BAB I. SISTEM KOORDINAT, NOTASI & FUNGSI

(Pertemuan ke 1 & 2)

PENDAHULUAN

Diskripsi singkat

Pada bab ini akan dijelaskan tentang bilangan riil, sistem koordinat Cartesius, notasi-notasi yang sering digunakan dalam matematika, fungsi dan grafik. Selain itu dibicarakan juga tentang tipe-tipe fungsi serta operasi aljabar.

Manfaat

Pengertian-pengertian dasar yang berkaitan dengan kalkulus sangat diperlukan untuk dipahami lebih dulu, sebelum lebih lanjut belajar tentang kalkulus.

Relevansi

Berbicara tentang kalkulus tidak akan terlepas dari pembicaraan tentang sistem bilangan. Setiap fungsi pasti berkaitan dengan pengertian tentang peubah, yang meliputi peubah bebas dan tak bebas. Banyak notasi-notasi yang harus dimengerti sebelum lebih jauh mempelajari tentang macam-macam fungsi serta lebih lanjut tentang kalkulus. Operasi aljabar sangat penting di dalam hitung kalkulus,, di sini sifatnya hanya mengulang hal-hal yang pokok.

Learning Outcomes

Mahasiswa dapat mengenal berbagai macam sistem bilangan, notasi-notasi yang sering digunakan, sistem koordinat yang sering digunakkan dalam bidang teknik. Serta mahasiswa paham tentang macam-macam fungsi, terutama yang berkaitan dengan bidang mesin.

PENYAJIAN

1.1. Bilangan Riil (Nyata)

Kalkulus didasarkan pada sistem bilangan riil dan sifat-sifatnya. Untuk mengetahui bilangan riil, dimulai dengan sistem bilangan yang lebih sederhana.

1. Bilangan **asli**, yaitu: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

   Sistem bilangan yang paling sederhana adalah bilangan-bilangan asli, bilangan ini hanya dapat digunakan untuk menghitung jumlah buku, orang, uang, dsb. Jika digandengkan dengan negatifnya dan nol, maka diperoleh bilangan-bilangan bulat.

2. Bilangan-bilangan **bulat**, yaitu: . . . . , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

   Bila untuk mengukur panjang, berat atau tegangan listrik, bilangan bulat tidak memadai, bilangan ini terlalu kurang untuk memberikan ketelitian yang cukup, maka diperlukan bilangan rasional.

3. Bilangan **rasional**, bentuknya a/b, contohnya yaitu: 3/4, -7/8, 21/5, 19/-2, 16/2, dan -17/1

   a = pembilang (*numerator*) dan b = penyebut (*denominator*) $\neq$ 0 (tidak boleh sama dengan nol).

   Bilangan rasional dapat ditulis:

   a. Tipe desimal berakhir (*terminating*). Contoh: 5/2 = 2,5; 3/4 = 0,75; 5/8 = 0,625
   b. Tipe berulang (*repeating*). Contoh: 2/3 = 0,66666…, 3/7 = 0,428571428571428571.. , 22/7 = 3,142857142857142857142857142857142857.

   Ternyata bilangan rasional belum berfungsi mengukur **semua** panjang. Seorang Yunani pada beberapa abad sebelum Masehi menemukan angka $\sqrt{2}$, merupakan panjang sebuah segitiga siku-siku samakaki yang panjang sisinya satu. Bilangan Ini tidak dapat dituliskan sebagai suatu hasil bagi dari dua bilangan bulat. Jadi $\sqrt{2}$ adalah bilangan tak-rasional (irasional).

4. Bilangan irasional, mempunyai desimal yang tak berakhir dan tidak berulang.

   Contohnya:

   $\pi \approx$ 3,14159265358979323846264338327950…, Keliling lingkaran = π d

   $\sqrt{2} \approx$ 1,41421356237309504880168872420970…

5. Dalam bidang teknik, sering digunakan konstanta, e (bilangan Napier = transendental):

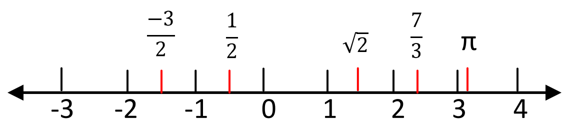
   e = 2,71828182845904523536028747135…

$^{10}\log a = \log a \rightarrow$ bilangan basis (pokok) = 10

$^{e}\log a = \ln a \rightarrow$ bilangan basis (pokok) = e

Bilangan-bilangan riil adalah sekumpulan bilangan (**rasional** dan **tak-rasional**) yang dapat mengukur panjang, bersama-sama dengan **negatifnya** dan **nol.**

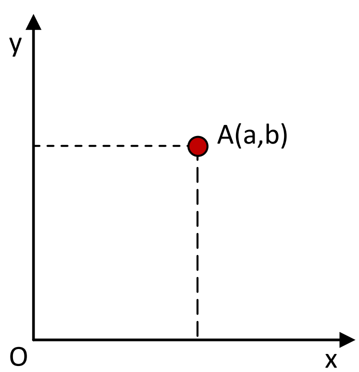
Bilangan-bilangan riil dapat dipandang sebagai pengenal (label) untuk titik-titik sepanjang sebuah garis mendatar. Di sana bilangan-bilangan ini, yang mengukur jarak ke kiri dan ke kanan dari suatu titik tetap yang disebut titik asal dan diberi label 0 (lihat **Gambar 1-1**).



Gambar 1-1

1.2. Koordinat Cartesius

Koordinat yang lazim digunakan dalam bidang teknik adalah koordinat Cartesius dan koordinat kutub. Koordinat Cartesius diwakili dengan dua atau tiga sumbu yang saling berpotongan tegak lurus (x, y atau x, y dan z), sedangkan koordianat kutub (koodinat poler) diwakili dengan jejari kelengkungan dan sudut (r, θ).



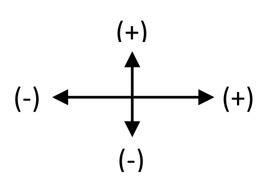
Gambar 1-2

O disebut titik asal (origen), merupakan perpotongan antara sumbu x dan sumbu y.

Contoh: titik A, disebut mempunyai koordinat (a,b), maka a adalah absis dan b adalah ordinat titik A.

Perjanjian : dari O ke kanan adalah positif, sebaliknya negatif, dan dari O ke atas adalah positif dan sebaliknya negatif.

Koordinat Cartesius bidang, disajikan oleh dua sumbu mendatar dan sumbu tegak. Sumbu mendatar (horizontal), yaitu sumbu x disebut absis (absisca) dan sumbu tegak disebut ordinat.



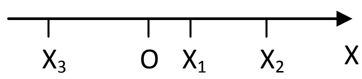
Gambar 1-3

Perubahan dan jarak

Ada dua macam perubahan, yaitu pertambahan (*increment*) dan perkurangan (*decrement*). Lazimnya, setiap perubahan disebut pertambahan. Perubahan dari x_1 ke x_2 : *increment* dan dari x_2 ke x_1 : *decrement*.

Perubahan dari x_1 ke x_2, ditulis Δx, maka $\Delta x = x_2 - x_1$

Perubahan dari x_1 ke x_3, ditulis Δx, maka $\Delta x = x_3 - x_1$



Gambar 1-4

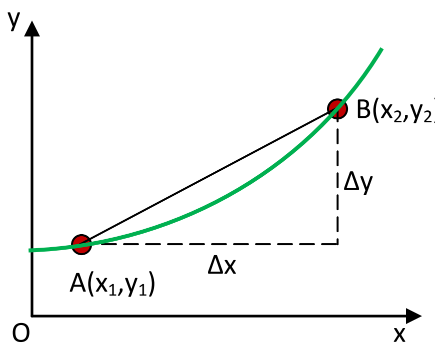
Perubahan pada arah y, juga ditulis dengan cara yang sama. Perubahan dari y_1 ke y_2, ditulis Δy, maka

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

Jarak dari x_1 ke x_2, merupakan harga mutlak dari perubahan, maka

$$|\Delta x| = |x_2 - x_1|$$

|… … … . | = harga mutlak = harga absolut.



Gambar 1-5

Misalnya titik A & B, masing-masing mempunyai koordinat A(x_1,y_1) & B(x_2,y_2).

Jarak AB adalah merupakan sisi miring segitiga yang dua sisi siku-sikunya adalah Δx & Δy. Berdasar rumus Phytagoras, maka

$$\overline{AB}^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$
$$\overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$
$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$\overline{AB} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

1.3. Notasi-notasi

Interval

Jika diketahui dua bilangan a dan b dengan b>a, maka himpunan semua bilangan antara a dan b disebut **interval terbuka** dan ditulis $a < x < b$ atau (a, b). Bila nilai termasuk a dan b, disebut interval tertutup dan ditulis $a \le x \le b$ atau [a, b].

$a < x \le b$, interval terbuka kiri dan tertutup kanan, atau (a, b] a ≤ x < b, interval tertutup kiri dan terbuka kanan, atau [a, b).

Simbul jumlahan

Simbul jumlahan ditulis dengan notasi Σ atau sigma. Digunakan untuk menjumlah bilangan-bilangan yang berurutan.

Contoh:

a) 1 + 2 + 3 + 4 ditulis → $\sum_{1=1}^{i=4} i$

b) 4 + 5 + 6 + 7 ditulis → $\sum_{i=4}^{i=7} i$

Fakulteit

Simbul fakulteit atau faktorial atau fakultas ditulis dengan simbul (!), digunakan untuk menyajikan perkalian angka-angka berurutan.

Misalnya:

a) 1.2.3.4 ditulis → 4!

b) 4.5.6.7 ditulis → $\frac{7.6.5.4.3.2.1}{3.2.1} = \frac{7!}{3!}$

Kombinasi

Simbul kombinasi adalah C. jika disediakan empat huruf: a, b, c dan d. Dari keempat huruf tersebut akan dibuat pasangan-pasangan, tiap pasangan terdiri dua huruf, dan tidak saling dipertukarkan (pasangan ab = ba). Maka pasangan yang akan terjadi adalah ab,, ac, ad, bc, bd, dan cd. Dikatakan, mengambil dua huruf untuk dipasangkan dari empat huruf yang tersedia, cara ini dikenal dengan "kombinasi".

Dari contoh di atas, terdapat 6 pasang huruf yang tidak sama dan tidak saling dipertukarkan posinya, dan harga 6 diperoleh dari:

$$6 = \frac{4!}{2!.2!} = \frac{4.3.2.1}{2.1.2.1} = \frac{24}{4}$$

Rumus kombinasi:

$$C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!.r!}$$

Binomium Newton

Dari segitiga Pascal:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

. . . . dst . . .. .

Hanya mudah didapat dan diingat bila pangkatnya positif dan kecil. Bila pangkatnya besar, bentuk di atas dapat dijabarkan dengan rumus:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

Bentuk ini disebut: Binomium Newton. Sedangkan $\binom{n}{i}$ disebut koefisien Binomium.

Contoh: carilah koefisien a^7b^5 dari bentuk $(a+b)^{12}$?

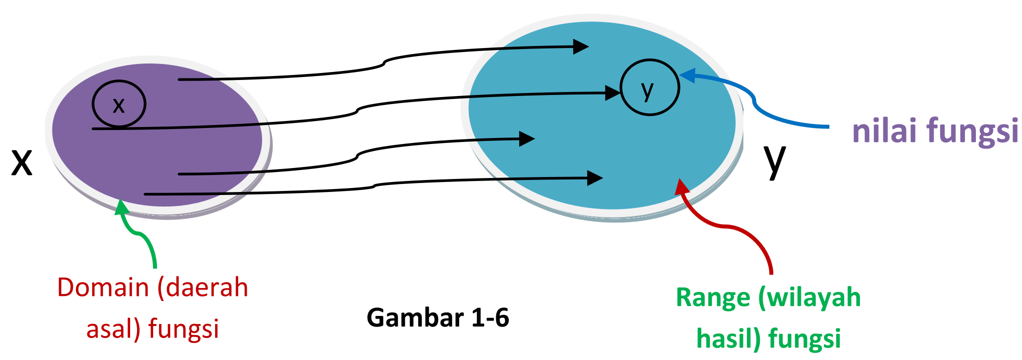
Penyelesaian:

Dari keterangan soal, maka dapat diketahui bahwa n = 12, dan I = 5, sehingga koefisien a^7b^5 adalah kombinasi, $C_{n,i} = \binom{n}{i} = \binom{12}{5} = \frac{12!}{5!}$

1.4. Fungsi & Grafik

Definisi: suatu peubah y disebut fungsi dari peubah x, bila diantara x dan y terdapat suatu aturan yang menyatakan hubungan (korespondensi) antara x dan y, sehingga untuk setiap harga x yang dimungkinkan terdapat suatu harga y.

Hubungan antara x dan y sebagai fungsi digunakan simbul y = f(x), y = g(x) atau y = y(x).

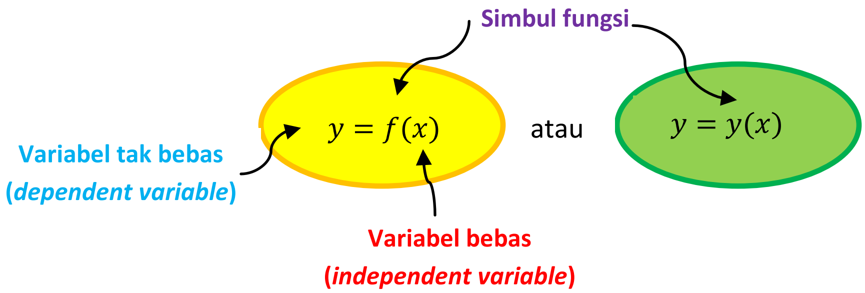


Gambar 1-6

x dan y adalah himpunan bilangan.

Peubah atau variabel adalah simbul yang mewakili salah satu bilangan dari sekumpulan bilangan-bilangan.

Fungsi dengan satu variabel bebas



Gambar 1-7

Fungsi: aturan yang menghubungkan antara variabel x yang dipilih dengan nilai y tertentu.

Contoh.

1. Luas lingkaran, $A = \pi\, R^2$, dengan R = jari-jari lingkaran, maka $\rightarrow A_{lingk} = A(R)$
2. Volume bola, $V = \frac{4\pi}{3}\, R^3$, dengan R = jari-jari bola, maka $\rightarrow V_{bola} = V(R)$
3. Volume benda, $V_t = V_0\,(1 + \alpha t)$, dengan t = temperatur benda, maka $\rightarrow V_t = V(t)$
4. Jarak tempuh benda yang bergerak dengan kecepatan konstan v, $S = v\,t$, dengan t adalah waktu tempuh benda, maka $\rightarrow\ S = S(t)$.
5. Gaya untuk menggerakkan suatu massa tetap m, dengan percepatan a, yaitu $F = m\,a$, maka $\rightarrow F = F(a)$.

Fungsi dengan lebih dari satu variabel bebas

$$\boldsymbol{w = w(x, y, \ldots\ldots, dst)}$$

Variabel bebasnya x, y, dst.

Contoh

1. Luas segi empat, $A = x\,y$, dengan x = panjang dan y = lebar, maka $\rightarrow\ A = A(x, y)$
2. Momen maksimum balok di atas tumpuan sederhana dengan variasi bentang *l* dan beban merata *q*, yaitu: $M_{maks} = \frac{1}{2}\,ql^2$, maka $\rightarrow\ M = M(q, l)$.

1.5. Tipe -Tipe Fungsi

Fungsi suku banyak (polinomial)

Bentuk fungsi polinomial :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ \dots . + a_1 x + a_0$$

Dimana koefisien $a_n, a_{n-1}, \dots ., \ a_1, a_0$ adalah bilangan riil, pangkat adalah bilangan bulat positif. Pangkat tertinggi adalah x^n, maka disebut polinomial derajat n.

Macam-macam fungsi polinomial

a. Fungsi konstanta, $f(x) = A, \rightarrow$ polinomial derajat nol
b. Fungsi linier, $P(x) = ax + b, a \neq 0, \rightarrow$ polinomial derajat satu (berupa garis lurus)
c. Fungsi kuadratik, $P(x) = ax^2 + bx + c\ ,\ a \neq 0\ ,\ \rightarrow$ polinomial derajat dua (bentuk parabola)
d. Fungsi polinomial derajat tiga (3) atau lebih:
   $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \rightarrow$ polinomial derajat tiga (3)
   $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ \dots . a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n$

Fungsi rasional

Bentuk fungsi rasional:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ \dots . + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ \dots . + b_1 x + b_0}$$

P(x) = polinomial derajat n

Q(x) = polinomial derajat m, *Q(x)* $\neq 0$

Fungsi komposit (bersusun)

Jika : $y = f(u) = f\big(g(x)\big)$ atau ditulis : $y = (f o g)(x)$

$y = f(u) \ \rightarrow u$ dalam domain *f*

$u = g(x) \ \rightarrow x$ dalam domain g

f dan *g* adalah fungsi

Contoh: jika diketahui: $f(x) = 2x^2 + 1$ dan $g(x) = x + 2$.

Maka: $(g o f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x^2 + 1) = (2x^2 + 1) + 2 = 2x^2 + 3$.

Sedangkan: $(fog)(x) = f(g(x)) = f(x+2)^2 + 1 = 2(x^2 + 4x + 4) + 1 = 2x^2 + 8x + 9$

Fungsi invers

Disebut fungsi invers : $x = f^{-1}(y)$, jika dan hanya jika $y = f(x)$

f merupakan fungsi satu-satu, $\rightarrow$ maka setiap elemen *y* (dalam wilayah fungsi) **hanya** mempunyai satu hubungan tertentu dengan *x* (dalam daerah asal fungsi).

$$y = f(x) \text{ dan } x = f^{-1}(y)$$

Contoh: tentukan fungsi invers dari: f(x) = 2x + 6

Penyelesaian: misal y = 2x + 6,

maka 2x = y – 6 → $x = \frac{1}{2}y - 3$

dengan demikian: $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y - 3$ atau $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 3$

Fungsi kontinu

Jika $y = f(x)$ merupakan fungsi yang terdefinisi pada interval terbuka yang memuat c, dan dipenuhi syarat-syarat:

a. $\lim_{x \to c} f(x)$ ada, $\rightarrow$ limit kiri = limit kanan

b. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

c. $f(c)$ terdefinisi

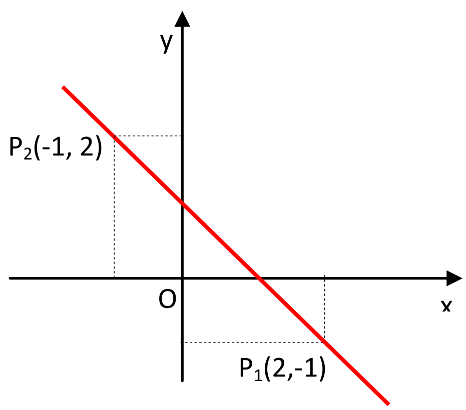
1. Fungsi linier (Garis Lurus)

Persamaan garis melalui titik P_1 dan P_2

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$$

$$\rightarrow \frac{y-(-1)}{2-(-1)} = \frac{x-2}{-1-2}$$

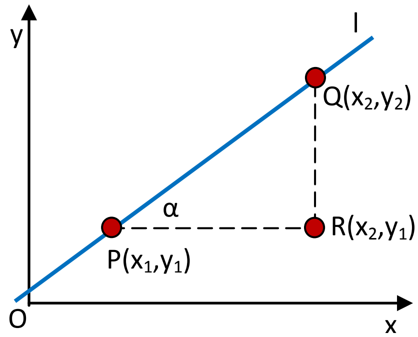
$$\rightarrow y = -x + 1$$



Gambar 1-8

Kemiringan suatu garis

Jika diketahui suatu garis l, seperti pada gambar di bawah ini.



Gambar 1-9

Pada garis l, ditentuan dua titik sembarang, $P(x_1,y_1)$ & $Q(x_2,y_2)$.

Pertambahan searah sumbu x, yaitu $\Delta x = x2 - x1$, sedangkan pertambahan searah sumbu y, yaitu $\Delta y = y_2 - y_1$.

Δx = lari (run) dan Δy = naik (rise)

Definisi: kemiringan garis, $\boxed{m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$

Pandang Δ PQR, siku-siku di R. bila α adalah sudut antara garis l dengan sumbu x positif, maka :

$$\tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}\text{, atau}$$

$$\boxed{m = \tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

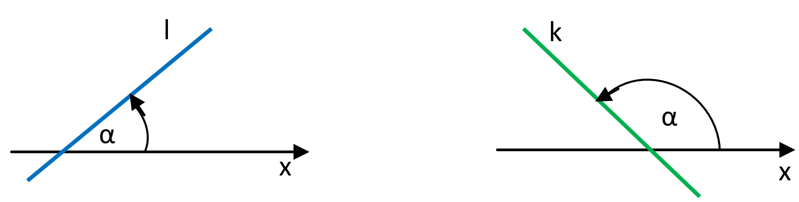
Persamaan umum garis l: $\boxed{y = mx + n}$

m = kemiringan (disebut juga *slope*/*gradient*/koefisien arah garis).

$= (\Delta y)/(\Delta x)$

n = titik potong garis dengan sumbu y

Penunjukan slope: berlawanan arah dengan arah putaran jarum jam, lihat dua garis l & k di bawah ini.



Gambar 1-10

Bila y sejajar sumbu x, maka $\alpha = 90^o$ dan $\tan\alpha = 0$. Jadi persamaannya menjadi:

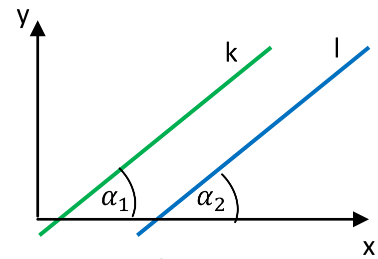
$$y = b$$ b = konstanta

Bila y tegak lurus sumbu x, maka α = 90° dan tan α = ∞, maka $y = \infty$ (tak tentu). Jadi persamaan garis tegak lurus sumbu x, atau sejajar sumbu y adalah:

$$x = c$$ c = konstanta

Gradien dua garis saling sejajar

Sudut kemiringan garis k adalah α_1, dan garis l adalah α_2. Jika dua garis k dan l saling sejajar. maka $\alpha_1 = \alpha_2$, dan $\tan\alpha_1 = \tan\alpha_2$. Jadi syarat perlu dan cukup agar dua garis saling sejajar:



Gambar 1-11

$$m_1 = m_2$$ atau $$\tan\alpha_1 = \tan\alpha_2$$

Gradien dua garis saling tegak lurus

Garis k berpotongan tegak lurus terhadap garis l. Dari gambar: $\alpha_2 = 90^o + \alpha_1$, maka

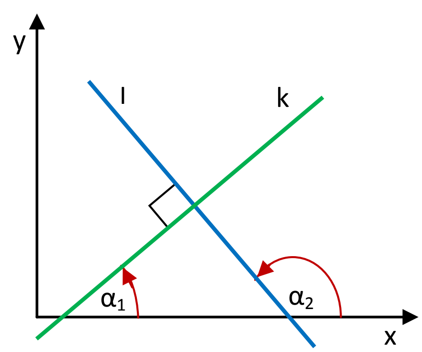
$$\tan\alpha_1 = m_1$$

$$\tan\alpha_2 = m_2 = \tan(90^o + \alpha_1)$$

$$m_2 = \frac{\sin(90^o+\alpha_1)}{\cos(90^o+\alpha_1)}$$

$$m_2 = \frac{\cos\alpha_1}{-\sin\alpha_1}$$

$$m_2 = -\frac{1}{\tan\alpha_1} = -\frac{1}{m_1}$$



Gambar 1-12

Syarat perlu dan cukup agar dua garis saling berpotongan tegak lurus adalah:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$ atau $$m_1.m_2 = -1$$

Persamaan garis dengan koefisien arah m, dan melalui suatu titik.

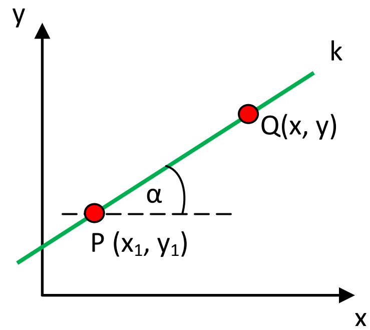
Pandang garis k, titik P dan Q terletak pada garis tersebut. Dari titik P menuju Q, maka:

$$\Delta x = x - x_1$$

$$\Delta y = y - y_1$$

$$m = \tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Maka: $$y - y_1 = m(x - x_1)$$



Gambar 1-13

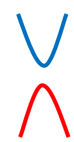
adalah persamaan ggaris dengan koefisien arah m, dan melalui titik $P(x_1, y_1)$.

2. **Fungsi Kuadratik (parabola)**

a. Persamaan umum : $$y = ax^2 + bx + c$$

$a > 0 \rightarrow$ parabola membuka ke atas $\rightarrow$

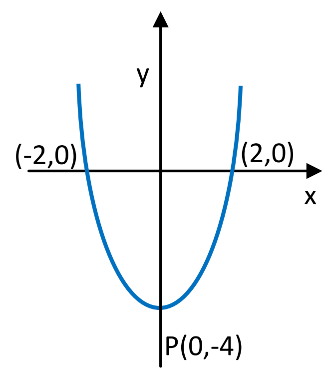
$a < 0 \rightarrow$ parabola membuka ke bawah $\rightarrow$


Gambar 1-14

c = titik potong parabola dengan sumbu y

Contoh persamaan parabola: $y = x^2 - 4$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

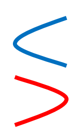


Gambar 1-15

b. Persamaan umum : $$x = ay^2 + by + c$$

$a > 0 \rightarrow$ parabola membuka ke kanan $\rightarrow$

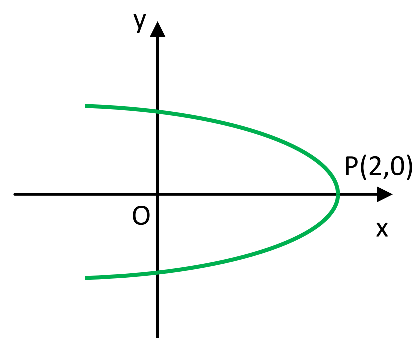
$a < 0 \rightarrow$ parabola membuka ke kiri $\rightarrow$


Gambar 1-16

c = titik potong parabola dengan sumbu x

Contoh: Persamaan parabola: $x = -y^2 + 2$

Y	-3	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**
x	-7	**-2**	**1**	**2**	**1**	**-2**	**-7**



Gambar 1-17

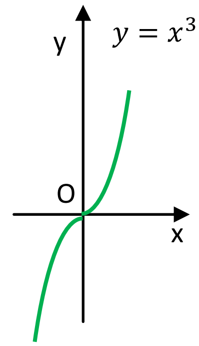
3. Fungsi Pangkat Tiga

Contoh: $y = x^3$

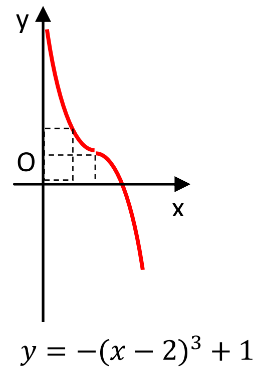
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-27	-8	-1	0	1	8	27

Contoh: $y = -(x-2)^3 + 1$

x	0	1	2	3	4
y	9	2	1	0	-7



Gambar 1-18



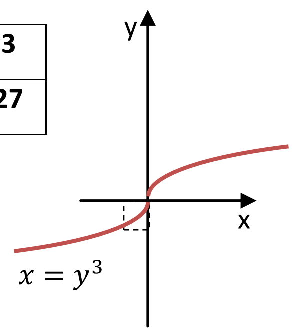
Gambar 1-19

Contoh: $x = y^3$

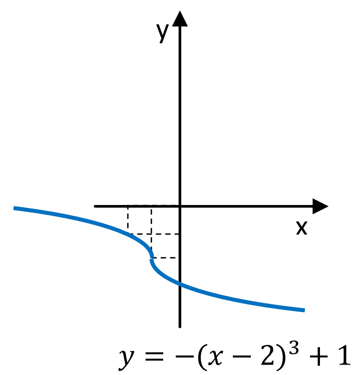
Y	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	-27	-8	-1	0	1	8	27

Contoh: $x = -(y+2)^3 - 1$

Y	-4	-3	-2	-1	0
x	7	0	-1	-2	-9



Gambar 1-20



Gambar 1-21

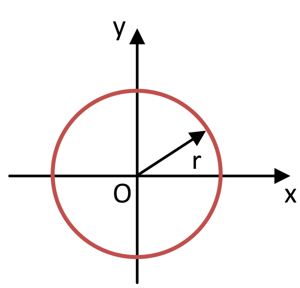
4. Kurva Lingkaran

Lingkaran berpusat di titik O(0,0):

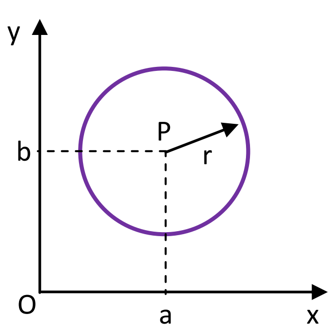
$$x^2 + y^2 = r^2$$

Lingkaran berpusat di titik P(a,b):

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$



Gambar 1-22

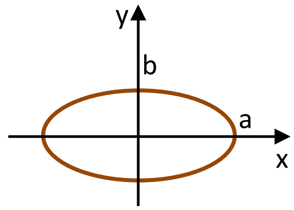


Gambar 1-23

5. **Kurva Ellips**

Persamaan ellips:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Gambar 1-24

1.6. Operasi aljabar (review)

Aturan pembagian

0 : a = 0, untukk setiap bilangan riil a $\neq$ 0

a : 0 = tidak terdefinisi, untuk setiap bilangan riil a.

Eksponen

$$x^0 = 1, \quad x^{-1} = \frac{1}{x}, \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}\,,$$

$$x^{m/n} = \left(x^{1/n}\right)^m = (x^m)^{1/n} = \sqrt[n]{x^m}$$

$$x^m . x^n = x^{m+n}, \quad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}, \quad x \neq 0$$

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

$$(ax)^n = a^n x^n\,, \quad \left(\frac{x}{a}\right)^n = \frac{x^n}{a^n}, \quad a \neq 0$$

Akar-akar fungsi kuadrat

$$ax^2 + bx + c = 0 \;\rightarrow\; x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x^2 + 4x - 12 = 0 \;\rightarrow\; x_1 = -6 \;\;\&\; x_2 = 2$$

Atau dengan faktorisasi:

$$x^2 + 4x - 12 = (x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$(x + 6)(x - 2) = 0$$

$$x + 6 = 0 \;\rightarrow\; x_1 = -6$$

$$x - 2 = 0 \;\rightarrow\; x_2 = 2$$