BAB II

TITIK PUSAT BERAT DAN SENTROID

Tujuan Pengajaran:

· Untuk memberikan penjelasan tentang titik pusat berat (*center of gravity*), meliputi: pengertian, aplikasi, dan penentuannya

- Untuk memberikan penjelasan tentang sentroid, meliputi: pengertian, perbedaan dengan titik pusat berat, penentuan sumbu sentroid, dan penentuan sentroid suatu luasan komposit

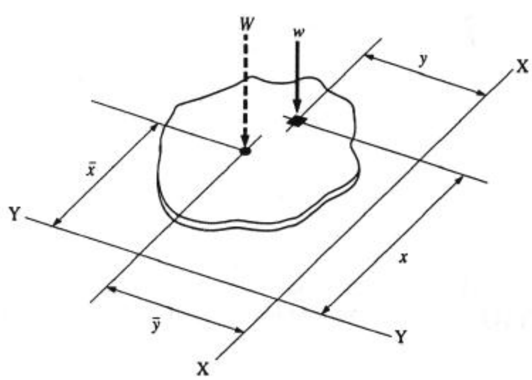
2.1 Pendahuluan

Setiap benda dapat dianggap sebagai susunan partikel-partikel kecil, masing-masing bereaksi terhadap gaya gravitasi. Gaya-gaya yang bekerja pada partikel-partikel sebuah benda menunjukkan berat benda. Untuk keperluan praktis, gaya-gaya tersebut dianggap sejajar dan bereaksi terhadap gaya vertikal ke arah bawah. Resultan dari masing-masing gaya gravitasi yang bekerja pada tiap partikel benda selalu melalui titik tertentu (*definite point*) yang disebut titik pusat berat (*center of gravity*).

Berat adalah gaya dan dapat dianggap sebagai vektor. Sebagai vektor, berat memiliki besar, arah, dan titik aplikasi. Karena arah gaya gravitasi diketahui, maka hanya besar dan titik aplikasi yang harus ditentukan. Hal ini bisa ditentukan baik secara eksperimen maupun analitis. Pada bab ini, pembahasan dibatasi pada penentuan besar dan lokasi titik pusat berat secara analitis.

2.2 Titik Pusat Berat

Perhatikan bentuk plat datar tidak beraturan dengan tebal seragam dan bahan yang homogen pada gbr. 2.1. Plat dibagi menjadi elemen kecil tak berhingga (*infinitesimal elements*), suatu elemen berjarak *x* dari garis sumbu Y-Y dan berjarak *y* dari sumbu X-X. Berat *w* dari setiap elemen membentuk system gaya sejajar, resultan adalah berat *W* dari plat. Besar dari berat total dapat ditulis secara matematika sebagai: $W = \Sigma w$



Gambar 2.1 Penentuan Titik Pusat Berat

Untuk menentukan lokasi titik pusat berat (*W*) digunakan teorema Varignon. Teorema ini mengatakan bahwa "momen dari resultan terhadap suatu titik atau sumbu harus sama dengan jumlah aljabar dari momen berat masingmasing terhadap titik atau sumbu yang sama". Pernyataan teorema Varignon untuk menentukan titik pusat berat:

$$W\bar{x} = \sum wx$$
$$W\bar{y} = \sum wy \quad (2.2)$$

Penyelesaian pers. (2.2) akan menghasilkan:

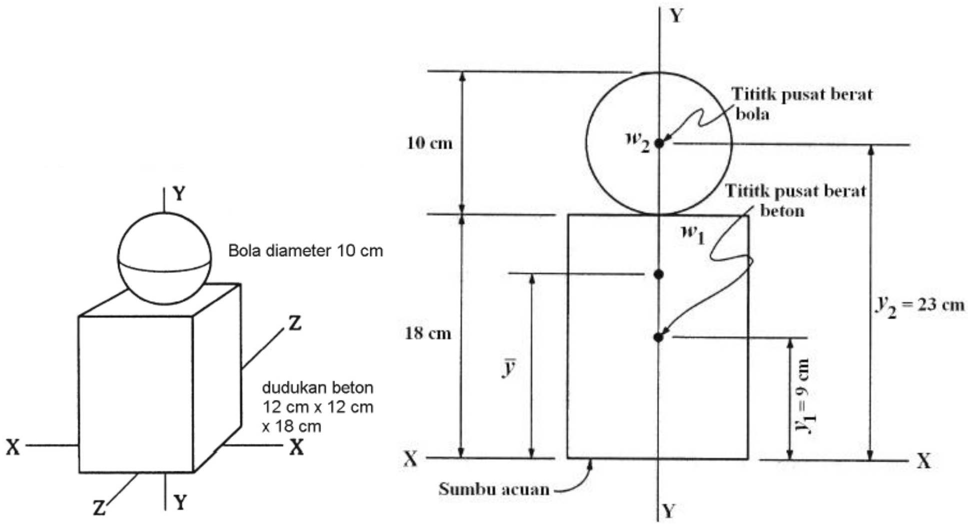
$$\bar{x} = \frac{\sum wx}{W} \text{ atau } \frac{\sum wx}{\sum w}$$
$$\bar{y} = \frac{\sum wy}{W} \text{ atau } \frac{\sum wy}{\sum w} \quad (2.3)$$

Jika plat mempunyai sumbu simetri, maka titik pusat berat akan terletak pada sumbu simetri tersebut. Apabila plat memiliki dua sumbu simetri yang saling tegak lurus (sebagai contoh, plat persegi-panjang atau plat lingkaran), maka titik pusat berat akan terletak pada potongan dari sumbu simetri. Prosedur untuk menentukan titk pusat berat adalah sebagai berikut:

1. Sket benda yang menunjukkan semua ukuran. Tentukan sumbu simetrinya.
2. Bagi benda menjadi beberapa komponen. Masing-masing bagian harus proporsional sehingga beratnya dapat ditentukan dan titik pusat beratnya dapat ditentukan.
3. Tentukan sumbu acuannya.
4. Gunakan pers. (2.2) dan/atau pers. (2.3) untuk menentukan x dan/atau y .

Contoh Soal 2.1:

Sebuah bola baja berdiameter 10 cm ditancapkan secara kuat pada dudukan beton persegi berukuran 12 cm x 12 cm dengan tinggi dudukan beton 18 cm. Tentukan titik pusat gravitasi benda sebagaimana ditunjukkan pada gbr. 2.2.



Gambar 2.2 Unit Dua Buah Benda dan Lokasi Titik Pusat Berat

Penyelesaian:

Unit dua benda adalah simetris terhadap sumbu Y-Y. Maka, pusat berat akan terletak pada sumbu Y-Y. Rapat berat satuan material dapat diperoleh dari lampiran tabel E. Nyatakan berat dudukan beton dengan *w*1 dan berat bola baja dengan *w*2 (lihat gambar 2.3). Berat masing-masing komponen dihitung sebagai perkalian volume (dalam m3) dan rapat berat satuan (dalam N/m3) sebagai berikut:

$$w_1 = (12 \times 12 \times 18)\ \text{cm}^3 \left(\frac{1\ \text{m}^3}{10^6\ \text{cm}^3}\right) 23{,}6\ \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} = 61{,}17\ \text{N}$$

$$w_2 = \left(\frac{4}{3} \times \pi \times 5^3\right) \text{cm}^3 \left(\frac{1 \times \text{m}^3}{10^6 \times \text{cm}^3}\right) \times 77\ \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} = 40{,}32\ \text{N}$$

Sehingga berat total adalah:

W = *w*1 + *w*2 = 61,17 + 40,32 = 101,49 N

Menggunakan dudukan beton bawah sebagai sumbu acuan (dinyatakan sebagai sumbu X-X pada gambar 2.3), maka pusat berat dapat dihitung:

$$\bar{y} = \frac{\sum wy}{W} = \frac{w_1 y_1 + w_2 y_2}{W}$$

$$= \frac{61{,}17\,(9) + 40{,}32\,(23)}{101{,}49} = 14{,}56 \text{ cm}$$

2.3 Sentroid dan Sumbu Sentroid

Jika kita menganggap bahwa bentuk plat datar tidak beraturan yang ditunjukkan pada gambar 2.1 homogen dan mempunyai tebal seragam, maka berat plat akan sebanding dengan luasannya. Maka, kita dapat menggunakan luasan menggantikan (gaya) berat pada pers. (2.2) untuk menentukan titik pusat sentroid suatu luasan. Ini sama (ekuivalen) dengan mengabaikan tebal (tebal plat mendekati nol) dan dapatkan titik pusat beratnya. Dalam pembahasan sebelumnya, perhatian diberikan kepada benda yang memiliki massa dan berat. Seringkali, titik pusat berat dari luasan diperlukan. Karena luasan tidak memiliki massa, sehingga tidak boleh mempunyai berat, atau, secara teoritis, tidak mempunyai titik pusat berat. Maka, titik pusat luas di dalam suatu luasan akan sama (analog) dengan titik pusat berat dari sebuah benda yang memiliki massa, umumnya disebut sentroid dari luasan.

Prosedur untuk mendapatkan sentroid dari suatu luasan adalah sama dengan prosedur untuk memperoleh titik pusat berat, kecuali untuk penggantian berikut: *a* menggantikan *w*; *A* menggantikan *W*. Bentuk *a* menyatakan luasan yang sangat kecil dari suatu luasan dan *A* menyatakan $\sum a$ (atau, luas total). Menerapkan teorema Varignon, "momen dari luas total terhadap suatu sumbu akan sama dengan jumlah aljabar dari momen-momen komponen luasan terhadap sumbu yang sama". Catatan bahwa momen luas adalah analog dengan momen gaya, kecuali bahwa momen gaya mempunyai arti fisik sedangkan momen luas merupakan konsep matematis.

$$A\bar{x} = \sum ax$$
$$A\bar{y} = \sum ay \qquad (2.4)$$

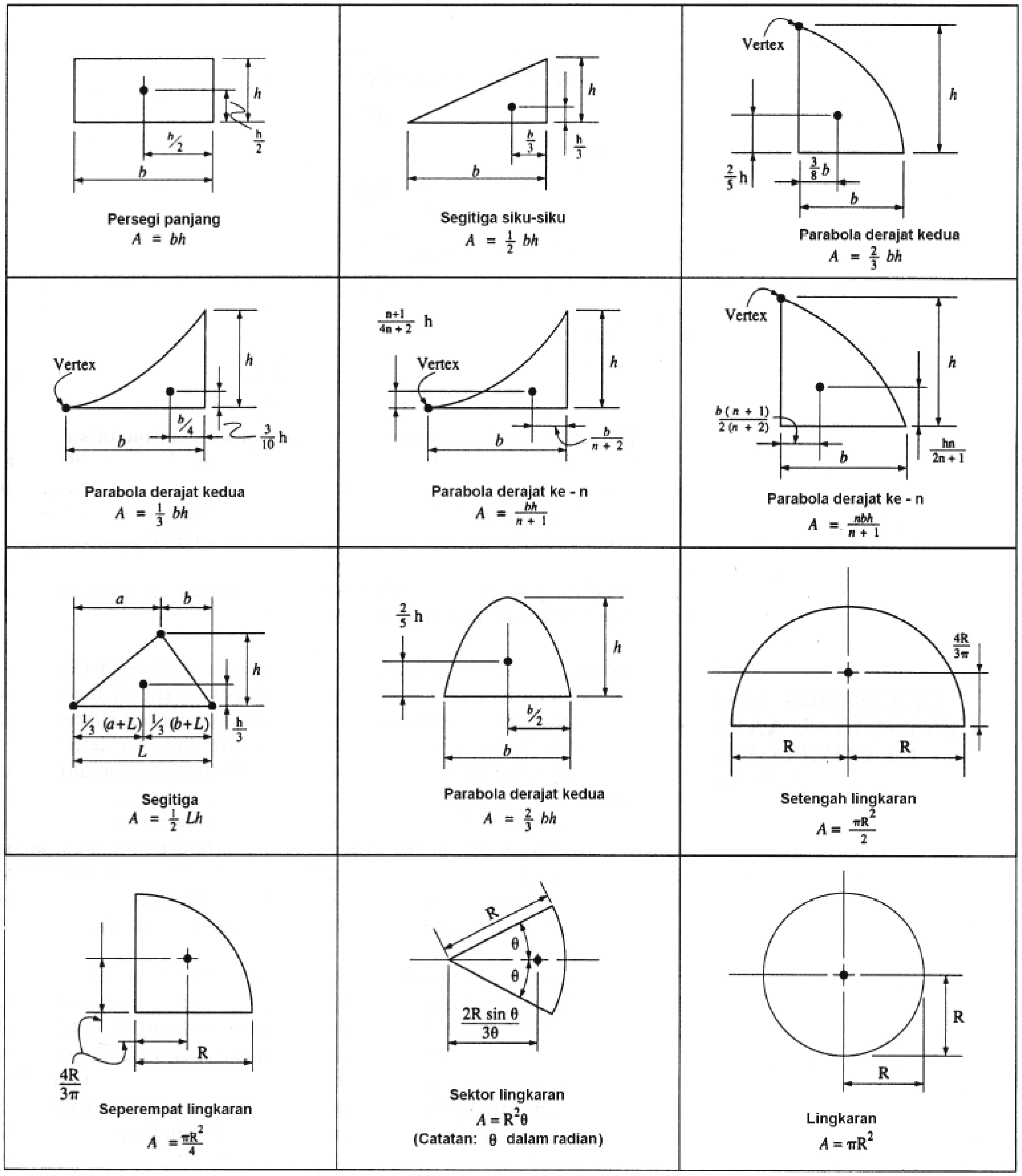
Sehingga untuk menentukan titik lokasi sentroid diperoleh:

$$\bar{x} = \frac{\sum ax}{A} \text{ atau } \frac{\sum ax}{\sum a} \qquad (2.5)$$

$$\bar{y} = \frac{\sum ay}{A} \text{ atau } \frac{\sum ay}{\sum a} \qquad (2.6)$$

Koordinat yang diperoleh dari persamaan (2.5) dan (2.6) menunjukkan sentroid suatu luasan. Suatu sumbu yang melalui sentroid disebut sumbu sentroid. Sumbu sentroid akan sangat besar pengaruhnya dalam perhitungan statika dan kekuatan bahan. Luas dan posisi sentroid untuk beberapa bentuk geometris sederhana telah ditentukan secara matematis dan ditunjukkan pada tabel 2.1.

Tabel 2.1 Luasan dan Posisi Sentroid



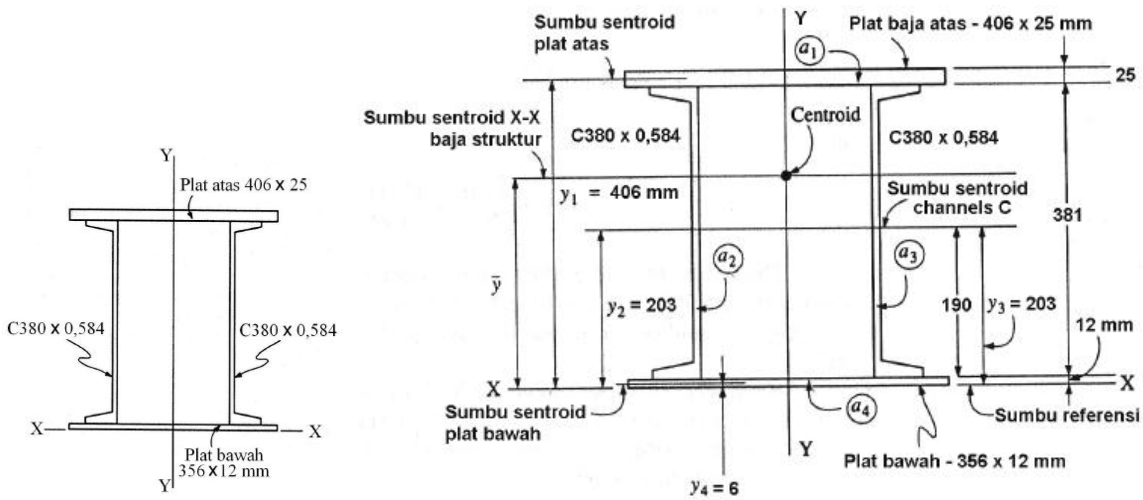
2.4 Sentroid Luasan Komposit

Suatu luasan komposit, dapat dinyatakan sebagai sejumlah luas geometris sederhana atau bentuk-bentuk standar. Banyak dari struktur permesinan merupakan kombinasi dari beberapa macam bentuk yang disambung (biasanya dengan pengelasan) menjadi satu unit utuh. Untuk menentukan titik sentroid dari luasan komposit, dapat dilakukan dengan cara:

1. Sket luasan komposit, tunjukkan semua ukuran yang diketahui
2. Tentukan sumbu simetri. Gunakan sistem koordinat X-Y sebagai acuan
3. Bagi luasan menjadi luasan komponen. Masing-masing luasan harus sebanding sehingga luasan dan titik lokasi sentroid dapat ditentukan.
4. Gunakan pers. (2.5) dan /atau (2.6) untuk menentukan titik koordinat sentroid.

Contoh Soal 2.2:

Sebuah baja, sebagaimana ditunjukkan pada gambar 2.4 di bawah ini, dibuat dari dua buah besi *Channels* dimensi C380 x 0,584, plat baja atas 406 x 25 mm, dan plat baja bawah 356 x 12 mm. Semua komponen di las bersama sehingga menjadi unit tunggal. Tentukan titik sentroid terhadap sumbu X–X.



Gambar 2.4 Baja Struktural dan Tempat Sumbu Sentroid

Penyelesaian:

Pada masalah ini, komposit adalah simetris terhadap sumbu Y–Y. Sisi bawah (yaitu plat bawah) dipilih sebagai acuan sumbu X–X. Luasan komponen sebagaimana ditunjukkan pada gambar 2.5. Luasan ditentukan sebagai berikut:

$$a_1 = 0{,}406 \times 0{,}025 = 0{,}01015\ \text{m}^2$$

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= 7{,}61 \times 10^{-3}\ \text{m}^2 \\ a_3 &= 7{,}61 \times 10^{-3}\ \text{m}^2 \end{aligned}\right\}\ \text{lihat lampiran tabel C}$$

$$a_4 = 0{,}356 \times 0{,}012 = 0{,}004272\ \text{m}^2$$

$$A = \sum a = 0{,}029642\ \text{m}^2$$

Komponen meliputi dua buah plat persegi panjang dan dua channels standar. Semua sifat dan dimensi *channels* diperoleh dari appendix *C*. Lokasi dari komponen sentroid (yaitu ukuran *y*) dihitung sebagaimana ditunjukkan oleh gambar 2.5 adalah sebagai berikut:

$$y_1 = 12 + 381 + 12{,}5 = 405{,}5 \text{ mm} = 0{,}406 \text{ m}$$

$$y_2 = y_3 = 190 + 12 = 202 \text{ mm} = 0{,}202 \text{ m}$$

$$y_4 = 6 \text{ mm} = 0{,}006 \text{ m}$$

dengan menerapkan pers. (2.6), lihat lampiran tabel C

$$\bar{y} = \frac{\Sigma\, ay}{A} = \frac{a_1\, y_1 + a_2\, y_2 + a_3\, y_3 + a_4\, y_4}{A}$$

$$= \frac{\left(1{,}015 \times 10^{-2}(0{,}406)\right) + \left[2 \times \left(7{,}61 \times 10^{-3} \times (0{,}202)\right)\right] + \left(4{,}272 \times 10^{-3}\,(0{,}006)\right)}{0{,}029642}$$

$$= 0{,}244 \text{ m}$$

sumbu sentroid X–X terletak 244 mm di atas sumbu acuan.

Tabel 2.2 Format Tabel Contoh 2.2

Luas Komponen	a (m^2)	y (m)	ay (m^3)	Catatan
a_1	0,01015	0,406	0,004121	Plat atas
a_2	$7{,}61 \times 10^{-3}$	0,202	0,001537	Kanal C
a_3	$7{,}61 \times 10^{-3}$	0,202	0,001537	Kanal C
a_4	0,004272	0,006	0,000026	Plat bawah
$\sum$	0,029642		0,007221	

Penentuan sumbu sentroid dapat menggunakan lembar kerja computer (misal Microsoft Office EXCELL). Perhitungan di atas dengan menggunakan excell dapat dilihat pada tabel 2.2. Maka substitusi nilai dari tabel 2.2, diperoleh:

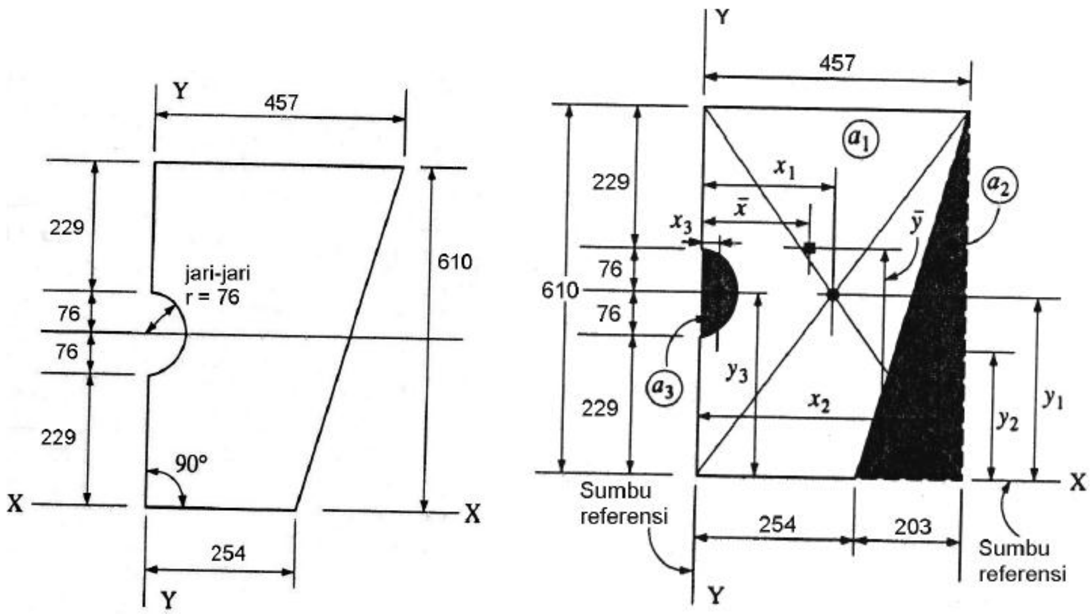
$$\bar{y} = \frac{\Sigma\, ay}{\Sigma\, a} = \frac{0{,}007221}{0{,}029642} = 0{,}244 \text{ m} = 244 \text{ mm}$$

Contoh Soal 2.3:

Tentukan lokasi sumbu sentroid X–X dan Y–Y untuk luasan sebagaimana ditunjukkan pada gambar 2.6.

Penyelesaian:

Pertama, tempatkan sistem koordinat X–Y pada luasan komposit (pada kwadran I), sebagaimana nampak pada gambar 2.7. Bagi luasan menjadi komponen luasan geometrik sederhana, anggap sebagai luasan persegi-panjang (*a*1) 457 x 610 mm, dan kemudian keluarkan luasan segitiga (*a*2) dan setengah lingkaran (*a*3). Luasan *a*2 dan *a*3 akan berharga negatif.



Gambar 2.6 Luasan Komposit dan penentuan sumbu sentroid

Perhitungan luas dilakukan sebagai berikut:

*a*1 = 457 x 610 = 278.770 mm2

*a*2 = – [(0,5) (203) (610)] = – 61915 mm2

*a*3 = – [(0,5) (p) (762)] = – 9073 mm2

A = ∑*a* = 207.782 mm2

Tentukan *x* terhadap sumbu referensi Y–Y dengan dimensi x untuk setiap luas komponen ditentukan sebagai berikut (gunakan tabel 2.1 untuk segitiga dan setengah lingkaran):

$$x_1 = 228{,}5 \text{ mm}$$

$$x_2 = 254 + \left(\frac{2}{3}\right) \times (203) = 389{,}3 \text{ mm}$$

$$x_3 = \left(\frac{4R}{3\pi}\right) = \left(\frac{4 \times (76)}{3 \times (\pi)}\right) = 32{,}3 \text{ mm}$$

Dari persamaan (2.3) diperoleh:

$$\bar{x} = \frac{\sum ax}{A} = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3}{A}$$

$$= \frac{278.770\,(228{,}5) + (-61915)(389{,}3) + (-9073)\,(32{,}3)}{207.782}$$

$$= 189{,}2 \text{ mm}$$

Kemudian tentukan terhadap sumbu referensi X–X dengan dimensi *y* untuk setiap komponen luasan ditentukan sebagai berikut:

$$y_1 = 305 \text{ mm}$$

$$y_2 = \left(\frac{1}{3}\right) \times (610) = 203{,}3 \text{ mm}$$

$$y_3 = 305 \text{ mm}$$

Dari persamaan (2.6) diperoleh:

$$\bar{y} = \frac{\sum ay}{A} = \frac{a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3}{A}$$

$$= \frac{278770 \times (305) + (-61915) \times (203{,}3) + (-9073) \times (305)}{207782}$$

$$= 335{,}3 \text{ mm}$$

koordinat titik sentroid adalah (189,2 ; 335,3)

Catatan:

untuk perhitungan contoh soal 2.3, dapat dikerjakan dengan menggunakan sistem tabel (misal Micosoft Office EXCELL).