentukannya sebagai berikut:

- ❖ Tentukan garis potong kedua bidang
- ❖ Tentukan sebarang garis pada bidang pertama yang tegak lurus garis potong kdua bidang
- ❖ Pada bidang kedua buat pula garis yang tegak lurus garis potong kedua bidang dan berpotongan dengan garis pada bidang pertama tadi.

❖ Sudut antara kedua bidang sama dengan sudut antara kedua garis tadi



Bidang G dan H berpotong pada garis (G, H). Garis $g \in G$, $g \perp (G, H)$, garis $h \in H$, dan $h \perp (G, H)$. Sudut antara bidang G dan H sama dengan sudut antara garis g dan h, yaitu α.

Soal :

Diketahui kubus *ABCD.EFGH* dengan panjang rusuk 5 cm. Tentukan :

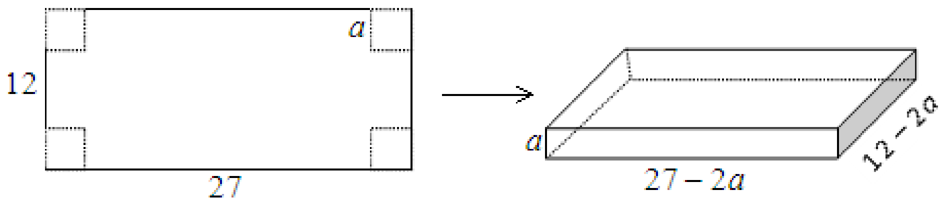
- Besar sudut antara BG dan bidang ABCD
- Cosinus sudut antara BH dan ABCD

2.5. BUKAN MERUPAKAN PERSOALAN DIMENSI TIGA, TETAPI KONSEP KALKULUS

2.5. Geometri Ruang

2.5.1. Persoalan Volum Bangun Geometri

Dari selembar karton berukuran 27 cm × 12cm, akan dibuat kotak tanpa tutup, dengan memotong ke-empat pojok berbentuk persegi identik, kemudian sisi-sisi karton dilipat keatas. Tentukan volume kotak yang terbentuk.



Misalkan pojok yang dipotong identik adalah berukuran $a \times a$, maka akan terbentuk kotak dengan ukuran $(27 - 2a)(12 - 2a)a$ cm^3.

❖ Sekarang kita andaikan $a = 1$, maka ukuran kotak adalah

p = 25 cm

l = 10 cm

t = 1 cm

Sehingga volume kotak = 250 cm^3

- ❖ Andaikan a = 2, maka ukuran kotak adalah

  p = 23 cm

  l = 8 cm

  t = 2 cm

  Sehingga volume kotak = 368 cm^3

- ❖ Andaikan a = 5, maka ukuran kotak adalah

  p = 17 cm

  l = 2 cm

  t = 5 cm

  Sehingga volume kotak = 170 cm^3

- ❖ Perhatikan bahwa kisaran nilai a berada antara 0 dan 6, untuk $a \in \mathbf{R}$. Beberapa ukuran kotak dapat dilihat pada tabel berikut:

No	***a***	***P***	***l***	***t***	***V***
1	0,5	26	11	0,5	71,5
2	1	25	10	1	250
3	2	23	8	2	368
4	2,25	22,5	7,5	2,25	379,7
5	2,5	22	7	2,5	385
6	2,55	21,9	6,9	2,55	385,3
7	2,6	21,8	6,8	2,6	385,4
8	2,7	21,6	6,6	2,7	384,9
9	2,75	21,5	6,5	2,75	384,3
10	3	21	6	3	378
11	4	19	4	4	304
12	5	17	2	5	170

Jelas bahwa takberhingga banyaknya ukuran kotak yang dapat dibuat dengan ukuran dalam bilangan riil, kita dapat membatasi persoalan ini untuk ukuran kotak hanya berupa bilangan bulat.

- Kalau kita ingin mengetahui berapa ukuran kotak sehingga mempunyai volume maksimal, maka dapat memanfaatkan konsep nilai maksimum fungsi, yaitu turunan pertama sama dengan nol.

  $V = (27 - 2a)(12 - 2a)a$

  $V = 4a^3 - 78a^2 + 324a$

  $V' = 12a^2 - 176a + 324 = 0$

  $a^2 - 13a + 27 = 0$

  diperoleh nilai $a = \frac{13 \pm \sqrt{61}}{2}$

untuk nilai $a = \frac{13 - \sqrt{61}}{2}$, memberikan volume = 385,4252302

2.5.2. Luas Permukaan Limas

LEBIH PAS UNTUK DISAJIKAN DI BAGIAN AKHIR

Rabu tanggal 19 Oktober 2011, seorang guru peserta PLPG Matematika SMP mengajarkan materi hitung luas permukaan limas persegi dalam ujian *peerteaching*. Secara gamblang dan detil dia menjelaskan limas persegi yang dalam maksudnya adalah limas beraturan. Dalam komfirmasi kegiatan pembelajaran, ia menyajikan soal

"Tentukan volume limas persegi dengan panjang sisi 6 *cm* dan tinggi 8 *cm*"

Sebanyak 10 orang guru selaku teman sejawat dalam *peerteaching* memberikan jawaban yang sama, yaitu memandang bahwa limas yang dimaksud adalah limas beraturan dengan selimutnya merupakan empat buah segitiga sama kaki yang kongruen. Diperoleh jawaban luas permukaan limas $L = 12\sqrt{73} + 36$ cm^2.

Setelah semua peserta PLPG tampil *peerteaching*, penulis yang selaku instruktur menyajikan gambar limas dengan alas berbentuk persegi, tetapi selimut-selimutnya bukan merupakan segitiga-segitiga yang kongruen, semua peserta serentak mengatakan bahwa itu adalah juga limas persegi. Namun selama ini, mereka cenderung mengatakan limas persegi untuk maksud limas beraturan. Padahal konsep limas beraturan itu adalah limas dengan panjang semua rusuknya sama, yang tentu saja alasnya tidak harus persegi, tetapi dapat pula sebagai belah ketupat.

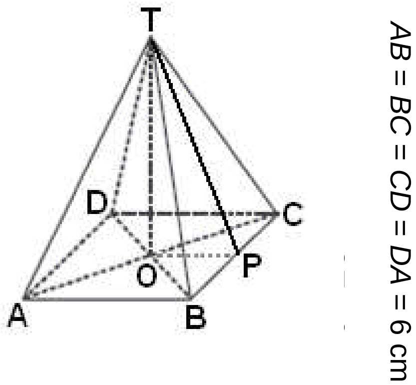
Penulis mengatakan, jangan terjebak dengan istilah, apalagi geometri yang sarat dengan visualisasi. Gambarkanlah, maka semua akan dapat diidentifikasi dengan jelas. Inilah konsep *mathematical understanding,* mampu membedakan contoh dan bukan contoh. Apapun bentuk selimutnya, ia segitiga sembarang, siku-siku, sama kaki, atau sama sisi, apakah keempatnya kongruen atau tidak, yang penting alasnya berbentuk persegi, maka dapatlah ia disebut sebagai limas persegi. Kalau limas itu limas beraturan, tidak harus pula dipastikan alasnya sebagai persegi, karena belah ketupat juga beraturan sisinya.

Peserta PLPG tersebut merasa *miskonsepsi* tentang limas persegi (limas beraturan) dan khawatir dengan kelulusannya. Penulis mengatakan bahwa, tidak ada yang namanya *miskonsepsi*, yang ada adalah konsepsi kita (guru) yang berbeda dengan konsepsi orang lain tentang limas persegi tersebut. Hal ini terkait dengan ***teachers' beliefs***, yaitu sistem pandangan personal (guru) yang terintegrasi tentang hakekat materi ajar (matematika), siswa (yang akan belajar matematika), belajar dan pembelajaran (model, pendekatan, metode, teknik, termasuk media pembelajaran matematika).

Lebih lanjut penulis memandang soal yang diajukan guru peserta PLPG di atas sebagai masalah yang dapat dikategorikan sebagai *open-ended problem*. Dengan demikian pembelajaran yang diberikan akan lebih menggugah keterbukaan cara dan jawaban maupun kreativitas anak didik. Inilah *teachers' beliefs* yang memandang materi, kreativitas anak, dan pendekatan pembelajaran *open-ended* secara terintegrasi. Bahwa saya (guru) mengajar bukanlah sebuah tuntutan penyampaian standar isi kurikulum semata, tetapi lebih dari itu tujuan pemelajaran matematika yang di antaranya: penguasaan konsep; melatih cara berfikir dalam menarik kesimpulan; mengembangkan aktivitas kreatif yang melibatkan imajinasi, intuisi, dan penemuan; mengembangkan kemampuan memecahkan masalah; dan mengembangkan kemampuan menyampaikan informasi atau meng-komunikasikan gagasan dapat dipenuhi.

Berikut beberapa alternatif jawaban yang dapat penulis sajikan terhadap soal guru peserta PLPG Matematika SMP. Pembaca disilahkan memberikan komentar dan saran atas sajian penulis, yang bisa jadi berbeda dengan konsep pembaca. Ingat, matematika bukanlah barang jadi yang harus diterima begitu saja, tanpa melalui investigasi kritis.

❖ Memandang limas persegi sebagai limas beraturan, di mana selimutnya merupakan empat segitiga sama kaki yang kongruen.



Mencari tinggi segitiga sama kaki yang merupakan selimut limas adalah dengan memanfaatkan konsep phytagoras yang dapat dikerjakan dengan dua cara.

a. Pandang segitiga OAT

$BT^2 = OT^2 + OB^2$

$BT^2 = 8^2 + (3\sqrt{2})^2$

$BT^2 = 64 + 18$

$BT^2 = 82$

$BT = \sqrt{82}$

Sehingga

$PT^2 = BT^2 - BP^2$

$PT^2 = (\sqrt{82})^2 - 3^2$

$PT^2 = 82 - 9$

$PT^2 = 73$

$PT = \sqrt{73}$

Dua cara mencari *OB*

$$BD^2 = BC^2 + CD^2$$
$$BD^2 = 6^2 + 6^2$$
$$BD^2 = 72$$
$$BD = 6\sqrt{2}$$
$$OB = \frac{1}{2}BD = 3\sqrt{2}$$

$$OB^2 + OC^2 = BC^2$$
$$2OB^2 = 6^2$$
$$OB^2 = 18$$
$$OB = 3\sqrt{2}$$

Umumnya orang menggunakan cara ini, karena gambar jarang sekali menyajikan garis tinggi segitiga selimut limat, yang dalam hal ini adalah garis PT, sehingga siswa lebih cenderung melihat segitiga yang memalui diagonal alas limas. Padahal untuk sampai kepada panjang PT (sebagai tinggi segitiga selimut limas) harus melalui tiga kali perhitungan *Phytagoras*.

❖ Pandang segitiga siku-siku *OPT*

$PT^2 = OP^2 + OT^2$

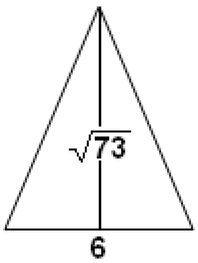
$PT^2 = 3^2 + 8^2$

$PT^2 = 9 + 64$

$PT^2 = 73$

$PT = \sqrt{73}$

Luas selimut limas



$$Ls = 4 \times \frac{6 \times \sqrt{73}}{2}$$

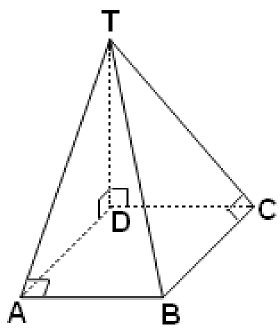
$$= 12\sqrt{73}$$

Luas permukaan limas

$$L = Ls + La$$

$$= 12\sqrt{73} + 36$$

❖ Memandang limas dengan dua sisi tegak (siku-siku terhadap alas)



$AB = BC = CD = DA = 6$ cm dan $DT = 8$ cm

Perhatikan segitiga siku *DAT* dan *DCT*, keduanya adalah kongruen.

$$L_{DAT} = L_{DCT} = \frac{6 \times 8}{2} = 24$$

Perhatikan pula segitiga siku-siku *ABT* dan *CBT* yang kongruen.

$AT^2 = DA^2 + DT^2$

$AT^2 = 6^2 + 8^2$

$AT^2 = 100$

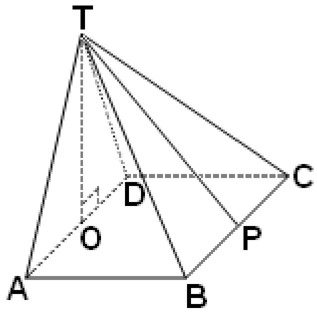
$AT = 10$ berarti $CT = 10$

$$L_{ABT} = L_{CBT} = \frac{6 \times 10}{2} = 30$$

Luas permukaan limas

$$\begin{aligned} L &= La + L_{DAT} + L_{DCT} + L_{ABT} + L_{CBT} \\ &= 36 + 24 + 24 + 30 + 30 \\ &= 144 \end{aligned}$$

❖ Memandang limas dengan satu sisi tegak



$AB = BC = CD = DA = 6$ cm

$OT = 8$ cm, $OT \perp ABCD$

$OD = OA$, $\angle BAT = \angle CDT = 90^O$

Perhatikan segitiga Sama kaki *ADT*

$$L_{ADT} = \frac{6 \times 8}{2} = 24$$

Perhatikan pula segitiga siku-siku *ABT* dan *CDT* yang kongruen.

$AT^2 = AO^2 + OT^2$

$AT^2 = 3^2 + 8^2$

$AT^2 = 73$

$AT = \sqrt{73}$ berarti $DT = \sqrt{73}$

$$L_{ABT} = L_{CDT} = \frac{6 \times \sqrt{73}}{2} = 3\sqrt{73}$$

Perhatikan pula segitiga sama kaki *BCT*

$BT^2 = AB^2 + AT^2$

$AT^2 = 6^2 + (\sqrt{73})^2$

$AT^2 = 109$

$AT = \sqrt{109}$

$PT^2 = BT^2 – BP^2$

$PT^2 = (\sqrt{109})^2 – 3^2$

$PT^2 = 100$

$PT = 10$

Mencari panjang *PT* juga dapat dilakukan dengan memanfaatkan segitiga siku-siku *OPT*.

$PT^2 = OT^2 + OP^2$

$PT^2 = 8^2 + 6^2$

$PT^2 = 100$

$PT = 10$

$$L_{BCT} = \frac{6 \times 10}{2} = 30$$

Luas permukaan limas

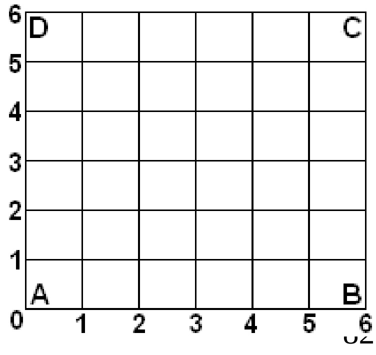
$$L = La + L_{ADT} + L_{DCT} + L_{ABT} + L_{BCT}$$

$$= 36 + 24 + 3\sqrt{73} + 3\sqrt{73} + 30$$

$$= 90 + 6\sqrt{73}$$

Demikian telah disajikan tiga diantara sekian banyak kondisi gambar limas persegi berikut perhitungannya. Pembaca dapat menggeser letak garis tinggi limas, sehingga memberikan bentuk limas yang berbeda, dengan luas permukaan yang berbeda pula.

Mengingat alas limas berbentuk persegi dengan panjang sisi 6 satuan, maka kita dapat membuatnya menjadi 36 persegi satuan. Kemudian diletakkan pada sistem koordinat Cartesius dengan titik korrdinat berupa bilangan bulat, yang berarti



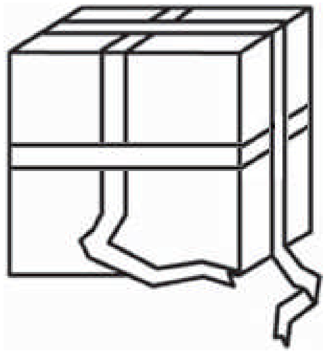
ada 49 titik koordinat sebagai posisi dari garis tinggi limas persegi, yaitu (0, 0), (0, 1), …, (0, 6), (1, 0), (1, 1), …, (1, 6), …, (6, 0), (6, 1), …, (6, 6).

Luas selimut limas untuk posisi garis tinggi limas pada setiap titik koordinat yang ada dapat dilihat pada tabel berikut.

<table>
<tr><th>Titik</th><th>Luas ΔABT</th><th>Luas ΔBCT</th><th>Luas ΔCDT</th><th>Luas ΔDAT</th><th>Luas Selimut Limas</th></tr>
<tr><td>(0, 0)</td><td>24</td><td>30</td><td>30</td><td>24</td><td>104</td></tr>
<tr><td colspan="6">Luas selimut limas dengan posisi garis tinggi limas pada koordinat (0, 0) setara dengan luas selimut limas pada koordinat (0, 6), (6, 0), dan (6, 6).</td></tr>
<tr><td>(0, 1)</td><td>24</td><td>$3\sqrt{89}$</td><td>30</td><td>$3\sqrt{65}$</td><td>$54 + 3(\sqrt{89} + \sqrt{65})$</td></tr>
<tr><td colspan="6">(0, 1) setara dengan (0, 5), (1, 0), (5, 0), (1, 6), (5, 6), (6, 1), dan (6, 5).</td></tr>
<tr><td>(0, 2)</td><td>$3\sqrt{68}$</td><td>30</td><td>$3\sqrt{80}$</td><td>24</td><td>$54 + 3(\sqrt{68} + \sqrt{80})$</td></tr>
<tr><td colspan="6">(0, 2) setara dengan (0, 4), (2, 0), (4, 0), (6, 2), (6, 4), (4, 6), dan (2, 6).</td></tr>
<tr><td>(0, 3)</td><td>$3\sqrt{73}$</td><td>30</td><td>$3\sqrt{73}$</td><td>24</td><td>$54 + 6\sqrt{73}$</td></tr>
<tr><td colspan="6">(0, 3) setara dengan (3, 0), (6, 3), dan (3, 6).</td></tr>
<tr><td>(1, 1)</td><td>$3\sqrt{65}$</td><td>$3\sqrt{89}$</td><td>$3\sqrt{89}$</td><td>$3\sqrt{65}$</td><td>$6(\sqrt{89} + \sqrt{65})$</td></tr>
<tr><td colspan="6">(1, 1) setara dengan (1, 5), (5, 1), dan (5, 5).</td></tr>
<tr><td>(2, 4)</td><td>$3\sqrt{80}$</td><td>$3\sqrt{80}$</td><td>$3\sqrt{68}$</td><td>$3\sqrt{68}$</td><td>$6(\sqrt{80} + \sqrt{68})$</td></tr>
<tr><td colspan="6">(2, 4) setara dengan (2, 2), (4, 2), dan (4, 4).</td></tr>
<tr><td>(1, 2)</td><td>$3\sqrt{68}$</td><td>$3\sqrt{89}$</td><td>$3\sqrt{80}$</td><td>$3\sqrt{65}$</td><td>$3(\sqrt{68} + \sqrt{89} + \sqrt{80} + \sqrt{65})$</td></tr>
<tr><td colspan="6">(1, 2) setara dengan (1, 4), (2, 1), (2, 5), (4, 1), (4, 5), (5, 2), dan (5, 4).</td></tr>
<tr><td>(1, 3)</td><td>$3\sqrt{73}$</td><td>$3\sqrt{80}$</td><td>$3\sqrt{73}$</td><td>$3\sqrt{65}$</td><td>$3(\sqrt{73} + \sqrt{80} + \sqrt{73} + \sqrt{65})$</td></tr>
<tr><td colspan="6">(1, 3) setara dengan (3, 1), (3, 5), dan (5, 3).</td></tr>
<tr><td>(3, 3)</td><td>$3\sqrt{73}$</td><td>$3\sqrt{73}$</td><td>$3\sqrt{73}$</td><td>$3\sqrt{73}$</td><td>$12\sqrt{73}$</td></tr>
<tr><td>(3, 4)</td><td>$3\sqrt{80}$</td><td>$3\sqrt{73}$</td><td>$3\sqrt{68}$</td><td>$3\sqrt{73}$</td><td>$3(\sqrt{80} + \sqrt{73} + \sqrt{68} + \sqrt{73})$</td></tr>
<tr><td colspan="6">(3, 4) setara dengan (3, 2), (2, 3), dan (4, 3).</td></tr>
</table>

Demikianlah 49 kemungkinan luas selimut limas persegi, dengan berbagai posisi garis tingginya. Untuk luas permukaan limas, tinggal dijumlahkan dengan luas alas limas yaitu 36. Tentu saja akan diperoleh takberhingga ukuran luas permukaan limas apabila titik koordinat posisi garis tinggi limas merupakan bilangan riil.

2.5.3. Pita Kotak Perhiasan



Sabtu tanggal 1 Oktober 2011, malam minggu sekitar pukul 19.14 WIB, penulis melihat sebuah cincin. Cincin tersebut ditempatkan pada sebuah kotak perhiasan berbentuk balok yang oleh penjualnya dihias dengan pita pada pertengahan setiap sisinya. Karena kotak perhiasan tersebut berukuran panjang 15 cm, lebar 10 cm, dan tinggi 5 cm, maka panjang pita yang dibutuhkan adalah 120 cm.

Penulis berpikir kasus ini dapat menjadi permasalahan *open-ended*, dengan soal

"Jika panjang pita yang diperlukan 120 cm, maka tentukan ukuran kotak perhiasan"

- Kalau kotak perhiasan berbentuk kubus, maka ukurannya adalah *s* = 10 cm, sehingga panjang pita adalah

$$12 \times 10 \text{ cm} = 120 \text{ cm}$$

- Ukuran kotak perhiasan

  Panjang = 15 cm

  Lebar = 10 cm

  Tinggi = 5 cm

  Panjang pita = 4(15 cm + 10 cm + 5 cm)

  = 4 × 30 cm

  = 120 cm

- Ukuran kotak perhiasan

  Panjang = 20 cm

  Lebar = 5 cm

  Tinggi = 5 cm

  Panjang pita = 4(20 cm + 5 cm + 5 cm)

  = 4 × 30 cm

  = 120 cm

Dari investigasi ini diperoleh konjektur bahwa jumlah panjang ketiga ukuran kado (balok) adalah 30 cm, yang kemudian dikali 4 sehingga menghasilkan ukuran pita 120 cm. Ini berarti kita mencari tiga bilangan yang berjumlah 30 sebagai ukuran panjang, lebar dan tinggi kotak perhiasan. Ketiga bilangan tersebut dapat dilihat pada tabel berikut. Pandang ukuran kotak dalam bilangan asli.

<table>
<tr><td>28, 1, 1</td><td>21, 8, 1</td><td>18, 11, 1</td><td>16, 11, 3</td><td>14, 12, 4</td><td rowspan="4">11, 11, 8</td></tr>
<tr><td>27, 2, 1</td><td>21, 7, 2</td><td>18, 10, 2</td><td>16, 10, 4</td><td>14, 11, 5</td></tr>
<tr><td>26, 3, 1</td><td>21, 6, 3</td><td>18, 9, 3</td><td>16, 9, 5</td><td>14, 10, 6</td></tr>
<tr><td>26, 2, 2</td><td>21, 5, 4</td><td>18, 8, 4</td><td>16, 8, 6</td><td>14, 9, 7</td></tr>
<tr><td>25, 4, 1</td><td>20, 9, 1</td><td>18, 7, 5</td><td>16, 7, 7</td><td>14, 8, 8</td><td rowspan="4">11, 10, 9</td></tr>
<tr><td>25, 3, 2</td><td>20, 8, 2</td><td>18, 6, 6</td><td>15, 14, 1</td><td>13, 13, 4</td></tr>
<tr><td>24, 5, 1</td><td>20, 7, 3</td><td>17, 12, 1</td><td>15, 13, 2</td><td>13, 12, 5</td></tr>
<tr><td>24, 4, 2</td><td>20, 6, 4</td><td>17, 11, 2</td><td>15, 12, 3</td><td>13, 11, 6</td></tr>
<tr><td>24, 3, 3</td><td>20, 5, 5</td><td>17, 10, 3</td><td>15, 11, 4</td><td>13, 10, 7</td><td rowspan="5">10, 10, 10</td></tr>
<tr><td>23, 6, 1</td><td>19, 10, 1</td><td>17, 9, 4</td><td>15, 10, 5</td><td>13, 9, 8</td></tr>
<tr><td>23, 5, 2</td><td>19, 9, 2</td><td>17, 8, 5</td><td>15, 9, 6</td><td>12, 12, 6</td></tr>
<tr><td>23, 4, 3</td><td>19, 8, 3</td><td>17, 7, 6</td><td>15, 8, 7</td><td>12, 11, 7</td></tr>
<tr><td>22, 7, 1</td><td>19, 7, 4</td><td>16, 13, 1</td><td>14, 14, 2</td><td>12, 10, 8</td></tr>
<tr><td>22, 6, 2</td><td>19, 6, 5</td><td>16, 12, 2</td><td>14, 13, 3</td><td>12, 9, 9</td><td>73</td></tr>
</table>

Terdapat 73 kemungkinan ukuran kotak perhiasan yang dapat dihias dengan 120 cm pita pada setiap pertengahan sisinya. Persoalan *open-ended ini* jika diberikan kepada siswa, maka akan membuat mereka menjadi sangat kaya akan jawaban. Tetapi masalahnya adalah tidak ada bunyi kurikulum matematika yang membicarakan persoalan hiasan pita pada sisi kotak, kurikulum formal kita hanya berbicara tentang berapa banyak titik sudut, rusuk, sisi, diagonal sisi, diagonal ruang, luas permukaan, ataupun volum suatu balok. Tanpa memberikan sesuatu yang lebih sebagai upaya pencapaian tujuan pembelajaran matematika secara umum. Kita (guru) sementara ini hanya sibuk dengan pencapaian tujuan pembelajaran matematika yang sesaat di kelas, mengejar materi karena takut kehabisan waktu, yang padahal kalau diorganisir dengan baik, mengajar dengan tidak dominan membuka buku pelajaran halaman demi halaman, tetapi berdasarkan RPP, *worksheet*, dan bahan ajar yang didesain sendiri, dengan bantuan media yang apik. Sekali lagi, jangan mengajar berdasarkan buku teks, maka waktu tidak akan cukup.

4. KALKULUS

4.1. Limit Fungsi

4.1.1. Definisi Limit Fungsi

Perhatikan fungsi yang ditentukan oleh rumus:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$$

Jika variabel *x* diganti 2 maka $f(x) = \frac{0}{0}$, merupakan bentuk tak tentu. Jadi *f*(*x*) tidak terdefinisi pada *x* = 2, tetapi adakah suatu bilangan yang akan didekati oleh nilai *f*(*x*) jika nilai *x* mendekati 2 tetapi tidak sama dengan 2?. Untuk mengetahui jawabannya kita ambil nilai-nilai dari *x* mendekati 2 dari kiri (*x* < 2) misalnya: 0; 1; 1,5; 1,9; 1,999; 1,999999 dan dari kanan (*x* > 2) misalnya: 4; 3; 2,5; 2,1; 2,001; 2,000001. Kemudian dihitung nilai *f* pada nilai-nilai *x* tersebut yang terlihat pada tabel berikut:

x	***f*(*x*)**	***x***	***f*(*x*)**
0	1	2,000001	5,000002
1	3	2,001	5,002
1,5	4	2,1	5,02
1,9	4,8	2,5	6
1,999	4,998	3	7
1,999999	4,999998	4	9
2	?		

Dari tabel di atas kita dapat menduga bahwa

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

Definisi

Misalkan *f* suatu fungsi yang terdefinisi pada suatu selang ***I*** yang memuat *c*. Limit *f*(*x*) untuk *x* mendekati *c* adalah *L*, ditulis

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

∀ ε > 0, ∃ δ > 0, ∋ $0 < |x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Kita akan menggunakan definisi ini untuk membuktikan bahwa

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x-2}=5$$

Analisis pendahuluan:

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\ni 0<|x-2|<\delta\rightarrow\left|\frac{2x^2-3x-2}{x-2}-5\right|<\varepsilon$$

untuk $x\neq 2$,

$$\left|\frac{2x^2-3x-2}{x-2}-5\right|=\left|\frac{2x^2-8x+8}{x-2}\right|=\left|\frac{(2x-4)(x-2)}{x-2}\right|$$

$$=|2x-4|$$

$$=2|x-2|<2\delta=\varepsilon$$

dari hasil terakhir ini menyarankan pemilihan $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$

Bukti formal:

Diberikan $\varepsilon>0$ sembarang pilih $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ $\ni$ untuk nilai x yang memenuhi

$0<|x-2|<\delta$ akan berlaku $\left|\frac{2x^2-3x-2}{x-2}-5\right|=2|x-2|<2\delta=2\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$

Jadi $\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x-2}=5$

4.1.2. Limit Satu Sisi (Limit Kiri dan Limit Kanan)

Definisi

Misalkan f suatu fungsi yang terdefinisi pada suatu selang buka (a, c). Limit $f(x)$ untuk x mendekati c dari kiri adalah L, ditulis

$$\lim_{x\to c^-}f(x)=L$$

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\ni 0<c-x<\delta\rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon$$

Misalkan f suatu fungsi yang terdefinisi pada suatu selang buka (c, d). Limit $f(x)$ untuk x mendekati c dari kanan adalah L, ditulis

$$\lim_{x\to c^+}f(x)=L$$

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\ni 0<c-x<\delta\rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon$$

Jika limit kiri sama dengan limit kanan, maka fungsi tersebut mempunyai limit.

Contoh

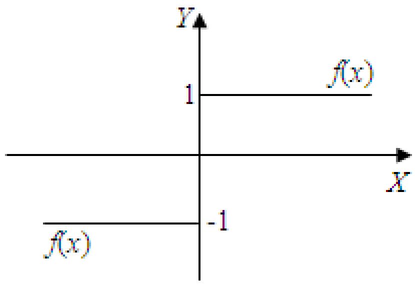
Misalkan fungsi *f* didefinisikan sebagai:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ;x < 0 \\ 1 & ;x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

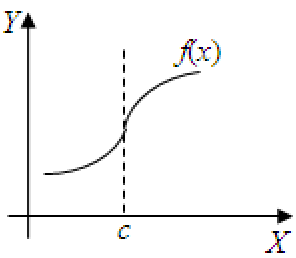
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

Berarti $\lim_{x \to 0} f(x) = -1$ tidak ada

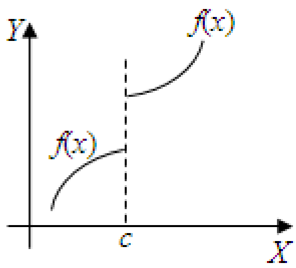


Teorema

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \leftrightarrow \lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$



Limit ada



Limit tidak ada

Teorema-teorema tentang limit

Misalkan *n* bilangan bulat positip, *k* konstanta dan *f*, *g* fungsi-fungsi yang mempunyai limit di *c*, maka:

a. $\lim_{x \to c} k = k$

b. $\lim_{x \to c} x = c$

c. $\lim_{x \to c} kf(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$

d. $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$

e. $\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$

f. $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$

g. $\lim_{x\to c}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$

g. $\lim_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$

h. $\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$; asalkan $\lim_{x\to c} f(x) \geq 0$; n genap

Teorema-teorema ini dapat dibuktikan dengan menggunakan definisi limit:

Contoh:

1. $\lim_{x\to 3} 2x^4 = 2\lim_{x\to 3} x^4 = 2[\lim_{x\to 3} x]^4 = 2(3)^4 = 162$

2. $\lim_{x\to 4}(3x^2 - 2x) = \lim_{x\to 4} 3x^2 - \lim_{x\to 4} 2x = 3\left[\lim_{x\to 4} x\right]^2 - 2\lim_{x\to 4} x$
$= 3[4]^2 - 2[4] = 40$

Teorema

Jika *f* suatu fungsi polinomial atau fungsi rasional maka

$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

Untu kasus fungsi rasional nilai penyebut di *c* tidak nol.

Contoh:

1. $\lim_{x\to 2}(3x^2 - 4x + 1) = f(2) = 5$; karena f polinom

2. $\lim_{x\to 1}\dfrac{2x^4 - 3x^2 + 4x + 5}{x^2 + 2x - 4} = f(1) = -8$

3. $\lim_{x\to 2}\dfrac{t^2 + t - 10}{t^2 + t - 6}$; $f(2) = \dfrac{0}{0}$ (bentuk tak tentu)

$\lim_{x\to 2}\dfrac{t^2 + t - 10}{t^2 + t - 6} = \lim_{x\to 2}\dfrac{(t-2)(t+5)}{(t-2)(t+3)} = \lim_{x\to 2}\dfrac{(t+5)}{(t+3)} = \dfrac{7}{5}$

4. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{x}$; $f(0) = \dfrac{0}{0}$ (bentuk tak tentu)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x}\times\frac{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}}{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(4+x)-(4-x)}{x\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}$$

4.1.3. Limit Fungsi Trigonometri

Fungsi sinus dan kosinus mempunyai limit pada setiap bilangan riil *c* yaitu

$$\lim_{x\longrightarrow c} sin\ x = sin\ c$$

$$\lim_{x\longrightarrow c} cos\ x = cos\ c$$

APA PERLU DIBERIKAN SECARA SPESIFIK???

Fungsi-fungsi

$$f(x)=\sec x=\frac{1}{cos\ x}$$

$$f(x)=cosec\ x=\frac{1}{sin\ x}$$

$$f(x)=\tan x=\frac{sin\ x}{cos\ x}$$

$$f(x)=cot\ x=\frac{cos\ x}{sin\ x}$$

mempunyai limit pada setiap bilangan real.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x} = 1$

CONTOH NO. 2 KELIRU

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = 1$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x} = 1$

Contoh:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{3x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{4}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x} = \dfrac{4}{3}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x} = \dfrac{3}{4}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\times\dfrac{4x}{\sin 4x} = \dfrac{4}{3}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{\sin 2x} = \dfrac{5}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{5x}\times\dfrac{2x}{\sin 2x} = \dfrac{5}{2}$

4.1.4. Limit Takhingga

Misalkan fungsi *f* didefinisikan sebagai

$$f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$$

Jelas fungsi *f* tidak terdefinisi di $x = 2$, kita akan menginvestigasi nilai *f* untuk $x \neq 0$ dan *x* mendekati 2, perhatikan tabel berikut:

Untuk *x* mendekati 2 dari kanan ($x > 2$)

x	3	5/2	7/3	9/4	21/10	201/100	2001/1000
***f*(*x*)**	3	12	27	48	300	30.000	3.000.000

Terlihat bahwa nilai *f* bertambah besar tak terbatas jika *x* mendekati 2 dari kanan, ditulis

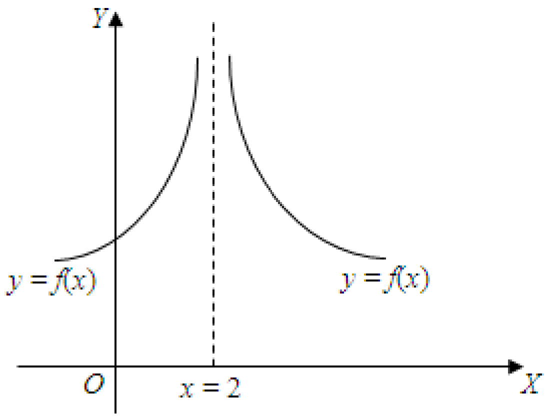
$$\lim_{x\to 2^+}\frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$$

Untuk *x* mendekati 2 dari kiri ($x < 2$)

x	1	3/2	5/3	7/4	19/20	199/100	199/1000
***f*(*x*)**	3	12	27	48	300	30.000	3.000.000

Terlihat bahwa nilai f bertambah besar tak terbatas jika x mendekati 2 dari kiri, ditulis

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$$



Dari dua pengertian di atas dikatakan f bertambah besar tak terbatas jika x mendekati 2, ditulis

$$\lim_{x \to 2} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$$

Definisi

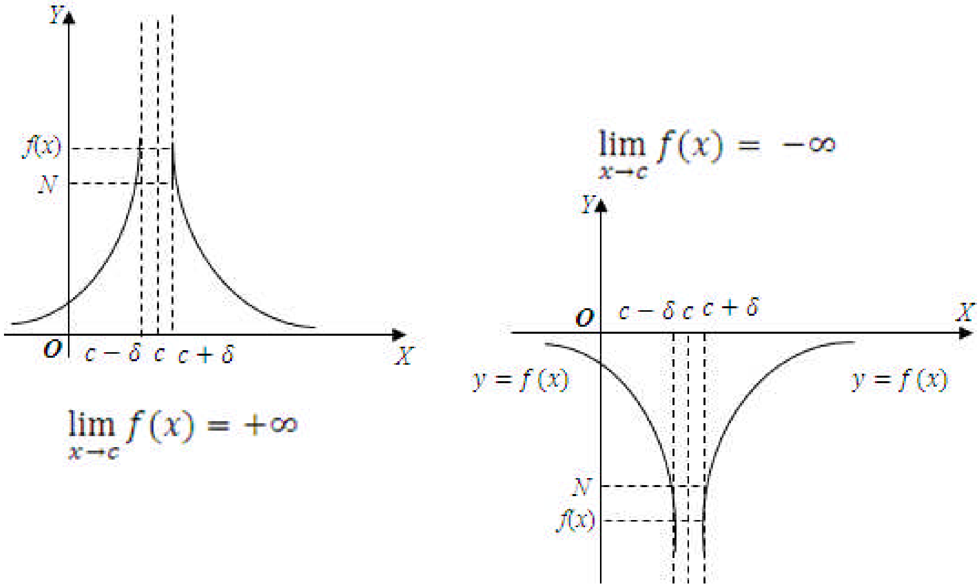
Misalkan f fungsi yang terdefinisi pada selang terbuka I yang memuat c (pada c, fungsi f boleh tidak terdefinisi). Bila x mendekati c nilai $f(x)$ bertambah besar tak terbatas ditulis

$$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$$

jika untuk sembarang bilangan $N > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga $f(x) > N$, bila x memnuhi $0 < |x - c| < \delta$. Untuk nilai $f(x)$ menurun tak terbatas ditulis

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

Perhatikan gambar berikut ini,



Teorema

Jika r sembarang bilangan bulat positif maka:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty \text{ ; jika } r \text{ ganjil} \\ +\infty \text{ ; jika } r \text{ genap} \end{cases}$$

Contoh:

1. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$
2. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^5} = -\infty$

Teorema

$\forall c \in \boldsymbol{R}$, jika $\lim_{x \to c} f(x) = 0$ dan $\lim_{x \to c} f(x) = k$; di mana $k \neq 0$ maka

1. Jika $k > 0$ dan $g(x) \to 0$ dari arah positif, maka $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$
2. Jika $k > 0$ dan $g(x) \to 0$ dari arah negatif, maka $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$
3. Jika $k < 0$ dan $g(x) \to 0$ dari arah positif, maka $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$
4. Jika $k < 0$ dan $g(x) \to 0$ dari arah negatif, maka $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

Contoh:

Tentukan $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{2x-1}{x-4}$

Karena $\lim\limits_{x\to 4^+}(2x-1) = 7 > 0$ dan $\lim\limits_{x\to 4^+}(x-4) = 0$

Dari arah positif maka

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{2x-1}{x-4} = +\infty$$

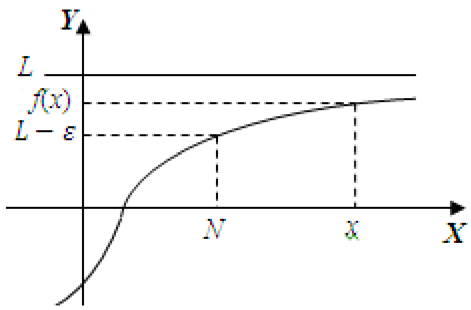
4.1.5. Limit di Takhingga

Pandang fungsi *f* yang didefinisikan $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$. Misalkan jika diambil nilai *x* = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10, 100, 1000, ... yaitu nilai *x* bertambah besar tak terbatas maka nilai *f* dapat dilihat dalam tabel berikut:

x	0	1	2	3	4	5	10	100
***f*(*x*)**	0	1	5/8	18/10	32/17	50/26	200/101	20.0000/10.001

Terlihat bahwa jika nilai *x* bertambah besar tak terbatas maka kita menduga nilai *f* akan mendekati 2 ditulis

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2$$



Definisi

Misalkan *f* fungsi yang terdefinisi pada selang buka (a, $+\infty$) limit *f*(*x*) bila *x* bertambah besar tak terbatas adalah *L*, ditulis

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

Dengan cara yang serupa untuk $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$. Misalkan jika diambil nilai *x* = 0, -1, -2, -3, -4, -5, -10, -100, -1000, ... yaitu nilai *x* menurun tak terbatas maka nilai *f* dapat dilihat dalam tabel berikut:

x	0	-1	-2	-3	-4	-5	-10	-100

$f(x)$	0	1	5/8	18/10	32/17	50/26	200/101	20.0000/10.001

Terlihat bahwa jika nilai x bertambah besar tak terbatas maka kita menduga nilai *f* akan mendekati 2 ditulis

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2$$

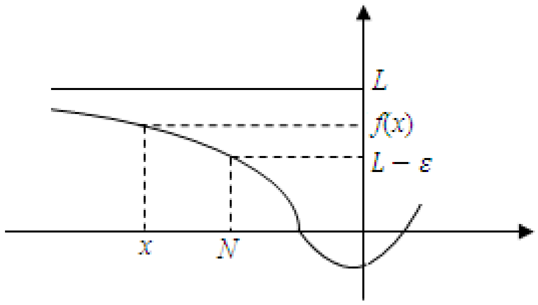
Definisi

Misalkan *f* fungsi yang terdefinisi pada selang buka $(a, +\infty)$ limit $f(x)$ bila x bertambah besar tak terbatas adalah L ditulis

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N < 0 \ni |f(x) - L| < \varepsilon$ apabila $x < N$.

Perhatikan gambar berikut:



Teorema

Jika r sembarang bilangan bulat positip, maka:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

Contoh:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x-3}{2x+5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4-\frac{3}{x}}{2+\frac{5}{x}} = \dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4-\frac{3}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{5}{x}\right)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty} 4 - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty} 2 + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{x}} = \dfrac{4-0}{2-0}$

   $= 2$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-3x}{3x+4} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-\frac{3}{x}}{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty} 1 - \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}\right) + \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x^2}\right)} = \infty$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x-1}{2x^3+5x^2-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}} = 0$

4.2. Turunan Fungsi

4.2.1. Turunan Fungsi Aljabar

Definisi

> Turunan suatu fungsi *f* adalah suatu fungsi lain f' yang nilainya pada sebarang bilangan adalah
>
> $$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
>
> Jika nilai limitnya ada. Maka dikatakanlah bahwa *f* terdiferensialkan (dapat diturunkan) di *a*.

Jika $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, maka turunannya di $x = a$ adalah

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{[3(a+h)^2 - 2(a+h) + 1] - [3a^2 - 2a + 1]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3a^2 + 6ah + 3h^2 - 2a - 2h + 1 - 3a^2 + 2a - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6ah + 3h^2 - 2h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 6a + 3h - 2$$

$$= 6a - 2$$

Teorema-Teorema Turunan

- ❖ Fungsi konstanta; jika $f(x) = k$ maka $f'(x) = 0$
- ❖ Fungsi identitas; jika $f(x) = x$ maka $f'(x) = 1$
- ❖ Fungsi pangkat; jika $f(x) = x^n$ maka $f'(x) = nx^{n-1}$

Jika $f'(x)$ dan $g'(x)$, maka

❖ Aturan hasil jumlah dan selisih; $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

❖ Aturan perkalian konstanta; $[kf(x)]' = k[f'(x)]$

❖ Aturan hasil kali; $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

❖ Aturan hasil bagi;

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

❖ Aturan fungsi komposisi; jika $f'(x)$ dan $f'(g(x))$ maka

$(fog)'(x) = f'(g(x)) \cdot g(x)$

Aturan ini biasa kita kenal sebagai dalil rantai, seperti

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}$$

❖ Turunan tingkat tinggi;

$[f(x)]' = f'(x)$

$[f'(x)]' = f''(x)$

$[f''(x)]' = f'''(x)$

dan seterusnya, dengan catatan bahwa $f'(x)$ dan $f''(x)$ merupakan fungsi da nada nilainya (terdefinisi).

4.2.2. Turunan Fungsi Trigonometri

Untuk *f*(*x*) fungsi-fungsi trigonometri, berlaku

GUNAKAN YANG UMUM DI SEKOLAH

❖ $[\sin x]' = \cos x$

❖ $[\cos x]' = -\sin x$

❖ $[\tan x]' = \sec^2 x$

❖ $[\cot x]' = -\csc^2 x$

❖ $[\sec x]' = \tan x \sec x$

❖ $[\csc x]' = -\cot x \csc x$

Jika $f(x) = \sin x$, maka turunannya adalah

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(\frac{(x+h)+x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{(x+h)-x}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

$$= \cos x$$

JELASKAN DULU DALIL RANTAI

Jika $(x) = \cos^3 x\sqrt{x^4 - 2x + 1}$, maka dengan dalil rantai diperoleh

$$f'(x) = -\frac{3[4x^3 - 2]\left[\cos^2 \sqrt{x^4 - 2x + 1}\right]\left[-\sin\sqrt{x^4 - 2x + 1}\right]}{2\sqrt{x^4 - 2x + 1}}$$

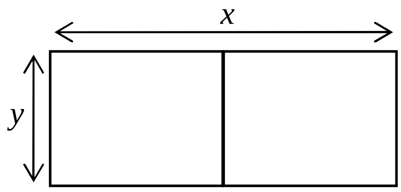
4.2.3. Penggunaan Turunan

Penggunaan turunan di antaranya untuk menyelesaikan persoalan maksimum-minimum, masalah gerak di Fisika (jarak, kecepatan, dan percepatan), masalah ekonomi (biaya dan keuntungan), dan persamaan garis isnggung. Pada kesempatan ini akan disajikan masalah luas maksimum.

Jika *Df* = *S* dan $c \in S$, maka $\forall x \in S$ berlaku bahwa

- ❖ $f(c)$ adalah nilai maksimum f pada *S*, jika $f(c) \geq f(x)$
- ❖ $f(c)$ adalah nilai minimum f pada *S*, jika $f(c) \leq f(x)$

Suatu kandang seperti gambar di bawah ini akan dipagari (dua pagar identik yang berdampingan) dengan 150 meter kawat berduri. Tentukan ukuran seluruh keliling agar luas kandang maksimum.



Pemodelan

$$2x + 3y = 150 \text{ dan } y = \frac{180 - 2x}{3}$$

Luas kandang

$$A = xy = \frac{180x - 2x^2}{3}$$

$$A' = \frac{180 - 4x}{3} \equiv 0$$

$$x = 45 \text{ yang berarti } y = 30$$

Sehingga luas maksimum kandang adalah 1350 m^2.

4.3. INTEGRAL

4.3.1. Integral Tak Tentu

Definisi

Fungsi *F* dikatakan anti turunan dari fungsi *f* pada selang ***I*** jika

$F'(x) = f(x)\ \forall \times \in \boldsymbol{I}$, ditulis

$$F(x) = \int f(x)dx$$

Contoh:

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c \quad ;\text{karena } \left(\frac{1}{3}x^3 + c\right)' = x^2$$

Teorema

1. $f(x) = x^n \rightarrow F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \quad ; n \neq -1, c$: konstanta

2. Integral tak tentu adalah operator linier: $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ dan $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Rumus-Rumus Dasar Integral Tak Tentu

1. $\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c,\; n \neq -1$
2. $\int \sin(x)\, dx = -\cos(x) + c$
3. $\int \cos(x)\, dx = \sin(x) + c$
4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
5. $\int e^x\, dx = e^x + c$
6. $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c$
8. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c$
9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x + c$
10. $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$
11. $\int \csc^2 x\, dx = ctg\, x + c$
12. $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$
13. $\int \csc x\, ctgx\, dx = \csc x + c$

Contoh :

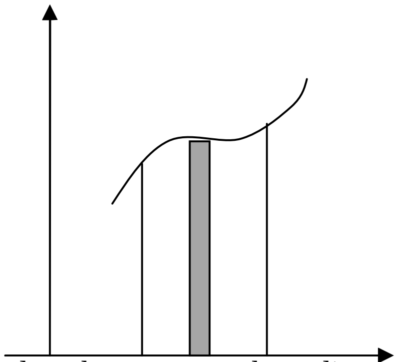
$$\int \left(2x^3 + 5\cos x\right)dx = \frac{1}{2}x^4 + 5\sin x + c$$

4.3.2. Integral Tentu

Definisi:

Misalnya f fungsi yang didefinisikan pada $[a, b]$, f dikatakan terintegralkan pada $[a, b]$ jika $\lim_{|p|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ ada, selanjutnya $\int_a^b f(x)dx$ disebut Integral Tentu (Integral Reiman) f dari a ke b, dan didefinisikan

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|p|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i$$



$\int_a^b f(x)dx$ menyatakan luas daerah yang tercakup diantara kurva $y = f(x)$ dan sumbu x dalam selang $[a, b]$, jika $\int_a^b f(x)dx$ bertanda negatif maka menyatakan luas daerah yang berada dibawah sumbu x

Definisi:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \ a > b$$

Teorema Dasar Kalkulus

Misalkan f kontinu pada $[a, b]$ dan F sebarang anti turunan f maka

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Contoh:

1. Perlihatkan bahwa jika $r \in Q$ dan $r \neq -1$, maka $\int_a^b x^r\, dx = \dfrac{b^{r+1}}{r+1} - \dfrac{a^{r+1}}{r+1}$

Jawab :

Karena $F(x) = \dfrac{x^{r+1}}{r+1}$ suatu anti turunan dari $f(x) = x^r$, maka menurut TDK,

$$\int_a^b x^r\, dx = F(b) - F(a) = \frac{b^{r+1}}{r+1} - \frac{a^{r+1}}{r+1}$$

Integral tentu sebagai operator liniear

1. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)dx$

Contoh:

$$\int_{-1}^{2} \left(4x - 6x^2\right)dx = 4\int_{-1}^{2} x\,dx - 6\int_{-1}^{2} x^2\, dx$$

$$= 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} - 6\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = 4\left[\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right] - 6\left[\frac{8}{3} + \frac{1}{3}\right] = -12$$

Sifat-Sifat Integral Tentu

Teorema:

Jika *f* terintegralkan pada suatu selang yang mengandung tiga titik *a*, *b*, dan *c* maka $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\,dx$

Contoh:

1. $\int_0^2 x^2 dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x^2 dx$
2. $\int_0^2 x^2 dx = \int_0^3 x^2 dx + \int_3^2 x^2 dx$
3. $\int_0^2 x^2 dx = \int_0^{-1} x^2 dx + \int_{-1}^2 x^2 dx$

Teorema:

Jika f fungsi genap [$f(-x) = f(x)$], maka $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ dan Jika fngsi ganjil [$f(-x) = -f(x)$], maka $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Contoh:

1. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos\frac{x}{4}dx = 2\int_{0}^{\pi} \cos\frac{x}{4}dx = 8\int_{0}^{\pi} \cos\frac{x}{4}.\frac{1}{4}dx = 4\sqrt{2}$
2. $\int_{-5}^{5} \frac{x^5}{x^2+4}dx = 0$

4.3.3. Teknik-Teknik Pengintegralan

a. Teknik Subsitusi

Teorema untuk integral tak tentu:

Misalnya g fungsi yang terdiferensialkam dan F suatu anti turunan dari f, jika $u = g(x)$ maka $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + c = F(g(x)) + c$

Contoh:

Hitunglah : $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

Jawab : Misalkan $u = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ sehingga $du = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$ maka

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \sin\sqrt{x}\,\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = 2\int \sin u\,du = 2\cos u + c = 2\cos\sqrt{x} + c$$

Teorema untuk integral tentu:

Misal g mempunyai turunan kontinu pada $[a, b]$ dan f kontinu pada daerah nilai g, maka $\int_{a}^{b} f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)a} f(u)du$

Contoh:

$$\int_0^1 \frac{x+1}{\left(x^2+2x+6\right)}dx$$

Jawab:

Missal $u = x^2 + 2x + 6$ sehingga $du = 2x2\,dx = 2(x+1)dx$ perhatikan $u = 6$ jika $x = 1$, jadi

$$\int_0^1 \frac{x+1}{\left(x^2+2x+6\right)}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2(x+1)}{(x^2+2x+6)}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_6^9 \frac{du}{u} = \frac{1}{2}[\ln u]_6^9 = \frac{1}{2}(\ln 9 - \ln 6) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

b. Pengintegralan Bentuk-Bentuk Trigonometri

1) $\int \sin^m x\,dx, \int \cos^n x\,dx$

Untuk pangkat *m*, *n* genap

$$\int \cos^4 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{4}\int \cos 2x(2)\,dx + \frac{1}{8}\int \left(1+\cos 4x\right)dx$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\int \sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

2) $\int \sin^m x\,dx, \int \cos^n x\,dx$

Untuk pangkat *m*, *n* ganjil

$\int \sin^3 x \cos^5 x\,dx$

$\int \sin x \cos^3 x\,dx$

3) $\int tg^n x\,dx, \int \cot g^n x\,dx$

Keluarkan faktor $tg^2 x = \sec^2 x - 1$ dalam kasus tg atau faktor $\cot g^2 x = \cos ec^2 x - 1$ dalam kasus cotg

Contoh :

$$\int \cot g^{4} x\,dx = \int \cot g^{2} x(\cos ec^{2} x - 1)\,dx = \int \cot g^{2} x \cos ec^{2} x\,dx - \int \cot g^{2} x\,dx$$
$$= -\int \cot g^{2} x\,d(\cot g\,x) - \int (\cos ec^{2} x - 1)\,dx = -\frac{1}{3}\cot g^{3} x + \cot g\,x + x + c$$

4) $\int tg^{m} x \sec^{n} x\,dx, \int \cot g^{m} x \cos ec\,x\,dx$

Jika n genap dan m senbarang, maka keluarkan faktor $\sec^{2} x$ atau $\cos ec^{2} x$.

Jika m ganjil dan n sembarang, keluarkan faktor tg x. sec x.

Contoh :

Tentukan : 1. $\int tg^{-3/2} x \sec^{4} x dx$ 2. $\int tg^{3} x \sec^{-1/2} x dx$

5) $\int \sin mx \sin nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$

Gunakan kesamaan :

$$\sin mx \cos xnx = \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right]$$

$$\sin mx \sin nx = -\frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\right]$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]$$

Contoh :

$$\int \sin 2x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int \sin 5x + \sin(-x) dx$$
$$= \frac{1}{10}\int \sin 5x d(5x) - \frac{1}{2}\int \sin x dx = -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + c$$

c. Pengintegralan Parsial

Pengintegralan parsial (sebagian) dapat dilakukan jika pengintegralan dengan teknik subtitusi tidak memberikan hasil, dan dengan catatan bagian sisa pengintegralan lebih sederhana dari integral mula-mula.

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Contoh :

1. $\int xe^x dx$

Misalkan u = x, $dv = e^x dx$, maka du = dx, $v = e^x$

$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$

d. Integral Fungsi Akar (Subtitusi yang Merasionalkan)

a. Fungsi Integral yang memuat bentuk $\sqrt[n]{ax+b}$

Penyelesaian dengan substitusi : $u = \sqrt[n]{ax+b}$

Contoh : hitung $\int x\sqrt[3]{x-4}$

Jawab : misalkan $u = \int x\sqrt[3]{x-4}$ maka $^3 \;=\; x \;-\; 4$ dan

$3u^2 du = dx$

Sehingga : $\int x\sqrt[3]{x-4} = \int \left(u^3+4\right)u.3u^3 du = \frac{3}{7}(x-4)^{3/7} + (x-4)^{4/3} + c$

b. Integran yang memuat bentuk

$\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$,

Gunakan berturut-turut substitusi : $x = a \sin t, x = a\, tg\, t\; dan\; x = a \sec t$

Contoh :

1. Tentukan : $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$

Jawab : misalkan

$x = 2\cos t, sehingga$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx &= \int \frac{2\cos t}{4\sin t^2}(2\cos t)dt \\
&= \int ctg^2\, t\, dt \\
&= -\cot g\, t - t + c \\
&= \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \sin^{-1}\frac{x}{2} + c
\end{aligned}$$

e. Integral Fungsi Rasional

Fungsi rasional merupakan fungsi hasil bagi dua, fungsi polinom yang ditulis :

$F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, P(x) dan Q(x) fungsi-fungsi polinom dengan Q(x) $\neq 0$

Fungsi rasional dibedakan atas :

a. Fungsi rasional sejati yaitu fungsi rasional di mana derajat fungsi polinom pada pembilang lebih kecil dari pada derajat fungsi polinom pada penyebut.

b. Fungsi rasional tidak sejati yaitu fungsi rasional di mana derajat fungsi polinom pada pembilang lebih besar atau sama dari pada derajat fungsi polinom pada penyebut.

Fungsi rasional tidak sejati dapat ditulis sebagai penjumlahan fungsi polinom dengan fungsi rasional sejati dengan jalan membagi fungsi pembilang dengan fungsi penyebut.

Permasalahan mengintegralkan fungsi rasional sejati teletak pada bagaimana mengintegralkan fungsi rasional sejati. Suatu fakta, bahwa fungsi rasional sejati dapat ditulis sebagai jumlah dari fungsi rasional sejati yang lebih sederhana.

Contoh :

$$\frac{5x-1}{x^2-1} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1}$$

a. Penjabaran fungsi rasional atas faktor liniear yang berbeda

Contoh :

Tentukan $\displaystyle\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}\,dx$

Jawab : $\dfrac{5x+3}{x^3-2x^2-3x} = \dfrac{5x+3}{x(x+1)(x-3)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x-3}$

Maka $5x+3 = A(x+1)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x+1)$

Dengan menyamakan koefisien pada kedua polinom di ruas kiri dan ruas kanan maka akan diperoleh : $A = -1, B = -\frac{1}{2}, C = \frac{3}{2}$, sehingga

$$\int \frac{5x+3}{x^3 - 2x^2 - 3x} dx = \int \frac{-dx}{x} + \int \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} dx + \int \frac{\frac{3}{2}}{x-3} dx$$

$$= -Ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{3}{2} \ln|x-3| + c$$

b. Penjabaran fungsi rasional atas faktor liniear yang berulang

Contoh :

Tentukanlah : $\int \frac{x}{(x-3)^2} dx$

Jawab : $\frac{x}{(x-3)^2} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-3)^2}$, $maka\ x = A(x-3) + B$

Dengan menyamakan koefisien pada kedua polinom diruas kiri dan ruas kanan, sehingga diperoleh :

$$\int \frac{x}{(x-3)^2} dx = \int \frac{1}{x-3} dx + \int \frac{3}{(x-3)^2} = \ln|x-3| - \frac{3}{x-3} + c$$

Yang perlu diperhatikan untuk tiap faktor $(ax+b)^k$ dalam penyebut, maka ada sebanyak k suku penjabarannya, yaitu :

$$\frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \ldots + \frac{Ak}{(ax+b)^k}$$

c. Penjabaran fungsi rasional atas faktor kuadrat yang berbeda

Contoh :

Tentukanlah : $\int \frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x+1)(x^2+1)} dx$

Jawab : $\frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{4x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ selanjutnya A, B dan C seperti cara di atas dan kemudian dihitung integral setiap sukunya.

4.3.4. Penggunaan Integral Tentu

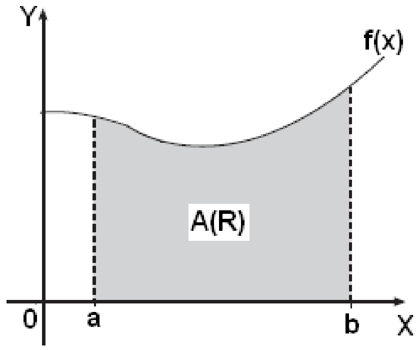
a. Luas Daerah Bidang Rata

1) Daerah antara kurva dan sumbu koordinat.

Perhatikan gambar daerah rata di bawah ini, daerah R dibatasi oleh grafik-grafik $y = F(x), x = a, x = b, dan\ y = 0.$ luasnya $A(R)$ ditentukan oleh :

$$A(R) = \int_a^b f(x)dx$$

Jika gambar terletak di bawah garis sumbu X maka integral di atas bernilai negatif, sehingga nilai integral tersebut dimutlakan. Lihat gambar di bawah ini:

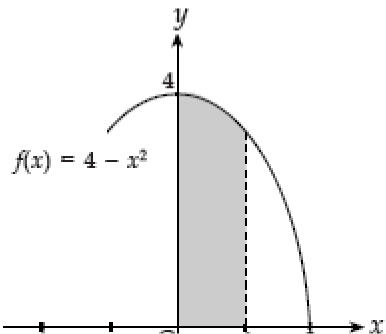


Daerah R dibatasi oleh grafik-grafik $y = f(x), y = c, y = d, dan\ x = 0,$ luasnya $A(R)$ ditentukan oleh $A(R) = \int_a^b f(y)dy$, jika gambar terletak di sebelah kiri sumbu Y, maka integral di atas bernilai negatif, karena luas daerah tidak mungkin bilangan negatif, maka nilai integral tersebut dimutlakan.

Untuk menghitung luas daerah rata ikuti pola berpikir sebagai berikut :

- Gambar daerah yang bersangkutan
- potong daerah menjadi jalur-jalur dan beri nomor pada jalur-jalur tersebut
- hampiri luas jalur tertentu tersebut dengan luas persegi panjang
- jumlahkan luas jalur-jalur pada daerah tersebut
- ambil dari limit jumlah di atas dengan lebar jalur menuju 0, maka diperoleh integral tertentu.

Contoh:



Tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh kurva

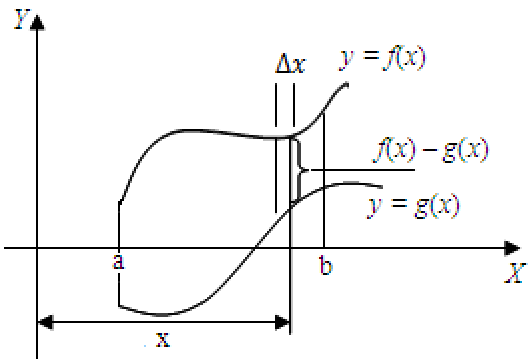
$f(x) = 4 - x^2$, sumbu-x, garis $x = 0$, dan $x = 1$.

Jawab:

$$A(R) = \int_0^0 (4 - x^2)dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{11}{3}$$

2) Daerah Antara Dua Kurva

Perhatikan daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ dengan $g(x) \leq f(x)$ pada selang $[a, b]$.

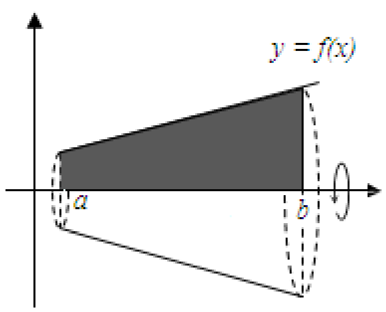


$\Delta A = [f(x) - g(x)]\ \Delta x$

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Perhatikan bahwa $f(x) - g(x)$ adalah tinggi jalur potong yang benar, walaupun kurva g berada di sebelah bawah sumbu x. Sebab dalam hal ini $g(x)$ negatif, jadi mengurangi dengan $g(x)$ berarti menjumlahkan dengan bilangan yang positif.

3) Volume Benda Putar



$\Delta A = f(x)\Delta x$

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

5. STATISTIKA DAN PELUANG

5.1. Statistika

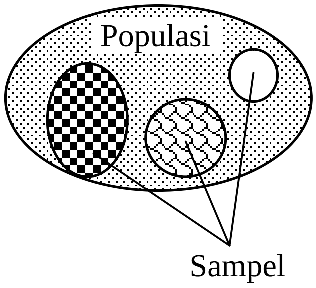
5.1.1. Statistik dan Statistika

Persoalan kehidupan manusia banyak dinyatakan atau dicatat dalam bentuk angka-angka. Kumpulan angka-angka itu disajikan dalam bentuk daftar, tabel, diagram ataupun gambar, dan disebutlah mereka dengan **statistik**. Statistik yang menjelaskan sesuatu hal yang spesifik, seperti statistik penduduk, statistik kesehatan, statistik kesejahteraan, statistik kelulusan PLPG dan sebagainya. Kata statistik juga digunakan untuk menyatakan ukuran sebagai representasi dari sekumpulan data mengenai sesuatu hal. Misal pada tahun 2010 sebanyak 35% peserta PLPG nilai ujian tulis matematikanya kurang dari 60 maka angka 35% dan nilai 60 ini dinamakan statistik. Berdasarkan survei awal, diperoleh informasi bahwa sebanyak 70% calon peserta PLPG tahun 2011 belum mahin menggunakan ICT. Angka 70% ini dinamakan statistik.

Informasi (data statistik) yang diperoleh kemudian dianalisis, dijelaskan dan disimpulkan. Keseluruhan proses ini, mulai dari pengumpulan data, pengolahan data dan pengambilan kesimpulan haruslah mengikuti cara-cara yang benar dan dapat dipertanggungjawabkan. Ini semua merupakan pengetahuan tersendiri yang dinamakan dengan **statistika**. Jadi statistika adalah pengetahuan yang berhubungan dengan cara-cara pengumpulan data, pengolahan atau penganalisisannya dan penarikan kesimpulan. Misalnya data tentang banyaknya guru matematika SMP tahun 2012 belum mahin menggunakan ICT, setelah dianalisis diperoleh kesimpulan bahwa dari 70% belum mahir ICT, sebanyak 25% karena tidak ada yang mengajari, 40% menyatakan karena belum mempunyai laptop dan 35% karena jarang menggunakannya dalam pembelajaran. Oleh karena itu direkomendasikan untuk melakukan kegiatan: 1) pengadaan laptop murah bagi guru, 2) pelatihan ICT, dan 3) pelatihan desain pembelajaran berbasis ICT. Proses yang dilakukan mulai dari data, olah data, membuat kesimpulan, hingga memberikan rekomendasi merupakan proses statistika.

5.1.2. Populasi dan Sampel

Totalitas semua nilai yang mungkin, hasil menghitung ataupun mengukur, kuantitatif maupun kualitatif mengenai karakteristik tertentu dari semua anggota kumpulan yang lengkap dan jelas yang ingin dipelajari sifat-sifatnya disebut populasi. Sebagian yang diambil dari populasi dinamakan sampel.



Berikan dua contoh populasi beserta beberapa sampelnya

a) Populasi : ……………………………………………………………………
   - Sampel: ……………………………………………………………………
   - Sampel: ……………………………………………………………………

b) Populasi : ……………………………………………………………………
   - Sampel: ……………………………………………………………………
   - Sampel: ……………………………………………………………………

Masalah:

P4TK Matematika, ingin mengetahui tingkat profesionalisme guru matematika SMP yang ditinjau dari kompetensi profesional, pedagogik, personal, dan kompetensi sosial. Mereka membandingkan pula antara guru matematika berdasarkan jenis kelamin, umur, lokasi, maupun sertifikasi guru.

Tentukan populasi dan sampel yang mungkin untuk diambil oleh tim P4TK Matematika.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

5.1.3. Pengukuran Statistika

Ada empat tipe pengukuran atau skala pengukuran yang digunakan di dalam statistika, yakni: nominal, ordinal, interval, dan rasio. Keempat skala pengukuran tersebut memiliki tingkat penggunaan yang berbeda dalam riset statistik.

- ❖ Skala *nominal* hanya bisa membedakan sesuatu yang bersifat kualitatif (misalnya: jenis kelamin, agama, warna kulit).
- ❖ Skala *ordinal* selain membedakan juga menunjukkan tingkatan (misalnya: pendidikan, tingkat kepuasan).
- ❖ Skala interval berupa angka kuantitatif namun tidak memiliki nilai nol mutlak (misalnya: tahun, suhu dalam Celcius).
- ❖ Skala rasio berupa angka kuantitatif yang memiliki nilai nol mutlak.

5.1.4. Macam-Macam Data

Data statistik dapat berbentuk kategori (data kualitatif) atau bilangan (data kuantitatif). Data kualitatif seperti: baik, buruk, berhasil, gagal, senang, rusak, puas, dan sebagainya. Misalnya informasi tentang kemahiran guru matematika SMA yang masih rendah dalam hal menggunakan SPSS untuk pengolahan data statistik. Guru-guru SMA di Jakarta memanfaatkan waktu menunggu absensi siang dengan senang bermain *facebook*.

Data kuantitatif berdasarkan nilainya dapat dibedakan menjadi data diskrit yaitu data yang didapatkan dengan cara menghitung atau membilang dan data kontinu yang didapatkan dengan cara mengukur.

Contoh data diskrit dan data kontinu

Data Diskrit	Data Kontinu
Sebuah keluarga mempunyai 2 anak laki-laki dan 3 anak perempuan	Dalam sebuah keluarga selisih tinggi badan anak laki-laki dengan anak perempuan lebih dari 6 cm
FKIP UHAMKA terdiri dari 12	Rerata skor kinerja kepala SMA di DKI

program studi yang tersebar di kampus Limau dan Pasarebo	Jakarta adalah 75
Dari 30 orang peserta PLPG di kelas A3 Rombel III, terdapat 13 orang yang membawa laptop	Peserta PLPG di kelas A3 Rombel III mempunyai rerata daya tahan mendengarkan ceramah instruktur adalah 33,13 menit

Data kuantitatif menurut sumbernya, dikenal dengan data intern dan data ekstern. Data intern adalah data yang didapatkan dari dalam intitusi yang ingin melakukan penelitian tentang keadaan internal dirinya. Misalnya ketika SMA Muhammadiyah di Jakarta ingin mendokumentasikan informasi seperti keadaan siswa, keadaan guru, keadaan laboratorium, pengelolaan keuangan, dan lain-lain. Data ekstern merupakan data di luar isntitusi yang menliti, yang dapat dikelompokkam menjadi data primer dan data sekunder. Data primer misalnya informasi tentang banyaknya PNS di wilayah Jakarta langsung diperoleh dari BKD DKI Jakarta. Namun jika kita memperoleh informasi dari tentang hal tersebut dari membacar surat kabar ataupun mendengar berita TV, maka data yang diperoleh merupakan data sekunder.

Berikan contoh data primer dan sekunder yang anda peroleh berkenaan dengan kegiatan Diklat Guru Matematika SMA DKI Jakarta.

- Data Primer :
  ………………………………………………………………………………
  ………………………………………………………………………………
- Data Sekunder :
  ………………………………………………………………………………
  ………………………………………………………………………………

Data yang baru dikumpulkan dan belum diolah disebut dengan data mentah. Anda sudah cukup lama mengajar mata pelajaran matematika di sekolah, tentunya mengukur keberhasilan belajar siswa sudah bisaa dilakukan. Berikan contoh data mentah dan data yang sudah diolah berkenaan dengan hasil belajar matematika siswa SMA.

………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
……………………….…………………………………………………………

Kasus untuk didiskusikan

- Dunia tanpa statistik
- Berbohong dengan statistik
- Pengaruh statistik bagi kemajuan bangsa

Instruktur mengarahkan *brain storming* di kelas, informasi-informasi yang dikemukakan harus berdasarkan sumber data yang akurat, *up to date*, dan memanfaatkan ICT (internet).

Hasil diskusi dan pembahasan

Dunia tanpa statistik:

………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

Berbohong dengan statistik:

………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

Pengaruh statistik bagi kemajuan bangsa:

………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
……………………….…………………………………………………………

5.1.5. Menyajikan Data melalui Tabel dan Diagram

Bayangkan kalau nilai ulangan matematika siswa dituliskan secara narasi (kumpulan kalimat dan paragraf). Mulai dari nomor induk, nama dan nilai ulangan, betapa rumitnya untuk dibaca, apalagi ratusan bahkan ribuan siswa.

Namun dengan kehadiran tabel, akan membantu menyederhanakan dan memudahkan penyajian. Untuk keperluan laporan atau analisis lainnya, data yang dikumpulkan, baik data dari populasi ataupun sampel, perlu diatur, disusun, disajikan dalam bentuk yang jelas dan baik. Umumnya penyajian data dalam bentuk tabel (baris-kolom, kontingensi, distribusi frekuensi) atau diagram (batang, garis, lingkaran, pastel, lambang, kartogram/peta, pencar).

Bacalah informasi berikut

> *Kepala rumah tangga perusahaan KMK mengadakan pembelian dua jenis barang, yaitu barang A dan barang B. Pengadaan barang ini dimulai sejak tahun 2007 sampai 2010. Tahun 2007 sebanyak 190 barang A dengan harga Rp 479.300.000,- dan 283 barang B seharga Rp 659.800.000,-. Pada tahun 2008 sebanyak 213 barang A dengan harga Rp 515.600.000,- dan 168 barang B seharga Rp 458.200.000,-. Pada tahun 2009 sebanyak 250 barang A dengan harga Rp 602.500.000,- dan 163 barang B seharga Rp 432.900.000,-. Sedangkan untuk pengadaan tahun 2010 sebanyak 207 barang A dengan harga Rp 490.300.000,- dan 190 barang B seharga Rp 502.500.000,-.*

Pertanyaan:

1. Informasi apa saja yang terdapat pada bacaan di atas?
2. Menurut anda, bagaimana membaca informasi tersebut?
3. Apakah penyajian informasi seperti di atas mudah untuk di baca?
4. Bagaimana seharusnya menyajikan informasi tersebut?
5. Sajikan informasi tersebut ke dalam bentuk yang mudah untuk dibaca.

Pembahasan:

1. Informasi yang terdapat pada bacaan di atas adalah:
   ❖ Jenis barang yaitu barang A dan barang B
   ❖ ………………………
   ❖ ………………………
   ❖ ………………………

2. Membaca informasi di atas adalah (mudah/rumit), alasannya
   ………………………..………………………………………………………

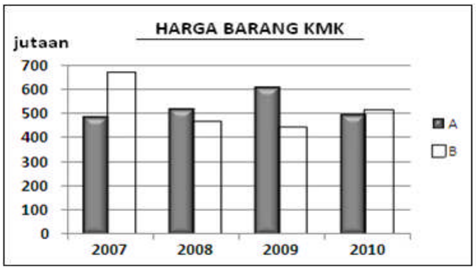
……………………………………………………………………………………

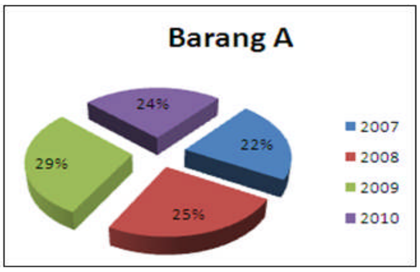
3. Penyajian informasi dalam bentuk yang mudah untuk dibaca yaitu melalui tabel dan diagram.

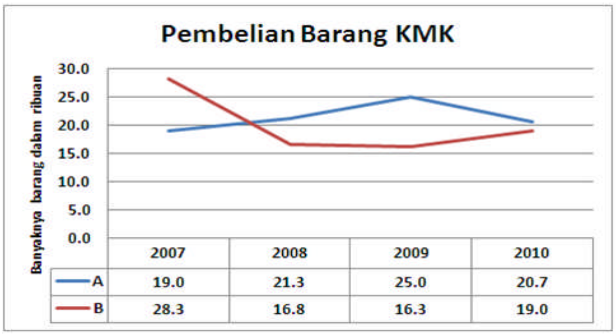
   a. Penyajian dalam bentuk tabel baris-kolom

Tahun	**Barang A**		**Barang B**		**Jumlah**	
	Barang	**Harga**	**Barang**	**Harga**	**Barang**	**Harga**
2007						
2008						
2009						
2010						
Jumlah						

   b. Penyajian dalam bentuk diagram batang, pastel, dan garis







c. Tabel kontingensi

Untuk data yang terdiri atas dua faktor, faktor pertama dengan *m* kategori dan faktor kedua dengan *n* kategori, maka tabelnya merupakan tabel kontingensi berukuran $m \times n$.

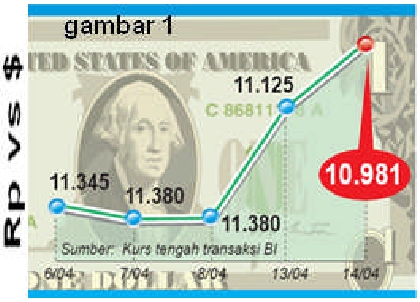
Isilah tabel berikut dengan data yang anda ketahui tentang banyaknya siswa di sekolah tempat anda mengajar.

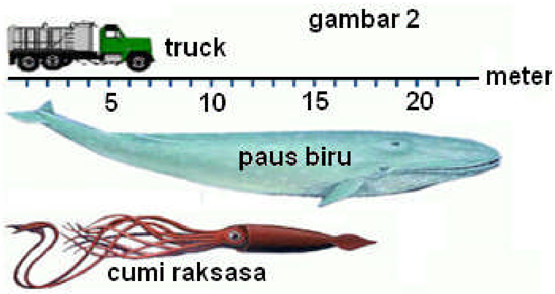
Banyak Siswa di SMA ……………………………………

Tahun 2012/2013

Jenis Kelamin	Kelas			Jumlah
	I	II	III	
Perempuan				
Laki-laki				
Jumlah				

Berikan penjelasan mengenai gambar-gambar di bawah ini





Gambar 1, di atas menjelaskan bahwa

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………..…………………………

Gambar 2, di atas menjelaskan bahwa

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………..…………………………

d. Tabel distribusi frekuensi

Contoh tabel distribusi frekuensi mengenai nilai UKG (Ujian Kopetensi Guru) guru matematika SMA di DKI Jakarta.

Nilai UKG	Frekuensi
41 – 50	2
51 – 60	4
61 – 70	11
71 – 80	9
81 – 90	3
91 – 100	1
Jumlah	30

Diberikan data nilai ujian tulis 30 peserta PLPG tahun 2010: 59, 57, 58, 60, 56, 60, 61, 60, 58, 56, 56, 43, 62, 59, 56, 56, 53, 54, 58, 55, 65, 70, 71, 68, 65, 59, 64, 52, 78, 73.

❖ **Buatlah tabel distribusi frekuensi**

i) Tentukan jangkauan (J): yaitu data terbesar (x_{max}) dikurangi data terkecil (x_{min}).

$$\boldsymbol{J} = x_{max} - x_{min}$$

Dalam hal ini, karena data terbesar = …… dan data terkecil = ….., maka

J = …… – ……

= ……

ii) Tentukan banyak kelas interval (B**)** yang diperlukan. Banyak kelas bisaa diambil paling sedikit 5 kelas dan paling banyak 15 kelas, sesuai dengan keperluan. Cara lain cukup baik untuk *n* berukuran besar dengan menggunakan aturan *Sturges*.

$$B = 1 + (3{,}3) \log n$$

dengan *n* menyatakan banyak data dan hasil akhir merupakan pembulatan.

Sebagai contoh, untuk n = 150, maka $B = 1 + (3{,}3) \log 150$ $= 8{,}181101$ Sehingga daftar distribusi frekuensi dapat dibuat dengan banyak kelas 8 atau 9 buah.

Untuk data di atas *B* = ….. + ….. log ….

= ….. + …..

= ……

Jadi banyak kelasnya adalah ….. buah

iii) Tentukan panjang kelas interval (*p*), dengan rumus

$$p = \frac{J}{B}$$

Untuk data di atas

$$p = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \cdots$$

Setelah melakukan pembulatan, maka panjang kelas interval adalah …..

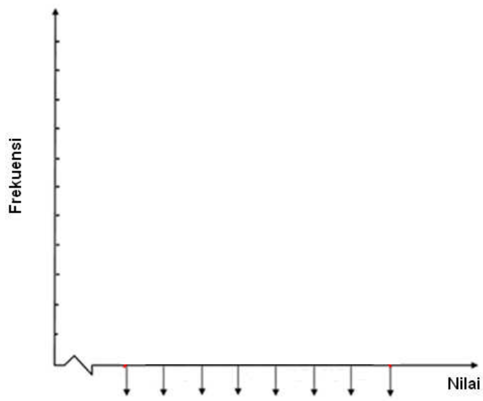
iv) Pilih ujung bawah kelas interval pertama, yang dapat diambil $\leq x_{\min}$ tetapi selisihnya tidak boleh $\geq p$ yang telah ditentukan.

Sebelum daftar sebenarnya dituliskan, ada baiknya dibuat daftar penolong yang berisikan kolom tabulasi. Kolom ini merupakan kumpulan deretan garis-garis miring (turus), yang banyaknya sesuai dengan banyak data tedapat dalam kelas interval bersangkutan.

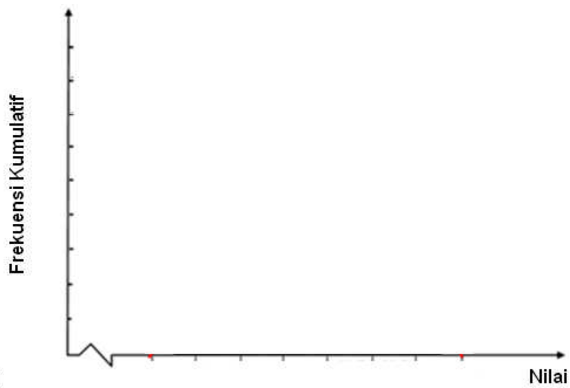
Kelas Interval	**Tabulasi**	**Frekuensi**
….. – …..		…..
….. – …..		…..
….. – …..		…..
….. – …..		…..
….. – …..		…..
….. – …..		…..
….. – …..		…..

Tabel distribusi frekuensi

Kelas Interval	**Nilai Tengah**	**Batas Nyata**	**Frekuensi**		
			Absolut	**Kumulatif**	**Relatif**
….. – …..	…..	….. – …..	…..	…..	….. %
….. – …..	…..	….. – …..	…..	…..	….. %
….. – …..	…..	….. – …..	…..	…..	….. %
….. – …..	…..	….. – …..	…..	…..	….. %
….. – …..	…..	….. – …..	…..	…..	….. %
….. – …..	…..	….. – …..	…..	30	….. %
Jumlah			30		100 %



Poligon dan Histogram



Ogive

5.1.6. Ukuran Pemusatan Data

a. Mean (rerata)

Kumpulan data yang digunakan untuk menghitung mean atau sering juga disebut dengan rata-rata hitung adalah kumpulan data kuantitatif. Kumpulan data sebanyak n buah nilai akan dinyatakan dengan simbol-simbol x_1, x_2, x_3, …, x_n. Simbol *n* juga dipakai untuk menyatakan ukuran sampel, yaitu banyak data yang diteliti dalam sampel. Untuk ukuran populasi digunakan simbol *N*, yaitu banyak data yang diteliti dalam populasi. Mean dari sekumpulan data kuantitatif dinyatakan dengan simbol $\bar{x}$ untuk mean sampel dan μ untuk mean populasi. Mean sampel dari data tunggal dapat dihitung dengan rumus

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ ... + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Diberikan data tentang nilai pretes 10 orang peserta *Lessons Study* Matematika SMA DKI Jakarta tahun 2012, yaitu: 71, 75, 68, 80, 77, 76, 81, 65, 85, 70. Maka mean data adalah

$$\bar{x} = \frac{\cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots}{\cdots\cdots}$$

$$\bar{x} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$$

$$\bar{x} = \ldots.$$

Sedangkan jika diketahui dari 15 orang peserta *Lessons Study* tahun 2012, ada 3 peserta yang mendapatkan nilai pretes 70, 5 peserta mendapatkan nilai pretes 65, 2 peserta mendapatkan nilai pretes 80, 3 peserta mendapatkan nilai pretes 56, 1 peserta mendapatkan nilai 48, dan 1 peserta mendapatkan nilai pretes 85, maka data tersebut lebih baik disusun dalam bentuk tabel seperti berikut:

x_i	f_i	$f_i x_i$
…..	…..	…..
…..	…..	…..
…..	…..	…..
…..	…..	…..
…..	…..	…..
…..	…..	…..
$\sum$	…..	…..

Mean dapat dicari dengan rumus

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} \qquad \text{..... 4}$$

Berdasarkan tabel di samping, diperoleh mean data nilai 15 orang peserta *Lessons Study* tahun 2012 adalah

$$\bar{x} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$$

$$\bar{x} = \ldots.$$

Untuk data yang disajikan dalam tabel distribusi frekuensi, juga menggunakan rumus 4. Misalnya untuk data pada tabel di atas

Kelas Interval	x_i	f_i	$f_i x_i$
….. – …..	…..	…..	…..
….. – …..	…..	…..	…..
….. – …..	…..	…..	…..
….. – …..	…..	…..	…..
….. – …..	…..	…..	…..
….. – …..	…..	…..	…..
$\sum$		…..	…..

Dari tabel di samping, diperoleh mean data adalah

$$\bar{x} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

$$\bar{x} = \dots.$$

Latihan Terbimbing

Mean nilai pengembangan RPP guru peserta PLPG di kelas A3 adalah 69. Jika dua orang guru yang nilainya 40 dan 60 digabungkan dengan kelas tersebut, maka mean nya menjadi 68. Berapakah banyak peserta PLPG semuanya?

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

b. Median

Median menentukan letak data setelah data disusun menurut urutan nilainya. Simbol untuk median adalah Me. Dengan median Me, maka 50% dari banyak data nilainya paling tinggi sama dengan Me, dan 50% dari banyak data nilainya paling rendah sama dengan Me. Untuk banyak data ganjil, maka Me adalah data yang terletak tepat di tengah. Sedangkan untuk banyak data genap, maka Me merupakan mean dari dua data yang terletak di tengah.

Latihan Terbimbing

Jika sebuah sampel memiliki data: 10, 15, 7, 9, 20, 17, 9, 11, 6, 8, 7. Maka tentukan mediannya.

Data setelah diurutkan ....., ….., ….., ….., ….., ….., ….., ….., ….., ….., …..

Me = …..

Jika pada data di atas. ditambahkan satu data (yaitu 19), maka banyaknya data menjadi genap, sehingga mediannya adalah ....., ….., ….., ….., ….., ….., ….., ….., ….., ….., ….., …..

$$\text{Me} = \frac{\cdots + \cdots}{\cdots\cdots}$$

Me = …..

Untuk data distribusi frekuensi, median dapat dihitung dengan rumus:

$$\text{Me} = b + p\left(\frac{\frac{n}{2} - F}{f_m}\right) \qquad \text{..... R6}$$

b : tepi bawah kelas interval yang memuat Me

f_m : frekuensi kelas interval yang memuat Me

F : frekuensi kumulatif sebelum kelas interval yang memuat Me

p : panjang kelas interval

Latihan Terbimbing

Tentukan median untuk data pada tabel distribusi frekuensi berikut

Kelas Interval	f_m	F
42 – 48	3	…..
49 – 55	10	…..
56 – 62	…..	…..
63 – 69	13	…..
70 – 76	4	…..
Jumlah	50	

→ kelas median

Berdasarkan tabel di atas didapat:

b = ….. f_m = …… F = ….. p = …..

sehingga median dapat dihitung:

$$\text{Me} = \cdots + \cdots\left(\frac{\frac{\cdots\cdots}{2} - \cdots}{\cdots\cdots}\right)$$

$$\text{Me} = \cdots + \cdots\left(\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}\right)$$

$$\text{Me} = \cdots + \cdots(\ldots.)$$

$$\text{Me} = \cdots + \cdots$$

$$\text{Me} = \cdots$$

c. Modus

Misalkan kita mempunyai kumpulan data tentang tanggal lahir peserta Diklat Guru Matematika SMA DKI Jakarta tahun 2012: 2, 3, 5, 4, 6, 4, 3, 4, 8, 10. Tanggal 3 muncul 2 kali, sedangkan tanggal 4 muncul 3 kali, sedangkan yang lainnya muncul sekali. Karena tanggal 4 mempunyai frekuensi tertinggi, mmaka dalam statistik data 4 disebut modus dari kumpulan data di atas. Jadi modus (Mo) didefinisikan sebagai angka statistik yang paling sering muncul.

Tentukan modus untuk data pada 10, 15, 7, 9, 20, 17, 9, 11, 6, 8, 7.

Mo = …..

Kasus untuk didiskusikan

Apakah sekumpulan data bisa tidak memiliki modus, memiliki satu modus, atau memiliki lebih dari satu modus? Dukung jawaban anda dengan contoh.

Hasil diskusi dan pembahasan

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Untuk data distribusi frekuensi, modus dapat dihitung dengan rumus:

$$\text{Mo} = b + p\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) \qquad \text{..... R7}$$

b : tepi bawah kelas interval yang mempunyai frekuensi tertinggi

d_1 : selisih frekuensi tertinggi dengan frekuensi sebelumnya

d_2 : selisih frekuensi tertinggi dengan frekuensi sesudahnya

p : panjang kelas interval

Latihan Terbimbing

Tentukan modus untuk data pada tabel distribusi frekuensi berikut

Kelas Interval	f_1	
42 – 48	3	
49 – 55	10	
56 – 62	20	→ kelas modus
63 – 69	13	
70 – 76	4	
Jumlah	50	

Berdasarkan tabel di atas didapat:

b = ….. d_1 = …… d_2 = …… p = …..

sehingga modus dapat dihitung:

$$\text{Mo} = \cdots + \cdots\left(\frac{\text{.....}}{\text{.....} + \text{....}}\right)$$

$$\text{Mo} = \cdots + \cdots(\text{.....})$$

$$\text{Mo} = \cdots + \cdots$$

$$\text{Mo} = \cdots$$

Diskusikan

Beberapa guru peserta Diklat mengungkapkan pernyataan:

Pak Badu : "Rata-rata peserta Diklat membawa laptop"

Pak Budi : "Pada umumnya peserta Diklat tahun ini memiliki masa kerja 20 tahun"

Bu Beda : "Kebanyakan peserta Diklat belum bisa membuat RPP karakter bangsa"

Bu Bodi : "Kebanyakan peserta Diklat bertempat tinggal sejauh 15,4 km dari tempat pelaksanaan Diklat"

Menurut anda, pernyataan siapa yang benar sesuai dengan konsep ukuran pemusatan data?

Hasil diskusi dan pembahasan

- Pernyataan Pak Badu:

  ………………………………………………………………………………

  ………………………………………………………………………………

  ………………………………………………………………………………
- Pernyataan Pak Budi:

  ………………………………………………………………………………

  ………………………………………………………………………………

  ………………………………………………………………………………
- Pernyataan Bu Beda:

  ………………………………………………………………………………

  ………………………………………………………………………………

  ………………………………………………………………………………
- Pernyataan Bu Bodi:

  ………………………………………………………………………………

  ………………………………………………………………………………

Diskusikan

Sepasang suami istri ingin membeli sebuah rumah. Mereka bersepakat bahwa rumah yang nantinya akan dibeli jangan yang terlalu mahal, karena kondisi keuangan mereka masih belum bagus. Akan tetapi, mereka juga tidak ingin membeli rumah yang paling murah, untuk suatu alasan tertentu. Oleh karena itu, mereka memutuskan untuk membeli rumah yang harganya tidak terlalu mahal dan juga tidak terlalu murah, tidak peduli apapun tipenya. Kemudian mereka mendatangi kantor pemasaran suatu developer. Pihak developer menawarkan harga (dalam juta rupiah) rumah dengan data sebagai berikut:

125,69	96,63	18,55	95,34	84,33	129,26
127,09	54,65	89,43	96,99	30,38	120,15

- Dengan sedikit perhitungan, apakah mereka memutuskan membeli 1 unit rumah seharga: Rp. 95.985.000,- atau Rp 89.040.800,- ?
- Konsep statistik apakah yang digunakan untuk membantu masalah pembelian rumah keluarga tersebut?

Hasil diskusi dan pembahasan

- Harga rumah yang diambil:
  ………………………………………………………………………………
  ………………………………………………………………………………
  ………………………………………………………………………………
- Konsep statistik yang digunakan:
  ………………………………………………………………………………
  ………………………………………………………………………………

5.1.7. Jangkauan

Jangkauan digunakan untuk melihat atau menentukan perbedaan antara data yang paling besar dengan data yang paling kecil. Jika data merupakan upah para pekerja suatu industri, maka jangkauan dapat digunakan untuk melihat perbedaan upah antara upah tertinggi dan upah terendah.

Latihan Terbimbing

Perhatikan daftar gaji bulan Mei 2012 di perusahaan **KMK** berikut:

No	Nama	Gaji Pokok	Tunjangan	Total Penerimaan
1	KMK-1	Rp 1.500.000,-	Rp 850.000,-	Rp 2.350.000,-
2	KMK-2	Rp 2.615.000,-	Rp 1.407.500,-	Rp 4.022.500,-
3	KMK-3	Rp 565.000,-	Rp 382.500,-	Rp 947.500,-
4	KMK-4	Rp 1.890.000,-	Rp 1.045.000,-	Rp 2.935.000,-
5	KMK-5	Rp 1.500.000,-	Rp 850.000,-	Rp 2.350.000,-
6	KMK-6	Rp 4.000.000,-	Rp 2.100.000,-	Rp 6.100.000,-
7	KMK-7	Rp 3.333.000,-	Rp 1.766.500,-	Rp 5.099.500,-
8	KMK-8	Rp 1.760.000,-	Rp 980.000,-	Rp 2.740.000,-
9	KMK-9	Rp 1.780.000,-	Rp 990.000,-	Rp 2.770.000,-
10	KMK-10	Rp 500.000,-	Rp 350.000,-	Rp 850.000,-
				Rp 30.164.500,-

Daftar gaji bulan Mei 2012 di perusahaan **SIGMa**

No	Nama	Gaji Pokok	Tunjangan	Total Penerimaan
1	SIGMa-1	Rp 1.500.000,-	Rp 850.000,-	Rp 2.350.000,-
2	SIGMa-2	Rp 2.000.000,-	Rp 1.100.000,-	Rp 3.100.000,-
3	SIGMa-3	Rp 1.456.700,-	Rp 828.350,-	Rp 2.285.050,-
4	SIGMa-4	Rp 1.890.000,-	Rp 1.045.000,-	Rp 2.935.000,-
5	SIGMa-5	Rp 1.500.000,-	Rp 850.000,-	Rp 2.350.000,-
6	SIGMa-6	Rp 1.750.000,-	Rp 975.000,-	Rp 2.725.000,-
7	SIGMa-7	Rp 2.155.000,-	Rp 1.177.500,-	Rp 3.332.500,-
8	SIGMa-8	Rp 1.760.000,-	Rp 980.000,-	Rp 2.740.000,-
9	SIGMa-9	Rp 1.780.000,-	Rp 990.000,-	Rp 2.770.000,-
10	SIGMa-10	Rp 1.250.000,-	Rp 725.000,-	Rp 1.975.000,-
				Rp 26.562.550,-

- Tentukan jangkau total penerimaan
- Berikan penjelasan mengenai jangkaun di dua perusahaan tersebut.

  …………………………………………………………………………………

  …………………………………………………………………………………

  ………………………………………..……………………………………

  …………………………………………………………………………………

  …………………………………………………………………………………

5.2. Kombinatorika

5.2.1. Aturan Perkalian

Banyak sekali persoalan kehidupan sehari-hari yang berkenaan dengan kombinatorika. Kita dapat mengetahui banyaknya cara menata bangku untuk diduduki oleh beberapa orang, dapat mengetahu banyaknya lintasan yang menuju suatu daerah, dapat menggunakan variasi memakai baju dan celana, dan sebagainya.

Kasus untuk diskusikan

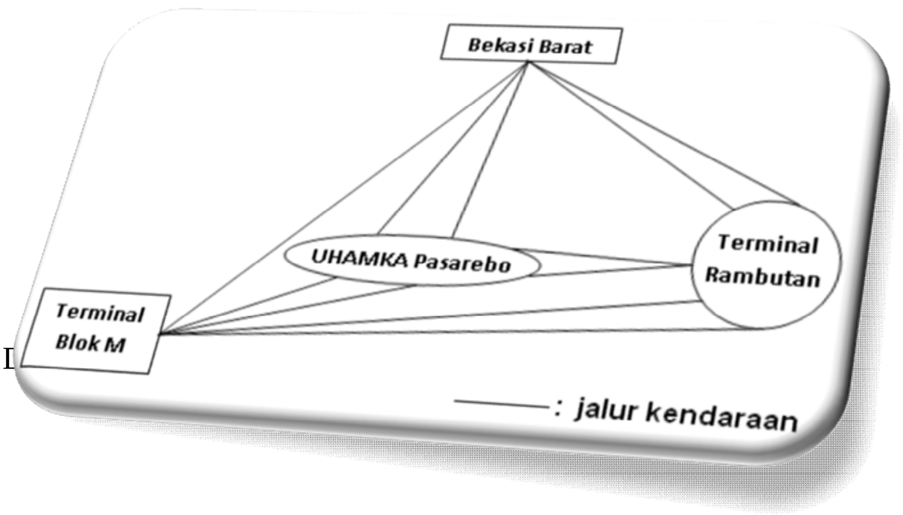
Perhatikan plat nomor sepeda motor yang berlaku di Jakarta. Berapa banyak plat nomor berbeda yang dapat dibuat, dengan catatan angka pertama bukan 0?

Hasil diskusi dan pembahasan

- ❖ Huruf pertama selalu B
- ❖ Angka pertama dapat dipilih dari ….. angka
- ❖ Angka kedua dapat dipilih dari ….. angka
- ❖ Angka ketiga dapat dipilih dari ….. angka
- ❖ Angka keempat dapat dipilih dari ….. angka
- ❖ Huruf kedua dapat dipilih dari ….. huruf
- ❖ Huruf ketiga dapat dipilih dari ….. huruf
- ❖ Huruf keempat dapat dipilih dari ….. huruf

Jadi ada …. × …. × …. × …. × …. × …. × …. × …. = ………… plat nomor sepeda motor berbeda yang dapat dibuat.

Kasus untuk didiskusikan



Perhatikan jalur kendaraan dari dan ke kampus UHAMKA Pasarebo, tentukan banyaknya lintasan yang bisa dilalui.

Hasil diskusi dan pembahasan

- ❖ Jalur dari Bekasi Barat ke kampus UHAMKA Pasarebo

  ……………………………..……………………………………………

  ……………………………………………………………………………

  …………………………………………………………...………………

- ❖ Jalur dari Terminal Blok M ke kampus UHAMKA Pasarebo

  …………………………....………………………………………………

  ……………………………………………………………………………

  …………………………………………………….……………………

- ❖ Semua jalur yang mungkin dapat dilewati

  ……………………………………………….…………………………

  ……………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………

Secara umum jika suatu prosedur dapat dibentuk dalam n_1 cara berbeda, prosedur kedua dapat dibentuk dalam n_2 cara berbeda, prosedur ketiga dapat dibentuk dalam n_3 cara berbeda, dan seterusnya, maka banyak cara berbeda prosedur tersebut dapat dibentuk adalah $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots$

5.2.2. Faktorial

Kasus untuk didiskusikan (*)

Seorang operator Bank KERUT akan membuat nomor seri ATM dari angka-angka selain nol. Apabila nomor seri ATM tersebut terdiri dari 9 angka yang semuanya berbeda, tentukan banyaknya nomor seri ATM yang dapat dibuat oleh operator tersebut.

Hasil diskusi dan pembahasan

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

Sehingga banyaknya nomor seri ATM adalah …. × …. × …. × …. × …. × …. × …. × …. × …. = ……, atau dikenal dengan ….. !

$n! = (n-1)\ (n-2)\ (n-3) \ldots 3 \,.\, 2 \,.\, 1$

$0! = 1$

5.2.3. Permutasi

Kasus untuk didiskusikan

Kasus (*) pada di atas merupakan peristiwa permutasi untuk keseluruhan objek, di mana kita menyusun 9 angka nomor seri ATM dari 9 angka yang tersedia. Jadi suatu susunan *n* objek dalam urutan tertentu disebut suatu permutasi dari *n* objek tersebut. Sekarang coba anda teruskan untuk membuat nomor seri ATM yang hanya terdiri dari 5 digit (kasus **).

- ❖ Angka pertama dapat diisi oleh ….. angka yang berbeda
- ❖ Angka kedua dapat diisi oleh ….. angka yang berbeda
- ❖ Angka ketiga dapat diisi oleh ….. angka yang berbeda
- ❖ Angka keempat dapat diisi oleh ….. angka yang berbeda
- ❖ Angka kelima dapat diisi oleh ….. angka yang berbeda

Sehingga banyaknya nomor seri ATM Bank KERUT adalah

…. × …. × …. × …. × …. = ….

Pemecahan dari kasus (*) adalah 9! = 362880, kasus (**) adalah 15120 dan 4! = 24 kita dapat melihat suatu hubungan antara ketiga bilanngan tersebut, di mana 15120 = 362880/24. Sehingga penyelesaian kasus 5.3.2.3. merupakan 9!/4! yang dapat dituliskan sebagai 9!/(9 – 5)!.

Jadi apabila kita membuat susunan sembarang *r* obyek dari *n* objek dalam urutan tertentu disebut permutasi *r* dari *n*, yang dituliskan sebagai *P*(*n*, *r*) atau *nPr* atau P_r^n, yang rumusnya dapat diturunkan dari kasus 5.3.2.3.

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Latihan

Buktikan rumus permutasi di atas.

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Kasus untuk didiskusikan

Andaikan kita ingin membentuk semua kemungkinan dari 5 huruf yang terdapat pada kata PISSA. Dalam kata TITTA terdapat huruf yang sama, yaitu T sebanyak 3 buah. Jika ketiga huruf T tersebut dibedakan, yaitu T_1, T_2, dan T_3, maka ada 5 ! = 5.4.3.2.1 = 120 permutasi dari huruf-huruf T_1, I, T_2, T_3, A.

Perhatikan keenam permutasi berikut ini:

$T_1T_2T_3IA$ $T_2T_3T_1IA$ $T_3T_1T_2IA$ $T_1T_3T_2IA$ $T_3T_2T_1IA$ $T_2T_1T_3IA$

Jika indeksnya dihapus, maka keenam permutasi tersebut menjadi sama. Keenam permutasi tersebut berasal dari kenyataan bahwa ada 3! = 6 cara yang berbeda dari penempatan tiga T dalam posisi pertama pada permutasi. Oleh karena itu ada 5!/3! = 20 permutasi yang dapat dibentuk oleh 5 huruf dari kata TITTA tersebut.

Hitunglah banyaknya permutasi yang berbeda yang dapat dibentuk dari semua huruf pada kata MATEMATIKA.

Hasil diskusi dan pembahasan

- ❖ Banyaknya permutasi dari kata MATEMATIKA adalah

  ………………………………………………………………………………………

  ………………………………………………………………………………………

- ❖ Teruskan untuk memecahkan persoalan umum, yaitu banyaknya permutasi dari n objek yang terdiri atas n_1 objek sama, n_2 objek sama, ... , n_k objek sama, adalah

  ………………………...…………………………………………………………

  ………………………………………………………………………………………

5.2.4. Kombinasi

Kasus untuk didiskusikan

Peserta PLPG Matematika tahun 2011 diharuskan membuat RPP dengan memilih dua indikator yang berbeda dari lima indikator yang tersedia. Tentukan banyaknya RPP yang mungkin dapat dibuat oleh peserta PLPG tersebut.

Hasil diskusi dan pembahasan

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Misalkan kita mempunyai sebuah kumpulan n objek. Suatu kombinasi r objek dari n objek, adalah pemilihan r objek dari n objek yang urutannya tidak diperhatikan (tanpa memperhatikan urutannya). Jadi susunan INI dianggap sama dengan NII. Notasi banyak kombinasi r objek dari n objek adalah:

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

5.3. Peluang

Misalkan suatu ruang sampel S mempunyai elemen yang banyaknya berhingga, yaitu $n(S) = N$, dan tiap-tiap elemen dari S mempunyai kemungkinan sama untuk terjadi. Misalkan pula A adalah suatu kejadian (himpunan bagian dari S), yang mempunyai elemen sebanyak $n(A)$. Maka peluang P bahwa kejadian A akan terjadi, didefinisikan sebagai :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Kasus untuk didiskusikan

Jika dua buah dadu dilambungkan bersama-sama satu kali, dan *A* kejadian bahwa jumlah mata yang muncul dari kedua dadu sama dengan 8, *B* kejadian bahwa jumlah mata dadu yang muncul merupakan bilangan prima.

- ❖ Tentukan semua ruang sampel yang mungkin
- ❖ Tentukan *P*(*A*) dan *P*(*B*)

Hasil diskusi dan pembahasan

		Dadu II					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Dadu I	**1**						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						

$$P(A) = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

$$P(A) = \dots\dots$$

BAB IV
METODE PENGEMBANGAN PEMBELAJARAN MATEMATIKA

A. TUJUAN

Setelah mempelajari bagian metode pengembangan pembelajaran matematika ini diharapkan Anda dapat mengetahui:

1. Pendekatan dan Metode pembelajaran Matematika
2. Pengembangan sumber pembelajaran Matematika
3. Inovasi Pembelajaran Matematika

B. URAIAN MATERI

1. MODEL, PENDEKATAN, DAN METODE PEMBELAJARAN MATEMATIKA

Untuk membelajarkan siswa sesuai dengan cara-gaya belajar mereka sehingga tujuan pembelajaran dapat dicapai dengan optimal ada berbagai model pembelajaran. Dalam prakteknya, kita (guru) harus ingat bahwa tidak ada model pembelajaran yang paling tepat untuk segala situasi dan kondisi. Oleh karena itu, dalam memilih model pembelajaran yang tepat haruslah memperhatikan kondisi siswa, sifat materi bahan ajar, fasilitas-media yang tersedia, dan kondisi guru itu sendiri.

Berikut ini disajikan beberapa model pembelajaran, untuk dipilih dan dijadikan alternatif sehingga cocok untuk situasi dan kondisi yang dihadapi. Akan tetapi sajian yang dikemukakan pengantarnya berupa pengertian dan rasional serta sintaks (prosedur) yang sifatnya prinsip, modifikasinya diserahkan kepada guru untuk melakukan penyesuaian, penulis yakin kreativitas para guru sangat tinggi.

1.1. Pembelajaran Langsung (DL, *Direct Learning*)

Pengetahuan yang bersifat informasi dan prosedural yang menjurus pada ketrampilan dasar akan lebih efektif jika disampaikan dengan cara pembelajaran langsung. Sintaknya adalah menyiapkan siswa, sajian informasi dan prosedur, latihan terbimbing, refleksi, latihan mandiri, dan evaluasi (Suherman, 2004).

Model pengajaran langsung akan lebih efektif pada pengetahuan yang bersifat informasi dan prosedural yang menjurus pada keterampilan dasar yang dapat diajarkan selangkah demi selangkah. Karena model ini dirancang secara khusus untuk mengembangkan belajar siswa tentang pengetahuan prosedural dan deklaratif. Menurut pakar lain membedakan pengetahuan menjadi dua, yaitu pengetahuan deklaratif dan pengetahuan procedural (Trianto, 2011). Pengetahuan deklaratif adalah pengetahuan tentang sesuatu. Sesuatu hal yang menghafal, seperti menghafal rumus. Sedangkan pengetahuan prosedural adalah pengetahuan melakukan sesuatu. Sesuatu hal untuk menghasilkan suatu rumus.

Cara ini sering disebut dengan metode ekspositori (ceramah bervariasi) (Suyatno, 2009). Dalam referensi lain menyebutkan model pengajaran langsung tidak sama dengan metode ceramah, tetapi ceramah dan resitasi (mengecek pemahaman dengan tanya jawab) berhubungan erat dengan model pengajaran langsung.

Dalam penjelasan lain, model pengajaran langsung adalah model pembelajaran yang menekankan pada penguasaan konsep dan atau perubahan perilaku dengan mengutamakan pendekatan deduktif (Sudrajat, 2011). Model pengajaran langsung dapat berjalan dengan optimal apabila para siswa duduk berhadap-hadapan dengan guru, yang sering kali berdiri di dekat papan tulis dan siswa perlu tenang memperhatikan uraian serta segala sesuatu yang dilakukan oleh guru.

Adapun ciri-ciri model pengajaran langsung (Sudrajat, 2011): (1) transformasi dan keterampilan secara langsung, (2) pembelajaran berorientasi pada tujuan tertentu, (3) materi pembelajaran yang telah terstruktur; (4) lingkungan belajar yang telah terstruktur dan (5) distruktur oleh guru. Selain itu model ini memiliki dua tujuan utama yaitu memaksimalkan waktu belajar siswa dan mengemabangkan kemandirian dalam mencapai dan mewujudkan tujuan pendidikan (Joyce, 2009). Menurut Becker, dkk., model pengajaran langsung ini menekankan aplikasi pada kelompok guru dan untuk menghadapi dan mempelajari pembelajaran yang diberikan guru dan menggunakan pembelajaran tersebut dalam rangkaian praktik-praktik, pelajaran sehari-hari dalam membaca, aritmatika dan bahasa (Joyce, 2009).

Sintaks Model Pengajaran Langsung

Fase	Peran Guru
I: Menyampaikan dan mempersiapkan siswa	Menjelaskan tujuan pembelajaran, informasi latar belakang, penting pembelajaran, mempersiapkan siswa untuk belajar.
II: Mendemonstrasikan pengetahuan dan keterampilan	Mendemonstari dan menyajikan informasi dengan benar tahap demi tahap.
III: Memberikan latihan terbimbing	Merencanakan dan memberi bimbingan latihan awal.
IV: Mengecek pemahaman dan memberikan umpan balik	Mengecek apakah siswa telah berhasil melakukan tugas dengan baik, memberi umpan balik.
V: Memberikan kesempatan untuk latihan lanjutan dan penerapan	Mempersiapkan kesempatan melakukan latihan lanjutan, dengan perhatian khusus pada penerapan kepada situasi lebih kompleks dan kehidupan sehari-hari.

1.2. Model *Advance Organizer* (AO)

Model *advance organizer* adalah salah satu model dalam kelompok model pembelajaran memproses informasi yang dibentuk oleh Ausubel (Joyce, dkk, 2009). Ausubel percaya bahwa pemerolehan informasi merupakan tujuan pendidikan yang sah. Model ini diharapkan dapat membimbing guru dalam mentransmisi beragam informasi pada siswa. Sedangkan peran utama siswa adalah menguasai gagasan dan informasi.

AO merupakan model yang pembelajaran mengarahkan para siswa ke materi yang akan mereka pelajari dan menolong mereka untuk mengingat kembali informasi yang berhubungan yang dapat digunakan dalam membantu menanamkan pengetahuan baru. Model ini dirancang untuk memperkuat struktur kognitif pada siswa dalam memahami materi pembelajaran yang baru dengan menghubungkan materi pembelajaran sebelumnya, dan menciptakan landasan belajar bermakna. Oleh karena itu, materi pembelajaran yang baru harus sesuai dengan struktur kognitif siswa. Model AO bertujuan untuk mengembangkan kemampuan memproses informasi yang efisien untuk menyerap dan menghubungkan satuan ilmu pengetahuan secara bermakna (TP-MKDK, 2011). Tahap demi tahap, konsep-konsep dan rancangan-rancangan penting dijelaskan dan diintegrasikan, sehingga pada akhir pengajaran, siswa akan memperoleh perspektif yang utuh tentang bidang yang dipelajarinya.

AO adalah informasi yang disampaikan oleh instruktur yang membantu siswa mengatur informasi masuk yang baru (Ausubel, 2012). Hal ini diperoleh dengan mengarahkan perhatian siswa pada pengetahuan sebelumnya, menyoroti hubungan, dan memberikan pengingat tentang pengetahuan awal yang relevan. Ausubel menjelaskan, AO sebagai pengantar materi yang dipresentasikan terlebih dulu dan berada pada tingkat abstraksi yang tertinggi, sehingga tujuannya menjelaskan, mengintegrasikan dan menghubungkan materi dengan materi yang telah dimiliki sebelum materi baru.

Model *advance organizer* memiliki tiga tahap kegiatan, yaitu.

(1). Presentasi AO

(a). Mengklarifikasikan tujuan-tujuan pembelajaran

Bertujuan untuk memperoleh perhatian dan mengarahkan siswa pada tujuan pembelajaran yang akan disampaikan. Keduanya penting, bagi siswa untuk memfasilitasi pembelajaran bermakna, dan bagi guru penting dalam merencanakan pembelajaran.

(b). Menyajikan *advance organizer*

Menurut Mayer dalam Wikipedia, AO adalah pernyataan umum yang disajikan di awal pelajaran yang membantu mengkoneksikan materi yang baru dengan pembelajaran (Schunk, 2012). Selain itu, menurut Bruce AO merupakan *preview* dari materi pembelajaran. AO yang paling efektif dikonstruksi menggunakan konsep-konsep, ketentuan-ketentuan, dan proporsi yang sudah dikenal sebelumnya oleh siswa.

AO memperlihatkan gambaran dari isi materi yang dapat disampaikan berupa konsep, proporsi, generalisasi, prinsip dan hukum-hukum yang terdapat dalam kajian bidang studi, sehingga siswa dapat merasakan apa yang ada dengan materi utama pembelajaran. Hal penting dalam AO adalah tingkat abstraksi dan generalisasi yang tinggi dari materi pelajaran. Tingkat abstraksi yang tinggi ini yang membedakan AO dengan komentar pengantar materi pelajaran. Jadi guru harus dapat membedakan antara AO dengan komentar pengantar. AO dapat berupa bagan, peta konsep, gambar atau gagasan umum.

(c). Mendorong kesadaran pengetahuan yang relevan

Penyajian AO tidak perlu terlalu panjang atau lama, tetapi siswa harus menyadari AO, dipahami dengan jelas dan secara terus menurus berhubungan dengan materi yang akan dilaksanakan. Siswa diarahkan untuk merespon AO yang telah disajikan oleh guru. Respon siswa berupa pertanyaan atau pernyataan sehingga menjadi stimulus dalam menerima materi pelajaran yang akan dilaksanakan.

(2). Presentasi materi pembelajaran

Materi pembelajaran yang dipresentasikan dapat dilakukan dalam bentuk ceramah, atau diskusi. Selama presentasi, pengolahan materi pembelajaran perlu dibuat jelas pada siswa dan pentingnya susunan dari materi pembelajaran sehingga siswa dapat melihat hubungannya dengan presentasi AO. Serta diberikannya tugas dari materi pembelajaran yang telah diajarkan.

(3). Penguatan struktur kognitif

(a). Menggunakan prinsip-prinsip rekonsiliasi integratif

Memfasilitasi prinsip-prisip rekonsiliasi integratif, materi baru dengan struktur kognitif siswa dapat dilakukan dengan cara, yaitu: Guru dapat (1) mengingatkan siswa tentang gagasan-gagasan (gambaran yang lebih besar), (2) meminta ringkasan tentang sifat-sifat penting materi pembelajaran yang baru, (3) mengulang definisi-definisi yang tepat, (4) meminta perbedaan-perbedaan di antara aspek-aspek materi, dan (5) meminta siswa mendeskripsikan bagaimana materi pembelajaran mendukung konsep dan rancangan yang digunakan sebagai organizer” (Joyce, dkk, 2009).

(b). Menganjurkan pembelajaran aktif

Pembelajaran aktif dapat ditingkatkan dengan,

"(1) meminta siswa mendeskripsikan bagaimana materi baru berhubungan dengan AO, (2) meminta siswa membuat contoh-contoh tambahan tentang konsep atau rancangan dalam materi pembelajaran, (3) meminta siswa menjelaskan secara lisan esensi dari materi tersebut, dengan menggunakan terminologi dan kerangka rujukan mereka sendiri dan (4) meminta siswa menguji materi dari sudut pandang lain" (Joyce, dkk, 2009).

(c). Membangkitkan pendekatan kritis pada mata pelajaran

Pendekatan kritis dapat dilatih dengan meminta siswa mengenali kesimpulan-kesimpulan yang dibuat, mempertimbangkan atau menentang asumsi itu dan menyatukan kontradiksi apabila terjadi silang pendapat.

(d). Mengklarifikasi

Guru melakukan klarifikasi beberapa topik dan untuk integrasi materi baru dengan pengetahuan yang ada. Guru dapat melakukan klarifikasi dengan cara memberi tambahan informasi baru atau mengaplikasikan gagasan ke dalam situasi baru atau contoh lain (Hidayat, 2012).

Berdasarkan penjelasan di atas, tahap-tahap kegiatan model AO dapat dilihat dari tabel berikut ini.

Tahap Kegiatan Model Advance Organizer

Tahap	Kegiatan
I: Presentasi A*dvance Organizer*	a. Mengklarifikasi tujuan-tujuan pembelajaran b. Menyajikan *advance organizer* c. Mendorong kesadaran pengetahuan yang relevan
II: Presentasi Materi Pembelajaran	a. Menyajikan materi pembelajaran b. Memberikan tugas pembelajaran
III: Penguatan Struktur Kognitif	a. Mengembangkan prinsip-prinsip rekonsiliasi integratif b. Menganjurkan pembelajaran aktif c. Membangkitkan pendekatan kritis pada mata pembelajaran d. Mengklarifikasi

1.3. Pendekatan Induktif

Pendekatan induktif suatu penalaran dari khusus ke umum. Dalam pendekatan induktif penyajian bahan ajar dimulai dari contoh-contoh konkrit yang mudah dipahami siswa. Berdasarkan contoh-contoh tersebut siswa dibimbing menyusun suatu kesimpulan., kebenaran kesimpulan yang disusun secara indutif ini ditentukan tepat tidaknya (atau representatif tidaknya) contoh yang dipilih. Bisaanya makin banyak contoh makin besar pula tingkat kebenaran kesimpulannya.

Sebuah argumen induktif meliputi dua komponen, yang pertama terdiri dari pernyataan/fakta yang mengakui untuk mendukung kesimpulan dan yang kedua bagian dari argumentasi itu. Kesimpulan dari suatu argumentasi induktif tidak perlu mengikuti fakta yang diajarkan. Fakta mungkin membuat lebih dipercaya, tergantung sifatnya, tetapi itu tidak bisa membuktikan dalil untuk mendukung. Sebagai contoh, fakta bahwa 3, 5, 7, 11, dan 13 adalah semuanya bilangan prima dan masuk akal secara umum kita buat kesimpulan bahwa semua bilangan prima adalah ganjil tetapi hal itu sama sekali “tidak membuktikan“.

Guru beresiko di dalam suatu argumentasi induktif bahwa kejadian semacam itu sering terjadi. Karenanya, suatu kesimpulan yang dicapai oleh induksi harus berhati-hati karena hal seperti itu nampak layak dan hampir bisa dipastikan atau mungkin terjadi. Sebuah argumentasi dengan induktif dapat ditandai sebagai suatu kesimpulan dari yang diuji ke tidak diuji. Bukti yang diuji terdiri dari kejadian atau contoh pokok-pokok.

1.4. Pendekatan Deduktif

Pendekatan deduktif merupakan suatu penalaran dari umum ke khusus, maksudnya memberikan penjelasan devinisi terlebih dahulu kemudian mencari contoh-contoh. Ciri utama matematika adalah penalaran deduktif, yaitu kebenaran suatu pernyataan diperoleh sebagai akibat logis kebenaran sebelumnya, sehingga kaitan antar pernyataan dalam matematika bersifat konsisten.

Berarti dengan strategi penemuan deduktif, kepada siswa dijelaskan konsep dan prinsip materi tertentu untuk mendukung perolehan pengetahuan matematika yang tidak dikenalnya dan guru cenderung untuk menanyakan suatu urutan pertanyaan untuk mengarahkan pemikiran siswa ke arah penarikan kesimpulan yang menjadi tujuan dari pembelajaran.

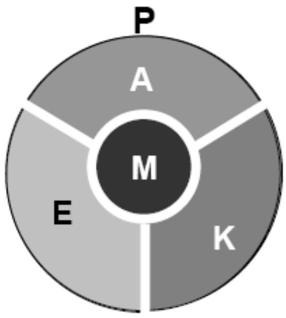
Perhatikan pernyataan berikut, “jika 2 pasang sudut dari 2 segitiga sama besar, maka pasangan sudutnya yang ketiga sama pula”. Silogisme yang berhubungan dengan pernyataan tersebut

Premis mayor : jumlah ketiga sudut segitiga adalah 180

Premis minor : dua pasang sudut ketiga sama besar

Kesimpulan : pasangan sudut ketiga dua segitiga itu sama

1.5. PAKEM



Untuk memperoleh hasil belajar yang optimal, salah satu pendekatan umum yang dapat digunakan adalah pendekatan PAKEM (Pembelajaran yang aktif, kreatif, efektif, dan menyenagkan). Secara ringkas PAKEM dapat diungkapkan seperti pada tabel berikut (Al. Krismanto, 2003: 2):

Komponen	Guru	Siswa
A : Aktif	• Memantau kegiatan belajar siswa • Memberi umpan balik • Mengajukan pertanyaan yang menantang • Mempertanyakan gagasan siswa	• Bertanya • Mengemukan gagasan • Mempertanyakan gagasan orang lain dan gagasannya
K : Kreatif	• Mengembangkan kegiatan yang beragam • Membuat alat bantu belajar sederhana • Menyajikan soal *open-ended*	• Merancang/membuat sesuatu • Menulis (mengkomu-nikasikan matematika) • Variasi cara menjawab soal matematika
E: Efektif	• Mencapai tujuan pembelajaran	• Menguasai keterampilan yang di perlukan
M: Menyenangkan	• Tidak membuat anak takut (salah, ditertawakan, dianggap sepele)	• Berani mencoba / berbuat • Berani bertanya • Berani mengemukan pendapat

		• Berani mempertanyakan gagasan orang lain

1.6. Koperatif (CL, *Cooperative Learning*).

Pembelajaran koperatif sesuai dengan fitrah manusia sebagai makhluk sosial yang penuh ketergantungan dengan orang lain, mempunyai tujuan dan tanggung jawab bersama, pembegian tugas, dan rasa senasib. Dengan memanfaatkan kenyatan itu, belajar berkelompok secara koperatif, siswa dilatih dan dibiasakan untuk saling berbagi (sharing) pengetahuan, pengalaman, tugas, tanggung jawab. Saling membantu dan berlatih beinteraksi-komunikasi-sosialisasi karena koperatif adalah miniatur dari hidup bermasyarakat, dan belajar menyadari kekurangan dan kelebihan masing-masing.

Jadi model pembelajaran koperatif adalah kegiatan pembelajaran dengan cara berkelompok untuk bekerja sama saling membantu mengkontruksi konsep, menyelesaikan persoalan, atau inkuiri. Menurut teori dan pengalaman agar kelompok kohesif (kompak-partisipatif), tiap anggota kelompok terdiri dari 4 sampai 5 orang, siswa heterogen (kemampuan, gender, karekter), ada kontrol dan fasilitasi, dan meminta tanggung jawab hasil kelompok berupa laporan atau presentasi. Sintaks pembelajaran koperatif adalah informasi, pengarahan-strategi, membentuk kelompok heterogen, kerja kelompok, presentasi hasil kelompok, dan pelaporan.

1.7. Kontekstual (CTL, *Contextual Teaching and Learning*)

Pembelajaran kontekstual adalah pembelajaran yang dimulai dengan sajian atau tanya jawab lisan (ramah, terbuka, negosiasi) yang terkait dengan dunia nyata kehidupan siswa (*daily life modeling*), sehingga akan terasa manfaat dari materi yang akan disajkan, motivasi belajar muncul, dunia pikiran siswa menjadi konkret, dan suasana menjadi kondusif - nyaman dan menyenangkan. Perinsip pembelajaran kontekstual adalah aktivitas siswa, siswa melakukan dan mengalami, tidak hanya menonton dan mencatat, dan pengembangan kemampuan sosialisasi.

Ada tujuh indikator pembelajaran kontekstual sehingga bisa dibedakan dengan model lainnya, yaitu *modeling* (pemusatan perhatian, motivasi, penyampaian kompetensi-tujuan, pengarahan-petunjuk, rambu-rambu, contoh), *questioning* (eksplorasi, membimbing, menuntun, mengarahkan, mengembangkan, evaluasi, inkuiri, generalisasi), *learning community* (seluruh siswa partisipatif dalam belajar kelompok atau individual, *minds-on*, *hands-on*, mencoba, mengerjakan), *inquiry* (identifikasi, investigasi, hipotesis, konjektur, generalisasi, menemukan), *constructivism* (membangun pemahaman sendiri, mengkonstruksi konsep-aturan, analisis-sintesis), *reflection* (reviu, rangkuman, tindak lanjut), *authentic assessment* (penilaian selama proses dan sesudah pembelajaran, penilaian terhadap setiap aktvitas-usaha siswa, penilaian portofolio, penilaian seobjektif-objektifnya dari berbagai aspek dengan berbagai cara).

1.8. Pembelajaran Berbasis masalah (PBL, Problem Based Learning)

Kehidupan adalah identik dengan menghadapi masalah. Model pembelajaran ini melatih dan mengembangkan kemampuan untuk menyelesaikan masalah yang berorientasi pada masalah otentik dari kehidupan aktual siswa, untuk merangsang kemamuan berpikir tingkat tinggi. Kondisi yang tetap harus dipelihara adalah suasana kondusif, terbuka, negosiasi, demokratis, suasana nyaman dan menyenangkan agar siswa dapat berpikir optimal. Indikator model pembelajaran ini adalah metakognitif, elaborasi (analisis), interpretasi, induksi, identifikasi, investigasi, eksplorasi, konjektur, sintesis, generalisasi, dan inkuiri.

1.9. Problem Solving

Dalam hal ini masalah didefinisikan sebagai suatu persoalan yang tidak rutin, belum dikenal cara penyelesaiannya. Justru problem solving adalah mencari atau menemukan cara penyelesaian (menemukan pola, aturan, .atau algoritma). Sintaknya adalah: sajikan permasalah yang memenuhi kriteria di atas, siswa berkelompok atau individual mengidentifikasi pola atau aturan yang disajikan, siswa mengidentifikasi, mengeksplorasi,menginvestigasi, menduga, dan akhirnya menemukan solusi.

1.10. Problem Posing

Bentuk lain dari problem solving adalah problem posing, yaitu pemecahan masalah dengan melalui elaborasi, yaitu merumuskan kembali masalah menjadi bagian-bagian yang lebih simple sehingga dipahami. Sintaknya adalah: pemahaman, jalan keluar, identifikasi kekeliruan, menimalisasi tulisan-hitungan, cari alternatif, menyusun soal-pertanyaan.

1.11. Problem Terbuka (OE, *Open Ended*)

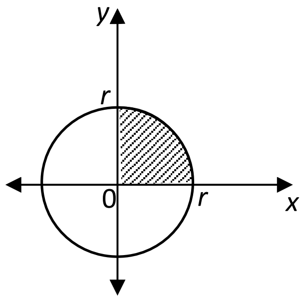
Pembelajaran dengan problem (masalah) terbuka artinya pembelajaran yang menyajikan permasalahan dengan pemecahan berbagai cara (flexibility) dan solusinya juga bisa beragam (multi jawab, fluency). Pembelajaran ini melatih dan menumbuhkan orisinilitas ide, kreativitas, kognitif tinggi, kritis, komunikasi-interaksi, sharing, keterbukaan, dan sosialisasi. Siswa dituntuk untuk berimprovisasi mengembangkan metode, cara, atau pendekatan yang bervariasi dalam memperoleh jawaban, jawaban siswa beragam. Selanjutnya siswa juga diminta untuk menjelaskan proses mencapai jawaban tersebut. Dengan demikian model pembelajaran ini lebih mementingkan proses daripada produk yang akan membentuk pola pikir, keterpasuan, keterbukaan, dan ragam berpikir. Sajian masalah haruslah kontekstual kaya makna secara matematik (gunakan gambar, diagram, table), kembangkan permasalahan sesuai dengan kemampuan berpikir siswa, kaitkan dengan materi selanjutnya, siapkan rencana bimbingan (sedikit demi sedikit dilepas mandiri). Sintaknya adalah menyajikan masalah, pengorganisasian pembelajaran, perhatikan dan catat respon siswa, bimbingan dan pengarahan, membuat kesimpulan.

1.12. Probing-Prompting

Teknik probing-prompting adalah pembelajaran dengan cara guru menyajikan serangkaian petanyaan yang sifatnya menuntun dan menggali sehingga terjadi proses berpikir yang mengaitkan pengetahuan sisap siswa dan pengalamannya dengan pengetahuan baru yang sedang dipelajari. Selanjutnya siswa mengkonstruksi konsep-prinsip-aturan menjadi pengetahuan baru, dengan demikian pengetahuan baru tidak diberitahukan. Dengan model pembelajaran ini proses tanya jawab dilakukan dengan menunjuk siswa secara acak sehingga setiap siswa mau tidak mau harus berpartisipasi aktif, siswa tidak bisa menghindar dari prses pembelajaran, setiap saat ia bisa dilibatkan dalam proses tanya jawab. Kemungkinan akan terjadi suasana tegang, namun demikian bisa dibiasakan. Untuk mengurangi kondisi tersebut, guru hendaknya serangkaian pertanyaan disertai dengan wajah ramah, suara menyejukkan, nada lembut. Ada canda, senyum, dan tertawa, sehingga suasana menjadi nyaman, menyenangkan, dan ceria. Jangan lupa, bahwa jawaban siswa yang salah harus dihargai karena salah adalah cirinya dia sedang belajar, ia telah berpartisipasi.

2. PENGEMBANGAN SUMBER PEMBELAJARAN MATEMATIKA

2.1. Membuktikan Rumus Luas Lingkaran



Lingkaran ini dapat dinyatakan oleh persamaan kutub $f(\theta) = r$ dan persamaan cartesius $x^2 + y^2 = r^2$. Untuk mengintegralkan juga kita bisa menggunakan ke dua persamaan tersebut, dengan mengambil ¼ bagian lingkaran, agar lebih mudah dan sederhana dalam pengerjaannya.

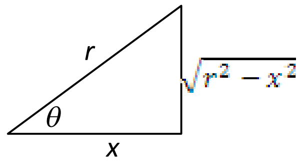
$x^2 + y^2 = r^2$ diubah menjadi $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

Sehingga dengan persamaan cartesius, diperoleh:

$$L = \int_0^r f(x)dx = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

yang merupakan integral substitusi trigonometri.

Kita akan melakukan pemisalan trigonometri, sebagai berikut:



$$\sqrt{r^2 - x^2} = r\sin\theta \qquad x = r\cos\theta \qquad dx = -r\sin\theta\, d\theta$$

Untuk $x = 0$ diperoleh $\theta = \pi/2$ dan $x = r$ diperoleh $\theta = 0$

Sehingga

$$L = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int_{\pi/2}^0 r\sin\theta\ (-r\sin\theta\, d\theta)$$

$$= -r^2 \int_{\pi/2}^0 \sin^2\theta\ d\theta = \frac{-r^2}{2}\int_{\pi/2}^0 (1 - \cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{-r^2}{2}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\pi/2}^{0} = \frac{-r^2}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi r^2}{4}$$

Karena ini merupakan luas ¼ lingkaran, maka luas lingkaran adalah empat kalinya, yaitu $L = \pi r^2$.

Sekarang kita akan melakukan pengintegralan ganda dua dengan menggunakan persamaan kutub, yaitu $f(\theta) = r$.

$$L = \int_0^{\pi/2}\int_0^r f(r)f(\theta)\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^r r\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^r d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}r^2\, d\theta = \left[\frac{1}{2}r^2\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}\pi r^2$$

Karena ini merupakan luas ¼ lingkaran, maka luas lingkaran adalah empat kalinya, yaitu $L = \pi r^2$.

3. INOVASI PEMBELAJARAN MATEMATIKA

3.1. Perhitungan Rerata Statistik dengan Se-Gel

Tentukan rerata dari data 4, 3, 6, 6, 3, 5, 7, 4, 4, 6

- ❖ Beberapa bunyi dan representasi dari rerata. Rerata adalah perbandingan antara jumlah data dengan banyaknya data.

  Jumlah data: 4 + 3 + 6 + 6 + 3 + 5 + 7 + 4 + 4 + 6 = 48

  Banyaknya data: 10

$$\text{Rerata} = \frac{\text{jumlah data}}{\text{banyaknya data}}$$

$$\text{Rerata} = \frac{48}{10} = 4{,}8$$

- ❖ Tuliskan data 4, 3, 6, 6, 3, 5, 7, 4, 4, 6 sebagai

  4, 4 – 1, 4 + 2, 4 + 2, 4 – 1, 4 + 1, 4 + 3, 4, 4, 4 + 2

  Diseragamkan 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4 dengan kelebihan 8

  Karena ada 10 data, maka reratanya adalah 4,8.

- ❖ Rumus rerata hitung; jika x_i menyatakan suatu data dan n banyaknya data, maka rerata $\bar{x}$ dinyatakan oleh

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{4+3+6+6+3+5+7+4+4+6}{10} = \frac{48}{10} = 4{,}8$$

- ❖ Menggabungkan beberapa data yang sama

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n} = \frac{3\times 4 + 2\times 3 + 3\times 6 + 5 + 7}{10} = \frac{12+6+18+12}{10} = 4{,}8$$

- ❖ Menyajikan data ke dalam tabel frekuensi

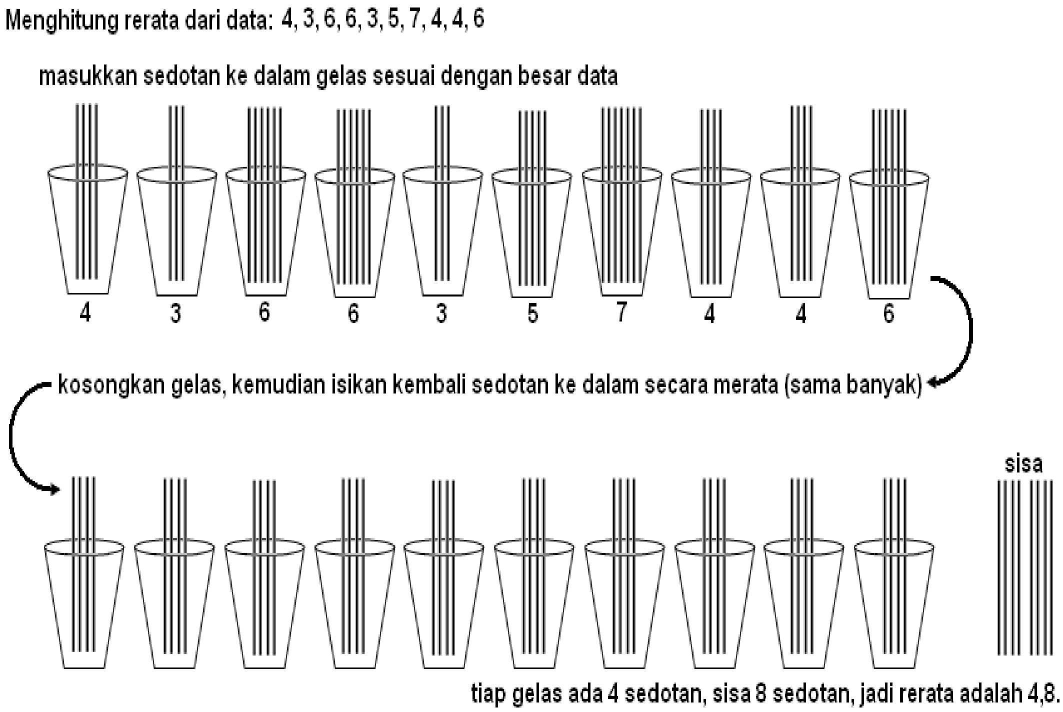
x	***f***	***fx***
3	2	6
4	3	12
5	1	5
6	3	18
7	1	7
$\sum$	**10**	**48**

Jika x_i menyatakan suatu data dan f_i menyatakan frekuensi suatu data, maka $\bar{x}$ dinyatakan oleh

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{48}{10} = 4{,}8$$

❖ Memanfaatkan sedotan dan gelas

Sedotan diperlukan sejumlah data dan gelas dibutuhkan sebanyak data. Kita hanya perlu mendistribusikan sedotan ke setiap gelas sebagaimana dalam permainan congklak.



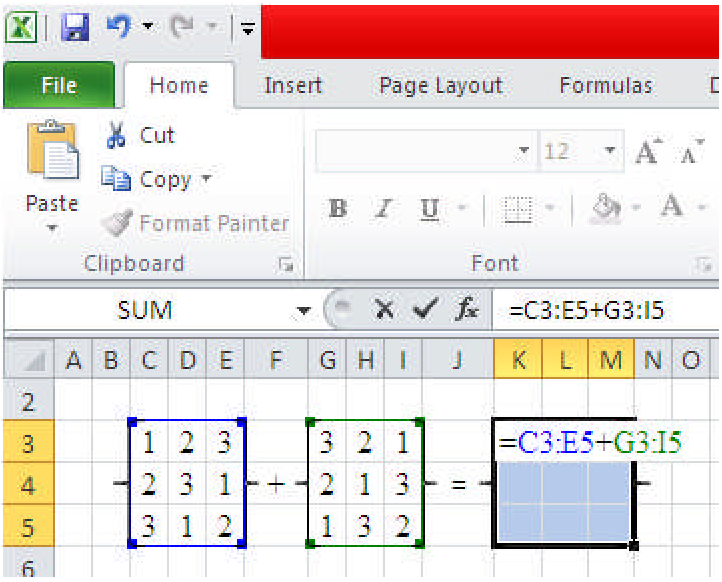
3.2. Belajar Matriks dengan Menggunakan *Microsoft Excel*

Matriks adalah kumpulan bilangan berbentuk persegi panjang yang disusun menurut baris dan kolom. Bilangan-bilangan yang terdapat di suatu matriks disebut dengan elemen atau anggota matriks. Dengan representasi matriks, perhitungan dapat dilakukan dengan lebih terstruktur. Pemanfaatannya misalnya dalam menjelaskan persamaan linier ataupun transformasi koordinat. Matriks seperti halnya variabel biasa dapat dimanipulasi, seperti dikalikan, dijumlah, dikurangkan, ditranspos, dihitung determinannya dan inversnya.

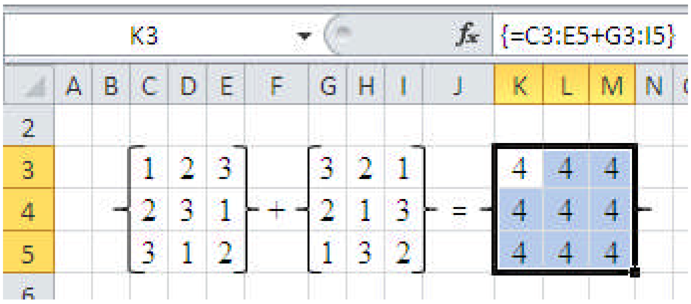
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan *Microsoft Excel* 2010 kita dapat dengan mudah mengalikan, menjumlahkan, mengurangkan, dan menghitung determinan matriks. Perlu diingat, bahwa sifat-sifat operasi dasar matriks harus tetap diperhatikan dalam penggunaan *Microsoft Excel* ini. Berikut disajikan beberapa operasi dasar matriks dengan menggunakan *Microsoft Excel*

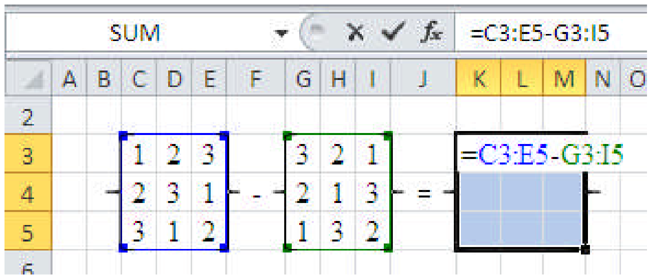
Penjumlahan Matriks



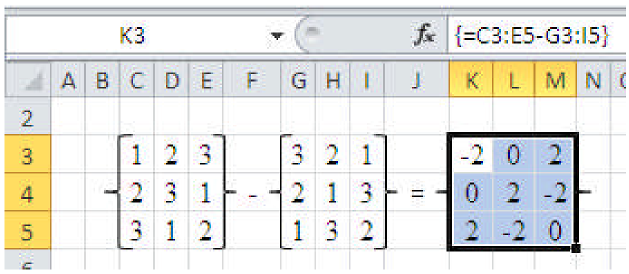
Blok Range K3:M5, kemudian ketik formula seperti yang tampil pada gambar di atas (=C3:E5+G3:I5). Setelah itu, tekan Ctrl + Shift + Enter, sehingga diperoleh



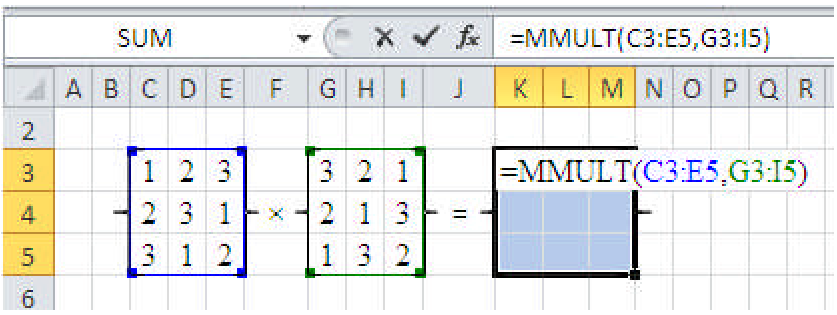
Pengurangan Matriks



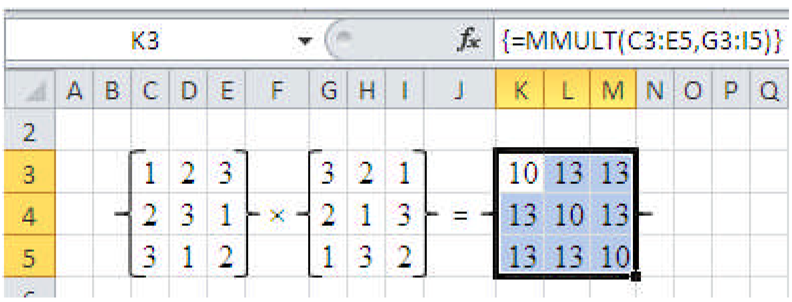
Blok Range K3:M5, kemudian ketik formula seperti yang tampil pada gambar di atas (=C3:E5-G3:I5). Setelah itu, tekan Ctrl + Shift + Enter, sehingga hasilnya berupa



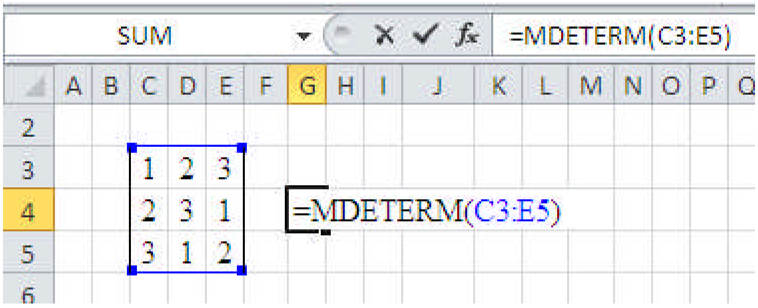
Perkalian Matriks



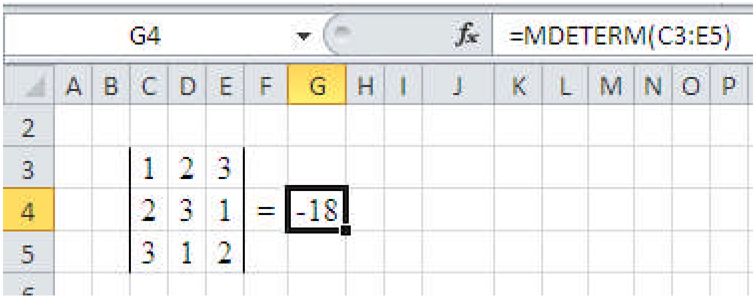
Blok Range K3:M5, kemudian ketik formula seperti yang tampil pada gambar di atas (=MMULT(C3:E5,G3:I5)). Setelah itu, tekan Ctrl + Shift + Enter, sehingga hasilnya diberikan oleh



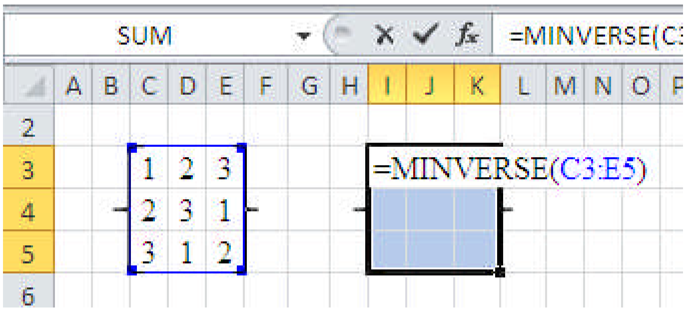
Determinan Matriks



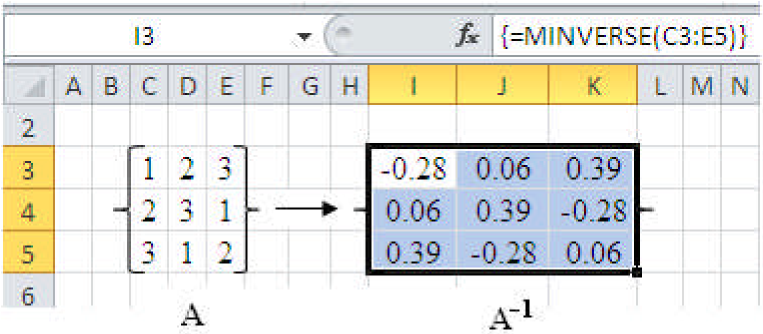
Ketik formula seperti yang tampil pada gambar di atas (=MDETERM(C3:E5)). Kemudian, tekan Enter, sehingga memberikan hasil



Invers Matriks



Ketik formula seperti yang tampil pada gambar di atas (=MINVERSE(C3:E5)). Kemudian, tekan Enter, sehingga memberikan hasil



BAB V
PENUTUP

Demikianlah penyusunan Modul Pembelajaran Matematika SMA untuk Diklat Guru Matematika SMA di DKI Jakarta dibuat berdasarkan sistematika yang mempertimbangkan pengembangan kompetensi profesional dan pedagogik guru.

Setelah menyelesaikan modul ini, Anda diharapkan memiliki kemampuan yang mumpuni dalam memahami landasan, hakikat, prinsip, dan karakteristik pembelajaran matematika sekolah. Selain itu, anda juga diharapkan menguasai materi esensial matematika SMA sehingga dapat membantu siswa dalam mempelajari matematika. Inovasi dan kreativitas pembelajaran matematika dapat Anda kembangkan sehingga menjadi guru profesional. Keberhasilan dalam mempelajari modul ini jika Anda mampu menyelesaikan soal-soal atau kasus-kasus yang ada dalam modul.

Semoga modul ini dapat menjadi inspirasi anda dalam mengembangkan materi ajar matematika SMA secara kreatif dan inovatif..

DAFTAR PUSTAKA

Abdurahman, Mulyono. (1999). *Pendidikan Bagi Anak Berkesulitan Belajar*. Jakarta: Rineka Cipta.

Asyhadi, Ahmad. (2005). *Pengenalan Laboratorium Matematika di Sekolah*. IHT Media Bagi Staf LPMP Pengelola Laboratorium Matematika Tanggal 5 s.d. 11 September 2005 di PPPG Matematika Yogyakarta.

Ausubel, David. (2012). *David Ausubel,* [Online] http://en.wikipedia.org/wiki/David_Ausubel, diunduh 01 Mei 2012.

Dahlan, JA. (2010). *Tugas Creative Mind Map dalam Pembelajaran Matematika*. Makalah SPS UPI.

De Lange, J. (1995). *No Change Without Problems*. In T.A. Romberg (Ed.) *Reform in School Mathematics and Authentic Assessment*. Albany: SUNY Press.

Dimyati dan Mudjiono. (2002). *Belajar dan Pembelajaran.* Jakarta: Rineka Cipta.

Djamarah, Bahri, Syaiful dan Zain, Aswan. 2002. cet. Kedua. *Strategi Belajar Mengajar*. Jakarta : Rieneka Cipta.

Ernest,P. (1991). *The Philosopy of Mathematics Education*. London : Falmer Press

Gofree, Fred and Maarten Dolk. (1995). *Freudenthal Institute*. Netherlands: Universiteit Utrecht.

Gozali, S. (2007). *Senang Belajar dan Mengajar Matematika melalui Lesson Study*. Bandung: Prosiding Seminar Nasional, 8 Desember 2007 Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA UPI.

Gravemeijer. (1994). Developing Realistics Mathematics Education. Freudenthal Institute. Utrecht

Hakim, Thursan. (2000). *Belajar Secara Efektif*. Jakarta: Persada Swara

Hasanudin, D. (2007). *Peningkatan Kemampuan Berpikir Kritis Siswa melalui Pembelajaran dengan Pendekatan Open-Ended dalam Implementasi Lesson Study*. Bandung: Prosiding Seminar Nasional, 8 Desember 2007 Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA UPI.

Hidayat, Nurul. (2012). *Advance Organizer*, [Online] http:// www. Nurul Hidayat.com/Advance Organizer/, diunduh 15 April 2012.

Hudoyo, Herman. (1985). *Teori Belajar dalam Proses Belajar Mengajar Matematika*. Jakarta: Depdikbud.

_______. (1990). *Strategi Mengajar Belajar Matematika*. Malang: IKIP Malang.

Joyce, B. dkk. (2009). *Models Of Teaching, Edisi Kedelapan.* Yogyakarta: Pustaka Pelajar

Kaufeldt, Matha. (2008). *terj*. *Wahai Para Guru, Ubahlah Cara Mengajarmu, perintah pengajaran yang berbeda-beda dan sesuai dengan otak*. Jakarta: Indeks.

Kumar, Arvind, et al. (2005). *Guidelines for Mathematics Laboratory in Schools*. Delhi: Central Board of Secondary Education

Maier, H. (1985). *Kompendium Didaktik Matematika.* Bandung: CV Remaja Karya.

Markaban. (2004). *Fungsi, Persamaan, dan Pertidaksamaan*. Jogjakarta: Depdiknas-PPPG Matematika.

Meljbro, Leif. (2006). *Real Function in One Variable-Calculus 1a*. Bookboon.com

Morrison, Karen. (2006). *IGCSE Mathematics*. UK: Cambridge University Press.

Murtadho, Sutrisman dan G. Tambunan, (1987). *Materi Pokok Pengajaran Matematika*. Jakarta: Karunika UT

Nasution, S. (1982). *Didaktika Azas-azas Mengajar*. Bandung: Semmars.

Purwanto, SE. (2010). *Peningkatan Kemampuan Matematis Siswa SMP melalui Pembelajaran Matematika Realistik*. Bandung: Disertasi UPI.

Puskur, (2007). *Kajian Kebijakan Kurikulum Mata Pelajaran Matematika*. Balitbang Depdiknas.

Rogers, EM. (1983). *Diffusion of Innovation*. USA: The Free Prees.

Ruru. (2011). *Perkalian Matriks dengan menggunakan Microsoft Excel*. Dapat diakses di http://news.palcomtech.com/2011/04/menghitung-matriks-dengan-menggunakan-microsoft-excel/. Diunduh tanggal 16 Oktober 2012.

Ruseffendi, ET. (2006). *Pengantar kepada Membantu Guru Mengembangkan Kompetensinya dalam Pengajaran Matematika untuk Meningkatkan CBSA.* Bandung: Tarsito.

Sabri, Ahmad. (2005). *Strategi Belajar Mengajar Micro Teaching*. Jakarta: Quantum Teaching

Sagala, Syaiful. (2003). *Konsep dan Makna Pembelajaran*. Bandung: Alfabeta.

Schunk, Dale H. (2012). *Learning Theories An Educational Perspective, Edisi Keenam.* Yogyakarta: Pustaka Pelajar.

Simanjuntak, Lisnawati, *dkk.* (1992). *Metode Mengajar Matematika.* Jakarta: Rineka Cipta.

Sobel, MA. dan Maletsky, EM. (2004). *Mengajar Matematika.* Jakarta: Erlangga.

Streefland, L. (1991). *Realistic Mathematics Education in Primary School*. Freudenthal Institute. Utrecht.

Sudrajat, Akhmad. (2011). http://akhmadsudrajat.wordpress.com/2011/01/27/model-pengajaran-langsung/ [Online], diunduh 16 April 2012.

Suherman, E.Ar.,dkk. (2003). Strategi Pembelajaran Matematika Kontemporer. Bandung: JICA-UPI.

Suherman, E. (2004). *Model-Model Pembelajaran Matematika Berorientasi Kompetensi Siswa*. Makalah disajikan dalam acara Diklat Pembelajaran bagi Guru-guru Pengurus MGMP Matematika di LPMP Jawa Barat tanggal 10 Desember 2004: Tidak Diterbitkan.

Suyatno. (2009). *Menjelajah Pembelajaran Inovatif.* Sidoarjo: Masmedia Buana Pustaka.

Tim pengembangan MKDP Kurikulum dan Pembelajaran. (2011). *Kurikulum dan Pembelajaran*. Bandung: Rajawali Press.

Trianto. (2011). *Mendesaian Model Pembelajaran Inovatif-Progresif*. Jakarta: Kencana.

Turmudi. (2003). *Model Buku Pelajaran Matematika SMP, Panduan Pengembangan*. Jakarta: Pusbuk Depdiknas.

_______. (2008). *Landasan Filsafat dan Teori Pembelajaran Matematika* (*berparadigma Eksploratif dan Investigasi*). Jakarta: Leuser Cita Pustaka.

Wahyudin. (2008). *Pembelajaran dan Model-Model Pembelajaran*: *Pelengkap untuk Meningkatkan Kompetensi Pedagogis Para Guru dan Calon Guru Profesional*. Bandung: Diktat Perkuliahan UPI. Belum diterbitkan.

W, Sri Anitah, J.T. Manoy dan Susanah. 2007. *Strategi Pembelajaran Matematika*. Jakarta: UT Depdiknas

Zamroni. (2000). *Paradigma Pendidikan Masa Depan*. Yogyakarta : Bigraf Publishing.

http://adnanfajri.blogspot.com/2012/03/rumus-waktu-ujian.html, diunduh tanggal 27 September 2012.