BAB I
SISTEM BILANGAN REAL

A. Sistem Bilangan Real

Sistem bilangan real sangat erat kaitannya dengan kalkulus. Sebagian dari kalkulus berdasar pada sifat-sifat sistem bilangan real, sehingga sistem bilangan real penting untuk kita pahami terlebih dahulu.

Sistem adalah himpunan dari bilangan-bilangan beserta sifat-sifatnya, sedangkan himpunan bilangan real adalah sekumpulan bilangan-bilangan rasional atau irrasional, sehingga **sistem bilangan real** adalah himpunan yang terdiri dari bilangan real beserta sifat-sifat yang dimilikinya.

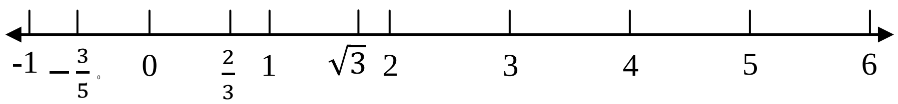
Bilangan real merupakan bilangan yag dapat dituliskan dalam bentuk desimal, baik itu bilangan rasional maupun irrasional. Contoh bilangan real:

$$-\frac{3}{5} = -0,6000 \ldots$$

$$\frac{2}{3} = 0,6666 \ldots$$

$$\sqrt{3} = 1,7320 \ldots$$

Bilangan real dapat direpresentasikan secara geometri sebagai titik pada suatu garis bilangan real.



Simbol sistem bilangan real ataupun garis bilangan real dapat dinyatakan dengan ℝ. Sifat dari sistem bilangan real terbagi dalam tiga kategori, yaitu ***algebraic properties, order properties,***dan ***completeness property.***

Sifat-sifat dalam aljabar dari suatu bilangan menyatakan bahwa bilangan real dapat ditambahkan, dikurangkan, dikalikan, maupun dibagi (kecuali dengan 0). Kita tidak bisa membagi bilangan dengan 0.

Sifat-sifat urutan dari bilangan real, dapat disajikan sebagai berikut.

1. Trikotomi

   Jika x dan y adalah bilangan-bilangan, maka pasti satu diantara yang berikut berlaku: $x < y$ atau x = y atau x > y

2. Ketransitifan : $x < y$ dan y < z $\Rightarrow$ x < z

3. Penambahan : $x < y \Leftrightarrow$ x + z < y + z

4. Perkalian

   - Bilangan z positif, x < y $\Leftrightarrow$ xz < yz
   - Jika z negatif, x < y $\Leftrightarrow$ xz > yz

Sifat-sifat kelengkapan dari sistem bilangan real menyatakan suatu bilangan dengan lebih tepat. Berikut disajikan tiga contoh himpunan, himpunan yang spesial dalam bilangan real.

1. Bilangan asli, yaitu $1, 2, 3, 4$, ...
2. Bilangan bulat, yaitu $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$, ...
3. Bilangan rasional, yaitu bilangan yang dapat dinyatakan dalam $\frac{a}{b}$, dengan a, b bilangan bulat, dan $b \neq 0$. Contoh : $\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}, \frac{200}{11}, 5 = \frac{5}{1}$ dan $\sqrt{4} = \frac{2}{1}$

Bilangan real, atau lebih tepatnya pada bilangan rasional, apabila disajikan dalam bentuk desimal, dapat berupa:

1. *terminating* (di belakang koma diakhiri oleh nol yang tidak terbatas)

   Contoh : $\frac{3}{5} = 0{,}6000$ ... $= 0{,}6$

2. *eventually repeating* (di belakang koma diakhiri dengan digit yang berulang

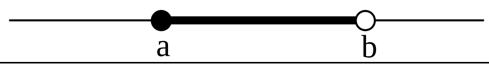
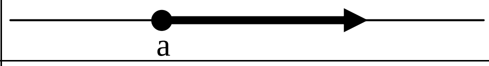
   Contoh : $\frac{20}{99} = 0{,}202020$ ... $= 0,\overline{20}$ (dengan penulisan *bar* mengindikasikan perulangan digit)

$\sqrt{3} = 1{,}732051$ ... tidak mengindikasikan perulangan digit maupun nol yang tidak terbatas, sehingga $\sqrt{3}$ tidak dapat dinyatakan dalam $\frac{a}{b}$, dengan a, b bilangan bulat, dan $b \neq 0$, atau dengan kata lain $\sqrt{3}$ adalah bilangan irrasional.

B. Interval

Subset dari garis bilangan real dinamakan **interval** jika memuat minimal dua bilangan dan memuat semua bilangan real diantara dua anggota tersebut. Secara geometris, interval berhubungan dengan sinar garis dan ruas garis dari bilangan real. Penulisan himpunan dengan notasi himpunan, interval dan garis bilangan real disajikan dalam Tabel 1 berikut.

Tabel 1 Penyajian Himpunan dalam Notasi Himpunan, Interval, dan Garis Bilangan

	Notasi Himpunan	Interval	Garis Bilangan Real
Finite	$\{ x \mid a < x < b \}$	(a,b)	
	$\{ x \mid a \leq x < b \}$	[a,b)	
	$\{ x \mid a < x \leq b \}$	(a,b]	
	$\{ x \mid a \leq x \leq b \}$	[a,b]	
Infinite	$\{ x \mid x \leq b \}$	$(-\infty,b]$	
	$\{ x \mid x < b \}$	$(-\infty,b)$	
	$\{ x \mid x \geq a \}$	$[a,\infty)$	
	$\{ x \mid x > a \}$	(a,∞)	

C. Pertidaksamaan

Penyelesaian suatu pertidaksamaan erat kaitannya dengan banyak permasalahan dalam kalkulus. Solusi dari suatu pertidaksamaan dapat disajikan dalam bentuk notasi himpunan, interval, ataupun garis bilangan, seperti pada bahasan sebelumnya.

Contoh:

1. Selesaikan pertidaksamaan $2x - 4 > x + 3$
2. Selesaikan pertidaksamaan $\frac{6}{x-2} > 3$

Penyelesaian:

1. $2x - 4 > x + 3$ jika kedua ruas ditambah 4 dan dikurangi x, maka

   $2x - x > 3 + 4$

   $x > 7$

   Penyajian penyelesaian, dapat berupa notasi, tetapi juga dapat berupa interval $(7, \infty)$, dapat pula berupa garis bilangan

2. $\frac{6}{x-2} > 3$

   Untuk $x - 2 > 0$ atau $x > 2$ dapat dilakukan langkah mengalikan kedua ruas dengan $x - 2$ sehingga

   $6 > 3(x - 2)$ ruas kanan dijabarkan menjadi

   $6 > 3x - 6$ jika kedua ruas ditambah 6

   $12 > 3x$ jika kedua ruas dibagi 3

   $4 > x$

   Atau $x < 4$

   Penyajian penyelesaian, dapat berupa notasi, tetapi juga dapat berupa interval $(-\infty, 4)$, dapat pula berupa garis bilangan

D. Nilai mutlak

Berbagai terapan matematika, khususnya bilangan, pada kasus-kasus tertentu memerlukan suatu bilangan yang selalu positif. Misal dicontohkan dalam kasus jarak suatu titik ke titik lain, jarak suatu kota ke kota lain, luas daerah suatu bidang, luas daerah suatu kebun, dsb tidak mungkin bernilai negatif. Dalam sistem bilangan real, bilangan yang tidak pernah negative didefinisikan sebagai harga mutlak.

Harga mutlak, dituliskan $|x|$ dimana x real adalah:

(1) $|x| = x$, jika $x > 0$

(2) $|x| = -x$, jika $x < 0$

(3) $|x| = 0$, jika $x = 0$

Beberapa sifat dari harga mutlak diberikan sebagai berikut:

(1) Untuk a dan b real, berlaku $|a - b = |b - a)$

(2) Jika a > 0 maka $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

Akibat dari sifat-sifat di atas adalah:

(3) Jika a > 0 , maka $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

(4) Jika a > 0 , maka $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ atau $x > a$

jika a > 0 , maka $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ atau $x \geq a$

(5) Jika a dan b real maka $|ab| = |a||b|$

(6) Jika a dan b real maka $|a + b| \leq |a| + |b|$ (disebut ketidaksamaan segitiga)

(7) Jika a dan b real, maka

$$|a| - |b| \leq |a + b|$$

$$|a| - |b| \leq |a - b|$$

Latihan

1. Berikut disajikan bilangan-bilangan real. Manakah dari bilangan berikut yang merupakan bilangan rasional? Berilah alasan atas jawabanmu.
   a. $\sqrt{16}$
   b. 1,234234234 ...
   c. 0,009999…
2. Tentukan solusi dari pertidaksamaan berikut
   a. $x - 4 < 5x + 100$
   b. $|2x - 3| \geq 1$
   c. $|5 - \frac{2}{x}| < 1$

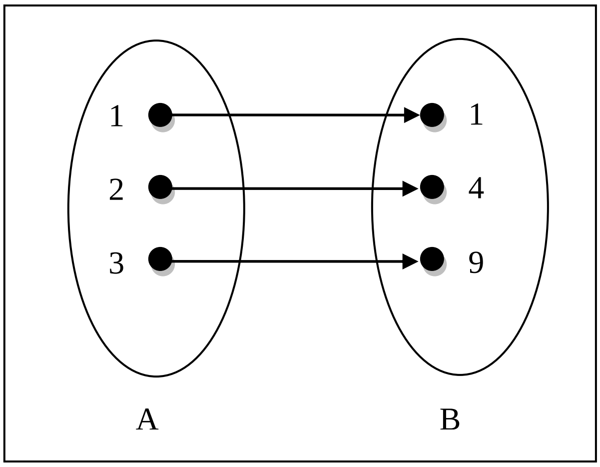
BAB II
FUNGSI

A. Fungsi

Pemahaman mengenai suatu fungsi dapat lebih mudah dengan mengilustrasikannya dalam sebuah tembakan dengan senapan. Ilustrasikan *fungsi* sebagai suatu senapan. *Fungsi* akan mengambil amunisi dari suatu himpunan yang disebut *daerah asal* (*domain*) dan menembakkannya pada suatu himpunan sasaran yang disebut *daerah hasil (range)*. Setiap peluru mengenai sebuah titik sasaran tunggal, tetapi boleh jadi beberapa peluru menuju pada titik yang sama.

Penyajian suatu fungsi dapat dilakukan melalui berbagai sajian, diantaranya melalui pasangan berurutan, diagram venn, maupun dalam grafik kartesius.

Contoh : {(1,1),(2,4),(3,9)} apabila dinyatakan dalam diagram venn dapat digambarkan dalam Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Contoh Penyajian Fungsi dalam Diagram Venn

Dari dua macam sajian fungsi di atas, dapat dilihat bahwa Himpunan A di relasikan terhadap Himpunan B, dengan daerah asal anggota dari himpunan A, yaitu {1,2,3}, dan daerah hasil {1,4,9}.

Mengenai penyajian fungsi dalam diagram kartesius, dapat dilihat untuk tiap fungsinya dalam bahasan selanjutnya.

B. Macam-Macam Fungsi

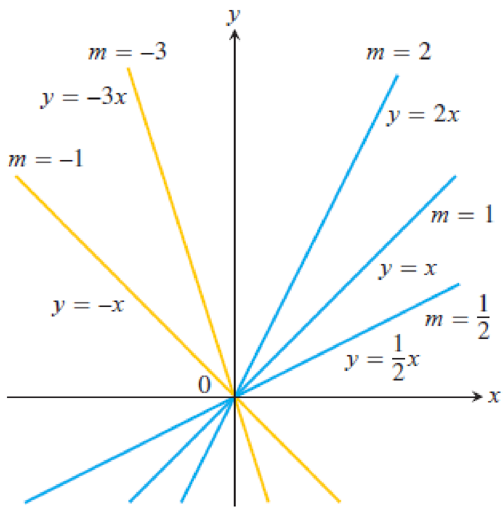
Fungsi-fungsi yang ada, diantaranya disajikan berikut

1. Fungsi Linier

Bentuk umum dari fungsi linier adalah:

$$y = P_1(x) = a_1 x + a_0 \text{ dengan } a_1 \neq 0$$

Fungsi linear apabila digambarkan dalam suatu diagram kartesius, maka akan diperoleh suatu grafik dengan kurva lurus. Berikut disajikan berbagai bentuk dari grafik fungsi linier dengan gradien yang berbeda-beda, yang disajikadalam Gambar 2.



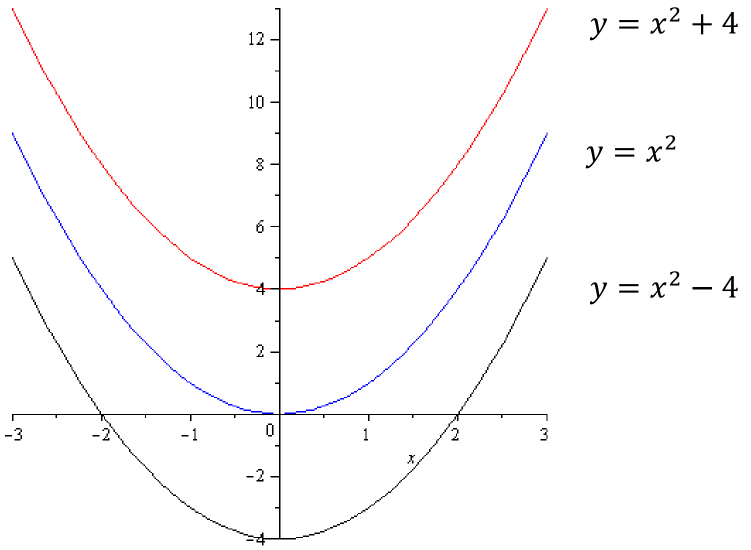
Gambar 2. Perbandingan Berbagai Macam Bentuk Grafik Fungsi Liner

2. Fungsi Kuadrat

Bentuk umum dari fungsi kuadrat adalah:

$$y = P_2(x) = ax^2 + bx + c \text{ dengan } a \neq 0$$

Berikut digambarkan contoh berbagai bentuk grafik persamaan kuadrat.



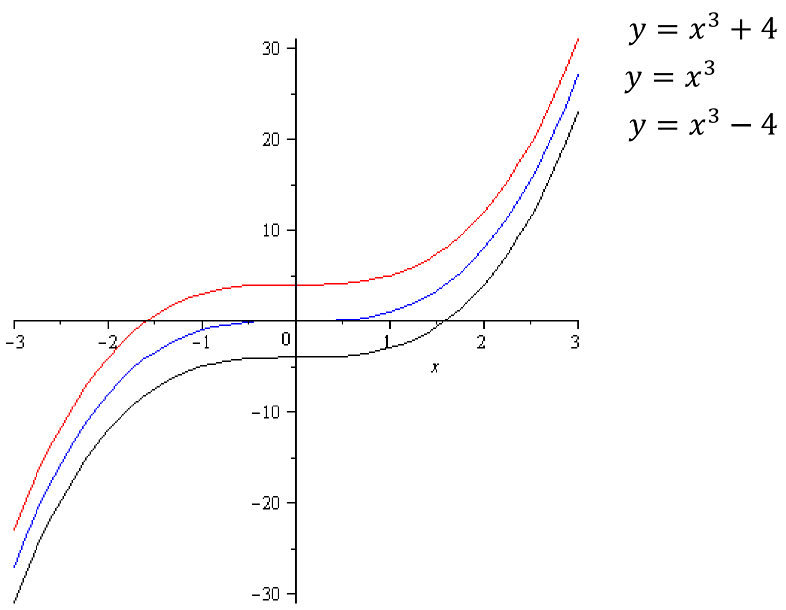
Gambar 3. Perbandingan Berbagai Macam Bentuk Grafik Fungsi Kuadrat

3. Fungsi Pangkat Tiga

Bentuk umum dari fungsi pangkat tiga adalah:

$$y = P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ dengan } a \neq 0$$

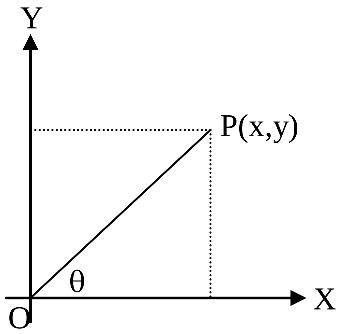
Berikut digambarkan contoh berbagai bentuk grafik fungsi pangkat tiga



Gambar 4. Perbandingan Berbagai Macam Bentuk Grafik Fungsi Pangkat Tiga

4. Fungsi Trigonometri

Misalkan titik P(x,y) berjarak 1 dari titik O(0,0), yaitu $\sqrt{x^2+y^2}=1$, dan misalnya θ adalah sudut yang dibentuk oleh sumbu x positif dan OP. Didefinisikan cos θ = x dan sin θ = y



sin θ = y
cos θ = x
$|OP| = 1$

Didefinisikan juga mengenai identitas trigonometri, diantaranya:

a. $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$
b. $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$
c. $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
d. $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
e. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
f. $1 + tan^2\theta = sec^2\theta$
g. $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

Perbandingan Trigonometri Sudut Berelasi

a) Perbandingan Trigonometri di Kuadran I

Sin (90^0-θ) = cos θ	csc (90^0- θ) = sec θ
Cos (90^0- θ) = Sin θ	sec (90^0- θ) = csc θ
Tan (90^0- θ) = cot θ	cot (90^0- θ) = tan θ

b) Perbandingan Trigonometri di Kuadran II

Sin (180^0- θ) = sin θ	csc (180^0- θ) = csc θ
Cos (180^0- θ) = - cos θ	sec (180^0- θ) = -sec θ
Tan (180^0- θ) = - tan θ	cot (180^0- θ) = - cot θ

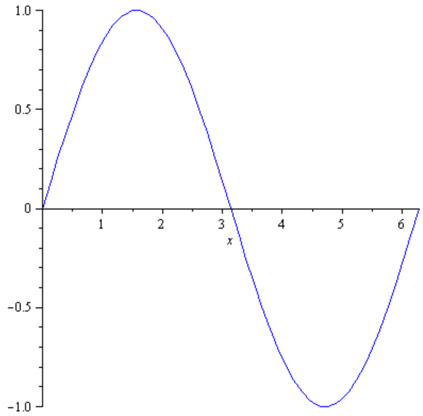
c) Perbandingan Trigonometri di Kuadran III

Sin $(180^0 + \theta)$ = -sin θ	csc $(180^0 + \theta)$ = -csc θ
Cos $(180^0 + \theta)$ = - cos θ	sec $(180^0 + \theta)$ = -sec θ
Tan $(180^0 + \theta)$ = tan θ	cot $(180^{0+} \theta)$ = cot θ

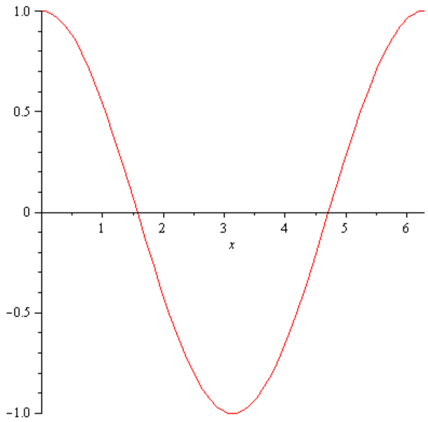
d) Perbandingan Trigonometri di Kuadran IV

Sin $(360^0 - \theta)$ = -sin θ	csc $(360^0 - \theta)$ = -csc θ
Cos $(360^0 - \theta)$ = cos θ	sec $(360^0 - \theta)$ = sec θ
Tan $(360^0 - \theta)$ = - tan θ	cot $(360^0 - \theta)$ = - cot θ

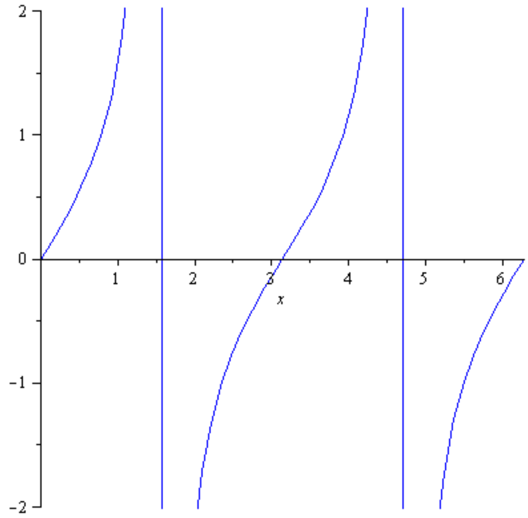
Grafik dari fungsi trigonometri, diantaranya disajikan dalam gambar berikut.



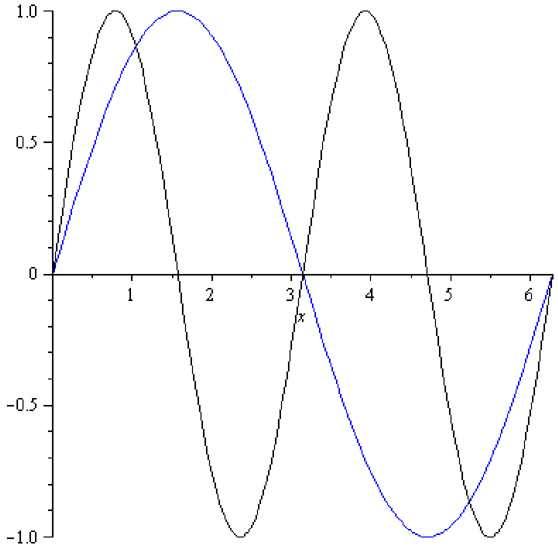
Gambar 5. Grafik fungsi $y = \sin x$



Gambar 6. Grafik fungsi $y = \cos x$



Gambar 7. Grafik fungsi $y = \tan x$



Gambar 8. Perbandingan Grafik fungsi $y = \sin x$ dan $y = \sin 2x$

5. Fungsi Eksponen dan Logaritma

   Persamaan umum fungsi eksponen: $y = f(x) = a^x$; a>0, a≠1

Sifat-sifat:	
1) $f(x) = a^x$ untuk semua x	4) $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$
2) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$
3) $(a^p)^q = a^{pq}$	

Untuk fungsi eksponen asli, didefinisikan sebagai:
Fungsi invers dari $y = \ln x$ adalah $x = e^y$, $y \in \Re$

Dari definisi di atas didapatkan :

a. $e^{\ln x} = x$, $x > 0$, $x \in \Re$

b. $\ln (e^y) = y$, $x \in \Re$

Bilangan e adalah suatu bilangan riil yang memenuhi persamaan $\ln e = 1$.
Bilangan e adalah bilangan irrasional yaitu : $e \approx 2{,}718281828459045...$

Jika $a^b = p$, maka b disebut logaritma dari p dengan bilangan dasar a, dan ditulis $\log_a p$. Fungsi logaritma didefinisikan dengan persamaan:

$$y = f(x) = \log_a x, \; a > 0, a \neq 1$$

Yang mana fungsi ini terdefinisikan untuk x>0, dan tidak lain merupakan invers dari fungsi exponen.

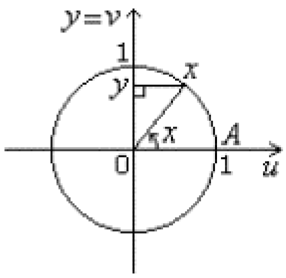
Sifat-sifat:

1) $\log_a pq = \log_a p + \log_a q$

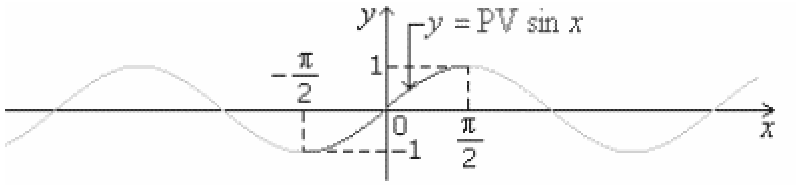
2) $\log_a \frac{p}{q} = \log_a p - \log_a q$

3) $\log_a p^q = q \log_a p$

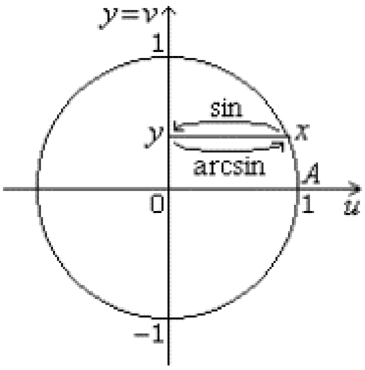
6. Fungsi Invers Trigonometri



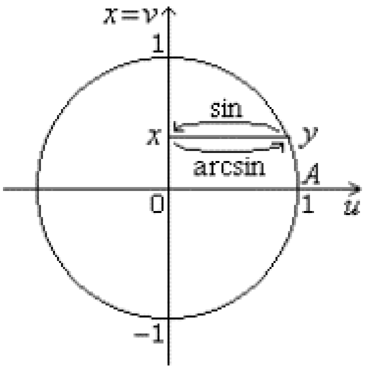
.Gambar 9. Fungsi y =sin x pada [$-\pi/2$, $\pi/2$] mempunyai invers



Gambar 10.y = PV sin x dengan $-\pi/2 \le x \le \pi/2$.



Gambar 11. x = arc sin y $\Leftrightarrow$ y = sin x dengan $-\pi/2 \le x \le \pi/2$.



Gambar 12. y = arc sin x $\Leftrightarrow$ x = sin y dengan $-\pi/2 \le x \le \pi/2$.

Seringkali simbol y = arc sin x dituliskan dalam bentuk $y = \sin^{-1} x$.

7. Fungsi Hiperbolik

Fungsi eksponensial e^x dan e^{-x} sering muncul secara kombinasi dalam matematika dan terapannya sehingga kombinasi tersebut diberi nama khusus, yang mirip dengan fungsi trigonometri.

Definisi

(Fungsi Hiperbol) Fungsi sinus hiperbol, cosinus hiperbol dan empat fungsi sejenis lainnya didefinisikan sbb :

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^{x} - e^{-x}}$$

C. Operasi pada Fungsi

Fungsi bukanlah bilangan. Tetapi seperti halnya dua bilangan a dan b dapat ditambahkan untuk menghasilkan sebuah bilangan baru a + b, demikian juga dua fungsi f dan g dapat ditambahkan untuk menghasilkan sebuah fungsi baru f + g. Ada beberapa operasi yang bisa diberlakukan pada fungsi

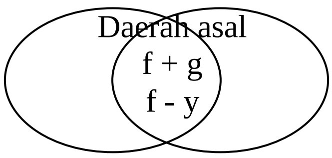
Kita akan mudah memahami operasi pada fungsi ini dengan contoh, misalkan f dan g sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{x-5}{2} \text{ dan } g(x) = \sqrt{x}$$

Kita dapat membuat fungsi baru f + g dan f – g dengan cara memberikan pada x nilai ini:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x-5}{2} + \sqrt{x}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{x-5}{2} - \sqrt{x}$$



D. Fungsi Komposisi

Komposisi fungsi bisa diibaratkan sebagai dua fungsi yang berurutan artinya fungsi yang kedua dioperasikan setelah fungsi yang pertama bekerja. Misalkan f dan g seperti pada contoh di atas, maka jika f bekerja pada x untuk menghasilkan f(x) dan kemudian g bekerja pada f(x) untuk menghasilkan g(f(x)), dikatakan bahwa kita telah menyusun g dengan f. Fungsi yang dihasilkan, disebut komposit g dengan f, dinyatakan oleh g o f. Jadi (g o f) (x) = g(f(x))

Pada contoh f dan g diatas, bisa kita uraikan sebagai berikut:

$f(x) = \frac{x-5}{2}$ dan $g(x) = \sqrt{x}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x-5}{2}\right) = \sqrt{\frac{x-5}{2}}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\sqrt{x}-5}{2}$$

bisa juga kita dapatkan komposisi $(f \circ f)(x)$ dan $(g \circ g)(x)$, berapa hasil akhirnya silahkan dicoba sebagai latihan.

Latihan

Jika $f(x) = e^x$ dan $g(x) = \sqrt{x+4}$ Tentukan domain dari

1. $f(x)$
2. $g(x)$
3. $(f \circ g)(x)$
4. $(g \circ f)(x)$
5. $(f + g)(x)$
6. $(f - g)(x)$
7. $(\frac{f}{g})(x)$
8. $(f.g)(x)$

BAB III
LIMIT FUNGSI

A. Limit Fungsi di Satu Titik

Pemahaman secara intuisi

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x-1} \Rightarrow f(1) \text{ tidak mempunyai nilai (tidak terdefinisi)}$$

Tabel 2. Simulasi Nilai Limit untuk $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x-1}$

dekat dengan 1 dari arah kiri → ← dekat dengan 1 dari arah kanan

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	…	1,0001	1,001	1,01	1,1
f(x)	4,8	……	…….	4,9998	…	5,0002	5,002	5,02	5,2

nilai fungsi dekat dengan 5 → ← nilai fungsi dekat dengan 5

Definisi 3.1 : (pengertian limit secara intuisi)

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ **berarti bahwa jika x dekat c (x ≠ c) maka *f*(x) dekat dengan L**

Dari tabel 1. : $0 < |x - 1| < 0{,}1 \Rightarrow | f(x) - 5| < 0{,}2$

$0 < |x - 1| < 0{,}01 \Rightarrow | f(x) - 5| < 0{,}02$

$0 < |x - 1| < 0{,}001 \Rightarrow | f(x) - 5| < 0{,}002$ dan seterusnya.

nilai *f*(x) dapat didekatkan ke 5 sekehendak kita asalkan nilai x diambil cukup dekat ke 1.

Artinya, | *f*(x) – 5| **dapat dibuat kecil sekehendak kita** asal |x – 1| cukup kecil pula. DKL : **|*f*(x) – 5| < ε apabila 0 < |x – 1| < δ**

Definisi 3.2. : Limit fungsi

Misalkan *f* suatu fungsi yang didefinisikan pada selang terbuka I yang memuat c kecuali mungkin di c itu sendiri.

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni$$

$$0<|x - c|<\delta \rightarrow | f(x) - L|< \varepsilon.$$

Definisi 3.3.: Limit sepihak

1. $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 \ni$ jika $0<x - c<\delta$ maka $|f(x) - L|<\varepsilon$.

2. $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta >0 \ni$ jika $-\delta<x - c< 0$ maka $|f(x) - L<\varepsilon$.

Contoh Soal:

Buktikan bahwa :

1. $\lim\limits_{x \to -1} (5x+2) = -3$
2. $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 + x - 5) = 7$

Jawab:

1. Ambil sebarang $\varepsilon>0$ sehingga $5x+2-(-3) < \varepsilon$
akan dicari $\delta > 0$ sehingga berlaku $|x - (-1)| < \delta \Rightarrow |f(x) - (-3)| < \varepsilon$.
$|x +1| < \delta \Rightarrow |f(x) +3| < \varepsilon$.

Analisis pendahuluan:

$|f(x) - (-3)|=| 5x+2-(-3)|$
$=| 5x+5|$
$= |5(x+1)|$
$= 5 |x+1|$
$\leq 5\delta$

Kalau diambil $\varepsilon = 5\delta$ maka $\delta = 1/5\ \varepsilon$

Bukti:

Diambil sebarang $\varepsilon>0$ akan dicari $\delta > 0$ sehingga $0 <|x +1| < \delta \Rightarrow |f(x) - (-3)| < \varepsilon$.

$0 <|x +1| < \delta \Rightarrow |5x+2-(-3)|< \varepsilon$.
$0 <|x +1| < \delta \Rightarrow |5x+5|< \varepsilon$.
$0 <|x +1| < \delta \Rightarrow 5|x+1|< \varepsilon$.
Dipilih $0 < \delta \leq 1/5\ \varepsilon$, maka $0 <|x +1| < \delta \leq 1/5\ \varepsilon$
$\Rightarrow 5|x+1|< 5 .\ 1/5\ \varepsilon$
$< \varepsilon$
terbukti.

2. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ sehingga $|f(x) - 7|=|x^2 + x - 5 - 7| < \varepsilon$,
akan dicari $\delta > 0$ sehingga berlaku $|x - 3| < \delta \Rightarrow |f(x) - 7| < \varepsilon$.
Analisis pendahuluan:
$|x^2 + x - 5 - 7| = |x^2 + x - 12| = |(x - 3)(x +4)| = |x - 3||x +4|$
$|x - 3| < \delta$ (dapat dibuat kecil).
Jika dipilih $\delta \leq 1$ maka $|x+4| = |x - 3 + 7|$
$\leq |x - 3| + 7$
$< 1 + 7 = 8$

diperoleh:$|x^2 + x - 5 - 7| = |x - 3||x + 4| < \frac{\varepsilon}{8} 8 = \varepsilon$,

dengan kata lain $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{8} = \delta$.

Jadi dapat ditemukan $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{8})$ sehingga jika $|x - 3| < \delta$ berakibat $|f(x) - 7| < \varepsilon$. Terbukti bahwa : $\lim_{x \to 3} x^2 + x - 5 = 7$.

B. Teorema-Teorema Limit Fungsi

Teorema 3.1. : teorema ketunggalan

$\lim_{x \to c} f(x) = L_1$ dan $\lim_{x \to c} f(x) = L_2$ maka $L_1 = L_2$.

Dengan kata lain, jika limit suatu fungsi ada maka nilainya tunggal.

Bukti :

Diketahui $\lim_{x \to c} f(x) = L_1$ dan $\lim_{x \to c} f(x) = L_2$. Akan dibuktikan bahwa $L_1 = L_2$.

Andaikan $L_1 \neq L_2$

$\lim_{x \to c} f(x) = L_1$ maka $\lim_{x \to c^-} f(x) = L_1$ ……..(*) dan $\lim_{x \to c^+} f(x) = L_1$ ……(**).

Demikian juga,

$\lim_{x \to c} f(x) = L_2$ maka $\lim_{x \to c^-} f(x) = L_2$ ……...(#) dan $\lim_{x \to c^+} f(x) = L_2$ ……(##).

Dari (*) dan (##) atau (**) dan (#) diperoleh $\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$ dengan kata lain bahwa : $\lim_{x \to c} f(x)$ tidak ada

(kontradiksi $\lim_{x \to c} f(x) = L_1$ dan $\lim_{x \to c} f(x) = L_2$).

Jadi pengandaian salah, yang benar $L_1 = L_2$.

Teorema 3.2. : rumus-rumus limit

1. $\lim_{x \to c} k = k$ untuk sebarang konstan k.
2. jika $\lim_{x \to c} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to c} g(x) = M$ maka

a. $\lim_{x\to c}[f(x)\pm g(x)] = L \pm M$

b. $\lim_{x\to c} kf(x) = kL$, untuk sebarang konstan *k*.

c. $\lim_{x\to c}[f(x)g(x)] = LM$

d. $\lim_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$, asalkan $M \neq 0$

e. $\lim_{x\to c}\{f(x)\}^n = L^n$

f. $\lim_{x\to c}|f(x)| = |L|$

Bukti :

a. Diketahui $\lim_{x\to c} f(x) = L$ dan $\lim_{x\to c} g(x) = M$.

Akan dibuktikan : $\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = L+M$

$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\ \delta > 0)\ |f(x)+g(x) - (L + M)| < \varepsilon$ apabila $|x - c| < \delta$.

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ sehingga $|f(x)+g(x) - (L + M)| < \varepsilon$.

Diketahui: $\lim_{x\to c} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\ \delta_1>0)|f(x) - L| < \varepsilon/2$ jika $|x - c| < \delta_1$. dan

$\lim_{x\to c} g(x) = M \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\ \delta2>0)\ |g(x) - M| < \varepsilon/2$ jika $|x - c| < \delta2$.

Misalkan $\delta = \text{Min}(\delta1,\delta2)$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon/2$ dan $|g(x) - M| < \varepsilon/2$ apabila $|x - c| < \delta$.

$|f(x)+g(x) - (L + M)| = |(f(x) - L) + (g(x) - M)|$

$< |f(x) - L| + |g(x) - M| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

b. Diketahui $\lim_{x\to c} f(x) = L$ dan $\lim_{x\to c} g(x) = M$.

Akan dibuktikan : $\lim_{x\to c}[f(x)g(x)] = LM$

$\lim_{x\to c} f(x) = L$ dan $\lim_{x\to c} g(x) = M$ maka menurut 1. dan 2a. diperoleh

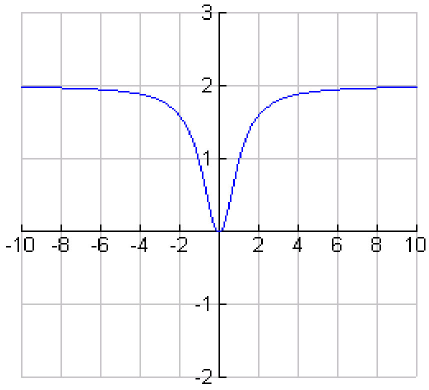
$\lim_{x\to c}(f(x) - L) = 0$ dan $\lim_{x\to c}(g(x) - M) = 0$.

Perhatikan bahwa : $f(x)g(x) = (f(x) - L)g(x) + L(g(x) - M) + LM$, sehingga :

$$\lim_{x \to c} f(x)g(x) = \lim_{x \to c}(f(x) - L)g(x) + \lim_{x \to c} L(g(x) - M) + \lim_{x \to c} LM = LM.$$

C. Limit di Tak Hingga dan Limit Tak Hingga

Perhatikan fungsi $g(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$ yang didefinisikan di setiap x $\in$ R.



Gambar 13. Fungsi $g(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

Tampak nilai g(x) akan mendekati 2 (dua) apabila x membesar atau mengecil tanpa batas. Hal ini berarti bahwa nilai g(x) dapat dibuat sedekat mungkin ke 2 (jarak g(x) ke 2 dapat dibuat lebih kecil dari sebarang bilangan positif kecil) dengan cara mengambil x cukup besar (lebih besar dari bilangan positif tertentu) atau mengambil x cukup kecil (lebih kecil dari bilangan negative tertentu).

Kasus x mengambil nilai cukup besar dilambangkan: $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2}{x^2+1} = 2$, dan kasus x mengambil nilai cukup kecil ditulis : $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2}{x^2+1} = 2$.

Definisi 3.4. : Limit fungsi di tak hingga

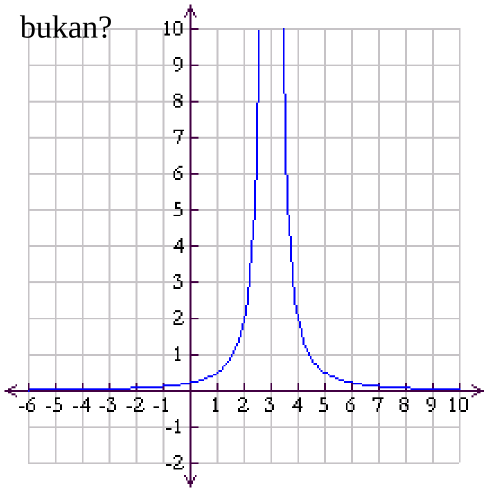
1. Limit fungsi f (x) untuk x menuju positif tak hingga (+∞) adalah L ditulis dan didefinisikan sebagai berikut :

   $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists P > 0 \ni |f(x) - L| < \varepsilon$ bila $x > P$

2. Limit fungsi f (x) untuk x menuju negatif tak hingga (-∞) adalah L ditulis dan didefinisikan sebagai berikut :

   $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 \ni |f(x) - L| < \varepsilon$ bila $x < N$.

Sebelum didefinisikan limit tak hingga, perhatikan grafik fungsi h(x) = $\frac{2}{(x-3)^2}$ di bawah ini. Kalian sudah mahir menentukan domain suatu fungsi, bukan?



Gambar 14 Fungsi h(x)= $\frac{2}{(x-3)^2}$

Tampak bahwa jika x dekat dengan 3 baik dari arah kiri maupun kanan, h(x) menuju bilangan yang sangat besar.

Kalian tahu bahwa fungsi *h* terdefinisi pada selang terbuka yang memuat 3, kecuali di 3 itu sendiri. Apa yang terjadi dengan nilai fungsi *h* apabila x cukup dekat dengan 3. perhatikan table fungsi h(x) :

x	h(x)
2.99	20000
2.999	2000000
2.9999	200000000
3	Tak terdefinisi
3.0001	200000000
3.001	2000000
3.01	20000

dalam kasus ini dinamakan **limit tak hingga.**

Definisi 3.5. : Limit tak hingga

1. Limit fungsi *f* (x) untuk x menuju c adalah +∞ ditulis dan didefinisikan oleh :

   $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall$ P > 0, $\exists\delta > 0 \ni f(x) > P$ bila $0 < |x - c| < \delta$

2. Limit fungsi *f* (x) untuk x menuju c adalah -∞ ditulis dan didefinisikan oleh :

   $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall$ N < 0, $\exists\delta > 0 \ni f(x) < P$ bila $0 < |x - c| < \delta$

Contoh Soal:

Tentukan nilai-nilai limit fungsi berikut ini :

1). $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^2+1}$ 2). $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{(x-3)^2}$

3). $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{(x-3)}$ 4). $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{(x-3)}$

Jawab :

1). $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^2(1+1/x^2)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{(1+1/x^2)} = \frac{2}{1+0} = 2$;

2). $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{(x-3)^2} = \frac{2}{\infty^2} = 0$

3). $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{(x-3)} = \frac{2}{-\infty} = 0$

4). $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{(x-3)} = \frac{2}{\infty} = 0$

D. Limit fungsi trigonometri

X	f(x)
0.1	0.998334166
0.01	0.999983333
0.001	0.999999833
0.0001	0.999999998
0	
-0.0001	0.999999998
-0.001	0.999999833
-0.01	0.999983333
-0.1	0.998334166

Coba kalian perhatikan fungsi $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Fungsi tersebut tidak terdefinisi untuk x = 0. Lantas, bagaimanakah nilai fungsi untuk x *dekat* dengan 0?. Kalkulator akan menolong kita memperoleh bayangan fungsi untuk beberapa x *mendekati* 0 yang dituliskan pada tabel di samping. Gunakanlah kalkulator kalian untuk mengecek nilai-nilai dalam tabel tersebut.

Secara intuitif meskipun tidak cukup kuat untuk diakui, dapatlah disimpulkan bahwa : untuk x dekat dengan 0 baik dari kiri maupun kanan maka fungsi $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ akan dekat dengan 1.

Dengan kata lain, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Kalian nantinya akan mendapatkan demonstrasi yang cermat, dengan *teorema prinsip apit* dan rumus geometri, bahwa kesimpulan tersebut benar secara pasti yang selanjutnya rumus tersebut dikenal dengan definisi limit fungsi trigonometri.

Definisi 3.6. (definisi limit fungsi trigonometri)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Dari definisi di atas, dapat diperoleh teorema-teorema tentang limit fungsi trigonometri dan limit fungsi invers trigonometri, yaitu :

Teorema 2.3. : rumus limit trigonometri

1. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$
5. $\lim_{x\to 0}\frac{arc\sin x}{x}=1$
7. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{arc\tan x}=1$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{arc\sin x}=1$
6. $\lim_{x\to 0}\frac{arc\tan x}{x}=1$

Rumus-rumus di atas dapat dibuktikan kebenarannya dengan sifat-sifat limit fungsi.(teorema 3.2.)

Bukti :

1. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x/x}=\frac{\lim_{x\to 0}1}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1$

2. untuk membuktikan $\lim_{x\to 0}\frac{arc\sin x}{x}=1$,

   dimisalkankan y = arcsin x maka x = siny, sehingga jika $x\to 0$ maka $y\to 0$,

   sehingga diperoleh : $\lim_{x\to 0}\frac{arc\sin x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1$ (menurut **Teorema 2.3.**1)

Bukti-bukti sifat yang lain diserahkan para mahasiswa sebagai latihan.

Contoh Soal:

Tentukan nilai limit fungsi trigonometri berikut ini :

a. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{2x}$ b. $\lim_{x\to \pi}\frac{1+\cos x}{\sin 2x}$

Jawab :

a. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\dfrac{1}{2}$

b. jika x → π maka x - π → 0, dan jika x - π = y maka x = π + y dan y → 0

sehingga :

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{\sin 2x}=$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{1+\cos(\pi+y)}{\sin 2(\pi+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{\sin 2y}=\lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2(y/2)}{\sin 2y}=\lim_{y\to 0}\frac{2y}{\sin 2y}\,\frac{\sin^2(y/2)}{y/2}\,\frac{1}{2}$$

$$=\lim_{y\to 0}\tfrac{1}{2}\sin\frac{y}{2}=0$$

LATIHAN

Tentukan nilai limit berikut

1) $\lim_{x\to 3}(7x-4)$
2) $\lim_{x\to -1}(2x^3-5x)$
3) $\lim_{x\to 0}(4x^2-3)(7x^3+2x)$
4) $\lim_{x\to 4}\frac{2x}{3x^3-16}$
5) $\lim_{x\to 3}\sqrt{3x-5}$
6) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2+2x-24}{x-4}$
7) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+7x+10}{x+2}$

BAB IV
KEKONTINUAN FUNGSI

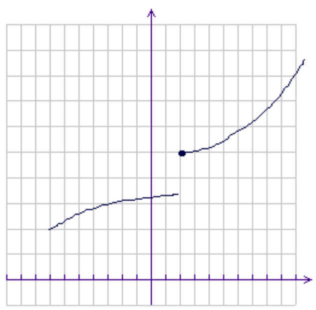
A. Kekontinuan Fungsi

Kontinu berarti terus menerus (berkelanjutan) tanpa perubahan mendadak (tidak terputus). Konsep kekontinuan fungsi sangat penting dalam kalkulus, baik kalkulus differensial maupun integral. Konsep ini didasarkan atas konsep limit.

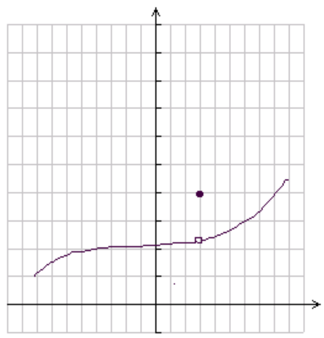
Jika konsep limit dipahami dengan baik, tidaklah sulit untuk memahami konsep kekontinuan. Konsep-konsep limit kiri, limit kanan, dan limit fungsi di suatu titik akan digunakan dalam pengertian kekontinuan fungsi di suatu titik. Konsep kekontinuan fungsi ini akan lebih mudah dipahami secara intuitif dulu, kemudian dilanjutkan secara formal.

B. Kekontinuan Fungsi Di Satu Titik

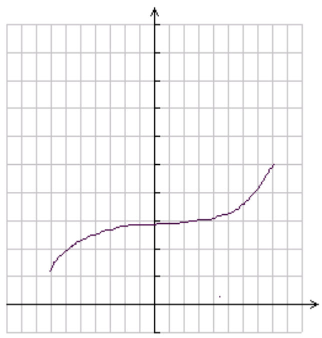
Pemahaman secara intuisi tentang pengertian kekontinuan fungsi sangat diperlukan. Pandang tiga buah grafik fungsi berikut:



Gambar 15 a



Gambar 15b



Gambar 15c

Tampak dari grafik 15a. dan 15b., bahwa fungsi terputus di suatu titik (sebut di titik c) berarti bahwa kedua fungsi **tidak kontinu di titik *c*** tersebut. Dari ketiga grafik fungsi di atas, hanya grafik 15c. yang menunjukkan fungsi kontinu, sehingga fungsi tersebut **kontinu di titik *c***. Jika dicermati nilai limit fungsi di titik c, maka grafik 1. memperlihatkan bahwa limit kiri tidak sama dengan limit kanannya, jadi nilai limitnya tidak ada. Berbeda dengan grafik 2., meskipun terputus di titik c tetapi nilai limitnya ada karena limit kiri sama dengan limit kanan, namun nilai fungsi di titik tersebut tidak sama dengan nilai limitnya.

Definisi 4.1 (pengertian kekontinuan di satu titik)

Suatu fungsi f dikatakan kontinu di titik c jika memenuhi 3 syarat berikut:

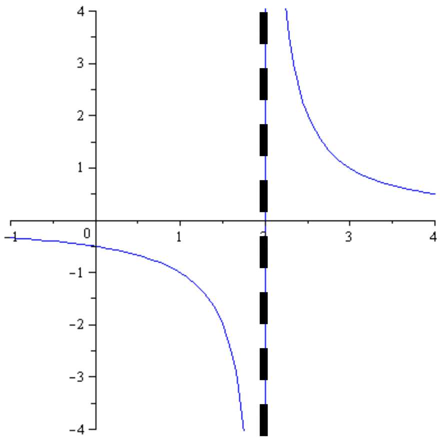
1. $f(c)$ ada dan berhingga
2. $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ ada dan berhingga
3. $f(c) = \lim\limits_{x \to c} f(x)$

Suatu fungsi $f(x)$ dikatakan *diskontinu* di titik $x = x_0$ jika satu atau lebih syarat kekontinuan fungsi di atas tidak dipenuhi di titik tersebut.

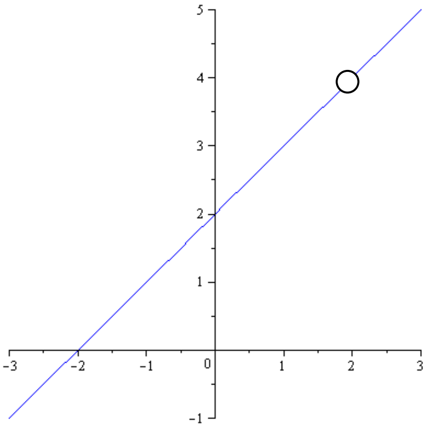
Contoh Soal:

(a) Fungsi $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ diskontinu di $x = 2$ karena $f(2)$ tidak terdefinisi (syarat 1 tidak dipenuhi).

(b) Fungsi $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ diskontinu di $x = 2$ karena $f(2)$ tidak terdefinisi (syarat 1 tidak dipenuhi).



Gambar 16a



Gambar 16b

Diskontinuitas pada contoh (b) ini disebut *dapat dihapuskan*, karena dapat dihapuskan dengan mendefinisikan kembali fungsinya sebagai $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, \quad x \neq 2; \quad f(2) = 4$. Lihat gambar 16b

Perhatikan bahwa diskontinuitas pada contoh (a) tidak dapat dihapuskan seperti itu, karena nilai limitnya juga tidak ada. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2} = \infty$. Fungsi ini dikatakan mempunyai *diskontinuitas yang tak berhingga*. Lihat gambar 16a

C. Kekontinuan Kiri dan Kanan

Definisi 4.2.

a. Jika $f(c) = \lim\limits_{x \to c^-} f(x)$, maka fungsi *f* dikatakan **kontinu kiri** di titik *c*.

b. Jika $f(c) = \lim\limits_{x \to c^+} f(x)$, maka fungsi *f* disebut **kontinu kanan** di titik c

D. Kekontinuan Fungsi Pada Suatu Selang

Suatu fungsi *f* dikatakan kontinu pada $[a,b]$, jika tidak ada lompatan mendadak pada grafiknya sepanjang interval $[a,b]$, atau kita dapat ‘menggambarkan’ tanpa mengangkat pensil. Secara matematis didefinisikan:

Definisi 4.3.:

a. Fungsi *f* dikatakan kontinu pada interval terbuka (a,b) jika fungsi f kontinu di setiap titik dalam (a,b)

b. Fungsi *f* dikatakan kontinu pada interval tertutup $[a,b]$ jika fungsi f kontinu di setiap titik dalam (a,b), kontinu kanan pada a dan kontinu kiri pada b.

c. Suatu fungsi dikatakan sebagai *fungsi kontinu* bila fungsi itu kontinu di setiap titik dalam domainnya.

E. Sifat-Sifat Kekontinuan Fungsi

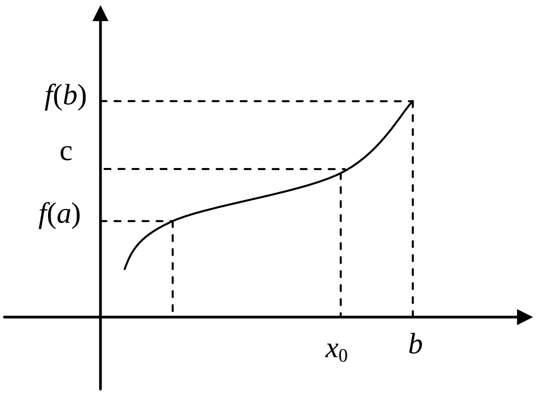
a. Jika fungsi *f* dan *g* kontinu di suatu titik $x = c$ maka fungsi-fungsi berikut kontinu di titik $x = c$:

$k f,\ f + g,\ f - g,\ f g,$

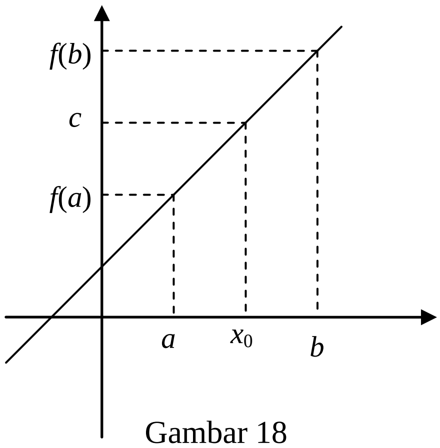
f/g (asalkan $g(c) \neq 0$),

f^n dan $\sqrt[n]{f}$ (asalkan $f(c) > 0$ jika n genap).

b. Jika fungsi *f* kontinu pada $[a,b]$ dan jika $f(a) \neq f(b)$, maka untuk setiap bilangan *c* antara $f(a)$ dan $f(b)$ terdapat paling sedikit satu nilai *x*, misalkan $x = x_0$, dimana $f(x_0) = c$. Perhatikan gambar berikut

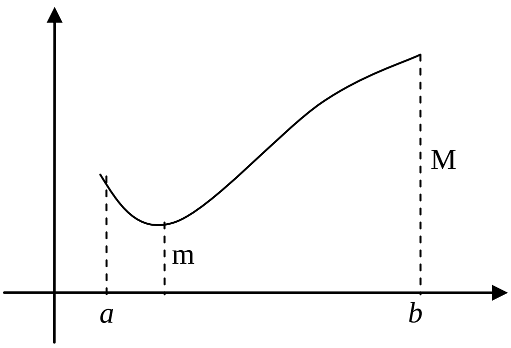


Gambar 17

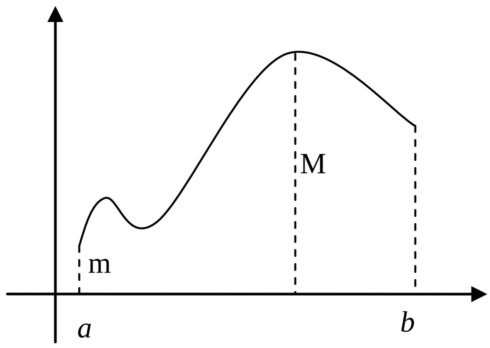


Gambar 18

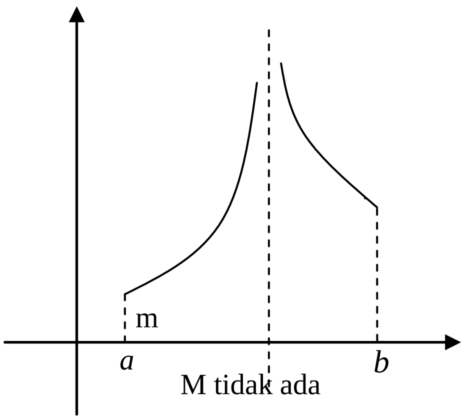
c. Jika fungsi *f* kontinu pada $[a,b]$, maka *f(x)* mempunyai nilai terkecil *m* dan nilai terbesar *M* pada selang tersebut.



Gambar 19



Gambar 20



Gambar 21

F. Kekontinuan Fungsi Komposit

Teorema 4.1

Jika $\lim\limits_{x \to c} g(x) = L$ dan fungsi *f* kontinu di *L*

maka $\lim\limits_{x \to c} f(g(x)) = f(\lim\limits_{x \to c} g(x)) = f(L)$

Khususnya, jika g kontinu di c dan f kontinu di $g(c)$

maka fungsi komposisi $f \circ g$ juga kontinu di *c*.

Bukti:

Misal $g(x) = t$. Fungsi *f* kontinu di *L*, berarti $\lim\limits_{t \to L} f(t) = f(L)$

Dari definisi limit, hal ini berarti jika diberikan $\varepsilon > 0$ maka terdapat $\delta_1 > 0$, sedemikian sehingga $|t - L| < \delta_1 \Rightarrow |f(t) - f(L)| < \varepsilon$, sehingga

$$|g(x) - L| < \delta_1 \Rightarrow |f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon \qquad \text{(i)}$$

Tetapi, karena $\lim_{x\to c} g(x) = L$, hal ini berarti untuk suatu $\delta_1 > 0$, terdapat $\delta_2 > 0$

sedemikian sehingga $0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L| < \delta_1$ (ii)

Jika (i) dan (ii) digabungkan, didapat

$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L| < \delta_1 \quad dan \quad |g(x) - L| < \delta_1 \Rightarrow |f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon$

Hal ini berarti $0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon$ atau $\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(L)$

G. Teorema Nilai Antara

Teorema 4.2.:

Jika fungsi *f* kontinu pada interval [*a*,*b*] dan *w* bilangan antara *f*(*a*) dan *f*(*b*) terdapat bilangan $c \in [a,b]$ sehingga *w* = *f*(*c*).

LATIHAN

Nyatakan apakah fungsi –fungsi berikut kontinu di x=2?

Jika tidak kontinu, jelaskan sebabnya. Bisakah diskontinu tersebut dihapuskan?

a) $f(x) = 4x^2 - 2x + 12$

b) $f(x) = \frac{8}{x-2}$

c) $f(x) = \frac{3x^2}{x-2}$

d) $f(x) = \frac{4x-8}{x-2}$

Dari fungsi-fungsi berikut, di titik mana fungsi tidak kontinu?

e) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-x-6}$

f) $f(x) = \frac{x}{2x^2-x-1}$

g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

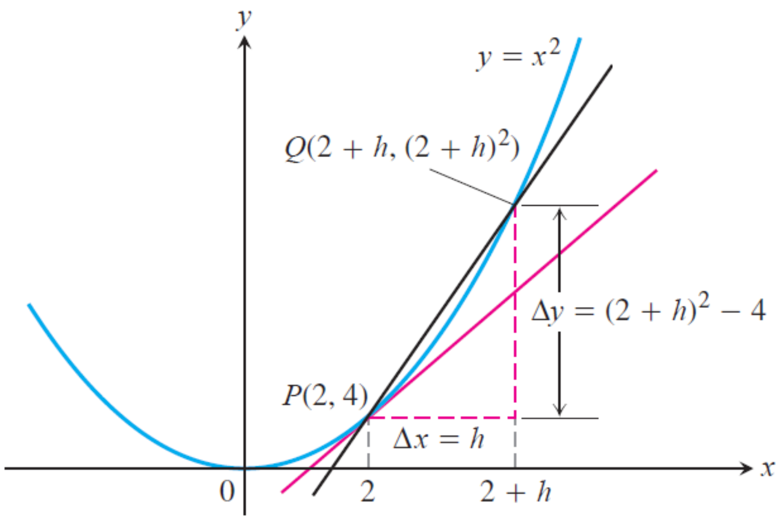
h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$

BAB V

TURUNAN FUNGSI

A. Konsep Turunan

Sebelum memahami konsep turunan, akan lebih mudah apabila kita pahami dahulu tentang kemiringan garis singgung kurva dari suatu fungsi. Berikut disajikan contoh kurva $y = x^2$ dan tali busur maupun garis singgungnya di titik $x = 2$



Gambar 22. Tali Busur dan Garis Singgung Kurva

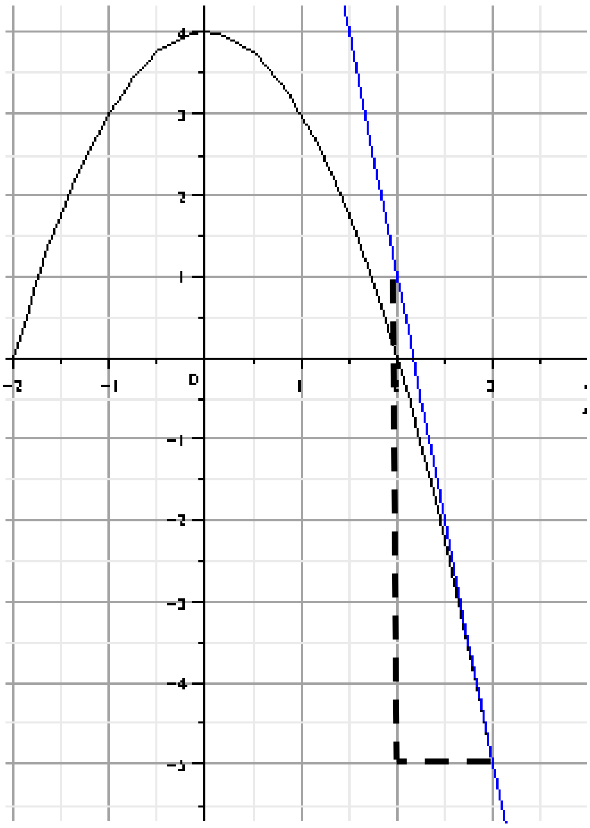
Keadaaan geometris mengenai garis singgung pada suatu kurva memberikan gambaran paling dekat pada konsep turunan. Jika y = *f*(x) menyatakan persamaan suatu kurva pada gambar di atas maka **gradien (kemiringan) tali busurnya** adalah $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ atau jika ditulis secara lebih umum :$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$. Jika h mendekati 0 maka $f(x_1 + h)$akan mendekati $f(x_1)$, sehingga tali busur akan bergerak mendekati garis singgung. Proses ini menghasilkan **gradien garis singgung** suatu titik $(x_1,f(x_1))$ pada kurva y = $f(x)$, yang besarnya adalah m =$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$.

Contoh Soal

Misalkan $y = 4 - x^2$, maka :

a. sketsakan grafiknya seteliti mungkin
b. gambar garis singgung kurva di titik (3,-5)
c. Taksir kemiringan garis singgung
d. Hitung kemiringan tali busur yang melalui (3,-5) dan $(3{,}01; 4 - 3{,}01^2)$
e. Cari kemiringan sebenarnya dari garis singgung di titik (3,-5)

Jawab :



Gambar 23. Grafik fungsi $y = 4 - x^2$

a. $y = 4 - x^2$ adalah fungsi kuadrat dengan a = -1
sehingga kurva menghadap ke bawah.
Untuk mencari titik potong terhadap sumbu-x, dicari nilai x yang memenuhi persamaan $4 - x^2 = 0$ (karena y = 0), yaitu x = -2 atau x = 2, sehingga titik

potongnya (-2,0) dan (2,0). Titik puncak kurva adalah ($-\frac{b}{a}$,f($-\frac{b}{a}$)) = (0,4), sehingga dapat disketsa secara teliti yang grafiknya berbentuk parabola pada gambar di samping kanan.

b. garis yang melalui satu titik (3,-5) pada kurva y = 4 – x^2, adalah merupakan garis singgung

c. dari gambar grafik di samping atas, dapat ditaksir kemiringan garis singgungnya adalah : m = 6/-1 = -6

d. kemiringan tali busur yang melalui (3,-5) dan (3,01;4 – $3{,}01^2$) adalah

$$\frac{(4 - 3{,}01^2 - (-5))}{3{,}01-3} = \frac{-5{,}0601-(-5)}{0{,}01} = \frac{-0{,}0601}{0{,}01} = -6{,}01$$

e. $m = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{4-(3+\Delta x)^2 - (-5)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{9-(9+6\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-6\Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x} = -6$$

Berdasarkan hasil pekerjaan di atas, kita dapat ,melihat bahwa gradien garis singgung di suatu titik (x_1,$f(x_1)$) pada kurva y = $f(x)$, yang besarnya adalah m = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ maka pada bahasan selanjutnya, kita akan lebih mudah dalam memahami turunan (derivatif) suatu fungsi di satu titik.

B. Turunan Fungsi

Definisi 5.1.: (pengertian turunan pertama di satu titik)

Misalkan fungsi *f* terdefinisi pada selang terbuka I yang memuat titik x_1. maka turunan pertama fungsi *f* di titik x_1 dinotasikan dan didefinisikan sebagai :

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad \text{atau} \quad f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

apabila nilai limit ini ada

Secara lengkap didefinisikan turunan suatu fungsi sebagai berikut:

Definisi 5.2.: (pengertian turunan pertama)

Jika *f* suatu fungsi maka turunan pertama dari *f* untuk setiap x pada domain *f* ditulis dan didefinisikan sebagai :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ atau } f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

jika nilai limit tersebut ada.

Catatan :

- Lambang lain dari $f'(x)$ adalah y' atau $D_x f(x)$ atau d*f*(x)/dx atau dy/dx.
- sesuai nama penemunya maka $\frac{dy}{dx}$ disebut notasi Leibniz

Contoh Soal:

Tunjukkan bahwa 1.) jika $f(x) = 3x^2+5x$ maka $f'(x) = 6x + 5$ dan

2.) jika $g(x) = \sqrt{x}$ maka $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Jawab :

1.) $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ asalkan limitnya ada, maka :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x+\Delta x)^2 + 5(x+\Delta x) - (3x^2+5x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + \cdots\cdots + 3(\Delta x)^2 + \cdots + 5(\Delta x) - (3x^2+5x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\Delta x + \cdots + 5\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 6x + 3\Delta x + 5$$

$$= 6x + 5$$

Jadi terbukti $f'(x) = 6x + 5$.

2.) $g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$ asalkan limitnya ada, maka :

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(x+\Delta x)}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(x+\Delta x)}-\sqrt{x}}{\Delta x}\,\frac{\sqrt{(x+\Delta x)}+\sqrt{x}}{\sqrt{(x+\Delta x)}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{(x+\Delta x)}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{(\sqrt{(x+\Delta x)}+\sqrt{x})}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Jadi g'(x) = $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Berikut ini rumus-rumus atau aturan turunan (derivative) suatu fungsi :

Teorema 5.2. : Aturan turunan

Jika fungsi *f* dan *g* mempunyai turunan pertama maka :

3. jika *f* (x) = k maka *f'*(*x*) = 0, untuk $\forall$k konstan **Aturan fungsi konstanta**
4. jika *f* (x) = x^n maka *f'*(*x*) =nx^{n-1} untuk $\forall n \in Z$ **Aturan pangkat**
5. (f ± g)'(x) = f'(x) ± g'(x) **Aturan Jumlah**
6. (kf)'(x) = k f'(x) untuk sembarang konstan k **Aturan kelipatan konstan**
7. (f g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) **Aturan hasil kali**
8. (f/g)'(x) = [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]/$[g(x)]^2$ **Aturan hasil bagi**

Bukti :

Aturan turunan ini dapat dibuktikan langsung dengan definisi turunan, namun dengan trik-trik yang harus digunakan. Selanjutnya akan dicoba pembuktian aturan turunan no.5: (*f g*)'(x) = *f'*(*x*)*g*(*x*) + *f*(*x*)*g'*(x), bukti yang lain sebagai latihan. Misalkan F(x) = (*f g*)(x) maka F'(x) = (*f g*)'(x)

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}f(x+h)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\lim_{h\to 0}g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$$

Contoh Soal.

1. Buktikan bahwa aturan pangkat berlaku untuk bilangan bulat negatif
2. Cari persamaan garis singgung di titik (1,1/2) pada kurva y = $1/(x^2+1)$

Jawab :

1. Akan dibuktikan bahwa jika $f(x) = x^{-n}$ untuk n bilangan bulat positif maka $f'(x) = -nx^{-n-1}$

$f(x) = x^{-n} = 1/x^n$ maka menurut aturan hasil bagi, diperoleh

$$f'(x) = \frac{x^n.0-1.nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{n-2n-1} = -nx^{-n-1}$$

2. Diketahui : $y = f(x) = 1/(x^2+1)$ akan dicari persamaan garis singgung di titik (1,1/2). Pertama, dicari gradien garis singgungnya, yaitu m = f '(1), sedangkan f '(x) = $\frac{(x^2+1).0-1.2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

maka m = f '(1) = $\frac{-2.1}{(1^2+1)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$, sehingga persamaan garis singgung di titik (1,1/2) adalah : $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x-1) \Leftrightarrow 2y - 1 = -x + 1 \Leftrightarrow x + 2y - 2 = 0$

C. Differensial suatu fungsi

Differensial akan memainkan beberapa peran penting, seperti aproksimasi, penaksiran kesalahan (masalah khas dalam sains), mencari turunan fungsi implicit dan lebih penting lagi untuk membantu dalam pembahasan konsep integral. Konsep differensial akan mudah dipahami, dengan cara mengkaji ulang definisi turunan suatu fungsi. Dari $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (definisi turunan suatu fungsi), maka $\Delta y \approx f'(x)\,\Delta x$.. Dari sinilah didefinisikan differensial suatu fungsi.

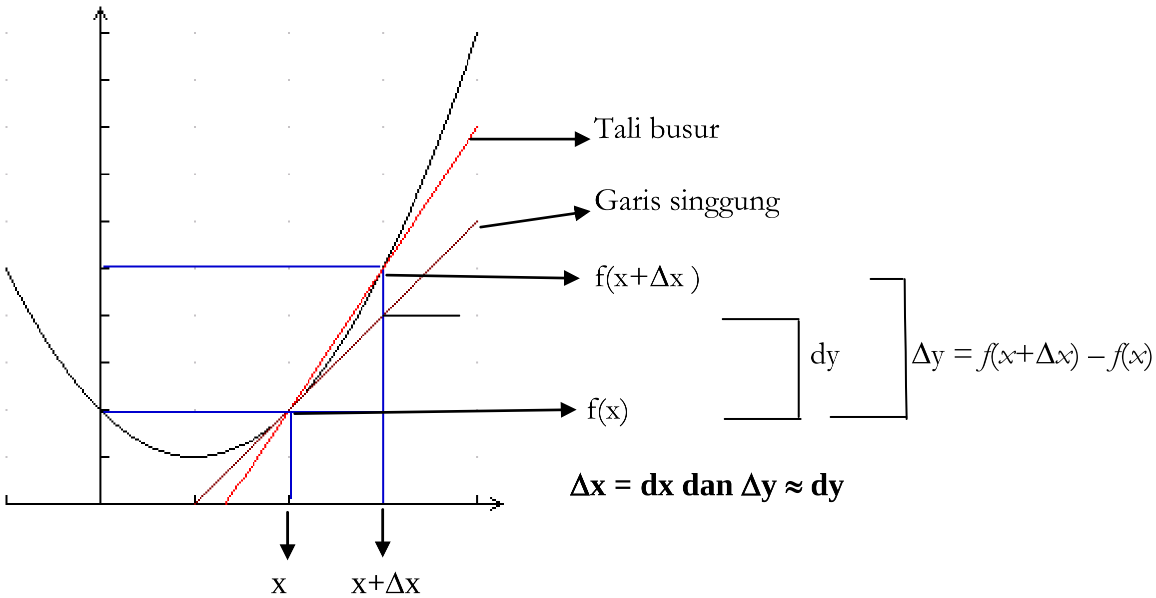
Definisi 5.3.: differensial suatu fungsi

Misalkan fungsi y = f(x) mempunyai turunan

3. differensial dari peubah bebas x ditulis dx didefinisikan sebagai dx = Δx, x $\in$ D_f. (domain dari fungsi *f*)
4. differensial dari peubah tak bebas y ditulis dy didefinisikan sebagai :
   dy = d *f*(x) = *f* ’(x)dx, x $\in$ D_f .

Catatan : Notasi $\dfrac{dy}{dx}$ selain menyatakan turunan fungsi *f* terhadap peubah bebas x, juga menyatakan hasil bagi differensial dy oleh dx.

Untuk memahami konsep aproksimasi, perhatikan grafik di bawah ini :



Gambar 24 Aproksimasi Fungsi

Misalkan y = *f*(x) menyatakan persamaan suatu kurva, dan apabila x diberikan tambahan Δx maka y menerima tambahan yang berpadanan Δy yang dapat dihampiri oleh dy. Jadi, *f*(x+Δx) diaproksimasikan oleh : $f(x+\Delta x) \approx f(x)$ + dy = $f(x)$ + $f\,'(x)\,\Delta$x = $f(x)$ + $f\,'(x)$ dx.

Contoh Soal:

Tanpa menggunakan kalkulator tetapi gunakan konsep aproksimasi, hitunglah $\sqrt{5}$ dan$\sqrt{15}$

Jawab :

Ingat:

- dy = d $f(x) = f'(x)dx$
- $f(x+\Delta x) \approx f(x) + dy$

$$= f(x) + f'(x)\,\Delta x$$

$$= f(x) + f'(x)\,dx.$$

Oleh karena itu, untuk menghitung √5 dan√15 tanpa menggunakan kalkulator, kita dapat menggunakan fungsi akar, $f(x) = \sqrt{x}$ sehingga $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Kalian semua tahu bahwa $f(4) = \sqrt{4} = 2$ dan $f(16) = \sqrt{16} = 4$, sedangkan $\sqrt{5} = \sqrt{4+1} = f(4 + 1)$ dan $\sqrt{15} = \sqrt{16-1} = f(16 - 1)$.

$f(4 + 1) = f(4) + f'(4)\,\Delta x$, dengan $\Delta x = 1$, sehingga :

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{2\sqrt{4}}.1 = 2\tfrac{1}{4}$$, sedangkan

$f(16 - 1) = f(16) + f'(16)\,\Delta x$, dengan $\Delta x = -1$, sehingga :

$$\sqrt{15} = 4 - \frac{1}{2\sqrt{16}} = 3{,}875$$

Berikut ini akan dibandingkan aturan turunan (derivative) dengan aturan differensial dari jumlah, perkalian dan pembagian dua fungsi. Aturan turunan dari teorema 5.2. yang dituliskan dengan cara lain, yaitu dengan notasi Leibniz).

Tabel 3. Aturan differensial dan aturan turunan dengan notasi Leibniz

Aturan Turunan (Teorema 5.2 dengan notasi Leibniz)	Aturan differensial
1. $\frac{dk}{dx} = 0$ untuk sebarang konstan k	1. $dk = 0$, untuk sebarang konstan k
2. $\frac{dkf}{dx} = k\frac{df}{dx}$ untuk sebarang konstan k	2. $dkf = k\,df$ untuk sebarang konstan k
3. $\frac{d(f \pm g)}{dx} = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx}$	3. $d(f \pm g) = df \pm dg$
4. $\frac{dfg}{dx} = g\frac{df}{dx} + f\frac{dg}{dx}$	4. $d(fg) = g\,df + f\,dg$

5. $\dfrac{d\, {}^{f}\!/_{g}}{dx} = \dfrac{g\,\frac{df}{dx} - f\,\frac{dg}{dx}}{g^2}$	5. d(*f/g*) = $\dfrac{gdf - fdg}{g^2}$

Contoh Soal:

Carilah persamaan garis singgung kurva $x^3y + y^3x = 10$ di titik (1,2)

Jawab :

Misalkan gradien garis singgung di titik (1,2) adalah m maka m = $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(1,2)}$

Selanjutnya $x^3y + y^3x = 10$ didifferensialkan sebagai berikut :

$$d(x^3y + y^3x) = d10 \Leftrightarrow dx^3y + dy^3x) = 0 \Leftrightarrow y\,dx^3 + x^3dy + x\,dy^3 + y^3dx = 0$$

$$\Leftrightarrow y.3x^2dx + x^3dy + x.3y^2dy + y^3dx = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2ydx + y^3dx + 3xy^2dy + x^3dy = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x^2y + y^3)dx + (3xy^2 + x^3)\,dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{(3x^2y + y^3)}{(3xy^2 + x^3)}$$

Sehingga m = $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(1,2)} = -\dfrac{(3.1^2.2 + 2^3)}{(3.1.2^2 + 1^3)} = -\dfrac{14}{13}$ dan persamaan garis singgungnya adalah :

$$(y - 2) = -\frac{14}{13}(x - 1) \Leftrightarrow 13(y - 2) = -14(x - 1) \Leftrightarrow 14x + 13y - 40 = 0$$

Jadi $14x + 13y - 40 = 0$ adalah persamaan garis singgung kurva $x^3y + y^3x = 10$ di titik (1,2).

D. Turunan Tingkat Tinggi

Operasi penurunan mengambil sebuah fungsi *f* dan menghasilkan fungsi baru *f '*. Jika *f '* diturunkan lagi akan diperoleh fungsi lain yang dinyatakan *f ''* dan disebut turunan ke dua dari *f*. pada gilirannya *f ''* dapat diturunkan lagi sehingga diperoleh *f '''* yaitu turunan ke tiga dari *f*, dan seterusnya dapat diturunkan n kali sehingga diperoleh turunan ke-n dari *f* yang ditulis $f^{(n)}$ yang selanjutnya $f^{(n)}$ disebut turunan tingkat tinggi.

Turunan fungsi y = f(x), selain dinotasikan dengan y ’ atau f ’(x) juga dituliskan dengan notasi Leibniz $\frac{dy}{dx}$. Cara lain untuk menyatakan turunan fungsi adalah dengan menggunakan operator differensial D yang didefinisikan D = $\frac{d}{dx}$, dan $\frac{dy}{dx}$ = D_xy. Selanjutnya, akan diberikan cara penulisan turunan pertama, kedua dan seterusnya sampai dengan turunan ke-n dari suatu fungsi y = f(x) sebagai berikut :

Tabel 3 Perbandingan Berbagai Notasi Turunan Fungsi

Turunan ke	Notasi $f^{(n)}$	Notasi $y^{(n)}$	Notasi D	Notasi Leibniz
pertama	$f\,'(x)$	y'	$D_x y$	$\frac{dy}{dx}$
Ke dua	$f\,''(x)$	y''	$D_x^2 y$	$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$
Ke tiga	$f\,'''(x)$	y'''	$D_x^3 y$	$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$
Ke empat	$f^{(4)}(x)$	$y^{(4)}$	$D_x^4 y$	$\frac{d^4y}{dx^4}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Ke-n	$f^{(n)}(x)$	$y^{(n)}$	$D_x^n y$	$\frac{d^ny}{dx^n}$

Contoh Soal:

Formulasikan turunan ke-n dari fungsi-fungsi berikut :

1. f(x) = sin 2x 2. g(x) = $(x – 1)^{-1}$ 3. h(x) = $\sqrt{x}$

Jawab :

1) f(x) = sin 2x

f ’(x) = 2cos 2x

f ”(x) = -2^2 sin 2x

f ”’(x) = $- 2^3$ cos 2x

f (4)(x) = 2^4 sin 2x

f (5)(x) = 2^5 cos 2x

2) g(x) = $(x – 1)^{-1}$

g ’(x) = $– (x – 1)^{-2}$

g ”(x) = $2(x – 1)^{-3}$

g ”’(x) = $– 3.2(x – 1)^{-4}$

g(4)(x) = $4.3.2(x – 1)^{-5}$

g(5)(x)= $–5.4.3.2(x – 1)^{-6}$

$\vdots$

$$f^n(x) = \begin{cases} (-1)^{m-1} 2^n \cos 2x, \; jika\, n = 2m-1, m \in N \\ (-1)^m 2^n \sin 2x, \quad jika\, n = 2m, m \in N \end{cases}$$

$\vdots$

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n n.(n-1)...3.2(x-1)^{-(n+1)}$$
$$= (-1)^n n!(x-1)^{-(n+1)}$$

3) $h(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$h''(x) = -\frac{1}{2^2 x\sqrt{x}}$$

$$h'''(x) = \frac{3}{2^3 x^2 \sqrt{x}}$$

$$h^{(4)}(x) = -\frac{5.3}{2^4 x^3 \sqrt{x}}$$

$\vdots$

$$h^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{\prod_{m=1}^{n-1} (2m-1)}{2^n x^{n-1} \sqrt{x}}$$

Latihan

1. Tentukan turunan pertama dari
   a) $f(x) = 4x^2 - 2x + 12$
   b) $f(x) = \frac{8}{x-2}$
   c) $f(x) = \frac{3x^2}{x-2}$
   d) $f(x) = \frac{4x-8}{x-2}$
2. Tentukan turunan ke 100 dari
   a. $f(x) = \sin 3x$
   b. $f(x) = \frac{1}{x}$

BAB VI
GRAFIK FUNGSI

A. Nilai Ekstrim Fungsi

Andaikan suatu fungsi y = f(x) mempunyai domain D, bagaimanakah untuk mengetahui apakah f mempunyai nilai maksimum atau minimum pada D? Jika ada, bagaimana titik dalam D sehingga nilai fungsinya ekstrim? Sebelum menjawab pertanyaan tersebut, akan didefinisikan nilai maksimum, minimum dan ekstrim suatu fungsi.

Definisi 6.1

Misalkan fungsi f mempunyai domain D dan $c \in D$, didefinisikan:

a. f(c) adalah nilai maksimum f pada D, jika $\boldsymbol{f(c) \geq f(x)}$, untuk $\forall x \in D$

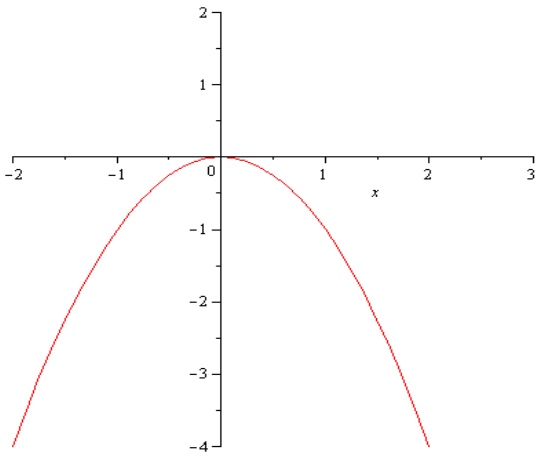
b. f(c) adalah nilai minimum f pada D, jika $\boldsymbol{f(c) \leq f(x)}$, untuk $\forall x \in D$

c. f(c) adalah nilai ekstrim f(c) pada D, jika f nilai maksimum atau nilai minimum pada D

- Suatu fungsi dapat mencapai nilai ekstrim di suatu titik *c* dalam domain D dibanding nilai pada setiap titik lain dalam D disebut *nilai ekstrim mutlak (global).*
- Suatu fungsi dapat mencapai nilai ekstrim di suatu titik *c* dalam domain D dibanding nilai pada setiap titik lain dalam suatu persekitaran dari *c* disebut *nilai ekstrim relative (local).*
- Nilai ekstrim relative akan dibahas kemudian, setelah dipelajari kemonotonan dan kecekungan fungsi

Contoh:

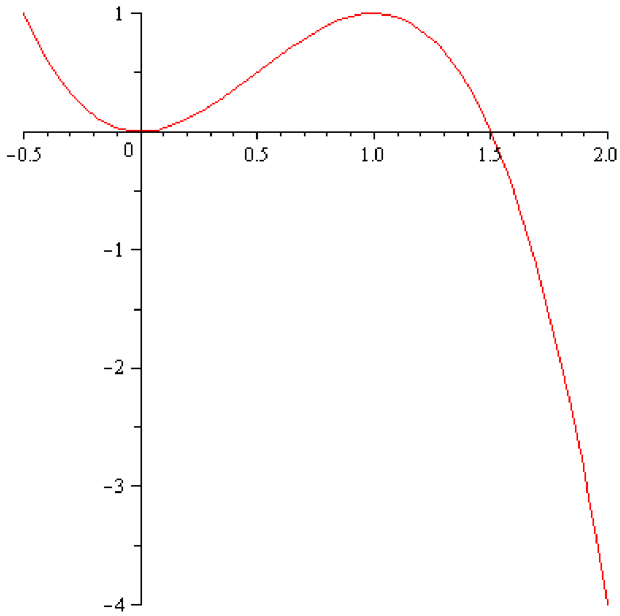
Pada grafik f(x) = $-x^2$ pada interval D = (-3,2], maka nilai ekstrimnya adalah f(0) = 0 yang juga merupakan nilai maksimum f pada D, lebih jelasnya silahkan perhatikan grafik di berikut:



Gambar 25 Grafik f(x) = $-x^2$

Carilah nilai-nilai maksimum dan minimum dari f(x) = $-2x^3 + 3x^2$ pada $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$

Penyelesaian:
Perhatikan grafik di berikut:



Gambar 26 Nilai Maksimum dan Minimum

Nilai maksimum adalah 1 (dicapai pada $-\frac{1}{2}$ dan 1) dan nilai minimum adalah -4 (dicapai pada 2).

Selanjutnya akan dikaji tentang syarat apa yang menjamin suatu fungsi mempunyai nilai ekstrim pada D. berikut disajikan teorema tentang eksistensi nilai ekstrim fungsi.

Teorema 6.1 (eksistensi nilai ekstrim)

Jika f kontinu pada [a,b] maka f mencapai nilai maksimum dan nilai minimum

Kontinu merupakan syarat perlu (tidak cukup) suatu fungsi mempunyai nilai ekstrim

Setelah mengetahui syarat perlu suatu fungsi mempunyai nilai ekstrim, lantas di mana terjadinya nilai ekstrim tersebut. Berikut teoremanya:

Teorema 6.2 (teorema titik kritis)

Jika f didefinisikan pada selang I yang memuat titik c sedemikian hingga f(c) nilai ekstrim maka c haruslah merupakan titik kritis yaitu c berupa paling sedikit satu di antara:

i. titik ujung I

ii. titik stasioner f, yakni f'(c) = 0

iii. titik singular dari f yakni f'(c) tidak ada

Bukti:

Pandang kasus pertama dimana f(c) adalah nilai maksimum f pada I dan andaikan bahwa c bukan titik ujung ataupun titik singular. Akan cukup untuk memperlihatkan bahwa c adalah titik stasioner. Karena f(c) adalah nilai maksimum, f(x) ≤ f(c) untuk semua x dalam I,yaitu:

f(x) – f(c) ≤ 0

jadi jika x < c, sehingga x – c < 0, maka

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \text{........(1)}$$

sedangkan jika x > c, maka

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \text{........(2)}$$

Tetapi f '(c) ada, karena c bukan titik singular. Akibatnya bilamana kita biarkan $x \to c^-$ dalam (1) dan $x \to c^+$ dalam (2), kita peroleh masing-masing, f '(c) ≥ 0 dan f '(c) ≤ 0. Kita simpulkan bahwa f '(c) = 0

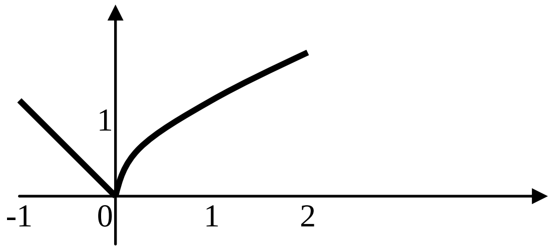
Kasus dimana f(c) adalah minimum dikerjakan semisal.

Contoh Soal:

Fungsi $f(x) = x^{2/3}$ kontinu dimana-mana. Cari nilai-nilai maksimum dan minimumnya jika pada interval [-1,2]

Penyelesaian:

$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ tidak pernah 0. Tetapi f '(0) tidak ada, sehingga 0 adalah titik kritis, sama seperti titik-titik ujung -1 dan 2. Sekarang f(-1) = 1, f(0) = 0, dan f(2) = $\sqrt[3]{4} \approx 1{,}59$. Jadi nilai maksimum adalah 0. (perhatikan grafik berikut)



B. Kemonotonan

Pada kesempatan ini akan dibahas perilaku fungsi yang terkait dengan fungsi turunannya tingkat pertama dan kedua, yaitu kemonotonan. Demikian juga kegunaannya dalam menentukan ekstrim fungsi.

Definisi 6.2

Jika *f* didefinisikan pada selang I (terbuka, tertutup atau tak satupun) maka dikatakan bahwa:

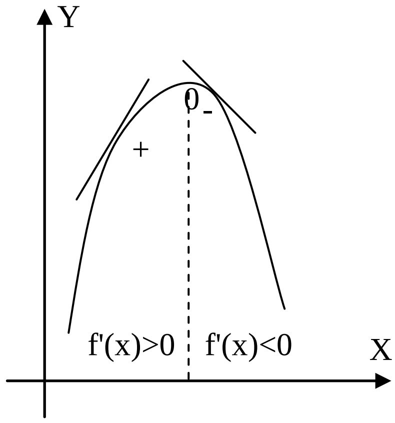
i. *f* naik pada I jika hanya jika untuk setiap x_1 dan x_2 dalam I,
   $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

ii. *f* turun pada I jika hanya jika untuk setiap pasang x_1 dan x_2 dalam I,
   $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

iii. *f* monoton pada I jika hanya jika ia naik pada I atau turun pada I

Dari definisi di atas, bagaimana kita dapat menentukan di mana fungsi naik?. Sketsa sebuah grafik fungsi biasanya digambar dengan cara merajah beberapa titik dan menghubungkan titik-titik tersebut dengan suatu kurva mulus. Namun, siapa yang dapat yakin bahwa grafik tidak bergoyang di antara titik-titik yang dirajah?. Oleh karenanya, diperlukan prosedur yang lebih baik.

Perlu diketahui bahwa turunan pertama f'(x) memberi kita kemiringan dari garis singgung pada grafik f di titik x. Kemudian jika f'(x) > 0, garis singgung naik ke kanan (lihat gambar disamping). Serupa, jika f'(x) < 0, garis singgung jatuh ke kanan. Fakta-fakta ini membuat teorema berikut secara intuisi jelas



Teorema 6.3 (teorema kemonotonan)

Andaikan f kontinu pada selang I dan dapat diderivatifkan pada setiap titik dalam I

i. jika $f'(x) > 0$ untuk $\forall x \in I$ maka f naik pada I

ii. jika $f'(x) < 0$ untuk $\forall x \in I$ maka f turun pada I

Bukti:

Diandaikan f kontinu pada I dan bahwa f'(x) > 0 di setiap titik x di bagian dalam I. Pandang dua titik sebarang x_1 dan x_2 dari I dengan $x_1 < x_2$. Menurut teorema nilai rata-rata yang diterapkan pada selang $[x_1,x_2]$, terdapat sebuah bilangan c dalam (x_1,x_2) yang memenuhi

$F(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$

Karena $f'(c) > 0$, kita lihat bahwa $f(x_2) - f(x_1) > 0$ sehingga $f(x_2) > f(x_1)$. Inilah yang dimaksudkan f adalah naik pada I

Pada $f'(x) < 0$ pada I dikerjakan semisal.

Teorema ini biasanya membolehkan kita secara persis menentukan dimana suatu fungsi yang terdiferensial naik dan dimana ia turun. Ini masalah penyelesaian dua pertaksamaan.

Contoh Soal

Jika $f(x) = 2x^3 – 3x^2 – 12x +7$, cari dimana f naik dan dimana turun?

Penyelesaian:

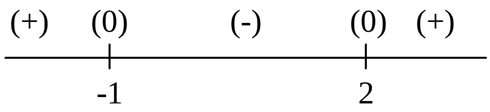
Dimulai dengan mencari turunan f

$f '(x) = 6x^2 – 6x – 12 = 6(x + 1) (x – 2)$

Kita perlu menentukan daerah di mana $(x + 1)(x – 2) > 0$ dan juga dimana $(x + 1)(x – 2) < 0$

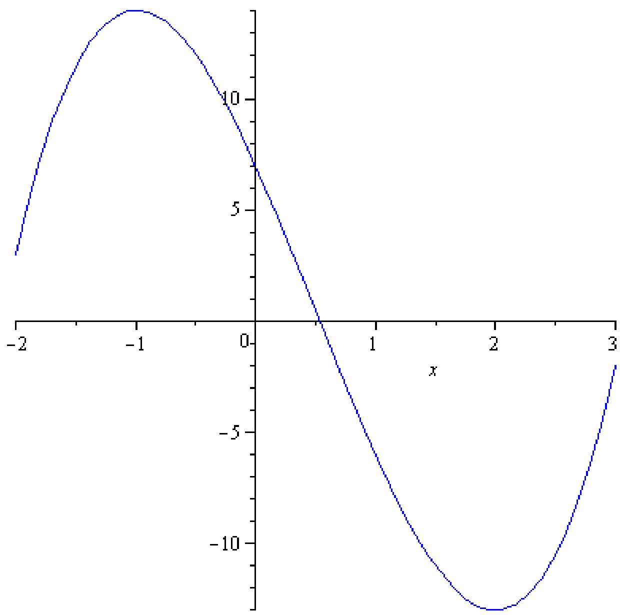
Titik-titik pemisah adalah -1 dan 2 adalah pembuat 0 pertidaksamaan tersebut, titik-titik tersebut membagi garis bilangan menjadi tiga selang yaitu $(-\infty,-1)$, $(-1,2)$ dan $(2,\infty)$.

Dengan menggunakan titik uji -2, 0 dan 3, disimpulkan bahwa $f'(x) > 0$ pada selang pertama dan terakhir, dan $f '(x) < 0$ pada selang tengah (perhatikan gambar).



Menurut teorema kemonotonan, f naik pada $(-\infty,-1]$ dan $[2,\infty)$, turun pada $[-1,2]$.

(Pehatikan grafik berikut)



Gambar 27 Kemonotonan Grafik

C. KECEKUNGAN

Sebuah fungsi mungkin naik dan tetap mempunyai grafik yang bergoyang. Untuk menganalisis goyangan diperlukan perilaku garis singgung sepanjang grafik dari kiri ke kanan. Jika garis singgung berliku tetap berlawanan arah putar jarum jam, maka dikatakan fungsi cekung ke atas. Dan jika sebaliknya dikatakan cekung ke bawah. Karena gradient garis singgung adalah turunan fungsi, maka kedua definisi tersebut lebih baik dinyatakan dalam istilah fungsi dan turunannya, sebagai berikut :

Definisi 6.3 (kecekungan)

Andaikan *f* terdifferensialkan pada interval terbuka I = (a,b).

i. Jika f' naik pada I maka *f* cekung ke atas pada I

ii. Jika f' turun pada I maka *f* cekung ke bawah pada I

Kecekungan didefinisikan dengan menggunakan fungsi turunan naik/turun, maka teori komonotonan (teori 9.3.) dapat diaplikasikan pada definisi tersebut sehingga diperoleh terema kecekungan berikut:

Teorema 6.4 (teori kecekungan)

Andaikan *f* terdifferensialkan kedua pada interval terbuka I = (a,b)

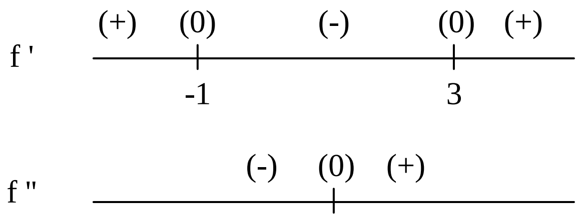
i. jika *f* "x) > 0 untuk $\forall x \in (a,b)$ maka *f* cekung ke atas pada I

ii. jika *f* "(x) < 0 untuk $\forall x \in (a,b)$ maka *f* cekung ke bawah pada I

Tampak dari teorema 6.3 dan 6.4,
untuk menentukan daerah kemonotonan dan
kecekungan suatu fungsi diperlukan pertidaksamaan

Contoh Soal:

Jika f(x) = $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x +$, maka dimanakah f naik, turun, cekung ke atas, cekung ke bawah?

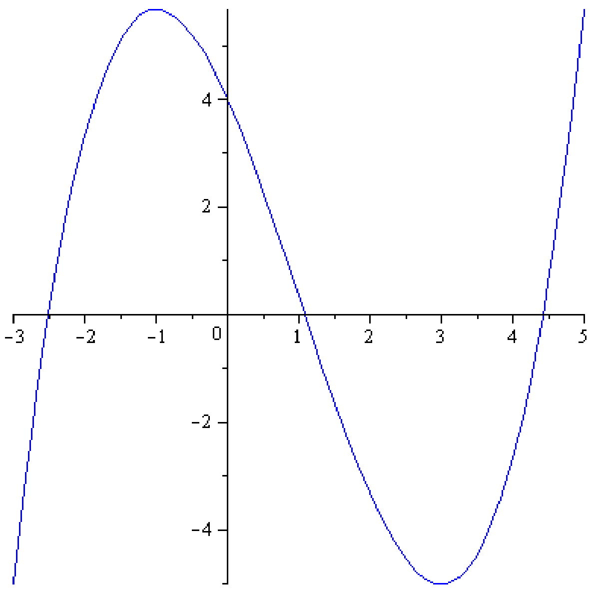


Penyelesaian:

f '(x) = $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$

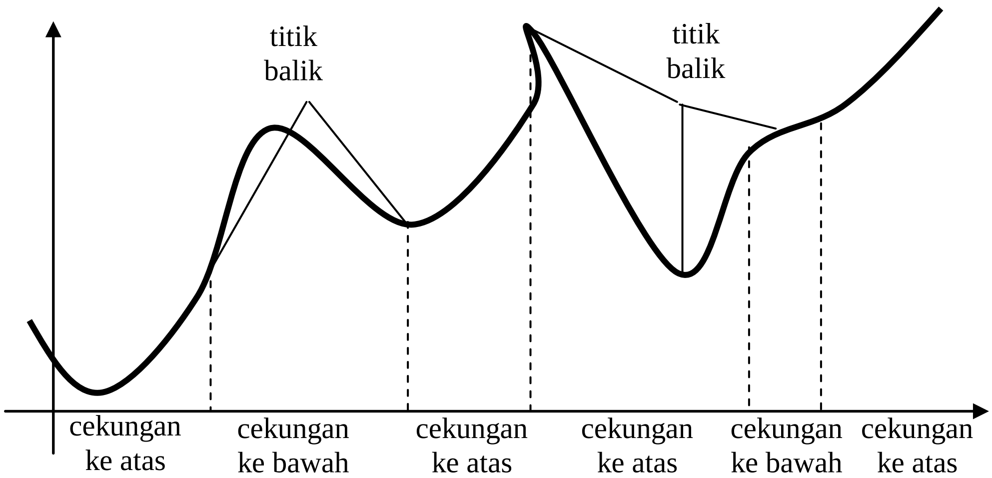
f "(x) = $2x - 2 = 2(x - 1)$

dengan mencari himpunan penyelesaikan pertaksamaan (x + 1) (x – 3) > 0 dan lawannya kita simpulkan bahwa f naik pada $(-\infty,-1]$ dan $[3,\infty)$ dan turun pada [-1,3]. Serupa penyelesaian 2(x – 1) > 0 dan 2(x – 1) < 0 memperlihatkan bahwa f cekung ke atas pada $(1,\infty)$, cekung ke bawah pada $(-\infty,1)$. (perhatikan grafik f(x) = $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ di bawah)



Gambar 28 Kecekungan Grafik

Andaikan f kontinu di c. Kita sebut (c,f(c)) suatu titik balik dari grafik f jika f cekung ke atas pada satu sisi dan cekung ke bawah pada sisi lainnya dari c. Ilustrasi berikut akan memperjelas beberapa kemungkinan yang dibentuk oleh suatu fungsi:



D. Analisis Titik Ekstrim

Setelah dapat menentukan kemonotonan dan kecekungan suatu fungsi, kita akan dapat menentukan nilai ekstrim local (relative). Berikut definisi ekstrim local suatu fungsi.

Definisi 6.4 (ekstrim local)

Andaikan D daerah asal fungsi *f* yang memuat *c*.

a. *f*(*c*) nilai maksimum local *f* jika terdapat selang (a,b) yang memuat *c* sehingga *f*(*c*) nilai maksimum *f* pada (a,b) $\cap$ D.

b. *f*(*c*) nilai minimum local *f* jika terdapat selang (a,b) yang memuat *c* sehingga *f*(*c*) nilai minimum *f* pada (a,b) $\cap$ D.

c. *f*(*c*) nilai ekstrim local *f* jika ia berupa nilai maksimum local atau minimum local

Lantas di mana titik-titik ekstrim local terjadi? Teorema titik kritis (teorema 6.2) berlaku sebagaimana dinyatakan tetapi ungkapan nilai ekstrim diganti dengan nilai ekstrim local.

Jadi titik-titik kritis (titik ujung, titik stasioner dan titik singular) adalah calon untuk titik tempat kemungkinan terjadinya ekstrim local. Untuk menguji titik-titik kritis manakah yang menjadikan nilai ekstrim local diperlukan teorema berikut.

Teorema 6.4 (Uji turunan pertama untuk ekstrim lokal)

Andaikan *f* kontinu pada interval terbuka (a,b) yang memuat titik kritis c.

i. jika $f'(x) > 0$ untuk $\forall x \in (a,c)$ dan $f'(x) < 0$ untuk $\forall x \in (c,b)$ maka $f(c)$ adalah nilai maksimum local dari *f*.

ii. jika $f'(x) < 0$ untuk $\forall x \in (a,c)$ dan $f'(x) > 0$ untuk $\forall x \in (c,b)$ maka $f(c)$ adalah nilai minimum local dari *f*.

iii. jika $f'(x)$ bertanda sama pada kedua pihak c maka $f(c)$ bukan nilai ekstrim local dari *f*.

Bukti:

(i) Karena $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam (a,c), maka menurut teorema kemonotonan f naik pada (a,c]. Menurut teorema yang sama, karena $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam [c,b), maka f turun pada [c,b). Sehingga $f(x) < f(c)$ untuk semua x dalam (a,b), kecuali tentu saja di x = c. Kita simpulkan bahwa f(c) adalah maksimum lokal.

Bukti (ii) dan (iii) serupa (Silahkan dicoba sebagai latihan).

> Titik-titik kritis local adalah titik ujung, titik stasioner dan titik singular yang menjadi calon untuk titik tempat kemungkinan terjadinya ekstrim local

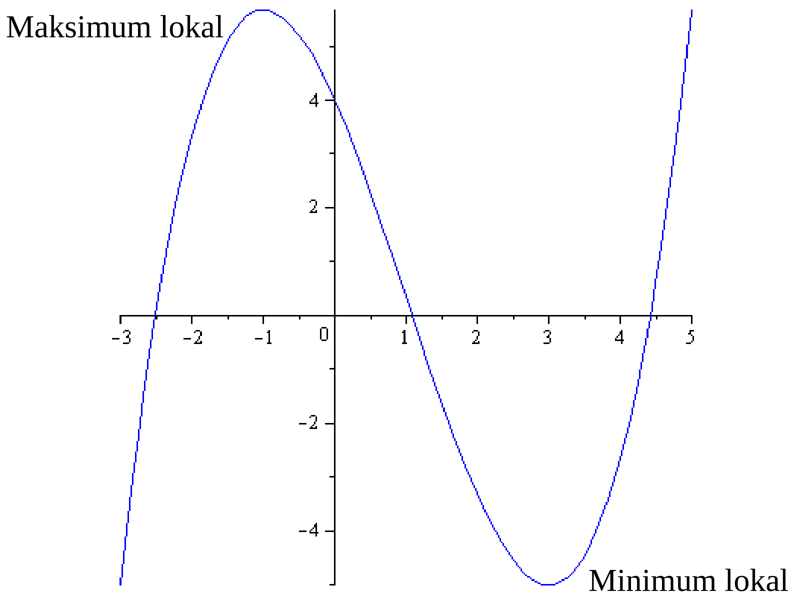
Contoh Soal:

Carilah nilai ekstrim local dari $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ pada $(-\infty,\infty)$

Penyelesaian:

Karena $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$, maka titik kritis f hanyalah -1 dan 3. Bilamana kita gunakan titik-titik uji -2, 0, dan 4, kita pahami bahwa $(x + 1)(x - 3) > 0$ pada $(-\infty,-1)$ dan $(3,\infty)$ dan $(x + 1)(x - 3) < 0$ pada $(-1,3)$.

Menurut uji turunan pertama, kita simpulkan bahwa $f(-1) = \frac{17}{3}$ adalah nilai maksimum local dan bahwa $f(3) = -5$ adalah nilai minimum lokal (perhatikan gambar di bawah)



Terdapat uji lain untuk ekstrim lokal yang terkadang lebih mudah diterapkan daripada teorema 9.4. teorema ini disebut dengan uji turunan kedua.

Teorema 6.5 (Uji turunan kedua untuk ekstrim lokal)
Andaikan *f ' dan f ''* ada di setiap titik dalam selang terbuka (a,b) yang memuat titik c dengan $f'(c) = 0$,

i. jika $f''(c) < 0$ maka $f(c)$ adalah nilai maksimum local dari *f*.
ii. jika $f''(c) > 0$ untuk maka $f(c)$ adalah nilai minimum local dari *f*.

Contoh Soal.

Carilah nilai ekstrim local dari f(x) = $x^2 - 6x + 5$, gunakan turunan kedua
Penyelesaian:
f '(x) = 2x – 6 = 2(x – 3)
f "(x) = 2
jadi f '(3) = 0 dan f"(3) > 0. Karena itu menurut uji turunan kedua, f(3) adalah nilai minimum local.

E. Asimtotik Tegak dan Asimtotik Datar

Menggambarkan grafik fungsi rasional (hasil bagi dua fungsi polinom) membutuhkan bantuan asimtotik tegak maupun datar. Asimtot tegak terkait dengan limit fungsi tak hingga dan asimtot datar berkaitan dengan limit fungsi di takhingga, yang didefinisikan sebagai berikut :

- Garis x=c adalah asimtot tegak (vertical) dari grafik y = f(x), jika salah satu dari pernyataan-pernyataan berikut benar :
  1. $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \infty$; 2. $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = -\infty$; 3. $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \infty$ atau
  4. $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = -\infty$
- Garis y=b adalah asimtot datar (horizontal) dari y = f(x), jika :
  $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ atau $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

Contoh:
Gambarlah grafik fungsi, dengan menentukan titik kritis, di mana fungsi naik/turun, di mana fungsi cekung ke atas/bawah, asimtot tegak dan asimtot datar (jika ada) dari fungsi-fungsi berikut :

1. $f(x) = \dfrac{2}{(x-3)^2}$ 2. $g(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

Jawab :

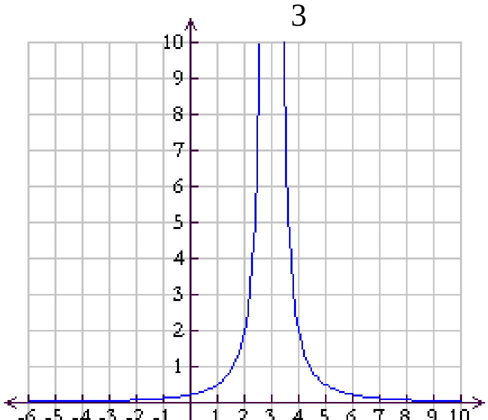
1. $f(x) = \dfrac{2}{(x-3)^2}$ maka $f\,'(x) = \dfrac{-4}{(x-3)^3}$ dan $f\,''(x) = \dfrac{12}{(x-3)^4}$

- tidak ada x yang memenuhi $f\,'(x) = \dfrac{-4}{(x-3)^3} = 0$ dan domain f adalah himpunan semua bilangan real selain 3(R – {3}) maka fungsi f tidak memiliki titik kritis (tidak ada titik maksimum/minimum fungsi)
- $f\,'(x) = \dfrac{-4}{(x-3)^3}$ maka fungsi akan naik pada (-∞,3) dan turun pada (3,∞)

  (+) | (-)
  3

- $f\,''(x) = \dfrac{12}{(x-3)^4}$ maka fungsi akan cekung ke atas pada (-∞,3) ∪ (3,∞) dan fungsi tidak cekung ke bawah

  (+) | (+)
  3



- $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2}{(x-3)^2} = \infty$ maka fungsi *f* mempunyai asimtot tegak x = 3
- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{(x-3)^2} = \dfrac{2}{\infty^2} = 0$ fungsi *f* mempunyai asimtot datar y = 0 yaitu sumbu-X.

- *f*(x) = $\dfrac{2}{(x-3)^2}$ adalah fungsi tidak genap dan tidak ganjil karena :

  f(-x) = $\dfrac{2}{(-x-3)^2} = \dfrac{2}{(x+3)^2} \neq$ *f*(x) dan *f*(-x) = - *f*(x),

  sehingga grafik fungsi tidak simetri dengan sumbu-Y dan juga tidak simetri dengan titik pusat (0,0).

2. *g*(x) = $\dfrac{2x^2}{x^2+1}$ maka *g'*(x) = $\dfrac{4x(x^2+1)-4x^3}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$ dan

   g''(x) = $\dfrac{4\left(x^2+1\right)^2 - 16x^2\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^4} = \dfrac{4\left(x^2+1\right)-16x^2}{\left(x^2+1\right)^3} = \dfrac{4(1-3x^2)}{\left(x^2+1\right)^3}$

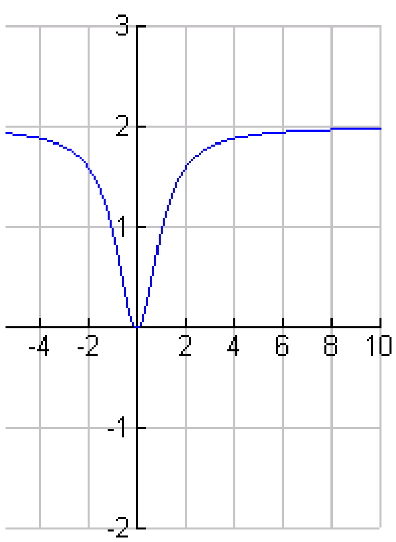
- *g'*(x) = $\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$ =0 maka x = 0, sehingga (0,*g*(0)) = (0,0) **mungkin** merupakan titik ekstrim. Tetapi karena *g''*(0) = 4 > 0 maka (0,0) adalah ekstrim minimum
- *g'*(x) = $\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$ maka fungsi akan turun pada (-∞,0) dan naik pada (0,∞)

  (-) | (+)
  0

- *g''*(x) = $\dfrac{4(1-3x^2)}{\left(x^2+1\right)^3}$ maka fungsi cekung ke atas pada (-√3/3, √3/3) dan cekung ke bawah pada(-∞,-√3/3)∪(√3/3,∞)

  (-) | (+) | (-)
  -√3/3 √3/3

- Tidak ada nilai c sehingga $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{2x^2}{x^2+1} = \infty$ maka fungsi *g* tidak memiliki asimtot tegak
- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2}{x^2+1} = 2$ maka fungsi *g* memiliki asimtot datar y = 2



- g(x) = $\frac{2x^2}{x^2+1}$ merupakan fungsi genap karena g(-x) = $\frac{2x^2}{x^2+1}$ = g(x), sehingga grafik fungsi g(x) = $\frac{2x^2}{x^2+1}$ simetri dengan sumbu-Y.

Latihan

1. Sketsakan grafik fungsi
   $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 10$ dengan terlebih dahulu menentukan:
   a. Dimanakah titik belok f?
   b. Dimanakah f mencapai maksimum lokal?minimum lokal? Dimanakah f naik? f turun?

2. Sketsakan grafik fungsi
   $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ dengan terlebih dahulu menentukan:
   c. Dimanakah titik belok f?
   d. Dimanakah f mencapai maksimum lokal?minimum lokal? Dimanakah f naik? f turun?

BAB VII
ATURAN L'HOPITAL DALAM LIMIT FUNGSI

Limit fungsi yang telah dipelajari sampai dengan definisi turunan merupakan analisis pada besaran-besaran yang berhingga. Di bawah ini ada tiga masalah limit yang telah dipelajari:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\,;\quad \lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x-1}\quad \text{dan}\quad \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

Ketiga limit tersebut mempunyai penampilan yang sama, yaitu merupakan fungsi hasil bagi dengan pembilang dan penyebutnya berlimit nol. Jika ketiga limit tersebut dihitung dengan aturan penarikan limit untuk hasil bagi maka akan diperoleh jawaban yang tiada berarti, yakni 0/0. Nilai ketiga limit tersebut tidak dapat dikatakan tidak ada karena memang aturan hasil bagi limit tersebut tidak dapat digunakan disebabkan nilai limit penyebutnya 0.

Nilai $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, diperoleh dengan menggunakan geometri, dan nilai dari $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(2x+3)(x-1)}{x-1} = 5$ digunakan pemfaktoran dalam aljabar. Tentunya, akan lebih baik jika terdapat aturan baku yang dapat digunakan untuk menghitung nilai limit-limit demikian. Aturan baku tersebut adalah aturan L'Hopital.

A. ATURAN L'HOPITAL UNTUK BENTUK $\frac{0}{0}$ dan $\frac{\infty}{\infty}$

Suatu pembagian $\frac{f(x)}{g(x)}$ disebut *bentuk tak tentu* pada *c*,

- berbentuk $\frac{0}{0}$ jika $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$ dan $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$
- berbentuk $\frac{\infty}{\infty}$ jika $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ dan $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \pm\infty$

Untuk menghitung limit dengan bentuk tak tentu seperti di atas, dapat digunakan suatu teorema yang dikenal dengan nama Teorema L'Hopital.

Teorema 7.1 **(**Aturan L'Hopital untuk bentuk $\frac{0}{0}$)

Jika $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$ dan $\lim\limits_{x\to c}[f'(x)/g'(x)]$ ada (berhingga atau tak berhingga) maka $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

- *c* dapat diganti dengan *a*, a^-, a^+, - ∞, ∞
- Seringkali nilai $\lim\limits_{x\to c}[f'(x)/g'(x)]$ juga berbentuk 0/0, sehingga aturan L'Hopital dapat digunakan lagi dan berhenti menggunakan aturan tersebut jika pembilang atau penyebut berlimit tak nol.

Meskipun aturan L'Hopital mudah digunakan, namun haruslah berhati-hati dalam pemakaiannya. Aturan tersebut **tidak boleh digunakan jika syarat-syaratnya tidak dipenuhi**. Jika tidak teliti, kita dapat melakukan kesalahan-kesalahan. Di samping itu, adakalanya aturan itu tidak dapat digunakan karena bentuk yang diperoleh semakin rumit.

Contoh:

Tentukan $\lim\limits_{x\to c\infty}\frac{e^{-x}}{x^{-1}}$

Tampak syarat L'Hopital dipenuhi, karena ini merupakan bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$.

Jika aturan L'Hopital diterapkan secara langsung, akan diperoleh:

$\lim\limits_{x\to c\infty}\frac{e^{-x}}{x^{-1}} = \lim\limits_{x\to c\infty}\frac{e^{-x}}{x^{-2}} = \lim\limits_{x\to c\infty}\frac{e^{-x}}{2x^{-3}} = \ldots$(bentuk semakin rumit).

Jalan terbaik adalah mengubahnya menjadi:

$$\lim_{x\to c\infty}\frac{e^{-x}}{x^{-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to c\infty}\frac{x}{e^x}$$

Limit ini berbentuk $\frac{\infty}{\infty}$ dan dapat diselesaikan dengan teorema berikut:

Teorema 7.2 **(**Aturan L'Hopital untuk bentuk $\frac{\infty}{\infty}$)

Misalkan $\lim_{x\to c}|f(x)| = \lim_{x\to c}|g(x)| = \infty$ dan $\lim_{x\to c}[f'(x)/g'(x)]$ ada (berhingga atau tak berhingga) maka $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Dari contoh di atas, bahwa : $\lim_{x\to c\infty}\frac{e^{-x}}{x^{-1}} = \lim_{x\to c\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to c\infty}\frac{1}{e^x} = 0$

Contoh Soal:

Tentukan $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{x+\sin x}$

Kita lihat bahwa persoalan tersebut merupakan bentuk tak tentu $\frac{\infty}{\infty}$, tapi apakah aturan L'Hopital dapat digunakan? Mari kita lihat.

Jika dapat digunakan, maka akan diperoleh

$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{x+\sin x} = \lim_{x\to\infty}\frac{3}{1+\cos x}$ yang nilai limitnya tidak ada.

Tapi apakah ini berarti $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{x+\sin x}$ tidak ada?

Sebenarnya tidak begitu, karena kita dapat mengerjakannya

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{x+\sin x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x}{x}+\frac{5}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{\sin x}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3+0}{1+0} = 3$$

B. ATURAN L'HOPITAL UNTUK BENTUK $0.\infty$ DAN $\infty-\infty$

Andaikan $\lim_{x\to c}A(x) = 0$ dan $\lim_{x\to c}B(x) = \infty$, maka bagaimana dengan $\lim_{x\to c}A(x)B(x)$? apakah akan menuju 0 ataukah menuju ∞ atau memiliki limit yang lain?. Aturan L'Hopital dapat digunakan untuk mencari limit dari bentuk tak tentu seperti ini, setelah diubah menjadi bentuk $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$, karena

$$A(x)B(x) = \frac{B(x)}{1/A(x)} = \frac{A(x)}{1/B(x)}$$

$$\uparrow \qquad \uparrow$$

$\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{0}{0}$

Demikian juga, bentuk tak tentu ∞ - ∞ akan dapat diselesaikan dengan aturan L'Hopital setelah persoalan tersebut diubah menjadi berbentuk $\frac{\infty}{\infty}$ atau $\frac{0}{0}$, karena $\infty - \infty = \frac{1}{0} - \frac{1}{0}$

Contoh:
Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x \ln(\sin x)$

Ini merupakan bentuk tak tentu $\infty.0$, karena $\tan\frac{\pi}{2} = \infty$ dan $\ln(\sin\frac{\pi}{2}) = \ln 1 = 0$
Dapat diselesaikan sbb

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x \ln(\sin x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{1/\sin x} \quad \text{(i)} \to \text{ (bentuk (i) } \frac{\infty}{\infty}) \text{ atau}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x \ln(\sin x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{1/\tan x} \quad \text{(ii)} \to \text{ (bentuk (ii) } \frac{0}{0})$$

Ingat Kembali !!
Jika $y = \ln u$
maka $y' = \frac{1}{u} u'$

Kita dapat memilih salah satu untuk diselesaikan. Misalkan yang akan kita selesaikan kali ini adalah bentuk yang nomor (ii)

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x \ln(\sin x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{1/\tan x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\cot x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{-\operatorname{cos\,sec}^2 x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-\sin x\left(1/\sin^2 x\right)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (-\cos x \sin x) = 0.1 = 0$$

Ingat Kembali !!
$y = e^{\ln y}$

Silahkan Anda coba selesaikan jika bentuk yang dipilih adalah bentuk nomor (i).

C. ATURAN L'HOPITAL UNTUK BENTUK ∞^0, 0^0, DAN 1^∞

Bentuk tak tentu 0^0, ∞^0 dan 1^∞ dapat dituliskan sebagai bentuk logaritma sedemikian sehingga aturan L'Hopital dapat digunakan.

Perhatikan bahwa

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

sehingga didapat $\lim\limits_{x \to c} f(x)^{g(x)} = e^L$, dengan $L = \lim\limits_{x \to c} g(x) \ln f(x)$

Jika didapat $\lim\limits_{x \to c} g(x) \ln f(x)$ berbentuk $\infty.0$ atau $0.\infty$, dapat diselesaikan dengan cara seperti di atas.

Contoh:

Akan dicari $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{1/x}$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e^L, \text{ dengan}$$

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1/(1+x)}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

sehingga didapat $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e^1 = e$

Latihan

1. Tentukan nilai limit dari
   a. $\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-4x+1000000000}{x^2-4}$
   b. $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{5x}$

2. Tentukan limit dari $\lim_{x\to c\infty}\frac{e^{-x}}{x^{-1}}$

BAB VIII
PENGGUNAAN DERIVATIF

Banyak hal yang diperlukan agar kapal dapat berlayar dengan baik di lautan, untuk mencari sebesar-besarnya karunia Allah. Lalu, apa manfaat kalkulus? Mari kita lihat.

Misalnya, suatu hari, Alfi ingin mengirim makanan kecil untuk neneknya. Dia akan membuat kotak dari karton untuk wadah makanan itu. Dia mempunyai selembar karton dengan ukuran tertentu. Masalahnya, berapa ukuran kotak makanan yang harus dibuat agar volumenya maksimum.

Pak Karim lain lagi masalahnya. Untuk keperluan penelitian, dia melepaskan sebuah balon pada jarak 150 meter. Jika saat itu balon naik ke atas dengan kecepatan 8m/det, berapa kecepatan pertambahan jarak antara Pak Karim dan balon saat balon berada pada ketinggian 50 meter.

Masalah-masalah di atas dan banyak lagi masalah-masalah lain yang setipe, dapat diselesaikan dengan menggunakan kalkulus, khususnya derivatif, yang akan kita pelajari pada bab ini.

A. MASALAH MAKSIMUM DAN MINIMUM

Lihat lagi masalah yang dihadapi Alfi. Misal karton yang dimiliki berukuran 24cm × 9cm, dan akan dibuat kotak tanpa tutup. Berapa ukuran kotak agar volumenya maksimum?

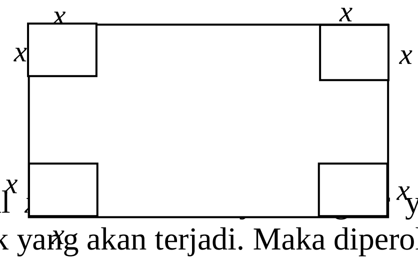
Ada beberapa langkah yang disarankan, yang dapat dilakukan untuk membawa masalah ke bentuk matematis:

1. Buat gambar/sketsa dari masalah, dan berikan variabel-variabel yang sesuai.
2. Tuliskan rumus untuk fungsi F yang akan dimaksimumkan/diminimumkan dalam bentuk variabel-variabel tersebut.
3. Gunakan kondisi-kondisi dalam masalah untuk mengubah variabel-variabel, sehingga hanya tersisa satu variabel saja, misal *x*.
4. Tentukan himpunan nilai-nilai *x* yang mungkin, misal dalam bentuk selang.
5. Tentukan titik-titik kritis pada fungsi F dan tentukan dimana fungsi F mencapai nilai maksimum/minimum.
6. Menafsirkan hasil yang diperoleh.

Untuk beberapa masalah, mungkin kita tidak dapat mengikuti langkah-langkah di atas dengan membabi buta. Kadang-kadang beberapa langkah dapat dihilangkan, atau mungkin perlu ditambahkan beberapa langkah yang lain. Pengalaman yang banyak dengan cara banyak berlatih, akan membuat Anda makin mahir.

Permasalahan Alfi di atas dapat kita selesaikan sebagai berikut:

Pertama, kita buat sketsa/gambar



Misal ... yang akan dipotong, dan *V* adalah volume kotak yang akan terjadi. Maka diperoleh

$$V = x(24-2x)(9-2x) = 216x - 66x^2 + 4x^3$$

Berikutnya, tentukan batas-batas nilai *x*, nilai *x* pasti lebih dari 0 dan kurang dari 4,5 atau $x \in [0 \ , \ 4{,}5]$

Langkah berikutnya adalah menyelesaikan masalah,

yaitu memaksimumkan $V = 216x - 66x^2 + 4x^3$ untuk $x \in [0 \ , \ 4{,}5]$

Titik-titik stasioner akan didapatkan jika $\frac{dV}{dx} = 0$, dan dicari penyelesaiannya.

Maka $\frac{dV}{dx} = 216 - 132x + 12x^2 = 0 \iff 12(9-x)(2-x) = 0$.

Didapat $x = 2$ atau $x = 9$. Tapi $x = 9$ tidak berada pada selang $[0 \;\; , \;\; 4{,}5]$.

Jadi nilai *x* yang diambil adalah $x = 2$.

Dari penyelesaian yang diperoleh, didapat $x = 2$, yang berarti kotak yang harus dibuat berukuran panjang 20 cm, lebar 5 cm, dan tingginya 2 cm.

SOAL LAIN:

Perusahaan jasa pengiriman barang menghitung, biaya operasional sebuah truk adalah $(30 + v/2)$ rupiah untuk setiap km, jika truk berjalan dengan kecepatan *v* km/jam. Pengemudi dan kenek dibayar Rp. 1400 tiap jam. Pada kecepatan berapa biaya pengiriman ke suatu kota yang berjarak *k* km akan paling murah? Peraturan lalu lintas membatasi kecepatan truk pada $40 \le v \le 60$.

<u>Penyelesaian</u>

Pertama, merumuskan fungsi yang akan diminimumkan.

Misal *C* = upah sopir dan kenek + biaya operasional, maka

$$\begin{aligned} C &= \frac{k}{v} \times 1400 + k(30 + \frac{v}{2}) \\ &= 1400kv^{-1} + \frac{k}{2}v + 30k \end{aligned}$$

Selanjutnya, dari fungsi di atas ditentukan titik-titik kritisnya.

Titik kritis *C* akan didapat pada $\frac{dC}{dv} = 0$, sehingga $\frac{dC}{dv} = -1400kv^{-2} + \frac{k}{2} = 0$, maka didapat penyelesaian $\frac{1400k}{v^2} = \frac{k}{2} \iff v^2 = 2800 \iff v \approx 53$.

Kecepatan 53 km/jam kelihatannya akan meminimalkan ongkos pengiriman, tapi agar lebih pasti, kita dapat mengecek nilai *C* pada titik-titik ujungnya juga:

$v = 40 \Rightarrow C = \frac{k}{40} \times 1400 + k(30 + \frac{40}{2}) = 85k$

$v = 53 \Rightarrow C = \frac{k}{53} \times 1400 + k(30 + \frac{53}{2}) \approx 82{,}9k$

$v = 60 \Rightarrow C = \frac{k}{60} \times 1400 + k(30 + \frac{60}{2}) \approx 83{,}3k$

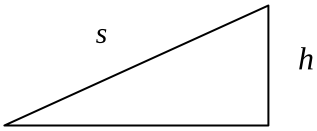
Dari hasil di atas, dapat disimpulkan bahwa kecepatan 53 km/jam akan meminimalkan ongkos angkut.

B. LAJU YANG BERKAITAN

Kita lihat permasalahan yang dihadapi Pak Karim pada awal bab ini. Jika balon dilepas pada jarak 150m dari Pak Karim yang berdiri di tanah, dan naik ke atas secara lurus dengan kecepatan 8 m/detik, berapa kecepatan pertambahan jarak antara Pak Karim dengan balon saat balon berada pada ketinggian 50m?

Itulah contoh masalah laju yang berkaitan, dalam hal ini ada kaitan antara kecepatan naiknya balon dengan kecepatan pertambahan jarak antara balon dan Pak Karim.

Jika t = lamanya waktu setelah balon dilepas (dalam detik)
h = ketinggian balon
s = jarak antar balon dengan Pak Karim
Perhatikan gambar berikut



Diketahui $\dfrac{dh}{dt} = 8$

Akan dihitung $\dfrac{ds}{dt}$ saat h = 50.

Dengan menggunakan teorema Phitagoras didapat $s^2 = 150^2 + h^2$.

Dengan melakukan pendiferensialan implisit terhadap t, didapat $2s\dfrac{ds}{dt} = 2h\dfrac{dh}{dt} \Leftrightarrow s\dfrac{ds}{dt} = h\dfrac{dh}{dt} \Leftrightarrow \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{h}{s} \times \dfrac{dh}{dt}$ (sudah diketahui $\dfrac{dh}{dt} = 8$)

Dari hubungan $s^2 = 150^2 + h^2$, saat h = 50 didapat $s = \sqrt{150^2 + 50^2} = 50\sqrt{10}$.

Sehingga didapat $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{50}{50\sqrt{10}} \times 8 = \dfrac{8}{\sqrt{10}} = \dfrac{8}{10}\sqrt{10} \approx 2{,}53$

Jadi, saat ketinggian balon 50m, kecepatan pertambahan jarak antara balon dengan Pak Karim adalah 2,53 m/detik.

Contoh di atas menggambarkan prosedur umum yang biasa dilakukan dalam pemecahan masalah laju yang berkaitan, yaitu:

1. Buat gambar/sketsa dari permasalahan, beri variabel-variabel yang sesuai.
2. Tentukan apa yang diketahui dan apa yang akan dicari dari variabel-variabel tersebut. Identifikasi perubahan sebagai derivatif.
3. Tuliskan persamaan yang menyatakan kaitan antara variabel-variabelnya.
4. Tambahkan hubungan diantara variabel-variabel tersebut dengan cara mencari derivatifnya (biasanya secara implisit).
5. Subtitusikan nilai yang diketahui untuk variabel maupun derivatifnya, lalu carilah penyelesaiannya.
6. Berikan tafsiran dari hasil yang diperoleh.

C. LAJU TITIK YANG BERGERAK

Jika kita mengendarai mobil dari dari satu kota ke kota lain yang berjarak 120 km selama 2 jam, maka kecepatan rata-ratanya adalah 60 km/jam. Kecepatan rata-rata adalah jarak dari posisi pertama ke posisi kedua dibagi waktu tempuhnya. Tapi pada saat jalan, spedometer tidak selalu menunjukkan angka 60, kadang 0, kadang 50, bahkan kadang juga 90. Jadi apa yang diukur oleh spedometer? Ya, spedometer itu mengukur kecepatan sesaat.

Jika $S(t)$ menunjukkan jarak yang ditempuh selama waktu t, maka kecepatan rata-rata adalah $v_{rata-rata} = \dfrac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}$. Jika Δt diambil cukup kecil, maka $v_{rata\text{-}rata}$ yang dihitung adalah kecepatan sesaat. Jadi, kecepatan sesaat $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}$. Sebagaimana telah Anda pelajari keadaan tersebut menunjukkan $v = S'(t)$, atau dapat juga dituliskan $v(t) = S'(t)$ atau $v(t) = \dfrac{dS}{dt}$.

Dengan pengertian yang sama, percepatan rata-rata adalah selisih kecepatan dibagi dengan selisih waktu. Sehingga didapat percepatan sesaat adalah $a(t) = v'(t)$ atau $a(t) = \dfrac{dv}{dt}$.

Contoh:

Sebuah partikel bergerak pada garis lurus, dengan posisi S pada saat t ditunjukkan dengan $S(t) = 2t^3 + 15t^2 + 24t + 3$, t dalam detik dan S dalam meter.

a. Tentukan kecepatan awalnya
b. Kapan kecepatan partikel setengah dari kecepatan awalnya?
c. Berapa percepatannya saat $t = 3$?
d. Kapan partikel bergerak dengan kecepatan tetap? Dan berapa kecepatan tetap tersebut?

Jawab:

$S(t) = 2t^3 - 9t^2 + 24t + 3$, maka $v(t) = 6t^2 - 18t + 24$ dan $a(t) = 12t - 18$

a. Kecepatan awal $v_0 = v(t=0) = 24$
b. Kecepatan partikel setengah dari kecepatan awal, berarti kecepatannya 12.

   Kecepatan $v = 12$ dicapai saat $v(t) = 6t^2 - 18t + 24 = 12$

   $\Leftrightarrow\ 6t^2 - 18t + 12 = 0$

   $\Leftrightarrow\ 3t^2 - 9t + 6 = 0$

   $\Leftrightarrow\ (3t-6)(t-1) = 0$

   $\Leftrightarrow\ t = 2$ atau $t = 1$
c. Percepatan saat $t = 3$ adalah $a(t=3) = 12 \times 3 - 18 = 18$
d. Bergerak dengan kecepatan tetap, berarti $a = 0$. Nilai $a = 0$ dicapai saat $a(t) = 12t - 18 = 0 \Leftrightarrow 12t = 18 \Leftrightarrow t = 3/2$

Latihan

1. Sebuah benda bergerak sepanjang garis koordinat mendatar berarah $= t^3 - 6t^2 + 9t$, dengan s diukur dalam meter,dan t dalam detik.
   a. Kapan kecepatannya positif?
   b. Berapa percepatannya pada saat kecepatan 0?
   c. Kapan percepatannya positif?
2. Perusahaan jasa pengiriman barang menghitung, biaya operasional sebuah truk adalah $(100 + 4v)$ rupiah untuk setiap km, jika truk berjalan dengan kecepatan *v* km/jam. Pengemudi dan kenek dibayar Rp. 10.000,00 tiap jam. Pada kecepatan berapa biaya pengiriman ke suatu kota yang berjarak *k* km akan paling murah? Peraturan lalu lintas membatasi kecepatan truk pada $40 \leq v \leq 80$ km/jam

DAFTAR PUSTAKA

Dale Varberg, Edwin J Purcell.1987. *Kakulus dan geometri analitis.* jilid 1.Edisi Tujuh. Terjemahan I Nyoman susila, M.Sc, Batam:Interaksa

Hutahaean, L., 1988. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik Edisi Kelima Jilid 1*, Jakarta: Erlangga
.
Steward, J., 2001. *Kalkulus Edisi Keempat Jilid 1*, Jakarta: Erlangga.

Swokowski.1983. *Alternate Edition Calculus With Analytic Geometry*. Boston: Prindle Weber & Schmidt.