

Bagian III. ALIRAN KOMPRESIBEL

Pendahuluan

Aliran kompresibel adalah aliran gas atau liquid di mana perubahan massa jenis ($\Delta\rho$) yang terjadi akibat adanya perubahan tekanan (Δp) relatif cukup besar sehingga ρ tidak dapat dianggap konstan. Kita telah lihat sebelumnya bahwa asumsi inkompresibel dapat digunakan apabila $\frac{\Delta\rho}{\rho} \ll 1$ sehingga,

$$M^2 \equiv \frac{U^2}{a^2} \ll 1 \quad \& \quad \tau \gg L/a, \quad a: \text{kecepatan suara}$$

Jadi aliran kompresibel adalah aliran di mana kedua kondisi di atas tidak lagi terpenuhi. Perlu diingat bahwa U , L , τ di atas adalah karakteristik kecepatan, panjang, dan waktu dari aliran.

Contoh – contoh di mana salah satu dari kondisi di atas tak terpenuhi adalah aliran di sekitar benda di mana aliran *freestream*-nya (U) lebih besar atau sebanding dengan “ a ”. Biasanya aliran seperti ini dianggap sebagai aliran kompresibel apabila $M > 0.3$. Namun, kondisi $M > 0.3$ bukanlah suatu keharusan melainkan hanya “*rule of thumb*”.

Contoh lainnya adalah perambatan gelombang suara (akustik) di dalam fluida, seperti ketika kita mengeluarkan suara. Dalam contoh ini, seperti kita alami sehari–hari ketika kita mengeluarkan suara, fluida sendiri tidak bergerak dengan cepat. Juga kita tidak merasakan adanya perubahan ρ . Namun, persoalan akustik harus ditangani dengan menggunakan prinsip–prinsip aliran kompresi karena kecepatan karakteristik, U , dalam kasus ini adalah kecepatan rambat dari gelombang suara itu sendiri bahwa gelombang suara merambat dengan kecepatan “ a ” sehingga $U \approx a$ dan $M = 1$.

Aliran kompresibel biasanya mempunyai Re yang sangat besar. Ini dapat dilihat sebagai berikut.

$$Re = \frac{\rho_o U_o L_o}{\mu_o}$$

Dari mekanika statistik diketahui bahwa $\mu_o \sim \langle v \rangle \Lambda$ di mana $\langle v \rangle$ adalah kecepatan rata-rata molekul dan Λ adalah “*mean free path*”. Karena Λ sangat kecil ($\Lambda_{udara} \sim 10^{-7}$) dan dari definisinya $\langle V \rangle \sim U_o$ maka $\mu_o \sim \Lambda U_o$ sehingga ,

$$Re \sim \frac{L_o}{\Lambda} \gg 1$$

atau Re sangat besar.

Karena Re sangat besar maka, seperti telah kita diskusikan sebelumnya, kita dapat gunakan asumsi inviscid dan adiabatic. Dengan kata lain aliran kompresibel dapat diasumsikan sebagai aliran isentropik. Tentunya asumsi ini tidak dapat digunakan di daerah-daerah dalam aliran di mana terdapat $\nabla \underline{u}$ dan ∇T yang tinggi seperti di daerah lapisan batas dan daerah di dalam sebuah shock wave.

BAB

9

Gelombang Suara (Akustik)

9.1 Dasar teori

Acoustic “small amplitude” approximation dalam aliran kompresibel, maksudnya kita memberikan “*small disturbance*” dalam fluida maka gangguan kecil tersebut akan bergerak dengan gerakan akustik. Salah satu contoh dari gangguan kecil tadi adalah pada waktu kita berbicara. Pada waktu kita berbicara, sebenarnya kita memberikan gangguan kecil kepada udara. Gangguan kecil tadi merambat seperti gelombang (ini akan diperlihatkan) dan akhirnya sampai ke gendang telinga pendengar sehingga suara kita terdengar.

Karena gangguan yang diberikan biasanya sangat kecil maka kita dapat menuliskan

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad \underline{u} = \underline{u}_0 + \underline{u}'$$

di mana *subscript* “0” ,menyatakan harga variabel sebelum gangguan dan *superscript* (‘) menyatakan harga gangguan ($\rho' \ll \rho_0, p' \ll p_0$). Karena gangguan yang diberikan sangat kecil maka gradien-gradien kecepatan dan temperatur sangat kecil sehingga kita dapat gunakan asumsi aliran isentropik.

Sekarang misalkan keadaan awal udara sebelum ada gangguan adalah $\underline{u}_0 = 0$, maka persamaan-persamaan kekekalan massa (a) dan momentum (b) dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \underline{u} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \underline{u} &= 0 \\ \stackrel{\rho_0 \neq \rho_0(t)}{\Rightarrow} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\underbrace{\rho_0 \underline{u}_0}_0 + \rho_0 \underline{u}' + \underbrace{\rho' \underline{u}_0}_0 + \rho' \underline{u}' \right) &= 0 \\ \stackrel{\rho_0 \neq \rho_0(x)}{\Rightarrow} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \underline{u}' + \nabla \cdot (\rho' \underline{u}') &= 0 \end{aligned}$$

Karena $\rho' \underline{u}'$ sangatlah kecil dibandingkan dengan ρ' atau \underline{u}' maka suku seperti ini dapat kita abaikan sehingga,

$$\boxed{\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \underline{u}' = 0} \quad (1)$$

Untuk persamaan momentum,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{u}'}{\partial t} + \underbrace{(\underline{u}' \cdot \nabla) \underline{u}'}_{\text{sangat kecil dapat diabaikan}} &= - \frac{1}{\underbrace{\rho_0 + \rho'}_{\text{hampir sama dengan } \rho_0}} \nabla p' \\ \boxed{\frac{\partial \underline{u}'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p' = 0} & \quad (2) \end{aligned}$$

Karena kondisi awal (ρ_0, p_0) adalah konstan di mana-mana dalam fluida maka kita dapat gunakan asumsi $s = \text{konstan}$ di mana pun (s homogeneous) atau homentropik. Jadi,

$$dp = p' = \underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_{\rho}}_{=0 \text{ karena homentropik}} ds + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0} \right)_s d\rho = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0} \right)_s \rho'$$

Apabila kita ganti ρ' di persamaan (1) dengan p' maka,

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0} \right)_s \nabla \cdot \underline{u}' = 0$$

Karena udara awalnya diam ($\underline{u}_0 = 0$) dan aliran diasumsikan sebagai aliran isentropik maka menurut teorema Kelvin

$$\underline{\omega} = \nabla \times \underline{u}' = 0 \text{ (karena awalnya } \underline{\omega} = 0, \underline{u}_0 = 0).$$

Karena aliran adalah aliran potensial maka $\underline{u}' = \nabla \phi$ dan persamaan (2) menjadi,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi) + \frac{1}{\rho_0} \nabla p' = 0$$

$$\text{atau } \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} p' \right) = 0$$

sehingga

$$\boxed{p' = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}} \quad (3).$$

Sedangkan persamaan kekekalan massa menjadi

$$\boxed{\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0} \right)_s \nabla^2 \phi} \quad (4)$$

Dari matematika kita ketahui bahwa persamaan di atas adalah persamaan yang menjelaskan bagaimana gelombang merambat dengan kecepatan $\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0} \right)_s}$ atau a_0 di

mana, $a_0 \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0} \right)_s}$. Karena a menjelaskan kecepatan rambat dari gelombang maka a disebut “kecepatan suara”.

Karena $\underline{u} = \nabla \phi$ maka,

$$\nabla^2 \underline{u} = \nabla (\nabla^2 \phi) = \nabla \left(\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) = \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \nabla \phi}{\partial t^2} = \frac{1}{a_0} \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2}$$

Dengan demikian \underline{u} juga dijelaskan oleh persamaan gelombang. Variabel-variabel termodinamika seperti p' , ρ' , T' juga dijelaskan oleh persamaan gelombang, misalnya p'

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \nabla^2 p' = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \phi = \frac{-\rho_0}{a_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)$$

$$= \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(-\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}$$

Karena aliran dapat diasumsikan sebagai aliran homentropik maka ρ' dan T' dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$T' = T'(s, p') \underset{s=\text{konstan}}{\equiv} T'(p')$$

$$\rho' = \rho'(s, p') \underset{s=\text{konstan}}{\equiv} \rho'(p')$$

Dengan demikian maka ρ' dan T' dijelaskan juga oleh persamaan gelombang. Jadi apabila kita dapatkan solusi dari persamaan (4), semua variabel aliran dapat ditemukan dengan menggunakan persamaan-persamaan di bawah ini

$$\underline{u} = \nabla \phi, \quad p' = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \rho' = \frac{p'}{a_0^2}, \quad T' = T'(p', \rho')$$

Kesimpulan :

Apabila kita berikan gangguan kecil pada fluida, maka gangguan tadi akan merambat seperti gelombang

Catatan:

Hasil di atas didapatkan dengan asumsi sebelum ada gangguan, fluida mempunyai sifat-sifat termodinamika yang seragam (ρ_0 , p_0 uniform). Jadi hasil di atas tidak dapat diterapkan untuk kasus dimana $\rho_0 = \rho_0(\underline{x})$ dan $p_0 = p_0(\underline{x})$.

9.1.1 Kecepatan suara (a) untuk Perfect Gas

Untuk *perfect gas*, $p = \rho R T$. Sekarang kita akan gunakan persamaan keadaan ini untuk mendapatkan hubungan antara a dan variabel termodinamika seperti T , p , dan ρ . Karena asumsi isentropic dapat digunakan dalam akustik kita dapat gunakan hubungan-

hubungan isentropik (persamaan IR, LIHAT APPENDIX B), terutama pernyataan bahwa

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{konstan} \quad (\text{IR.4})$$

Dari hubungan ini maka didapatkan,

$$\begin{aligned} dp &= (\text{konstan}) \gamma \rho^{\gamma-1} d\rho = \frac{\gamma}{\rho} (\text{konstan } \rho^\gamma) d\rho \\ &= \frac{\gamma}{\rho} p d\rho \end{aligned}$$

Dengan demikian maka,

$$a^2 \equiv \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_s = \frac{\gamma p}{\rho} = \gamma RT$$

Dari hasil di atas maka jelaslah bahwa “ a ” adalah variabel termodinamika yang harganya tergantung dari “keadaan” dari fluida tersebut, seperti halnya variabel termodinamika lainnya.

9.2 Transport energi dalam gelombang

Seperti gelombang-gelombang lainnya, pada gelombang akustik terjadi fenomena transport energi. Karena terjadi transport energi, maka terdapat *energy flux* di arah perambatan gelombang. *Energy flux* ini adalah ukuran dari intensitas suara yang merupakan ukuran dari kekuatan suara yang dipakai sehari-hari. Biasanya ukuran ini dinyatakan dengan menggunakan unit “*decibel*”.

Untuk mendapatkan harga dari energy transport akustik, kita kembali ke persamaan energi yang untuk kasus akustik adalah,

$$\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{u^2}{2} \right) = -\nabla \cdot (p \underline{u})$$

Seperti sebelumnya kita nyatakan,

$$e = e_0 + e' \quad \text{dan} \quad p = p_0 + p'$$

Harga e didapatkan dengan menggunakan ekspansi Taylor,

$$e = e_0 + \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_{s_0} (v - v_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 e}{\partial v^2} \right)_{s_0} (v - v_0)^2 + \dots$$

$$v = v_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_{s_0} p' + \dots$$

di mana $v \equiv \frac{1}{\rho}$

sehingga,

$$e = e_0 + \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_{s_0} (v - v_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 e}{\partial v^2} \right)_{s_0} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_{s_0}^2 p'^2 + \dots$$

Dari termodinamika kita ketahui bahwa,

$$de = -p dv + T ds$$

sehingga untuk kasus ini (isentropik),

$$\left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_s = -p \quad \text{dan} \quad \left(\frac{\partial^2 e}{\partial v^2} \right)_s = - \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s$$

Namun,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s = \left(\frac{\partial p}{\partial \left(\frac{1}{\rho} \right)} \right)_s = -\rho^2 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = -\rho^2 a^2$$

sehingga,

$$e = e_0 - p_0 (v - v_0) + \frac{1}{2} (\rho_0^2 a_0^2) \left(\frac{1}{-\rho_0^2 a_0^2} \right)^2 p'^2 + \dots$$

$$e = e_0 - p_0 (v - v_0) + \frac{p'^2}{2\rho_0^2 a_0^2}$$

Apabila hasil-hasil ini kita substitusikan ke persamaan energi untuk akustik maka didapatkan,

$$\rho \frac{d}{dt} \left(e_0 + p_0 v_0 - p_0 v + \frac{p'^2}{2\rho_0^2 a_0^2} + \frac{u^2}{2} \right) = -\nabla \cdot [(p_0 + p') \underline{u}]$$

Karena untuk “akustik klasik” seperti yang dibahas di sini e_0 , p_0 , dan v_0 adalah konstan maka persamaan di atas menjadi,

$$-p_0\rho\frac{d}{dt}(v) + \rho\frac{d}{dt}\left(\frac{p'^2}{2\rho_0^2a_0^2} + \frac{u^2}{2}\right) = -p_0\nabla\cdot\underline{u} - \nabla\cdot(p'\underline{u})$$

Persamaan kontinuitas menunjukkan bahwa suku pertama sebelah kiri dan kanan adalah sama sehingga persamaan energi menjadi,

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{p'^2}{2\rho_0^2a_0^2} + \frac{u^2}{2}\right) = -\nabla\cdot(p'\underline{u}).$$

Akhirnya, seperti biasa, pada kasus akustik kita dapat aproksimasikan $\frac{df}{dt} \approx \frac{\partial f}{\partial t}$ (suku $\underline{u}\cdot\nabla f$ yang nonlinier dapat diabaikan) sehingga,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p'^2}{2\rho_0^2a_0^2} + \rho_0\frac{u^2}{2}\right) + \nabla\cdot(p'\underline{u}) = 0$$

di mana kita telah gunakan pula aproksimasi $\rho\frac{d}{dt}(-) \approx \rho_0\frac{d}{dt}(-) = \frac{d}{dt}(\rho_0-)$.

Biasanya, persamaan terakhir dituliskan dengan menggunakan definisi

$$E \equiv \frac{p'^2}{2\rho_0^2a_0^2} + \rho_0\frac{u^2}{2} \quad \text{dan} \quad \underline{\Phi} \equiv p'\underline{u}$$

di mana E disebut “acoustic energy” dan Φ adalah “energy flux”. Dengan demikian maka persamaan energi dapat dituliskan menjadi,

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla\cdot\underline{\Phi} = 0$$

Seperti telah dikatakan sebelumnya, Φ adalah kuantitas yang digunakan, dalam praktik sehari-hari, sebagai ukuran dari “kekuatan suara” atau “intensitas suara”. Biasanya Φ diukur dengan unit *decibel* yang definisinya adalah sebagai berikut. Kekuatan/intensitas suara yang terlemah yang dapat didengar oleh telinga manusia adalah sebesar,

$$\phi_{ref} = 10^{-12} \text{ watt/m}^2$$

Skala *decibel* didefinisikan sebagai,

$$\Delta \equiv 10 \log_{10} \left(\frac{\Phi}{\Phi_{ref}} \right)$$

Dengan demikian maka intensitas suara terlemah yang dapat kita dengar adalah $\Delta \approx 0dB$ sedangkan intensitas suara tertinggi yang dapat menusuk telinga kita adalah $\Delta \approx 140dB$.

9.3 Gelombang-gelombang dasar

9.3.1 Gelombang 1-D

Untuk mempelajari lebih jauh gerakan akustik, kita akan mulai dengan mempelajari secara detil kasus yang paling sederhana yaitu kasus 1-D. Untuk kasus ini persamaan gelombang menjadi,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (5)$$

Untuk menyelesaikan persamaan ini, kita ganti variabel x dan t dengan ξ dan η yang didefinisikan sebagai,

$$\xi \equiv x - a_0 t \quad \text{dan} \quad \eta \equiv x + a_0 t$$

Dengan variabel-variabel baru ini persamaan (5) menjadi,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

Persamaan terakhir sangatlah mudah untuk diselesaikan dan solusinya adalah

$$\phi = F(\xi) + G(\eta) = F(x - a_0 t) + G(x + a_0 t)$$

Seperti telah dijelaskan sebelumnya, p' , u , ρ' , T' dapat dihitung dengan menggunakan ϕ (misalnya, $p' = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$).

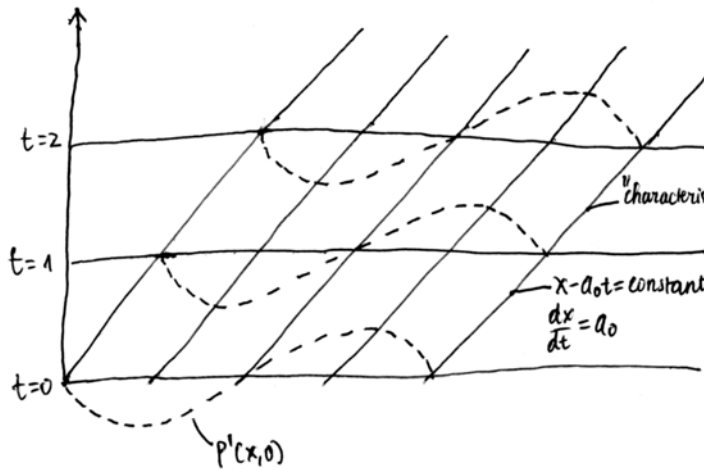
Untuk melihat lebih jauh hasil yang telah kita dapatkan untuk kasus 1-D ini, kita lihat kasus di mana $G = 0$ atau,

$$\phi = F(x - a_0 t) \text{ sehingga } p' = K(x - a_0 t)$$

Pada waktu $t = 0$, gelombang mempunyai bentuk

$$p' = K(x)$$

Pada waktu t (beberapa saat kemudian), gelombang ini mempunyai bentuk yang sama. Namun titik-titiknya berpindah ke arah kanan dengan jarak $a_0 t$. Dalam “diagram x-t” gerakan gelombang dapat digambarkan seperti berikut:



Jadi kecepatan setiap titik dalam gelombang adalah a_0 yang untuk kasus ini adalah konstan. Garis-garis miring digambar di atas disebut garis karakteristik. Garis ini menjelaskan “path” atau jejak dari “gangguan”. Sepanjang

garis ini, p' (juga u', ρ', T' dll) adalah konstan. Garis ini dijelaskan oleh persamaan

$$x - a_0 t = \text{konstan} \text{ dengan “slope” } \frac{dx}{dt} = a_0.$$

Kesimpulan yang sama dapat diambil untuk kasus $F = 0$ & $G \neq 0$. Untuk kasus ini garis karakteristiknya adalah $x + a_0 t = \text{konstan}$ dengan slope $\frac{dx}{dt} = -a_0$. Jadi kasus ini menjelaskan gelombang yang bergerak ke “kiri”. Karena sepanjang garis karakteristik p', u', ρ', T' mempunyai harga yang tetap maka

$$u \pm \frac{2}{\gamma - 1} c = \text{konstan} \text{ sepanjang garis karakteristik } x \pm a_0 t = \text{konstan}.$$

Sekarang kita akan lihat hubungan antara p', u', ρ' untuk kasus 1-D

Kasus G = 0

$$\begin{aligned}\phi &= F(x - a_0 t) \equiv F(\xi) \\ u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{dF}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{dF}{d\xi} \equiv F' \\ p' &= -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\rho_0 \frac{dF}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = +\rho_0 a_0 F' = \rho_0 a_0 u \\ \rho' &= \frac{1}{a_0^2} p' = \frac{\rho_0}{a_0} u\end{aligned}$$

Kasus F = 0

$$\begin{aligned}\phi &= G(x + a_0 t) \equiv G(\eta) \\ u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{dG}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = G' \\ p' &= -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\rho_0 G' a_0 = -\rho_0 a_0 u \\ \rho' &= \frac{1}{a_0^2} p' = -\frac{\rho_0}{a_0} u\end{aligned}$$

Karena $p' \equiv p - p_0 = dp$, $\rho' \equiv \rho - \rho_0 = d\rho$, $u' = u - 0 \equiv du$ maka hasil di atas dapat dituliskan sebagai berikut:

$$dp = \pm \rho_0 a_0 du, \quad du = \pm a_0 \frac{d\rho}{\rho_0} \quad \text{di mana tanda yang atas untuk kasus } G = 0 \text{ dan yang}$$

bawah untuk kasus $F = 0$,

Catatan : Dari hasil di atas dapat dilihat untuk “*compression wave*” $dp > 0$ sehingga du juga positif dan fluida bergerak searah dengan gelombang. Untuk “*rarefied wave*” $dp < 0$ sehingga fluida bergerak ke arah yang berlawanan dengan gelombang.

9.3.2 Gelombang bidang (Plane Wave) dan harmonik

“Plane wave” adalah gelombang yang arah dan amplitudonya tidak berubah-ubah. Untuk *plane wave*, solusi dari persamaan gelombang 3-D adalah,

$$\phi = F\left(t - \frac{\mathbf{x} \cdot \hat{l}}{a_0}\right) + G\left(t + \frac{\mathbf{x} \cdot \hat{l}}{a_0}\right)$$

di mana $\hat{l} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$ adalah unit vektor di arah perambatan gelombang.

“Harmonic wave” atau “monochromatic wave” adalah gelombang di mana seluruh kuantitas gelombang adalah fungsi periodik dari waktu. Oleh karena itu, untuk kasus ini kita dapat nyatakan,

$$\phi = \tilde{\phi}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}$$

di mana ω adalah frekuensi dari gelombang. Apabila ϕ di atas kita substitusikan di persamaan akustik 3-D maka persamaan tersebut menjadi,

$$\nabla^2 \tilde{\phi}(\mathbf{x}) + \frac{\omega^2}{a_0^2} \tilde{\phi}(\mathbf{x}) = 0$$

atau

$$\boxed{\nabla^2 \tilde{\phi} + k^2 \tilde{\phi} = 0}, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{a_0^2}$$

Persamaan di atas dikenal dengan sebutan persamaan Helmholtz. Persamaan ini menjadi persamaan Laplace apabila $k = 0$.

Harmonic plane wave adalah gelombang harmonik dengan arah dan amplitudo yang konstan. Untuk kasus 1-D, ϕ haruslah fungsi dari $(x - a_0 t)$ sehingga ϕ untuk *harmonic plane wave* untuk kasus ini adalah,

$$\phi = A e^{-i\omega\left(t - \frac{x}{a_0}\right)} = A e^{i(kx - \omega t)}$$

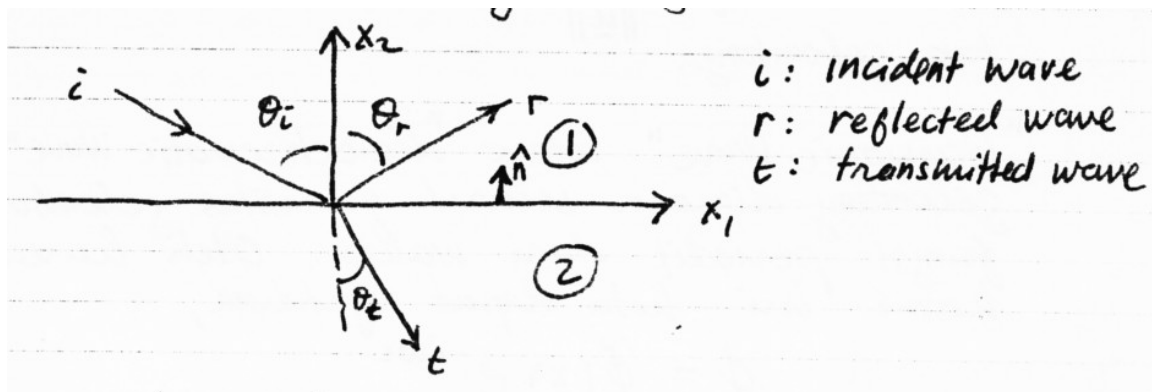
Untuk kasus 3-D, ϕ untuk *harmonic plane wave* dapat dinyatakan seperti,

$$\phi = A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad \text{di mana } \underline{k} \equiv k \hat{l}$$

\hat{l} adalah arah dari perambatan gelombang dan k disebut “wave number”.

Harmonic plane wave adalah gelombang yang penting karena gelombang apapun dapat dinyatakan sebagai superposisi dari gelombang-gelombang harmonik dengan k dan ω yang berbeda-beda.

9.4 Transmisi dan pemantulan gelombang



Sekarang kita akan pelajari apa yang terjadi apabila sebuah plane wave bertemu dengan permukaan yang merupakan batas dari 2 material yang berbeda (seperti air-udara misalnya). Secara umum apabila sebuah gelombang (i) bertemu dengan permukaan tersebut maka pertemuan ini menghasilkan 2 gelombang berbeda, yaitu gelombang yang ditransmisikan (t) dan gelombang yang dipantulkan (r) kembali ke material 1 (lihat sketsa).

Karena gelombang-gelombang ini adalah “*plane wave*” maka

$$\phi_i = F(\eta_i), \quad \phi_r = F(\eta_r), \quad \phi_t = F(\eta_t)$$

di mana $\eta = t - \frac{\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{l}}}{a_0}$.

Untuk gelombang i ,

$$\begin{aligned} \eta_i &= t - \frac{(x_1 \hat{i} + x_2 \hat{j}) \cdot (\sin \theta_i \hat{i} - \cos \theta_i \hat{j})}{a_0} \\ &= t - \frac{(x_1 \sin \theta_i - x_2 \cos \theta_i)}{a_0} \end{aligned}$$

$$\eta_r = t - \frac{(x_1 \sin \theta_r + x_2 \cos \theta_r)}{a_0}$$

$$\eta_t = t - \frac{(x_1 \sin \theta_t - x_2 \cos \theta_t)}{a_0}$$

Dari pembahasan “diskontinuitas dalam fluida”, kita ketahui bahwa kondisi yang harus dipenuhi di $x_2 = 0$ adalah

$$\underline{u}_1 \cdot \hat{n} = \underline{u}_2 \cdot \hat{n} \quad \hat{n}: \text{normal thd permukaan } x_2 = 0$$

$$p_1 = p_2$$

Karena persamaan akustik adalah persamaan linier maka superposisi dapat digunakan sehingga,

$$\hat{n} \cdot (\nabla \phi_i + \nabla \phi_r) = \hat{n} \cdot \nabla \phi_t$$

$$-\rho_{01} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{\partial \phi_r}{\partial t} \right) = -\rho_{02} \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \text{ pada } x_2 = 0$$

sehingga,

$$\phi'_i(\eta_{i,x_2=0}) \frac{\cos \theta_i}{a_{01}} - \phi'_r(\eta_{r,x_2=0}) \frac{\cos \theta_r}{a_{01}} = \phi'_t(\eta_{t,x_2=0}) \frac{\cos \theta_t}{a_{02}}$$

$$\phi'_i(\eta_{i,x_2=0}) \rho_{01} - \phi'_r(\eta_{r,x_2=0}) \rho_{01} = \phi'_t(\eta_{t,x_2=0}) \rho_{02}$$

di mana $\phi' \equiv \frac{d\phi}{d\eta}$ dan $\eta_{,x_2=0} = t - \frac{x_1 \sin \theta}{a_0}$.

Karena hubungan di atas harus berlaku pada sembarang x_1 dan t , maka $\eta_{i,x_2=0} = \eta_{r,x_2=0} = \eta_{t,x_2=0}$ sehingga,

$$\boxed{\frac{\sin \theta_i}{a_{01}} = \frac{\sin \theta_r}{a_{01}} = \frac{\sin \theta_t}{a_{02}}}$$

Pada hubungan ini terdapat hukum refleksi ($\theta_i = \theta_r$) dan hukum Snellius

$$\left(\frac{\sin \theta_i}{a_{01}} = \frac{\sin \theta_t}{a_{02}} \right)$$

Apabila kita asumsikan bahwa

$$\phi_r \equiv C_r \phi_i \text{ dan } \phi_t \equiv C_t \phi_i$$

di mana C_r dan C_t adalah koefisien refleksi dan transmisi, maka dengan mensubstitusikan definisi-definisi tersebut ke dalam kondisi batas pada $x_2 = 0$ didapatkan,

$$\boxed{\begin{aligned} C_r &= \frac{R_2 \cos \theta_i - R_1 \cos \theta_t}{R_2 \cos \theta_i + R_1 \cos \theta_t} \\ C_t &= \frac{2\rho_{01} a_{02} \cos \theta_i}{R_2 \cos \theta_i + R_1 \cos \theta_t} \end{aligned}}$$

di mana $R_j \equiv \rho_{0j} a_{0j}$

9.5 Perambatan gelombang suara dalam medium yang bergerak

Pembahasan gelombang akustik yang telah kita lakukan sampai saat ini mengasumsikan bahwa fluida (media) di mana gelombang ini merambat tidak bergerak. Apabila media di mana gelombang akustik merambat, bergerak maka persamaan-persamaan dasar yang kita dapatkan tidak lagi berlaku. Namun, kita masih dapat menggunakan hasil-hasil sebelum ini apabila media tersebut bergerak dengan kecepatan konstan. Kasus inilah yang akan kita bahas pada subbagian ini.

Misalkan fluida bergerak dengan kecepatan $\underline{U} = \text{konstan}$. Apabila kita letakkan kerangka acuan k' yang bergerak bersama fluida tersebut, maka relatif terhadap k' fluida tersebut tidak bergerak dan apa yang telah kita pelajari di subbagian sebelum ini dapat digunakan. Misalnya relatif terhadap k' sebuah gelombang “*harmonic plane*” mempunyai bentuk,

$$\phi = A e^{i(k \cdot \underline{x}' - k a_0 t)}$$

di mana \underline{x}' adalah \underline{x} yang diukur dari k' .

Sekarang yang kita perlukan adalah hubungan antara \underline{x} dan \underline{x}' di mana \underline{x} adalah jarak/posisi yang diukur oleh rangka acuan yang diam. Karena medium fluida bergerak dengan kecepatan \underline{U} maka

$$\underline{x} = \underline{x}' + \underline{U}t$$

sehingga,

$$\phi = Ae^{i[k \cdot x - (ka_0 + \underline{k} \cdot \underline{U})t]}$$

Namun, koefisien dari t adalah frekuensi ω (definisi). Oleh karena itu,

$$\omega = ka_0 + \underline{k} \cdot \underline{U}$$

Dengan didapatkannya hubungan ini maka kita dapat mempelajari apa yang disebut dengan efek Doppler:

a) *Sumber suara diam dan pengamat bergerak dengan kecepatan \underline{U}*

Apabila ω_0 adalah frekuensi dari sumber suara maka karena sumber suara diam

$k = \omega_0 / a_0$. Relatif terhadap pengamat, fluida bergerak dengan kecepatan $-\underline{U}$

sehingga frekuensi yang ditangkap oleh pengamat adalah

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \hat{l} \cdot \underline{U} / a_0 \right)$$

di mana \hat{l} adalah arah dari perambatan gelombang sehingga $\underline{k} = k\hat{l}$.

b) *Sumber suara bergerak dan Fluida diam*

Apabila \underline{U} adalah kecepatan sumber maka apabila kita bergerak bersama sumber maka fluida akan terlihat bergerak dengan kecepatan $-\underline{U}$. Di rangka acuan ini,

$$\omega_0 = ka_0 - \underline{k} \cdot \underline{U}$$

Di rangka acuan yang diam, $\omega = a_0 k$ sehingga,

$$\omega = \frac{\omega_0}{\left(1 - \hat{l} \cdot \underline{U} / a_0 \right)}$$

9.6 Gelombang bola (Spherical Wave)

Setelah melihat kasus perambatan gelombang 1-D, sekarang kita akan melihat kasus perambatan 3-D. Lebih spesifiknya, di subbagian ini kita akan mempelajari gelombang suara di mana distribusi tekanan, kecepatan dan lain-lain adalah hanya fungsi dari jarak dari sebuah titik (*spherically symmetric*). Gelombang ini disebut gelombang spherical (*spherical wave*).

Persamaan gelombang akustik untuk kasus ini kita tuliskan dengan menggunakan koordinat spherical. Karena alasan yang telah dikemukakan di atas maka persamaannya menjadi,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{a_0^2}{r} \frac{\partial^2 r\phi}{\partial r^2} = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{\partial^2 r\phi}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 r\phi}{\partial r^2} = 0$$

Persamaan terakhir sama persis dengan persamaan untuk kasus 1-D di mana

$$\phi_{1D} \rightarrow r\phi \quad \text{dan} \quad x_{1D} \rightarrow r$$

Oleh karena itu maka solusinya adalah,

$$r\phi = F(r - a_0 t) + G(r + a_0 t)$$

$$\phi = \frac{F(r - a_0 t)}{r} + \frac{G(r + a_0 t)}{r}$$

Dari solusi di atas terlihat bahwa $F(r - a_0 t)$ adalah gelombang yang merambat dari titik pusat sedangkan $G(r + a_0 t)$ adalah gelombang yang merambat menuju titik pusat. Hasil ini serupa dengan kasus 1-D. Namun, pada kasus ini terdapat faktor pembagi $\frac{1}{r}$. Ini berarti amplitudo gelombang turun dan penurunan ini berbanding lurus dengan $\frac{1}{r}$ (jarak dari titik pusat).

Satu hal lagi yang perlu diperhatikan adalah kasus di mana $r = 0$. Apabila tidak terdapat “sumber” suara di $r = 0$, maka solusi harus “finite”. Dengan demikian maka,

$$F(-a_0 t) = -G(a_0 t)$$

Namun, apabila terdapat sumber di $r = 0$, ϕ tidak perlu “finite” di $r = 0$ karena solusi hanya berlaku di daerah $r > 0$ (di luar source).



Terakhir kita perhatikan kasus di mana terdapat “sumber suara” di titik pusat yang memancarkan suara selama beberapa saat saja. Sebelum gelombang suara mencapai sebuah titik sembarang (P dalam sketsa) $\phi \equiv 0$ di titik tersebut. Karena suara hanya dipancarkan beberapa saat saja, maka beberapa saat setelah suara mencapai titik tersebut, suara haruslah mulai “menghilang” dan ini berarti $\phi = \text{konstan}$ di mana pun di dalam R pada waktu tersebut. Namun, untuk “spherical wave”

$\phi = F(r - a_0 t) / r$ atau ϕ fungsi dari jarak dari titik pusat. Dengan demikian untuk memenuhi syarat $\phi = \text{konstan}$ di dalam daerah R maka F haruslah sama dengan nol. Dengan kata lain ϕ haruslah nol sebelum dan sesudah gelombang tersebut melewati daerah R.

Karena $p' = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$ maka di sebuah titik P,

$$\int_{-\infty}^{\infty} p' dt = -\rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial t} dt = -\rho_0 [\phi_{\text{sebelum}} - \phi_{\text{sesudah}}] = 0$$

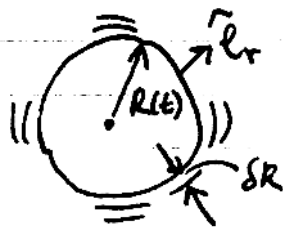
Ini berarti terdapat gelombang ekspansi ($p' < 0$) dan kompresi ($p' > 0$) yang melewati setiap titik di dalam daerah R selama gelombang tersebut berada di sana. Ini sangatlah berbeda dengan kasus 1-D di mana hanya terdapat satu tipe gelombang saja yaitu $p' < 0$ atau $p' > 0$.

9.7 Pemancaran suara

Di subbagian ini kita akan melihat contoh proses pemancaran suara. Kasus yang akan kita bahas adalah kasus yang relatif sederhana yaitu kasus pemancaran suara yang dihasilkan oleh sebuah bola yang berdenyut yang diletakkan di udara yang tak terbatas.

Amplitudo denyutan sangatlah kecil dan memenuhi kondisi,

$$R(t) \ll Ta_0 \quad \delta R(t) \ll R(t) \quad (\text{PS.1})$$



di mana R: permukaan bola (radius), T: periode denyutan

Karena bola adalah benda *spherically symmetric* maka gelombang yang dihasilkan oleh bola yang berdenyut ini adalah gelombang spherical. Dengan demikian, maka tekanan yang dihasilkan di sebuah titik, misalnya mempunyai bentuk

$$p' = \frac{1}{r} (F(r - a_0 t) + G(r - a_0 t))$$

Karena fluida tak terbatas maka seluruh gelombang merambat ke satu arah saja, yaitu merambat dari titik pusat. Dengan demikian maka kita dapat nyatakan bahwa,

$$G(r - a_0 t) \equiv 0$$

Kondisi ini dikenal dengan sebutan “*Sommerfeld radiation condition*”. Dengan demikian maka,

$$p' = \frac{F(r - a_0 t)}{r} \text{ atau } p' = \frac{F\left(\frac{r}{a_0} - t\right)}{r}$$

Bentuk dari fungsi F itu sendiri ditentukan oleh kondisi batas yang dalam kasus ini adalah

$$U_R = (\underline{u} \cdot \hat{n})_{r=R} = (\nabla \phi \cdot \hat{e}_r)_{r=R} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial R} \right)_{r=R}$$

di mana U_R adalah kecepatan permukaan bola. U_R dapat pula dinyatakan dengan menggunakan flux massa \dot{m} karena

$$\dot{m} = \rho_0 U_R A = \rho_0 U_R 4\pi R^2 \Rightarrow U_R = \frac{\dot{m}(t)}{4\pi \rho_0 R^2} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_{r=R}$$

Kondisi batas yang diberikan adalah untuk kecepatan. Sedangkan solusi yang kita cari adalah p' . Oleh karena itu, kita perlu mengubah pernyataan kondisi batas dengan menggunakan hubungan

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial p'}{\partial r} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)$$

sehingga

$$\left(\frac{\partial p'}{\partial r} \right)_{r=R} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\dot{m}}{4\pi \rho_0 R^2} = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} - \frac{2\dot{m}}{R^3} \frac{dR}{dt} \right)$$

atau

$$-\frac{F}{R^2} \left(\frac{R}{a_0} - t \right) + \frac{1}{a_0 R} F' \left(\frac{R}{a_0} - t \right) = \frac{1}{4\pi R^2} \left(\frac{d\dot{m}}{dt} - 2 \frac{\dot{m}}{R} \frac{dR}{dt} \right)$$

Karena $R \ll T a_0$ maka suku pertama sebelah kiri jauh lebih besar dari suku kedua. Karena $\delta R \ll R$ maka suku kedua sebelah kanan jauh lebih kecil dari suku pertama.

Oleh karena itu maka, $F = -\frac{1}{4\pi} \frac{dm}{dt}$ sehingga

$$p(r,t) = \frac{F}{R} = -\frac{1}{4\pi R} \frac{dm(t)}{dt}$$

9.8 Solusi umum untuk gelombang suara

Sampai saat ini kita telah melihat beberapa tipe gelombang seperti 1-D, *spherical*, *harmonic*, dan *plane*. Sebenarnya masih banyak lagi tipe gelombang lainnya seperti gelombang *cylindrical*, ataupun gelombang yang dihasilkan oleh doublet, dan lain-lain, yang tidak dapat kita bahas karena keterbatasan waktu. Namun, pada subbagian ini kita akan mempelajari solusi umum dari persamaan gelombang, yang tentunya berlaku untuk tipe gelombang yang kita telah pelajari maupun yang belum.

Persamaan gelombang akustik yang paling umum adalah

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = f(\underline{x}, t)$$

di mana kita telah tambahkan kemungkinan adanya sumber ($f(\underline{x}, t)$) dan a_0 telah diset $a_0 = 1$ untuk menyingkat penulisan. Untuk mendapatkan solusi, kita gunakan cara yang serupa dengan kasus aliran potensial inkompresibel yaitu dengan menggunakan teorema Green.

Sekali lagi teorema Green adalah,

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dV = \int_S (\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi) \cdot \hat{n} dS$$

Untuk mendapatkan solusi persamaan di atas, kita pilih $\psi = G(\underline{x}, t, \underline{x}', t')$ di mana G memenuhi persamaan,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \nabla^2 G = \delta(\underline{x} - \underline{x}') \delta(t - t') \text{ dan } G(\underline{x}, t, \underline{x}', t') = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial t}(\underline{x}, t, \underline{x}', t') = 0 \end{aligned} \right\} \forall t < t'$$

Dengan mensubstitusikan persamaan untuk ϕ dan G ke dalam teorema Green didapatkan,

$$\int_{V(\underline{x}')} \phi \delta(\underline{x} - \underline{x}') \delta(t - t') dV + \int_{V(\underline{x}')} \left(G \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \phi \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \right) dV - \int_{V(\underline{x}')} G f(\underline{x}', t') dV = \int_{S(\underline{x}')} \left(G \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS$$

Kemudian persamaan di atas diatur kembali dan diintegrasikan dari waktu awal (t_i) s.d. waktu akhir (t_f) sehingga,

$$\begin{aligned} \int_{V(\underline{x}')} \int_{t_i}^{t_f} \phi(\underline{x}', t') \delta(\underline{x} - \underline{x}') \delta(t - t') dt' dV = \int_{V(\underline{x}')} \int_{t_i}^{t_f} f G dt' dV + \int_{S(\underline{x}')} \int_{t_i}^{t_f} \left(G \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial G}{\partial n} \right) dt' dS \\ + \int_{V(\underline{x}')} \int_{t_i}^{t_f} \left(\phi \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - G \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) dt' dV \end{aligned} \quad \text{(WS.1)}$$

Hasil intergrasi suku sebelah kiri adalah,

$$\int_{V(\underline{x}')} \int_{t_i}^{t_f} \phi(\underline{x}', t') \delta(\underline{x} - \underline{x}') \delta(t - t') dt' dV = \begin{cases} \phi(\underline{x}, t) & \text{apabila } \underline{x} \text{ di dalam } V \\ 0 & \text{apabila } \underline{x} \text{ di luar } V \end{cases}$$

Sedangkan integrasi suku terakhir sebelah kanan adalah,

$$\begin{aligned} \int_{V(\underline{x}')} \int_{t_i}^{t_f} \left(\phi \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - G \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) dt' dV &= \int_{V(\underline{x}')} \int_{t_i}^{t_f} \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial t} - G \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dt' dV \\ &= \int_{V(\underline{x}')} \left[\phi \frac{\partial G}{\partial t} - G \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{t_i}^{t_f} dV \equiv I \end{aligned}$$

Tetapi $G(\underline{x}, \underline{x}', t, t') = 0 = \frac{\partial G(\underline{x}, \underline{x}', t, t')}{\partial t}$ karena $t < t_f$ sehingga,

$$I = \int_{V(\underline{x}')} \left(G_0 \frac{\partial \phi_0}{\partial t} - \phi_0 \frac{\partial G_0}{\partial t} \right) dV$$

di mana G_0 , ϕ_0 , $\frac{\partial G_0}{\partial t}$, $\frac{\partial \phi_0}{\partial t}$ adalah harga-harga pada waktu $t = t_i$. Akhirnya dengan mensubstitusikan hasil-hasil terakhir ke (WS.1) didapatkan (\underline{x} berada di dalam V),

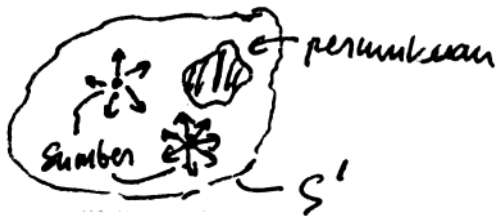
$$\phi(\underline{x}, t) = \int_{t_i}^{t_f} \left[\int_{V(\underline{x}')} G(\underline{x}, t, \underline{x}', t') f(\underline{x}', t') dV + \int_{S(\underline{x}')} \left(G \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS \right] dt' + \int_{V(\underline{x}')} \left(G_0 \frac{\partial \phi_0}{\partial t} - \phi_0 \frac{\partial G_0}{\partial t} \right) dV \tag{WS}$$

Di mana sekali lagi V adalah volume fluida dan S adalah seluruh batas-batas fluida dan variabel-variabel yang diintegrasikan dalam persamaan di atas adalah \underline{x}' dan t' . Bentuk ini adalah bentuk solusi yang paling umum.

Jadi apabila G kita ketahui dan kondisi-kondisi batas dan awal diketahui maka kita dapat menggunakan hasil di atas untuk menghitung ϕ di posisi tertentu pada waktu tertentu. G dikenal dengan sebutan “*Green Function*”. Untuk kasus fluida tak terbatas, solusi dari persamaan untuk G adalah unik dan solusi ini adalah

$$G = \frac{1}{4\pi r} \delta\left(t' - t + \frac{r}{a_0}\right), \quad r \equiv |\underline{x} - \underline{x}'| \tag{WS.2}$$

Untuk kasus fluida yang mempunyai batas, G tidaklah unik. Dari persamaan diferensial untuk G , kita dapat mengerti bahwa arti fisik dari G adalah gelombang yang dihasilkan oleh sebuah sumber (“unit source”) secara impulsif pada waktu $t = t'$ di posisi $\underline{x} = \underline{x}'$.



Untuk kasus-kasus di mana kondisi awal tidaklah penting, suku terakhir dalam (WS) dapat diabaikan. Apabila sumber-sumber dan permukaan berada di daerah tertentu maka kita dapat memperkenalkan permukaan imajiner

S' . Di luar S' tidak terdapat sumber dan apabila kondisi awal tidak penting (misalnya pada ksaus gelombang harmonik), maka persamaan (WS) menjadi,

$$\phi(\underline{x}, t) = \int_{t_i}^{t_f} \int_{S'(\underline{x}')} \left(G \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS dt' \tag{WS.3}$$

apabila \underline{x} berada di luar S' . Untuk G kita dapat gunakan G untuk fluida tak terbatas (WS.2).

Misalkan $\tilde{\phi}$ adalah solusi dari persamaan

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2} - \nabla^2 \tilde{\phi} = 0 \text{ dan } \tilde{\phi} = \phi \text{ di } S' \quad (\text{WS.4})$$

Gelombang “imajiner” ini tidak menghasilkan apa-apa di daerah fluida di luar S' . Namun menurut (WS) karena daerah di luar S' adalah daerah eksterior dari (WS.4) maka,

$$0 = \int_{t_i}^{t_f} \int_{S'} \left(G \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} - \tilde{\phi} \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS dt' \quad (\text{WS.5})$$

Apabila kita hitung selisih (WS.3) dan (WS.5) dengan mengingat bahwa $\tilde{\phi} = \phi$ di S' maka,

$$\phi(\underline{x}, t) = \int_{t_i}^{t_f} \int_{S'(\underline{x}')} G \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} \right) dS dt'$$

Apabila kita definisikan $f(\underline{x}', t') \equiv \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} \right)_{\underline{x}' \text{ di } S'}$ maka persamaan di atas menjadi,

$$\phi(\underline{x}, t) = \int_{S'(\underline{x}')} \int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{4\pi r} \delta \left(t' - t + \frac{r}{a_0} \right) f(\underline{x}', t') dt' dS$$

$$\boxed{\phi(\underline{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{S'(\underline{x}')} \frac{1}{r} f \left(\underline{x}', t - \frac{r}{a_0} \right) dS}$$

Hasil di atas dikenal dengan sebutan “Teorema Kirchoff” dan merupakan solusi paling umum untuk persamaan gelombang akustik untuk kasus di mana efek kondisi awal tidak penting.

9.9 Geometrical akustik

Pada pembahasan-pembahasan sebelumnya, kita menggunakan asumsi bahwa p_0, ρ_0, T_0, a_0 adalah konstan. Asumsi ini tentunya tidak dapat digunakan apabila kita ingin mempelajari proses perambatan suara di lautan atau atmosfer karena untuk kasus-kasus ini p_0, ρ_0, T_0, a_0 adalah fungsi dari ketinggian. Oleh karena itu di subbagian ini kita akan menambahkan efek dari “nonuniform” medium ke dalam teori akustik kita.

Sekarang kita anggap p_0, ρ_0, T_0 adalah fungsi dari \underline{x} . Persamaan kontinuitas dan momentum yang telah “diliniierkan” adalah seperti sebelumnya yaitu,

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad (\text{GA.1})$$

$$\rho_0 \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \nabla p = \rho_0 \underline{g}$$

di mana $p = p_0 + p'$ dan \underline{g} adalah gaya gravitasi per unit massa yang ditambahkan di sini karena gaya ini penting dalam kasus ini. Persamaan momentum untuk fluida pada awalnya (sebelum ada gelombang) adalah,

$$\nabla p_0 = \rho_0 \underline{g}$$

Dengan demikian maka persamaan momentum menjadi,

$$\rho_0 \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \nabla p' = 0 \quad (\text{GA.2})$$

Persamaan energi untuk kasus ini adalah $\frac{ds}{dt} = 0$ (isentropik tapi tidak homentropik) sehingga,

$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \frac{ds}{dt} + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \frac{d\rho}{dt}$$

sehingga,

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = a_0^2(\underline{x}) \frac{\partial \rho'}{\partial t} \quad (\text{GA.3})$$

Substitusikan (GA.3) ke (GA.1),

$$\frac{1}{\rho_0 a_0^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{u} = 0$$

Apabila kita kombinasikan persamaan ini dengan (GA.2) maka,

$$\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \nabla^2 p' + \frac{1}{\rho_0} \nabla \rho_0 \cdot \nabla p' = 0$$

Apabila λ adalah panjang gelombang dan L adalah jarak di mana ρ_0 bervariasi maka,

$$\nabla^2 p' \sim \frac{p'}{\lambda^2} \quad \text{dan} \quad \frac{1}{\rho_0} \nabla \rho_0 \cdot \nabla p' \sim \frac{p'}{\lambda L}$$

L biasanya jauh lebih besar daripada λ sehingga suku terakhir dapat diabaikan dan persamaan di atas menjadi,

$$\boxed{\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = a_0^2 \nabla^2 p'} \quad (\text{GA.4})$$

Persamaan ini mirip dengan persamaan sebelumnya namun di sini harus diingat bahwa $a_0 = a_0(\underline{x})$.

Untuk mendapatkan solusi (GA.4), kita gunakan asumsi gelombang harmonik,

$$\phi = \tilde{\phi}(\underline{x}) e^{-i\omega t}$$

Apabila kita substitusikan ke dalam (GA.4) didapatkan persamaan Helmholtz,

$$k^2 \tilde{\phi} + \nabla^2 \tilde{\phi} = 0, \quad k \equiv \frac{\omega}{a_0}$$

Sekarang kita tuliskan solusi dari persamaan Helmholtz seperti,

$$\tilde{\phi} = A(\underline{x}) e^{i\Sigma}$$

di mana $\Sigma = \Sigma(\underline{x})$ disebut eikonal. Dengan demikian maka,

$$\phi = A(\underline{x}) e^{i(\Sigma - \omega t)}$$

Analogi dengan kasus 1-D, gerakan dari “*wave front*” dijelaskan oleh, $\Sigma - \omega t = \text{konstan}$ sehingga $d\Sigma - \omega dt = 0$. Apabila \hat{l} adalah arah dari perambatan gelombang maka hasil di atas dapat dituliskan seperti,

$$\nabla \Sigma \cdot d\hat{l} - \omega dt = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{dl}{dt} = \frac{\omega}{|\nabla \Sigma|}$$

adalah kecepatan dari *wave front*. Apabila $\tilde{\phi}$ kita substitusikan ke persamaan Helmholtz maka didapatkan 2 persamaan yang merupakan bagian riil dan bagian imajiner yaitu,

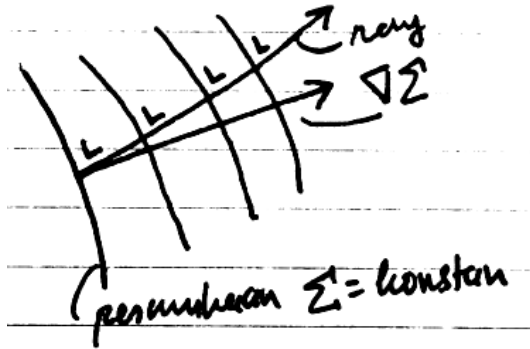
$$\nabla^2 A + (k^2 - (\nabla \Sigma)^2) A = 0$$

$$A \nabla^2 \Sigma + 2 \nabla A \cdot \nabla \Sigma = 0$$

Apabila $|\nabla^2 A| \ll |k^2 A|$ maka persamaan pertama menjadi,

$$\boxed{(\nabla \Sigma)^2 = k^2} \quad (\text{GA})$$

Dalam aproksimasi yang disebut dengan *Geometrical Acoustics*, diasumsikan bahwa $L \gg \lambda$ dan $|\nabla^2 A| \ll |k^2 A|$, sehingga persamaan (GA) berlaku. Apabila asumsi-asumsi ini berlaku maka persamaan (GA) menjelaskan proses perambatan gelombang. Selain itu, kita dapat memperkenalkan apa yang disebut “ray”. Ray adalah garis-garis yang searah dengan arah rambatan dan kita dapat “lupakan” konsep gelombang.



Menurut persamaan (GA), $\nabla \Sigma = \underline{k} \equiv k \hat{l}$. Perhatikan,

$$\nabla k = \nabla(\hat{l} \cdot \underline{k}) = (\hat{l} \cdot \nabla) \underline{k} + (\underline{k} \cdot \nabla) \hat{l} + \hat{l} \times (\nabla \times \underline{k}) + \underline{k} \times (\nabla \times \hat{l})$$

di mana hubungan terakhir didapatkan dari identitas vektor. Namun,

$$\nabla \times \underline{k} = \nabla \times \nabla \Sigma = 0 \text{ dan } (\underline{k} \cdot \nabla) \hat{l} = -\underline{k} \times (\nabla \times \hat{l})$$

Dengan demikian maka,

$$\nabla k = \nabla(\hat{l} \cdot \underline{k}) = (\hat{l} \cdot \nabla) \underline{k}$$

$$\boxed{\frac{dk}{dl} = \nabla k}$$

Karena ω adalah konstan dan $\omega = k a_0$ maka,

$$\boxed{\frac{d}{dl} \left(\frac{\hat{l}}{a_0} \right) = \nabla \left(\frac{1}{a_0} \right)}$$

atau dengan notasi optik “index of refraction” $n \equiv \frac{a_{ref}}{a_0}$ maka persamaan di atas

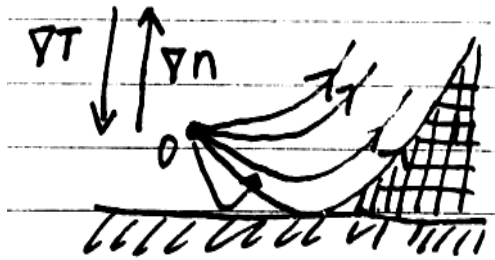
menjadi,

$$\boxed{\frac{d}{dl} (n) \nabla n}$$

di mana $n \equiv n\hat{l}$. Didalam definisi n terdapat a_{ref} yang mempunyai harga konstan.

Dengan demikian hasil-hasil di atas menunjukkan bahwa apabila $a_0(x)$ diketahui maka \hat{l} dapat dicari (arah perambatan gelombang dapat dicari).

Sebagai contoh misalkan udara pada siang hari di atas padang pasir. Dalam kasus ini temperatur di dekat permukaan lebih tinggi daripada temperatur udara pada daerah yang lebih tinggi sehingga terdapat ∇T seperti terlihat pada sketsa di bawah.



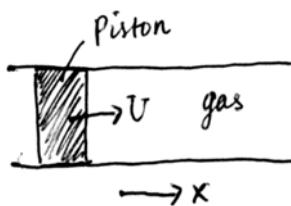
Karena untuk udara, $a_0 \propto \sqrt{T}$ dan $n \propto \frac{1}{a_0}$ maka arah dari ∇n dan ∇T berlawanan. Persamaan di atas menyatakan bahwa rays akan mengarah ke arah ∇n dengan demikian apabila terdapat sumber suara di titik O (di atas permukaan) maka arah perambatan suara akan didefleksikan ke atas seperti terlihat pada sketsa. Di daerah yang kotak-kotak dalam sketsa suara tidak terdengar suara sama sekali.

BAB 10

Aliran "Unsteady" 1D

10.1 Dasar teori

Di Bab gelombang akustik kita mempelajari gerakan *unsteady* dari gangguan kecil. Sekarang kita akan mempelajari gerakan *unsteady* dari gangguan yang tidak bisa diasumsikan "kecil". Kita akan lihat bagaimana gelombang yang mempunyai amplitudo yang cukup besar (*finite*) bergerak. Tipe gerakan yang akan kita bahas (gerakan gelombang dengan *finite amplitude*) dapat dijumpai dalam gerakan piston seperti yang digambarkan di bawah ini



Asumsi yang akan kita gunakan dalam pembahasan selanjutnya adalah:

- Aliran adalah aliran satu dimensi
- Aliran adalah aliran isentropik $\left(\frac{ds}{dt} = 0\right)$

Dengan menggunakan asumsi-asumsi ini, persamaan-persamaan dasar fluida menjadi,

$$\text{Kontinuitas} \quad : \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \underline{u} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{Momentum} \quad : \quad \frac{d\underline{u}}{dt} = \frac{-1}{\rho} \nabla p \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots(2)$$

Energi : $\frac{ds}{dt} = 0 \dots\dots\dots(3)$

Berikutnya kita nyatakan $\rho = \rho(p,s)$ sehingga,

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s \frac{dp}{dt} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{dt} = \frac{1}{a^2} \frac{dp}{dt}$$

Jadi persamaan energi menjadi,

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{a^2} \frac{dp}{dt}$$

Dengan mensubstitusikan hasil ini ke persamaan (1) didapatkan,

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Dengan demikian sistim persamaan fluida yang harus diselesaikan adalah,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{u}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Terhadap kedua persamaan di atas kemudian dilakukan penjumlahan dan pengurangan, diperoleh

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \pm \frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial t} \right) + (u \pm a) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \pm \frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0$$

10.2 Kasus aliran Homentropik (S = konstan)

Untuk kasus homentropik,

$$\rho = \rho(p,s) \underset{s - \text{konstan}}{\equiv} \rho(p) \text{ dan } a = a(p)$$

Dengan demikian maka kita dapat nyatakan $\frac{1}{\rho a} dp \equiv dF$ di mana $F = F(p)$ sehingga,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_s \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right)_s \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Dari definisinya jelaslah bahwa F hanya dapat didefinisikan dalam kasus homentropik.

Dengan definisi ini kita dapat mengganti suku-suku seperti $\frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial x}$ dalam persamaan

(4) dengan menggunakan F sehingga persamaan tersebut menjadi,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \pm \frac{\partial F}{\partial t} \right) + (u \pm a) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \pm \frac{\partial F}{\partial x} \right) = 0$$

atau

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (u \pm a) \frac{\partial}{\partial x} \right) (u \pm F) = 0$$

Apabila kita definisikan,

$$\frac{d^+}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (u + a) \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{dan} \quad \frac{d^-}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (u - a) \frac{\partial}{\partial x}$$

maka persamaan (4), akhirnya, dapat dituliskan menjadi

$$\frac{d^+}{dt} (u + F) = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{d^-}{dt} (u - F) = 0$$

Karena arti dari $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x}$ adalah perubahan waktu untuk pengamat yang

bergerak dengan kecepatan u maka,

$\frac{d^+}{dt}$: adalah perubahan waktu untuk pengamat yang bergerak dengan kecepatan $(u+a)$,

(dijelaskan oleh garis C^+ pada bidang $x-t$)

$\frac{d^-}{dt}$: adalah perubahan waktu untuk pengamat yang bergerak dengan kecepatan $(u-a)$,

(dijelaskan oleh garis C^- pada bidang $x-t$)

Maka persamaan diatas menyatakan bahwa

$$u + F \equiv J^+ \text{ adalah konstan sepanjang } C^+$$

$$u - F \equiv J^- \text{ adalah konstan sepanjang } C^-$$

Juga dari $\frac{ds}{dt} = 0$,

$$s \text{ adalah konstan sepanjang jejak partikel } (C^0)$$

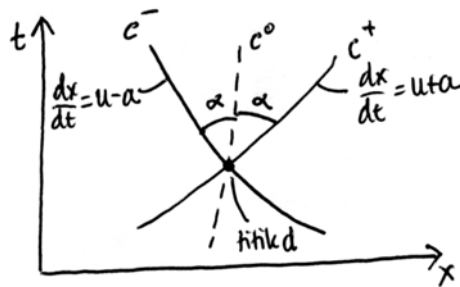
Dari hasil di atas,kita dapat mengambil kesimpulan sbb:

1. Apabila kita lihat problem aliran 1-D unsteady dengan menggunakan “diagram x-t” seperti waktu kira mempelajari akustik 1-D maka hasil di atas menunjukkan bahwa setiap titik dalam diagram tersebut dilalui oleh tiga garis (C^+, C^-, C^0).

Garis C^+ dijelaskan oleh persamaan $\frac{dx}{dt} = u + a$ dan sepanjang garis J^+ adalah

konstan. Garis C^- dijelaskan oleh persamaan $\frac{dx}{dt} = u - a$. Jadi garis itu menjelaskan

“path” atau jejak dari “fluid particle”. Apabila kita lihat persamaan yang menjelaskan garis C^+, C^- , dan C^0 maka dapat disimpulkan bahwa C^+ dan C^- Melewati sebuah titik secara simetris terhadap “particle path”

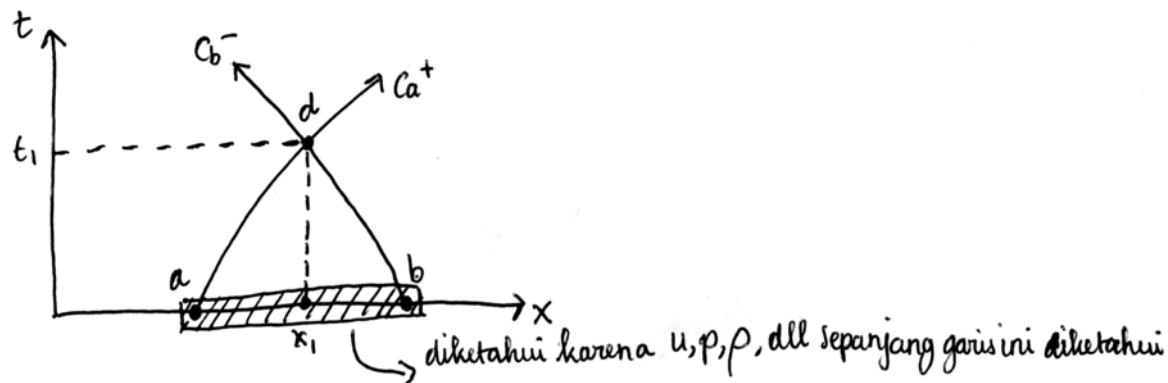


2. Apabila kita bandingkan hasil di atas dengan hasil dari akustik 1-D, maka dapat disimpulkan bahwa C^+, C^-, C^0 adalah garis-garis *characteristic* karena garis-garis tersebut menjelaskan bahwa ada “sebuah kuantitas” yang konstan sepanjang garis garis tersebut.(dalam akustik 1-D, p', ρ', u atau disebut juga “*disturbance*” adalah konstan sepanjang garis yang dijelaskan oleh persamaan

$$\frac{dx}{dt} = \pm a_0).$$

3. Karena aliran adalah aliran homotropik maka apabila F diketahui, harga-harga variabel termodinamika lainnya, seperti p dan T , juga diketahui. Ini dikarenakan secara umum harga dari sebuah variabel termodinamika untuk *simple compressible substance* (seperti gas) ditentukan oleh harga dua variabel independen termodinamika lainnya. Apabila kita memilih s sebagai salah satu variabel yang independen, dan s adalah konstan, maka hanya terdapat satu variabel yang independen. Dari definisinya, terlihat bahwa F adalah variabel termodinamika. Dengan demikian apabila F diketahui dan dijadikan variabel independen maka variabel lain dapat ditentukan.

Sekarang kita akan lihat bagaimana (5) digunakan untuk menyelesaikan persoalan apabila kita ketahui keadaan fluida pada suatu waktu (t_0). Misal kita ingin mengetahui u dan F pada titik “d”. Pertama-tama kita cari C^+ & C^- yang melintasi “d” (C_a^+ & C_b^-). Karena (C_a^+ & C_b^-) berasal dari “a” dan “b” maka kita dapat hitung $J_a^+ = u_a + F_a$ dan $J_b^- = u_b - F_b$.



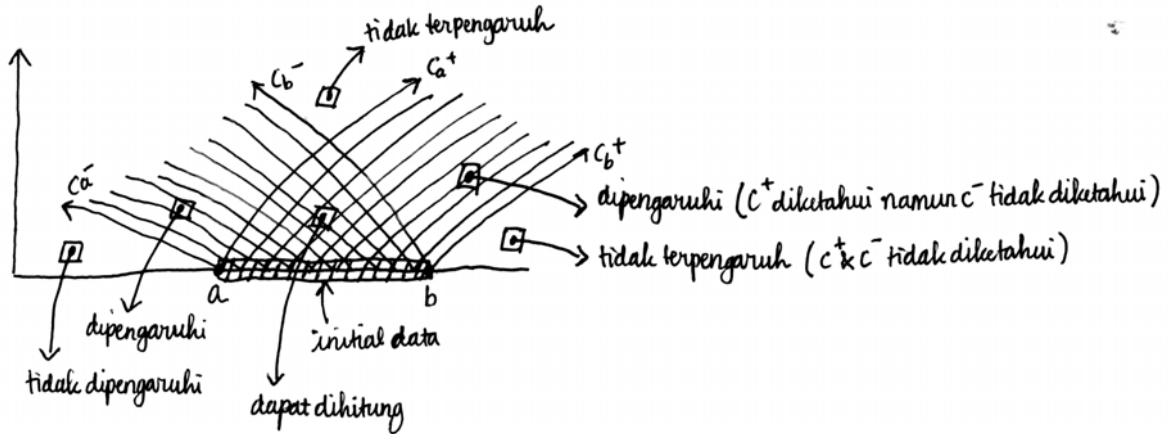
Menurut persamaan (5) J_a^+ adalah konstan sepanjang C_a^+ & J_b^- adalah konstan sepanjang C_b^- . Pada titik d,

$$u_d + F_d = J_a^+, \quad u_d - F_d = J_b^-$$

sehingga,

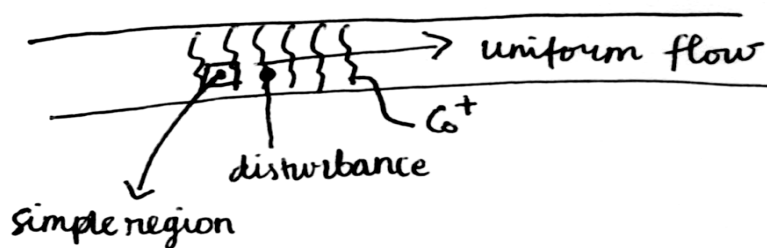
$$u_d = \frac{1}{2}(J_a^+ + J_b^-), \quad F_d = \frac{1}{2}(J_a^+ - J_b^-)$$

dan seluruh variabel aliran di titik d diketahui. karena untuk aliran homentropik, $s = konstan$. Jadi kita dapat hitung $p_d = p_d(F_d, s) = p_d(F_d)$, $\rho_d = \rho_d(F_d)$ dll.

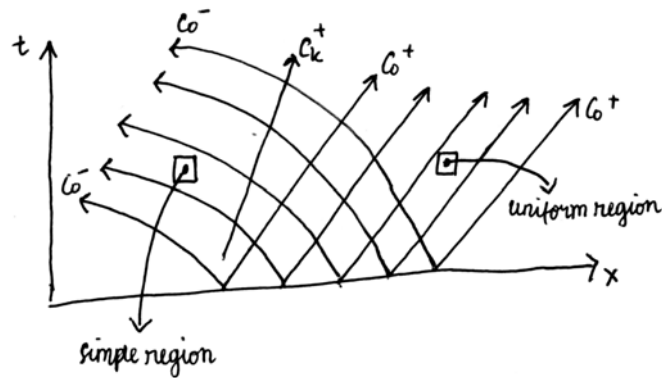


Dari contoh di atas terlihat bahwa apabila kita ketahui data awal (sepanjang garis a-b dalam gambar di atas) maka dalam “diagram x-t” ada daerah-daerah yang dapat dihitung, dipengaruhi dan tidak terpengaruh (lihat gambar di atas). Karena “path” dari *characteristic* tidak diketahui pada awalnya (apabila data awal diberikan kita tetap tidak mengetahui *characteristic* mana yang akan melintasi titik “d” misalnya) maka integrasi harus dilakukan secara numerik.

10.3 Gelombang sederhana (Simple Waves)



Dalam kasus perambatan gelombang ke arah di mana terdapat aliran seragam, persoalan ini dapat diselesaikan lebih mudah. Dalam x-t diagram gambar di atas dijelaskan sebagai berikut



untuk daerah aliran seragam, u_0 dan F_0 adalah konstan sehingga $J_0^- = u_0 - F_0$ dan $J_0^+ = u_0 + F_0$ adalah konstan. Karenanya $\frac{dx}{dt} = u_0 \pm a_0$ adalah konstan, sehingga garis-garis *characteristic* di daerah seragam mempunyai *slope* yang sama. Seperti terlihat dalam x-t diagram, *characteristic* $C^- = C_0^-$ berasal dari daerah seragam sehingga apabila kita menghitung u dan F di *simple region*, misalnya sepanjang C_k^+ , maka $u_k - F_k = J_0^- = \text{konstan}$ (diketahui) dan $u_k + F_k = J_k^+$.

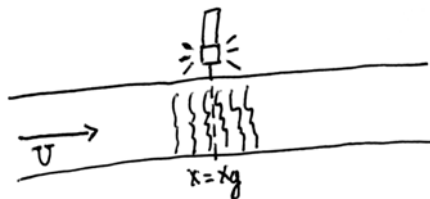
Jadi, $u_k = \frac{1}{2}(J_k^+ + J_0^-)$ dan $F_k = \frac{1}{2}(J_k^+ - J_0^-)$ adalah konstan sepanjang C_k^+ . Karena aliran adalah aliran homentropik maka karena F adalah konstan sepanjang C_k^+ , variabel-variabel p , ρ , T , a dan lain-lain adalah konstan sepanjang C_k^+ . Ini menunjukkan bahwa garis C_k^+ adalah garis lurus. Karena variabel termodinamik seperti p , ρ , T , a dan u adalah konstan sepanjang C^+ , maka untuk “*simple wave*” garis C^+ adalah garis yang menjelaskan jejak/ path dari gangguan. Jadi garis ini mempunyai arti yang sama dengan garis yang dijelaskan oleh $\frac{dx}{dt} = a_0$ pada kasus akustik 1-D.

Hasil di atas didapatkan untuk gelombang/ gangguan yang bergerak ke arah kanan. Untuk gelombang yang bergerak ke kiri ke arah di mana terdapat aliran yang seragam, J_0^+ adalah konstan yang diketahui.

$$J_0^+ = u_k + F_k = \text{konstan di mana pun.}$$

Sedangkan gelombang dijelaskan oleh *characteristic* C^- , misalnya C_k^- . Sehingga $J_k^- = u_k - F_k$ adalah konstan sepanjang C_k^- . Jadi kita dapat simpulkan bahwa C_k^- adalah garis yang menjelaskan “*path*” dari gangguan yang bergerak ke kiri.

Kesimpulan:



Jadi dari hasil di atas dapat dilihat bahwa apabila kita berikan “gangguan” kepada aliran dalam sebuah pipa yang berdiameter konstan, maka gangguan ini akan bergerak ke kanan dengan

kecepatan $\frac{dx}{dt} = u + a$ dan ke kiri dengan kecepatan $\frac{dx}{dt} = u - a$. Dari gangguan yang

bergerak ke kiri, kita dapat lihat apabila $u < a$ maka gangguan ini akan terus bergerak

ke kiri karena $\frac{dx}{dt} < 0$. Namun apabila $u > a$ maka $\frac{dx}{dt} > 0$ atau gangguan ini juga akan

bergerak ke kanan !!! Jadi apabila $u > a$ maka tidak ada gangguan yang bergerak ke kiri dari titik $x = x_g$. Apabila $u < a$ maka aliran disebut *subsonic*. Sedangkan apabila

$u > a$ maka aliran tersebut disebut aliran *supersonic*. Jadi untuk aliran:

Subsonic : gangguan dapat merambat ke arah depan (upstream)

Supersonic : gangguan tidak dapat merambat ke arah depan (upstream)

Dengan kata lain untuk aliran *supersonic* aliran di depan tidak terpengaruh oleh perubahan-perubahan yang terjadi di belakangnya (*downstream*). Karena hal inilah maka ada fenomena-fenomena baru dalam aliran *supersonic* seperti “*shock wave*”.

10.4 Proses pembentukan Shock Wave dalam Perfect Gas

Pembentukan *shock wave* terjadi di hampir semua aliran unsteady. Dalam subbagian ini kita akan lihat pembentukan *shock wave* yang terjadi akibat distorsi dari gelombang yang awalnya kontinu (*shock wave* adalah gelombang yang tidak kontinu).

Untuk perfect gas: $\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = \frac{\gamma RT}{\gamma RT_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)$

Karena aliran adalah aliran homentropik maka kita dapat gunakan persamaan (IR.) (LIHAT APPENDIX B).

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \Rightarrow p = \frac{p_0}{a_0^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}} a^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}} \Rightarrow \rho = \frac{\rho_0}{a_0^{\frac{2}{\gamma-1}}} a^{\frac{2}{\gamma-1}}$$

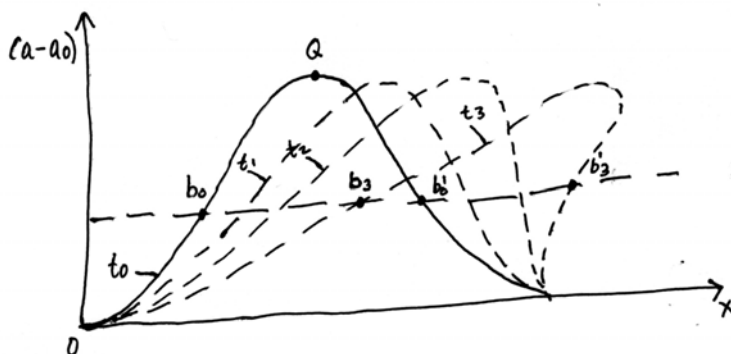
$$dp = \frac{p_0}{a_0^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}} \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right) a^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} da$$

Jadi untuk perfect gas.

$$dF \equiv \frac{dp}{\rho a} = \left(\frac{2}{\gamma-1}\right) da \Rightarrow \boxed{F = \frac{2a}{\gamma-1}}$$

Sekarang misalkan kita mempunyai gelombang yang bergerak ke arah kanan (+x) menuju gas yang diam dengan properti a_0, p_0 (gelombang ini dapat dilakukan dengan mendorong piston ke arah kanan untuk beberapa saat lalu berhenti). Persoalan di atas adalah persoalan *simple wave* sehingga, $J^- = J_0^- = \text{konstan}$ di mana pun.

$$J^- = u - \frac{2a}{\gamma-1} = -\frac{2a_0}{\gamma-1} \Rightarrow \boxed{u = \frac{2}{\gamma-1}(a-a_0)} \tag{6}$$



Untuk kasus $a > a_0, u > 0$ sehingga fluida bergerak ke arah x^+ . Apabila kita lihat hubungan antara p dan a maka untuk kasus ini $p > p_0$. Jadi gelombang yang

dihasilkan adalah gelombang kompresi (*compression wave*).

Titik-titik dalam dalam gelombang ini bergerak dengan kecepatan :

$$\frac{dx}{dt} = u + a \stackrel{(6)}{=} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} a - \frac{2}{\gamma-1} a_0 \stackrel{\gamma=1.4}{=} \frac{2.4}{1.4} a - \frac{2}{1.4} a_0 = \frac{2.4a - 2a_0}{1.4}$$

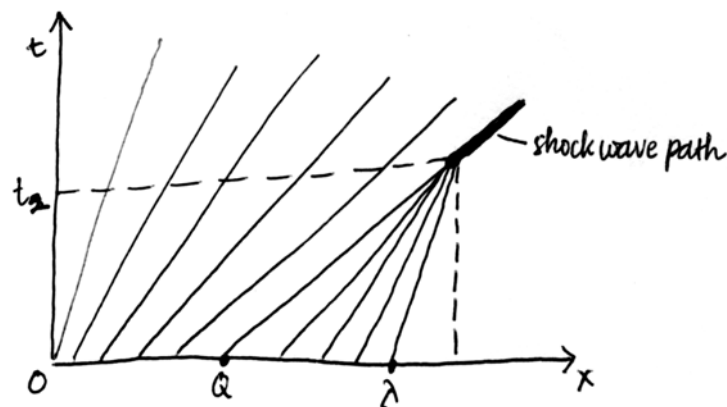
Karena a mempunyai nilai yang berbeda pada setiap titik dalam gelombang (titik 0, Q, λ misalnya) maka gelombang akan terdistorsi seperti gambar di atas. Karena dua titik dalam gelombang mempunyai nilai “ a ” yang sama seperti titik b dan b’, maka titik b dan b’ bergerak dengan kecepatan yang sama sehingga jarak antara dua titik ini adalah konstan.

Pada waktu t_2 digambar, gradien a (juga gradien p , ρ , u , T) menjadi *infinite* (sangat besar). Pada waktu itulah terjadi pembentukan *shock wave*. Apabila kita lanjutkan perhitungan hingga $t = t_3$ maka a , p , ρ , u , T akan mempunyai harga yang berbeda pada posisi x dan ini tidak mungkin.

Peristiwa pembentukan *shock wave* juga dapat dilihat dalam “ x - t diagram” (lihat gambar di bawah). Dalam diagram ini, C^+ dijelaskan oleh persamaan :

$$\frac{dx}{dt} = u + a = \frac{2.4a - 2.4a_0}{1.4} \text{ atau } \frac{dt}{dx} = \frac{1.4}{2.4a - 2.4a_0}$$

Karena titik-titik dalam gelombang mempunyai atau bergerak dengan kecepatan yang berbeda (a berbeda) maka karakteristik C^+ mempunyai slope yang berbeda (dt/dx berbeda).



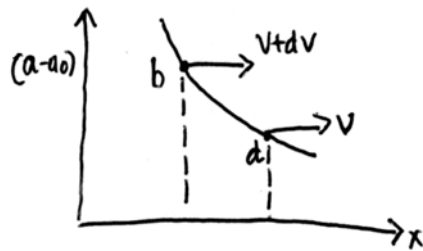
Apabila kita memulai dari titik λ sampai dengan Q gelombang maka harga a naik sehingga dt/dx turun. Sedangkan dari titik Q sampai dengan O, harga a turun sehingga dt/dx naik. Pada waktu t_2 “slope–slope” dari karakteristik yang berasal dari titik Q sampai λ bertemu di titik S. Setelah titik S, perhitungan tidak dapat dilanjutkan dengan menggunakan metode karakteristik karena ada gradien yang sangat besar sehingga asumsi homentropik tidak lagi dapat digunakan. Setelah *shock wave* terbentuk pada waktu t_2 di titik S, maka gerakan dari *shock wave* ini harus dijelaskan dengan menggunakan “*shock condition*” atau “*jump condition*”.

Apabila kita perhatikan “slope” dari titik Q hingga 0, maka terlihat bahwa karakteristik untuk titik-titik ini menyebar. Karena menyebar maka titik-titik tersebut tidak akan bertemu di satu titik. Apabila kita lihat bentuk gelombang maka di daerah ini gelombang mempunyai kecenderungan untuk rata.

Kesimpulan :

1. Dari contoh di atas dapat dilihat apabila ada gelombang yang harga “ a ”nya naik turun maka shock wave akan terbentuk karena bagian gelombang dimana “ a ” naik (p naik) akan mempunyai kecenderungan untuk naik (*steppen*) sedang bagian yang “ a ”nya turun (p turun) akan mempunyai kecenderungan untuk merata (*flaten*).
2. Gelombang yang tidak akan menjadi shock wave adalah gelombang yang harga “ a ”nya selalu turun (p turun). Untuk kasus ini karakteristik C^+ -nya akan menyebar sehingga tidak akan bertemu sampai kapan pun.

3.



Waktu yang dibutuhkan untuk pembentukan shock wave dapat dihitung dengan melihat perbedaan kecepatan antara dua titik dalam gelombang (b dan d). Dari sketsa di atas

dapat dilihat bahwa titik b akan menyusul titik d pada waktu,

$$t^* = -\frac{1}{\left(\frac{dv}{dx}\right)_{\text{minimum}}}$$

Karena,

$$v = u + a = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} a - \frac{2}{\gamma - 1} a_0$$

maka

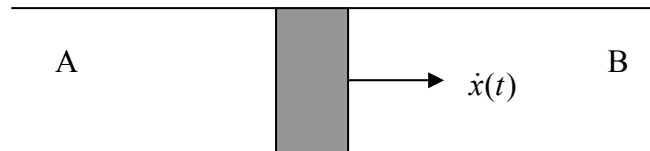
$$t^* = -\frac{(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)\left(\frac{da}{dx}\right)_{\text{min}}}$$

(untuk contoh diatas da/dx minimum di titik b' pada waktu t_0 .)

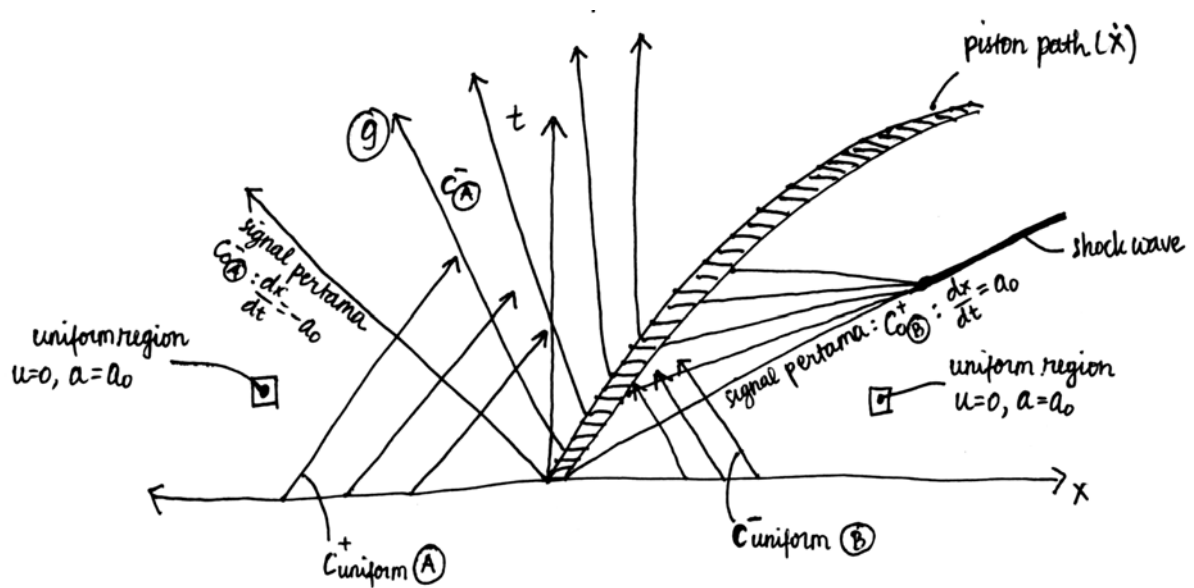
Jadi jarak yang dibutuhkan untuk pembentukan shock wave adalah $x^* = vt^*$. Untuk gelombang yang tidak terlalu besar (mendekati gelombang akustik), jarak ini adalah beberapa kilometer. Jadi untuk kasus ini shock wave tidak pernah terbentuk karena untuk jarak yang sejauh itu gelombang telah terdisipasi oleh viskositas.

10.5 Penerapan

10.5.1 Gerakan piston



Apabila piston digerakkan dengan kecepatan $\dot{x}(t)$ seperti digambarkan di atas, maka ada dua tipe gelombang yang dihasilkan. Yang pertama merambat ke daerah A dan yang kedua merambat ke daerah B. Dalam “x-t diagram” proses ini dapat dijelaskan sebagai berikut :



Daerah A dan B adalah daerah yang seragam dengan $u = 0$ dan $a = a_0$. Sekarang kita akan lihat gerakan gas di daerah A dan B secara satu-persatu.

Daerah A

Gelombang yang bergerak ke daerah A adalah *simple wave* yang bergerak ke kiri. Jadi:

$$J_{uniformA}^+ = \frac{2}{\gamma-1} a_0 = u_A + \frac{2}{\gamma-1} u_A, \text{ di mana pun di A.}$$

Karena gelombang adalah *simple wave* maka u_A dan a_A adalah konstan sepanjang C_A^- .

Karena kondisi batas mengharuskan $u_A = \dot{x}(t)$ untuk gas yang “menempel” di piston, maka $u_A = \dot{x}(t)$ sehingga

$$\frac{2}{\gamma-1} a_0 = \dot{x}(t) + \frac{2}{\gamma-1} a_A$$

atau

$$a_A = a_0 - \frac{\gamma-1}{2} \dot{x}(t) \tag{7}$$

$a_A < a_0$ karena $\dot{x}(t) > 0$ sehingga $p_A < p_0$. Jadi gelombang yang bergerak ke arah A adalah gelombang ekspansi.

Dengan demikian maka,

$$\frac{dx_A}{dt} = u_A - a_A = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right) \dot{x} - a_0$$

atau

$$\frac{dt}{dx_A} = \frac{1}{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)x - a_0} = -\frac{1}{a_0 - \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\dot{x}}$$

Jadi untuk daerah A dapat disimpulkan bahwa karena \dot{x} naik maka $\frac{dt}{dx_A}$ bertambah

“tinggi secara negatif” sehingga C_A^- “menyebar” (lihat diagram x-t). Dengan kata lain, hasil diatas menunjukkan bahwa tidak terjadi pembentukan *shock wave*.

Apabila $\dot{x} = \frac{2}{\gamma-1} a_0$, $a_A = 0$ maka $\rho_A = 0 = p_A$. Bila terjadi maka slope $C_A^+ = C_A^-$.

Namun perlu diingat apabila $\rho \rightarrow 0$ maka ini adalah limit dari teori mekanika kontinum sehingga hasil di atas tidak dapat digunakan. Dengan demikian maka $\dot{x} < \frac{2}{\gamma-1} a_0$.

Daerah B

Gelombang yang bergerak ke arah B adalah simple wave yang bergerak ke kanan sehingga,

$$J_{uniformB}^- = -\frac{2}{\gamma-1}a_0 = u_B - \frac{2a_B}{\gamma-1}$$

karena $u_B = x(t)$ maka,

$$\boxed{a_B = \frac{\gamma-1}{2}\dot{x}(t) + a_0} \quad (8)$$

Karena $\dot{x} > 0$ maka $a_B > a_0$ sehingga $p_B > p_0$. Jadi gelombang yang bergerak ke arah B adalah gelombang kompresi.

Kecepatan pergerakan gelombang ini adalah,

$$\begin{aligned} \frac{dx_B}{dt} &= u_B + a_B = \frac{\gamma+1}{2}\dot{x}(t) + a_0 \\ \frac{dt}{dx_B} &= \frac{1}{a_0 + \frac{\gamma+1}{2}\dot{x}(t)} \end{aligned}$$

Karena $\dot{x}(t)$ naik maka slope dari karakteristik C_B^+ turun. Ini menyebabkan pada suatu waktu karakteristik C_B^+ akan bertemu sehingga terjadi pembentukan shock wave (lihat x-t diagram).

10.5.2 Kasus piston yang digerakkan secara Impulsive

Apabila piston digerakkan secara impulsif atau

$$\dot{x} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \text{konstan}, & t > 0 \end{cases}$$

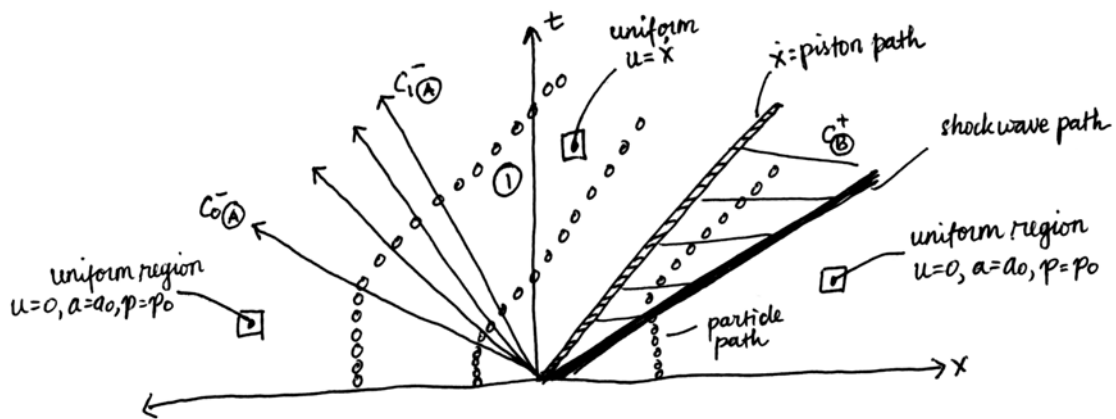
maka origin ($t = 0$) adalah “*singular point*” di mana kecepatan gas adalah antara 0 dan \dot{x}

(pada saat piston digerakkan maka gas yang menempel pada piston harus bergerak dengan kecepatan piston). Untuk daerah B ini dicapai dengan pembentukan shock

wave pada awal gerakan piston, sehingga perhitungan harus menggunakan “*shock condition*” dari mulai awal.

Untuk daerah A perubahan kecepatan yang secara instan itu dicapai dengan pertemuan karakteristik-karakteristik C_A^- di origin. Dengan adanya pertemuan ini maka harga u_A dan u_B menjadi bermacam-macam antara 0 dan \dot{x} . Proses ini mirip dengan proses pembentukan shock wave namun diskontinuitas ini tidak bertahan karena karakteristik-karakteristik C_A^- ini menyebar.

Proses-proses ini digambarkan dalam “x-t diagram” sebagai berikut :



Karena $\frac{dt}{dx_A} = -\frac{1}{a_0 - \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\dot{x}}$ maka karakteristik-karakteristik C_A^- dijelaskan oleh

$$\frac{dt}{dx_{0A}} = -\frac{1}{a_0} \text{ dan } \frac{dt}{dx_A} \text{ untuk karakteristik } C_{1A}^- \text{ yaitu } \frac{dt}{dx_{1A}} = -\frac{1}{a_0 - \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\text{konstan}}$$

Jadi *slope-slope* C_A^- adalah minimum untuk C_{0A}^- dan maksimum untuk C_{1A}^- .

Daerah di antara C_{0A}^- dan C_{1A}^- di mana terdapat karakteristik C_A^- yang menyebar disebut *expansion fan* atau “kipas ekspansi”. Dari diagram di atas dapat dilihat bahwa ada tiga daerah di dalam daerah A :

- 1) Daerah di bawah C_{0A}^- atau $x = a_0 t$ di mana $u_A = 0$ atau $a_A = a_0$
- 2) Daerah di antara C_{0A}^- dan C_{1A}^- (daerah expansion fan), di mana

$$\frac{dx}{dt} = u_A - a_A = \frac{\gamma+1}{2}u_A - a_0 = \frac{x}{t}, \text{ karena } C_A^- \text{ adalah garis lurus } \frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}$$

$$u_A = \frac{2}{\gamma+1}\left(a_0 + \frac{x}{t}\right) \text{ dan } a_A = \frac{2}{\gamma+1}\left(a_0 - \frac{(\gamma-1)x}{2t}\right).$$

3) Daerah di atas C_{1A}^- dan \dot{x} (piston path) di mana $u_A = \dot{x}$, $a_A = a_0 - \frac{(\gamma-1)}{2}\dot{x}$.

Catatan:

- C_{1A}^- dijelaskan oleh persamaan

$$\frac{x}{t} = \frac{\gamma+1}{2}\dot{x} - a_0$$

Jadi daerah ekspansi fan dijelaskan oleh

$$a_0 t < x < \left(\frac{\gamma+1}{2}\dot{x}t - a_0 t\right)$$

- Karena aliran di daerah ini adalah aliran homentropik maka hubungan antara p_0 , ρ_0 , T_0 dan p_1 , ρ_1 , T_1 dijelaskan oleh persamaan (IR). Dari persamaan (7)

$$\frac{a_A}{a_0} = 1 - \frac{(\gamma-1)u_A}{2a_0}$$

dari persamaan (IR),

$$\frac{p_A}{p_B} = \left(\frac{a_A}{a_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$$

Dengan demikian maka,

$$\frac{p_A}{p_B} = \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{u_A}{a_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$$

ρ_A , T_A dapat dihitung dengan persamaan (IR) lainnya.

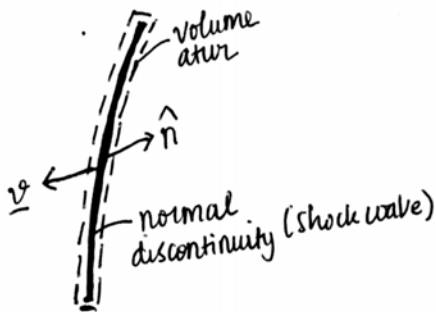
- Karena $0 \leq u_A < \frac{2}{\gamma-1}a_0$ maka $p_A = p_B$. Dari hasil ini maka dapat disimpulkan bahwa shock wave tidak akan terbentuk karena p_A nilainya terus menurun.

BAB**11****Gelombang Kejut (Shock Wave)**

11.1 Pendahuluan

Dalam sub-bagian sebelum ini kita telah lihat bahwa hampir semua aliran 1-D yang *unsteady* pada akhirnya akan membentuk shock wave. Dalam “x-t diagram” proses terbentuknya shock wave dijelaskan oleh bertemunya karakteristik-karakteristik yang satu tipe (bertemu C^+ atau bertemu C^-). Karena untuk simple wave setiap characteristic dari gelombang yang merambat ke daerah aliran uniform mempunyai harga u dan F yang unik (juga p , a , ρ , T), maka apabila ada karakteristik sejenis yang bertemu pada suatu saat maka harga u dan F pada saat itu menjadi tidak unik. Oleh karena itu shock wave atau diskontinuitas haruslah terbentuk pada saat itu. Apabila shock wave telah terbentuk, maka asumsi homentropik tidak dapat digunakan. Karena apabila ada shock wave maka ada diskontinuitas dari harga-harga u , p , ρ , T dan lain-lain, sehingga ada gradien-gradien yang sangat tinggi. Apabila ada gradien-gradien yang tinggi maka asumsi inviscid dan adiabatic tidak lagi berlaku. Karena asumsi-asumsi ini tidak lagi berlaku maka metode perhitungan yang dibahas di bab sebelum ini tidak dapat digunakan. Dalam bab ini kita akan membahas bagaimana cara menghitung “*flow variable*” apabila terdapat shock wave dalam aliran. Namun, sebelumnya akan diberikan dahulu pemahaman fisik dari shock wave secara mendalam.

11.2 Shock Wave di dalam fluida umum



Pada subbagian ini kita akan mulai pembahasan mengenai sifat-sifat shock wave secara umum.

Pada subbagian ini, kita tidak akan menspesifikasikan jenis fluida dimana shock wave tersebut berada. Dengan demikian maka sifat-sifat shock wave yang akan didapatkan disini berlaku secara umum. Baru pada

subbagian berikutnya, kita akan mempelajari shock wave di dalam fluida yang spesifik, yaitu *perfect gas*.

Shock wave adalah contoh dari *normal discontinuity* karena seperti telah kita lihat dalam contoh gerakan piston, $w = (\underline{u} - \underline{v}) \cdot \hat{n} \neq 0$ (Dalam kasus piston

$-\underline{v} \cdot \hat{n} = \frac{dx}{dt} = +(u + a)$ sehingga $w = +a$). Di daerah 1 dan 2 (depan dan belakang

shock) kita dapat gunakan asumsi inviscid dan adiabatic. Penjelasan mengapa kita dapat gunakan asumsi ini adalah sebagai berikut :

Di dalam shock wave, gradien kecepatan dan temperatur sangat tinggi sehingga *viscous stress* dan *heat conduction* tidak dapat diabaikan. Namun, pada waktu kita menurunkan “*jump condition*”, kita menggunakan volume atur yang “membungkus” diskontinuitas (shock wave untuk kasus yang dibicarakan saat ini). Karena shock wave sangat tipis, kita selalu dapat menggunakan volume atur yang juga tipis sehingga “*jump condition*” dapat digunakan namun permukaan 1 (+) dan 2 (-) berada diluar daerah dimana ada gradien yang tinggi. Oleh karena itu asumsi inviscid dan adiabatic selalu dapat dijustifikasikan. Namun, apabila kita harus mempelajari apa yang terjadi di dalam shock wave, asumsi-asumsi ini tentunya tidak dapat lagi digunakan.

Sekarang kita akan menggunakan persamaan (ND.1) sampai (ND.4) (lihat sub-bagian Diskontinuitas dalam Fluida) untuk melihat sifat-sifat shock wave.

$$\rho_1 w_1 = \rho_2 w_2 \quad (\text{S.1})$$

$$\rho_1 w_1 \underline{u}_1 + p_1 \hat{n} = \rho_2 w_2 \underline{u}_2 + p_2 \hat{n}$$

Komponen yang sejajar dengan \hat{n} didapatkan dengan mengambil “dot product” dari persamaan di atas,

$$\rho_1 w_1 \underline{u}_1 \cdot \hat{n} + p_1 = \rho_2 w_2 \underline{u}_2 \cdot \hat{n} + p_2$$

Apabila suku kiri dan kanan persamaan diatas kita kurangi $\underline{v} \cdot \hat{n}$ dikalikan $\rho_1 w_1$ dan kita gunakan persamaan (S.1) maka persamaan menjadi :

$$\boxed{p_1 + \rho_1 w_1^2 = p_2 + \rho_2 w_2^2} \tag{S.2a}$$

Sedangkan komponen dari persamaan (ND.2) yang sejajar dengan shock wave adalah

$$\boxed{\underline{u}_{1//} = \underline{u}_{2//}} \tag{S.2b}$$

Persamaan energi untuk kasus ini adalah

$$\rho_1 w_1 \left(e_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) + p_1 \underline{u}_1 \cdot \hat{n} = \rho_2 w_2 \left(e_2 + \frac{u_2^2}{2} \right) + p_2 \underline{u}_2 \cdot \hat{n}$$

Persamaan diatas dapat ditulis ulang dengan menggunakan (S.1),

$$\rho_1 w_1 \left\{ \left(e_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) - \left(e_2 + \frac{u_2^2}{2} \right) \right\} = (p_1 \underline{u}_1 - p_2 \underline{u}_2) \cdot \hat{n}$$

Dengan menambahkan ruas kiri dan kanan persamaan di atas dengan $p_1 w_1 - p_2 w_2$ lalu gunakan (S.2) dan definisi $h \equiv e + \frac{p}{\rho}$ didapatkan,

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} + \frac{(p_2 - p_1)(\underline{v} \cdot \hat{n})}{\rho_1 w_1}$$

Dari persamaan momentum (S.2)

$$\begin{aligned} \frac{(p_2 - p_1)}{\rho_1 w_1} (\underline{v} \cdot \hat{n}) &= (w_2 - w_1) (\underline{v} \cdot \hat{n}) \\ &= (w_2^2 - w_1^2) + w_1 \underline{u}_1 \cdot \hat{n} - w_2 \underline{u}_2 \cdot \hat{n} \end{aligned} \quad , \quad \underline{v} \cdot \hat{n} = \underline{u} \cdot \hat{n} - w$$

Dengan menggunakan $\underline{u}_{1//} = \underline{u}_{2//}$ persamaan energi dapat disederhanakan lebih lanjut sehingga,

$$\boxed{h_1 + \frac{w_1^2}{2} = h_2 + \frac{w_2^2}{2}} \tag{S.3}$$

Untuk entropy pertidaksamaan (ND.4) dapat disederhanakan dengan menggunakan (S.1),

$$s_2 \geq s_1 \quad (\text{S.4})$$

Sekarang kita telah menemukan 3 persamaan (S.1), (S.2), dan (S.3) yang menjelaskan shock wave. (S.4) merupakan syarat tambahan yang nanti akan kita gunakan untuk menentukan proses yang mungkin terjadi. Dalam menyelesaikan persoalan, seperti biasa u , p_1 , ρ_1 diketahui. Kecepatan shock wave atau v juga diketahui, sehingga w_1 juga diketahui. Jadi kita mempunyai 3 persamaan dan 3 variabel dalam persamaan yang tidak diketahui, yaitu p_2 , ρ_2 , w_2 ($u_{2//} = u_{1//}$ dan $h_2 = h(p_2, \rho_2)$). Dengan demikian apabila kita ketahui $h = h(p, \rho)$ (jenis gas) maka persamaan di atas dapat diselesaikan.

Untuk kasus yang akan dibahas di bab ini fluida di depan dan di belakang shock wave dijelaskan oleh "equation of state" yang sama. (hubungan $h = h(p_2, \rho_2)$ sama pada daerah 1 dan 2).

Apabila kita gunakan (s.1) maka (s.2) dapat dituliskan seperti,

$$w_1 w_2 = \frac{[p]}{[\rho]} \text{ atau } \rho_1 w_1 \rho_2 w_2 = \frac{[p] \rho_1 \rho_2}{[\rho]}.$$

Dengan $J \equiv \rho_1 w_1 = \rho_2 w_2$ dan $v \equiv \frac{1}{\rho}$ maka,

$$J^2 = -\frac{[p]}{[v]}$$

Persamaan energi (s.3) dapat diubah dengan mengganti

$$w^2 = \frac{J^2}{\rho^2} = J^2 v^2$$

sehingga,

$$h_1 + \frac{1}{2} J^2 v_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} J^2 v_2^2$$

$$(h_1 - h_2) + \frac{1}{2} J^2 (v_1 - v_2)(v_1 + v_2) = 0$$

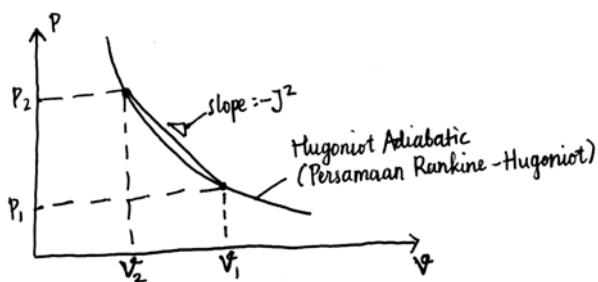
$$(h_1 - h_2) + \frac{1}{2} (p_2 - p_1)(v_1 + v_2) = 0$$

atau

$$\boxed{\begin{aligned} [h] &= \frac{1}{2} [p](v_1 + v_2) \\ [e] &= -\frac{1}{2} [v](p_1 + p_2) \end{aligned}} \quad (\text{Rankine-Hugoniot}).$$

Karena $h = h(p, \rho) = h(p, v)$ maka persamaan di atas menjelaskan hubungan antara variabel-variabel termodinamika (p dan ρ) di daerah 1 dan 2. Seperti telah dijelaskan sebelumnya p_1 dan ρ_1 diketahui, maka persamaan di atas menjelaskan hubungan antara p_2 dan ρ_2 atau $p_2 = p_2(v_2)$. Fungsi ini disebut *Hugoniot adiabatic*. Apabila dilihat secara sekilas, fungsi ini mirip dengan kasus di mana $s = \text{konstan}$, untuk kasus ini hubungan antara p dan v juga dapat dituliskan menjadi $p_2 = \tilde{p}_2(v_2)$. Namun, bentuk $\tilde{p}_2(v_2)$ tidak sama dengan $p_2(v_2)$. Dan kita akan menggunakan perbedaan ini untuk mempelajari sifat-sifat *shock wave*.

Fungsi yang menjelaskan hubungan antara p dan v untuk kasus $s = \text{konstan}$ ($p_2 = \tilde{p}(v)$) disebut *Poisson adiabatic*. Sekarang kita akan menggambarkan *Poisson* dan *Hugoniot adiabatic* di bidang p - v .



Karena $p_1 v_1$ diketahui maka kita mengetahui titik awal dalam bidang p - v . Kurva *hugoniot adiabatic* tidak dapat bertemu dengan garis $v=v_1$ kecuali di titik awal. Apabila *Hugoniot adiabatic* bertemu di titik

lain selain (p_1, v_1) maka ini berarti ada 2 tekanan berbeda yang untuk satu harga v yang

sama (v_1). Namun apabila v sama maka menurut persamaan *Hugoniot* yang kedua $[e]=0$ atau $e_1 = e_2$. Karena $p = p(e, v)$ dan $e_1 = e_2$, $v_1 = v_2$ ini berarti $p_2 = p_1$. Dengan alasan yang serupa kita dapat juga simpulkan bahwa *Hugoniot adiabatic* tidak dapat bertemu dengan garis $p = p_1$ kecuali di titik awal. Apabila kita hubungkan titik (p_1, v_1) dengan titik lain (p_2, v_2) maka $\frac{[p]}{[v]} = -J^2$ adalah “slope” dari garis penghubung kedua titik tersebut.

Sekarang kita akan melihat daerah disekitar titik (p_1, v_1) . Di daerah ini kita dapat gunakan ekspansi Taylor untuk mengevaluasi persamaan *Rankine-Hugoniot* di daerah ini. Lebih tepatnya, tujuan kita adalah mendapatkan hubungan antara entropi dan tekanan sehingga kita dapat tentukan apakah dalam proses ini apakah $p_2 > p_1$ atau $p_1 < p_2$. Pertama-tama kita gunakan ekspansi terhadap $(s_2 - s_1)$ dan $(p_2 - p_1)$ untuk $(h_2 - h_1)$.

$$(h_2 - h_1) = \left(\frac{\partial h}{\partial s_1}\right)_p (s_2 - s_1) + \left(\frac{\partial h}{\partial p_1}\right)_s (p_2 - p_1) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial p_1^2}\right)_s (p_2 - p_1)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 h}{\partial p_1^3}\right)_s (p_2 - p_1)^3$$

(kita lakukan ekspansi $(p_2 - p_1)$ sampai orde 3 karena ekspansi orde 1 dan 2 akan saling menghilangkan nantinya). Dari termodinamik, $dh = Tds + v dp$ sehingga $\left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p = T$,

$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_s = v$. Dengan demikian maka,

$$h_2 - h_1 = T_1 (s_2 - s_1) + v_1 (p_2 - p_1) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial p_1}\right)_s (p_2 - p_1)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p_1^2}\right)_s (p_2 - p_1)^3$$

Pada persamaan Rankine Hugoniot terdapat suku $v_1 + v_2$. Oleh karena itu kita akan lakukan ekspansi Taylor untuk v_2 . Namun, kita hanya akan melakukan ekspansi ini terhadap $p_2 - p_1$ saja. Karena apabila kita ekspansikan juga terhadap $(s_2 - s_1)$ maka apabila kita masukkan hasil ekspansi ini ke dalam persamaan *Rankine-Hugoniot* akan ada suku $(s_2 - s_1)(p_2 - p_1)$ yang tidak kita butuhkan. Hasil dari ekspansi ini adalah,

$$v_2 - v_1 = \left(\frac{\partial v}{\partial p_1}\right)_s (p_2 - p_1) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p_1^2}\right)_s (p_2 - p_1)^2$$

Berikutnya kita substitusikan hasil ekspansi untuk $(h_2 - h_1)$ dan $(v_2 - v_1)$ ke dalam persamaan *Rankine-Hugoniot* dan didapatkan,

$$s_2 - s_1 = \frac{1}{12T_1} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \right)_s (p_2 - p_1)^3 \quad (s.5)$$

Perlu diingat persamaan di atas hanya berlaku di daerah sekitar (p_1, v_1) atau dengan kata lain hanya berlaku untuk *shock wave* yang lemah.

Untuk lebih memahami hasil yang didapatkan, perhatikan $-\left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_s > 0$ atau “*adiabatic compressibility*”. Fungsi ini hampir selalu turun apabila tekanan naik sehingga,

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \right)_s > 0$$

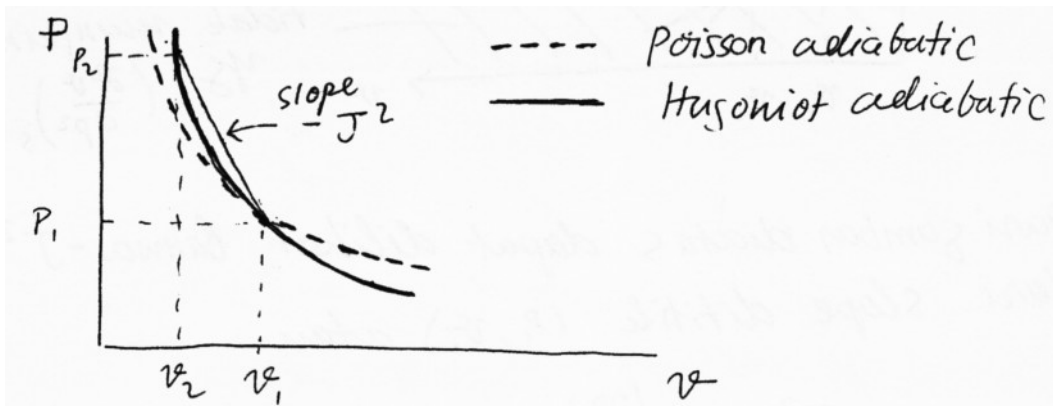
Pengecualian $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \right)_s > 0$ adalah dalam kasus-kasus tertentu seperti di sekitar “*critical point*” dari gas dan liquid dan medium yang mempunyai “*phase transition*”. Kasus-kasus seperti ini tidak akan dibahas di sini jadi $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \right)_s > 0$ berlaku dalam kasus-kasus

yang akan kita bahas. Dengan demikian (s.5) menyatakan bahwa untuk kasus-kasus ini tekanan di belakang shock harus lebih tinggi dari didepan shock karena $s_2 > s_1$ (s.4). Dari hasil di atas pertama-tama kita dapat bandingkan *Hugoniot dan Poisson adiabatic* (kasus di mana ada normal *shock wave* dan kasus di mana $s = \text{konstan}$). Dari (s.5) untuk $p_2 > p_1$ maka $s_2 > s_1$.

Dari termodinamik $\left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)_p = \frac{T}{C_p} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$ dan untuk medium yang

“*expand*” apabila T naik maka $\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p > 0$ sehingga $\left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)_p > 0$. Jadi dalam bidang p - v ,

untuk setiap garis $p = \text{konstan}$, kasus yang mempunyai s_2 yang lebih tinggi ($ds \geq 0$) akan mempunyai v_2 yang lebih tinggi ($dv > 0$). Maka apabila kita tambahkan *Poisson adiabatic* ($s = \text{konstan}$) dalam bidang p - v maka untuk daerah $p_2 > p_1$ *Poisson adiabatic* berada di sebelah “kiri” *Hugoniot adiabatic*. Sedangkan untuk daerah $p < p_1$, menurut (s.5), $s_2 < s_1$. sehingga untuk daerah $p < p_1$ *Poisson adiabatic* berada di sebelah “kanan” *Hugoniot adiabatic*.



Untuk $p = p_1$ menurut (s.5) $s_2 = s_1 = \text{konstan}$ sehingga *Hugoniot* bertemu dengan *Poisson adiabetic*.

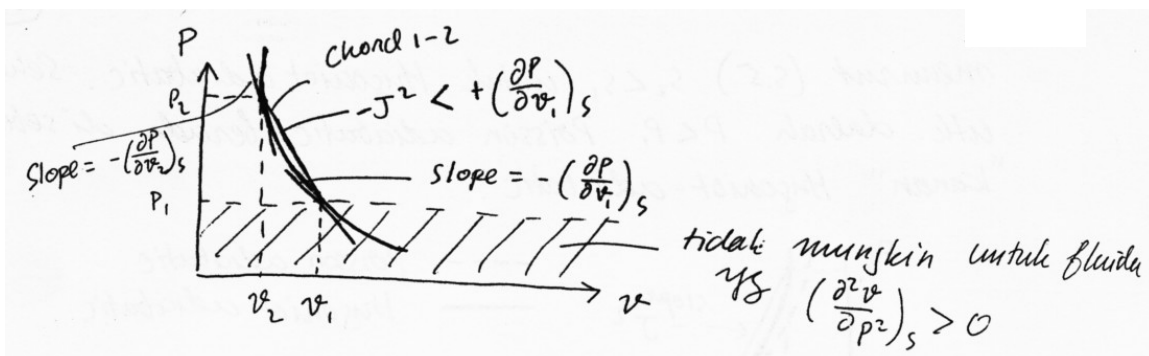
Dari (s.4) syarat yang harus dipenuhi untuk sebuah proses adalah $s_2 > s_1$. Dari (s.5) ini berarti di sekitar titik (p_1, v_1) , $p_2 > p_1$. Dari sifat di sekitar titik (p_1, v_1) kita dapat simpulkan bahwa proses yang mungkin terjadi untuk shock wave adalah $p_2 > p_1$, jadi shock wave adalah gelombang kompresi.

Di sekitar titik (p_1, v_1) persamaan $J^2 = -\frac{[p]}{[v]}$ dapat dituliskan sebagai $J^2 = -\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s$.

Karena $J^2 = \frac{w^2}{v^2}$ maka

$$w = \sqrt{-v^2 \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_s} \equiv a.$$

Karena $w_1 = \underline{u} \cdot \underline{\hat{n}} - \underline{v} \cdot \underline{\hat{n}}$ untuk shockwave yang bergerak menuju gas yang diam ($\underline{u}_1 = 0$), kecepatan shock wave yang lemah (weak shock wave) adalah kecepatan suara a_1 . Jadi dapat disimpulkan bahwa "weak shock wave" adalah gelombang ϵ ..



Kemiringan-kemiringan disekitar titik-titik 1, 2, dan antara titik 1 dan 2 di perhatikan dalam sketsa diatas. Dari sketsa tersebut dapat dilihat bahwa $-J^2$ lebih kecil dari *slope* di titik (p_1, v_1) atau

$$J^2 > -\left(\frac{\partial p}{\partial v_1}\right)_s$$

Jadi untuk shock wave,

$$w_1 = J^2 v_1 > -v_1^2 \left(\frac{\partial p}{\partial v_1}\right)_s = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_1}\right)_s = a_1^2$$

$$\boxed{w_1 > a_1}$$

Dari gambar di atas dapat dilihat pula bahwa $-J^2$ lebih besar dari slope di titik (p_2, v_2) sehingga,

$$J^2 < -\left(\frac{\partial p}{\partial v_2}\right)_s$$

Dengan demikian maka,

$$w_2 = J^2 v_2 < -v_2^2 \left(\frac{\partial p}{\partial v_2}\right)_s = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_2}\right)_s = a_2^2$$

$$\boxed{w_2 < a_2}$$

Hasil-hasil ini menunjukkan bahwa kecepatan relatif aliran fluida di depan shock haruslah supersonic. Sedangkan kecepatan relatif aliran fluida di belakang shock haruslah subsonic.

Catatan:

1. Untuk fluida dimana $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right)_s < 0$, $s_2 > s_1$ apabila $p_2 < p_1$. Untuk kasus ini dapat ditunjukkan bahwa $w_1 > a_1$ dan $w_2 < a_2$
2. Dapat disimpulkan bahwa shockwave akan terbentuk apabila kecepatan relatif fluida di depan shockwave lebih besar dari kecepatan suara.
3. Karena $[P] > 0$, maka $[W] < 0$, $[P] > 0$ dan $[\|u\|] < 0$.

11.3 Shock Wave di dalam Perfect Gas

Sekarang kita akan memilih satu jenis fluida untuk melanjutkan pembahasan tentang shock wave. Fluida yang akan kita pilih adalah *perfect gas*, dimana salah satu contoh dari gas ini adalah udara.

$$\text{Untuk perfect gas, } h = C_p T = \frac{\gamma RT}{\gamma - 1} = \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} pv$$

Persamaan Rankine-Hugoniot menjadi

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{v_2}{v_1} - 1}{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1} = \frac{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{\rho_1}{\rho_2} - 1}{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{v_1}{v_2} - 1}$$

Persamaan ini dapat ditulis ulang menjadi,

$$\frac{[v]}{v_1} = - \frac{2[p]/p_1}{2\gamma + (\gamma + 1)p/p_1}$$

Sekarang kita lihat

$$\frac{[p]}{\rho_1 a_1^2} \stackrel{(s.2)}{=} - \frac{\rho_1 w_1 [w]}{\rho_1 a_1^2} = M_{n_1} \frac{[w]}{a_1} = -M_{n_1}^2 \frac{[w]}{w_1} \stackrel{(s.1)}{=} -M_{n_1}^2 \frac{[v]}{v_1} \text{ di mana } M_{n_1} \equiv \frac{w_1}{a_1} \quad (s.6)$$

Dari persamaan *Rankine-Hugoniot* dan persamaan di atas kita dapatkan untuk shock didalam *perfect gas*,

$$\frac{[p]}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_{n_1}^2 - 1) \quad (s.7)$$

$$\frac{[w]}{a_1} = - \frac{2}{\gamma + 1} \left(M_{n_1} - \frac{1}{M_{n_1}} \right) \quad (s.8)$$

$$\frac{[v]}{v_1} = - \frac{2}{\gamma + 1} \left(1 - \frac{1}{M_{n_1}^2} \right) \quad (s.9)$$

$$M_{n_2} = \frac{w_2}{a_2} = \frac{w_1 + [w]}{a_1} \frac{a_1}{a_2} = \left(M_{n_1} + \frac{[w]}{a_1} \right) \frac{a_1}{a_2}$$

$$M_{n_2}^2 = \left(M_{n_1} + \frac{[w]}{a_1} \right)^2 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2 = \left(M_{n_1} + \frac{[w]}{a_1} \right)^2 \left(\frac{T_1}{T_2} \right)$$

Dengan menggunakan (s.6) dan (s.8), persamaan-persamaan di atas dapat dituliskan dalam bentuk yang lebih mudah untuk digunakan, seperti di bawah ini.

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} &= 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_{n_1}^2 - 1) \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{v_2}{v_1} = 1 - \frac{2}{\gamma+1} \left(1 - \frac{1}{M_{n_1}^2} \right) \\ \frac{T_2}{T_1} &= \frac{p_2 v_2}{p_1 v_1} = \left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_{n_1}^2 - 1) \right) \left(1 - \frac{2}{\gamma+1} \left(1 - \frac{1}{M_{n_1}^2} \right) \right) \\ \frac{[w]}{a_1} &= \frac{[u \cdot \hat{n}]}{a_1} = \frac{-2}{\gamma+1} \left(M_{n_1} - \frac{1}{M_{n_1}} \right) \\ M_{n_2}^2 &= \frac{1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M_{n_1}^2}{\gamma M_{n_1}^2 - \frac{(\gamma-1)}{2}} \end{aligned} \quad (s)$$

Dari persamaan (s) dapat dilihat bahwa apabila M_{n1} diketahui maka hubungan antara variable aliran di daerah 1 dan 2 ditentukan oleh persamaan-persamaan tersebut.

Ada dua limit yang kadangkala berguna. Kedua limit tersebut adalah :

- a) Strong shock ($\frac{p_2}{p_1} \gg 1$)

Menurut persamaan (s) yang pertama ini berarti $M_{n1}^2 \gg 1$. Jadi untuk kasus ini,

$$\frac{p_2}{p_1} \approx \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_{n_1}^2, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} \approx \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad \frac{T_2}{T_1} \approx \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} M_{n_1}^2, \quad M_{n_2}^2 \approx \frac{\gamma-1}{2\gamma}$$

- b) Weak Shock ($\frac{p_2}{p_1} - 1 \ll 1$)

Menurut persamaan (s.6),

$$\left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) = \frac{[p]}{p_1} = -J^2 \frac{[v]}{p_1} \lll 1$$

Jadi untuk kasus ini $[v] \lll 1$, oleh karena itu kita akan lakukan ekspansi Taylor untuk v_2 . Apabila kita anggap $v = v(p,s)$ maka,

$$v_2 = v_1 + \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_s (p_2 - p_1) + o(p^2) + \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)_p (s_2 - s_1) + o(s^2)$$

atau

$$[v] = \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_s [p] + \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)_p [s] + \dots$$

Dari (s5) ,

$$[s] = \frac{1}{12T_1} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \right)_s [p]^3$$

Jadi untuk Weak Shock wave $[s] \approx 0$. Selain itu,

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_s = \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{\rho} \right)}{\partial p} \right)_s = -\frac{v^2}{a^2}$$

sehingga

$$[v] \approx -\frac{v_1^2}{a_1^2} [p] \tag{s.10}$$

Berikutnya kita lihat $[w] = [\underline{u} \cdot \hat{n}]$.

$$w_2 - w_1 = J(v_1 - v_2) = \sqrt{-\frac{[p]}{[v]}} (v_1 - v_2)$$

$$[w] = \sqrt{-[p][v]}$$

Substitusikan (s.10) ke persamaan di atas didapatkan,

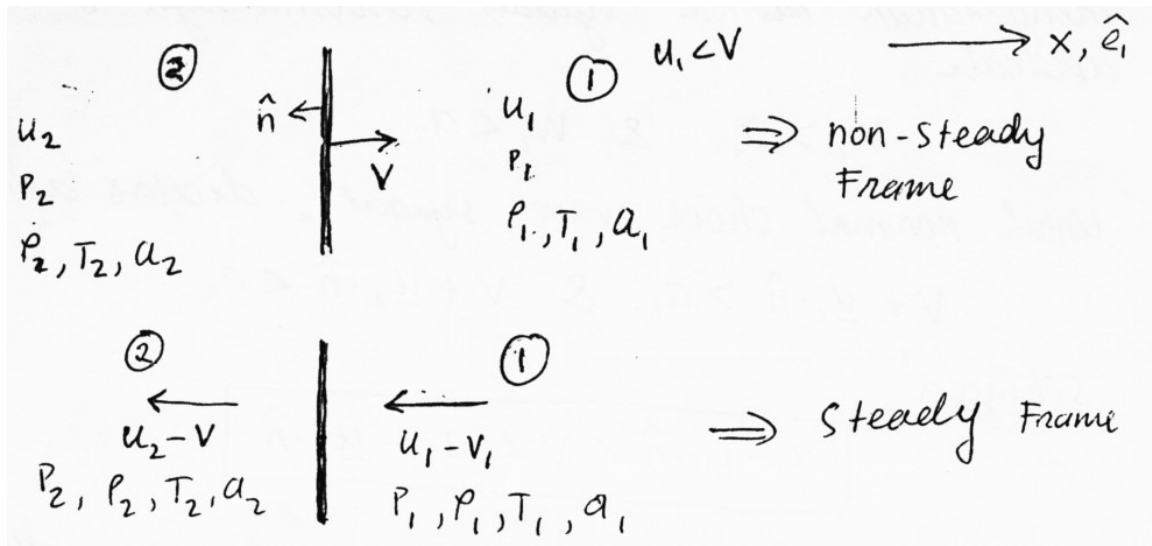
$$[w] = \frac{v_1}{a_1} [p] \text{ atau } [w] = \frac{a_1}{v_1} [v].$$

Jadi apabila diambil limit $[p] \rightarrow dp$ dan $[w] \rightarrow dw$, hasil diatas menjadi,

$$\boxed{dp = \rho_1 a_1 dw}, \quad dw = d(\underline{u} \cdot \hat{n}) = d(u_{normal})$$

Apabila kita bandingkan persamaan di atas dengan hasil dari *akustik*, maka dapat disimpulkan bahwa weak shock wave adalah gelombang akustik.

11.4 Normal Shock Wave



Dalam aliran 1-D, shock wave yang terbentuk adalah normal shock wave. Untuk kasus ini ,

$$\underline{u}_{1//} = \underline{u}_{2//} = 0$$

sedangkan

$$w_1 = v + \underline{u}_1 \cdot \hat{n}, \quad w_2 = v + \underline{u}_2 \cdot \hat{n}, \quad M_n = \frac{w}{a} \equiv M.$$

Untuk kasus ini persamaan (s) menjadi

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = 1 - \frac{2}{\gamma+1} \left(1 - \frac{1}{M_1^2} \right)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)$$

$$\frac{[w]}{a_1} = -\frac{2}{\gamma+1} \left(M_1 - \frac{1}{M_1} \right), \quad M_2^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}}$$

(S.N)

Hasil yang kita dapatkan di subbagian sebelumnya menyatakan bahwa syarat terbentuknya shock wave adalah

$$w_1 > a_1 \text{ dan } w_2 < a_2$$

Untuk normal shock wave, syarat-syarat di atas adalah

$$v + \underline{u}_1 \cdot \hat{n} > a_1 \text{ dan } v + \underline{u}_2 \cdot \hat{n} < a_2$$

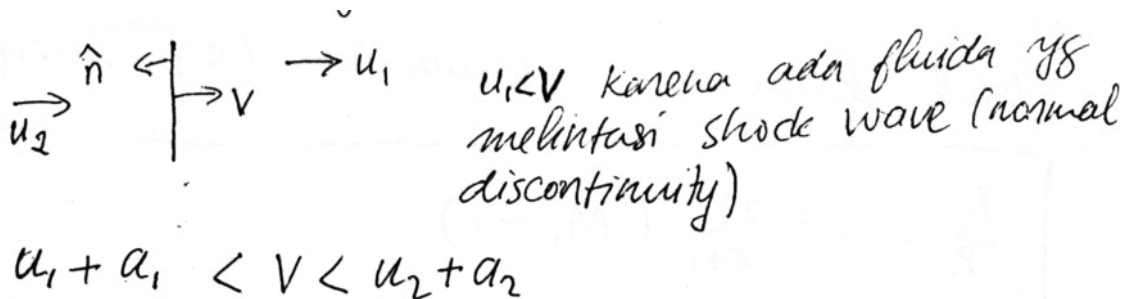
sehingga,

$$\boxed{a_1 - \underline{u}_1 \cdot \hat{n} < v < a_2 - \underline{u}_2 \cdot \hat{n}}$$

Sekarang kita akan gunakan pertidaksamaan di atas untuk melihat bagaimana “gangguan” yang terjadi di shock wave dan di belakang shock wave merambat. Untuk memudahkan pembahasan, kita asumsikan bahwa $\underline{u}_1 = u_1 \hat{e}_1$ di mana $u_1 < v$ dan $\underline{u}_2 = u_2 \hat{e}_2$. Dengan menspesifikasikan arah aliran di depan dan belakang shock wave pertidaksamaan di atas menjadi,

$$u_1 + a_1 < v < u_2 + a_2.$$

Sekarang kita perhatikan kasus-kasus berikut:



i) *Gangguan di shock wave*

Apabila ada gangguan di shock wave maka gangguan akan merambat dengan kecepatan

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_1 = u_1 + a_1 \quad \text{dan} \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_2 = u_2 - a_2$$

Dari persamaan di atas dapat dilihat bahwa gelombang yang seharusnya merambat ke daerah 1 dengan kecepatan $\left. \frac{dx}{dt} \right|_1 = u_1 + a_1$ bergerak lebih lambat dari *shock wave* ($u_1 + a_1 < v$). Jadi fluida di depan *shock wave* tidak pernah “merasakan”

keberadaan shock wave (karena *shock wave* sendiri adalah gangguan). Dengan kata lain *shock wave* tidak mempengaruhi keadaan fluida di depannya.

ii) *Gangguan di belakang shock wave*

Apabila ada gangguan di daerah di belakang shock wave maka gangguan tadi akan menghasilkan gelombang yang merambat dengan kecepatan $\frac{dx}{dt} = u_2 \pm a_2$. Untuk gangguan yang bergerak ke arah $+x$ dengan $\frac{dx}{dt} = u_2 + a_2$, dapat dilihat dari pertidaksamaan di atas bahwa gangguan ini akan “menyusul” shock wave ($v < a_2 + u_2$). Namun, setelah “bertemu” dengan shock wave gangguan tadi tidak dapat merambat ke daerah 1, karena dari hasil i) gangguan di shock wave bergerak lebih lambat dari shock wave. Yang terjadi adalah gangguan tadi akan direfleksikan oleh shock wave sehingga kembali ke daerah asalnya (daerah 2).

Catatan:

- 1) Untuk kasus $\underline{u}_1 = 0$ atau kasus shock wave yang bergerak ke daerah di mana ada fluida yang diam, arah gerakan dari fluida dapat ditentukan sebagai berikut:

$$w_1 - w_2 = (\underline{u}_1 - \underline{v}) \cdot \hat{n} - (\underline{u}_2 - \underline{v}) \cdot \hat{n} = -\underline{u}_2 \cdot \hat{n}$$

$$-[w] = -\underline{u}_2 \cdot \hat{n} \text{ atau } \underline{u}_2 \cdot \hat{n} = [w]$$

Karena $[w] < 0$ untuk $[p] > 0$ maka $\underline{u}_2 \cdot \hat{n} < 0$ sehingga arah \underline{u}_2 adalah seperti di gambarkan bawah ini.



Dengan kata lain fluida di belakang shock wave bergerak searah dengan shock wave !!!

- 2) Apabila $\underline{u}_1 \neq 0$, maka

$$w_1 - w_2 = (\underline{u}_1 - \underline{u}_2) \cdot \hat{n}$$

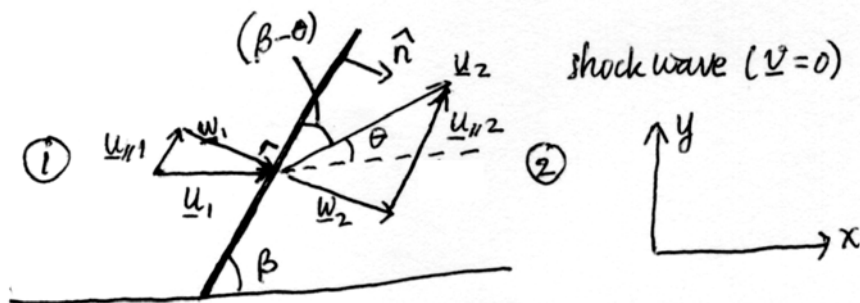
sehingga

$$(\underline{u}_2 - \underline{u}_1) \cdot \hat{n} = [w] < 0$$

atau,

$$\underline{u}_2 \cdot \hat{n} < \underline{u}_1 \cdot \hat{n}.$$

11.5 Oblique Shock Wave



$$w = (\underline{u} - \underline{v}) \cdot \hat{n} = \underline{u} \cdot \hat{n}$$

Oblique shock wave adalah situasi di mana kecepatan relatif fluida membentuk sudut yang lain dari 90° (kecepatan relatif fluida tidak normal terhadap shock wave) terhadap shock wave (lihat gambar). Untuk membahas kasus ini, kita akan melihat aliran dari sudut pandang pengamat yang melihat shock wave tidak bergerak ($\underline{v} = 0$).

Kecepatan relatif fluida di depan shock wave (\underline{u}_1) membentuk sudut β dengan shock wave. Kecepatan relatif fluida di belakang shock wave (\underline{u}_2) membentuk sudut $(\beta - \theta)$ terhadap shock wave. θ adalah sudut antara \underline{u}_2 dan sumbu- x . Dari (S.2.b), diketahui bahwa

$$\underline{u}_{1//} = \underline{u}_{2//} = u_1 \cos \beta.$$

Dari geometri gambar di atas terlihat bahwa,

$$\tan \beta = \frac{w_1}{u_{1//}} = \frac{w_1}{u_1 \cos \beta}$$

dan

$$\tan(\beta - \theta) = \frac{w_2}{u_{2//}} = \frac{w_2}{u_1 \cos \beta}.$$

Dengan demikian maka,

$$\begin{aligned} [w] &\equiv w_2 - w_1 = u_1 \cos \beta (\tan(\beta - \theta) - \tan \beta) \\ &= u_1 \cos \beta \left(\frac{\tan \beta - \tan \theta}{1 + \tan \beta \tan \theta} - \tan \beta \right) \\ &= -u_1 \left(\frac{\tan \theta}{\cos \beta (1 + \tan \beta \tan \theta)} \right) \end{aligned}$$

sehingga,

$$\frac{[w]}{a_1} = -\frac{u_1 \tan \theta}{a_1 (\cos \beta + \sin \beta \tan \theta)} = -\frac{M_1 \tan \theta}{(\cos \beta + \sin \beta \tan \theta)}$$

$$\text{di mana } M_1 \equiv \frac{u_1}{a_1}$$

(O.S.1)

Dari sifat shock wave kita ketahui bahwa, $w_1 > a_1$ atau $M_{n1} > 1$ dan $w_2 < a_2$ atau $M_{n2} < 1$. Untuk kasus oblique shock,

$$M_{n1} = \frac{w_1}{a_1} = \frac{u_1 \sin \beta}{a_1} = M_1 \sin \beta$$

Jadi syarat untuk terbentuknya shock wave adalah

$$\boxed{M_1 \sin \beta > 1}$$

Untuk aliran di belakang shock wave,

$$M_{n2} = \frac{u_2}{a_2} \sin(\beta - \theta) = M_2 \sin(\beta - \theta) < 1$$

Karena $-1 \leq \sin(\beta - \theta) \leq 1$ maka $M_2 \begin{cases} > 1 \\ = 1 \\ < 1 \end{cases}$. Dengan kata lain terdapat kemungkinan

dimana $u_2 > a_2$ (u_2 supersonic).

11.5.1 Kasus Perfect Gas

Untuk perfect gas, persamaan (S) dapat digunakan dengan $M_{n1} = M_1 \sin \beta$. Namun dalam praktek biasanya yang diketahui adalah: p_1 , ρ_1 , T_1 , M_1 , dan θ . Sehingga untuk menggunakan persamaan (S) kita perlu mencari β terlebih dahulu.

Hubungan antara β dengan M_1 dan θ didapatkan dengan menggunakan salah satu persamaan (S),

$$\frac{[w]}{a_1} = \frac{-2}{\gamma+1} \left[M_{n1} - \frac{1}{M_{n1}} \right] = \frac{-2}{\gamma+1} \left[M_1 \sin \beta - \frac{1}{M_1 \sin \beta} \right]$$

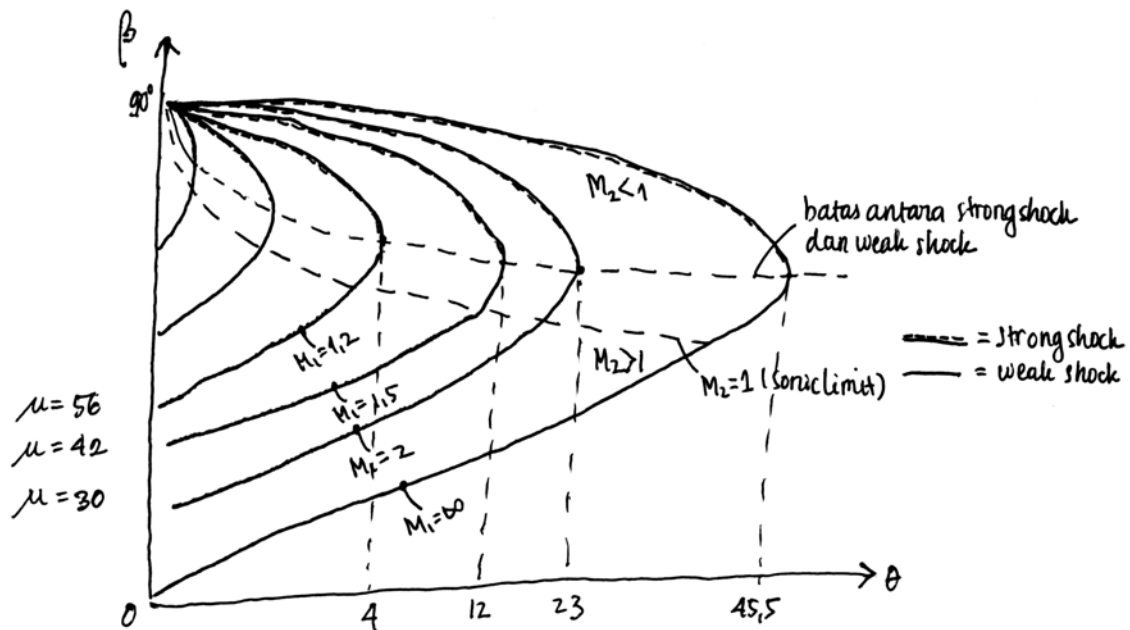
Sedangkan persamaan (O.S.1)

$$\frac{[w]}{a_1} = \frac{-M_1 \tan \theta}{(\cos \beta + \sin \beta \tan \theta)}$$

Dari kedua persamaan di atas didapatkan

$$\tan \theta = \frac{2(\cos \beta)(M_1^2 \sin^2 \beta - 1)}{(\gamma + 1)M_1^2 - 2(M_1^2 \sin^2 \beta - 1)} \quad (\text{O.S.2})$$

Dari persamaan (O.S.2), β dapat ditentukan apabila M_1 dan θ diketahui. Untuk setiap M_1 , persamaan di atas menyatakan $\beta(\theta)$. Karena persamaan di atas cukup rumit, hubungan antara β , M_1 , θ biasanya dipresentasikan dalam bentuk grafik atau tabel seperti di bawah ini:



Setiap kurva dalam diagram di atas menunjukkan hubungan antara β dan θ untuk sebuah harga M_1 (M_1 adalah parameter untuk diagram di atas).

Catatan:

1. Karena θ menunjukkan arah “streamline” di belakang shockwave dan untuk aliran inviscid $\underline{u} \cdot \hat{n} = 0$ (streamline paralel dengan permukaan), maka oblique shock wave terbentuk apabila ada permukaan yang mempunyai kemiringan relatif ke arah “freestream” (aliran freestream “membentur” permukaan, seperti dalam sketsa diatas). Proses terbentuknya oblique shock wave ini serupa dengan proses terbentuknya normal shock, yaitu adanya karakteristik-karakteristik yang bertemu di satu titik. Proses ini akan kita pelajari secara mendalam di Bab berikutnya.
2. Untuk setiap M_1 terdapat θ_{max} (misalnya untuk $M_1 = 2$, $\theta_{max} = 23$). Apabila terjadi situasi di mana $\theta > \theta_{max}$ maka tidak ada solusi dari persamaan (O.S.2) sehingga “straight” shockwave tidak akan terbentuk. Untuk kasus ini yang terbentuk adalah “curved” shock wave (shock wave yang melengkung). Dari diagram di atas dapat dilihat bahwa semakin tinggi M_1 , semakin tinggi θ_{max} . Untuk $M_1 \rightarrow \infty$, $\theta \rightarrow 45^\circ$

3. Untuk setiap θ yang lebih kecil dari θ_{max} ($\theta < \theta_{max}$), ada 2 harga β untuk setiap M_1 . Harga β yang lebih kecil disebut “*weak shock solution*” sedangkan harga β yang lebih tinggi disebut “*strong shock solution*” (untuk strong shock $M_{n1} = M_1 \sin \beta$ lebih tinggi sehingga $\frac{p_2}{p_1}$ juga lebih tinggi). Pada hampir setiap kasus (apabila kita diberikan harga θ & M_1), yang terbentuk adalah weak shock.
4. Dalam diagram θ - β - M terdapat apayang disebut dengan “*sonic limit*”. Apabila solusi berada di atas *sonic limit* maka $M_2 < 1$ sedangkan solusi yang berada di bawah limit ini $M_2 > 1$. Dalam diagram di atas terlihat bahwa daerah yang $M_2 < 1$ untuk kasus *weak shock* sangatlah kecil. Sehingga untuk hampir pada semua kasus $M_2 > 1$
5. Apabila $\theta = 0$, maka $\beta = 90^\circ$ atau $\beta = \mu$. Kasus $\beta=90^\circ$ adalah kasus normal shock wave . Untuk kasus $\theta=0$, persamaan (O.S.2) menjadi

$$\cos \beta (M_1^2 \sin^2 \beta - 1) = 0$$

Satu solusi dari persamaan di atas adalah $\beta = 90^\circ$. Solusi lainnya adalah

$$\beta = \sin^{-1} \left(\frac{1}{M} \right) \equiv \mu \quad (\text{O.S.3})$$

Karena $\theta = 0$ maka garis dengan kemiringan μ dapat digambarkan di setiap titik aliran. Garis ini disebut *Mach line* dan kita akan pelajari arti fisik dari garis ini di bab selanjutnya

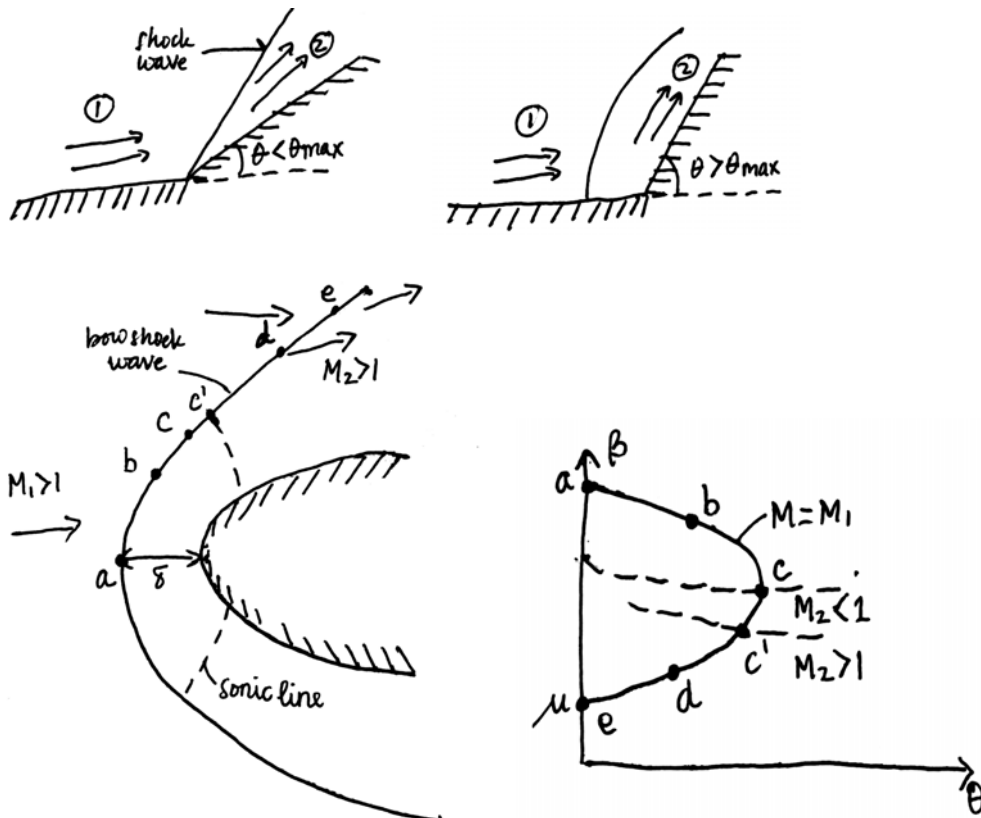
6. Untuk sebuah harga θ_1 , apabila M_1 diturunkan maka β akan naik (untuk weak solution). Akibatnya $M_{n1} = M_1 \sin \beta$ akan turun karena $\sin \beta \leq 1$ dan $M_1 > 1$.

Karena M_{n1} turun maka $\frac{p_2}{p_1}$ juga turun atau shock wave bertambah lemah.

Apabila M_1 terus diturunkan maka akan terjadi situasi di mana $M_2 < 1$. Pada saat itu shock wave dapat mulai “melengkung” (kondisi ini terjadi di daerah di atas “*sonic limit*” dalam diagram dan di bawah batas antara *strong dan weak solution*) ketika tercapai M_1 di mana shock wave mulai memisahkan diri dari benda. Apabila M_1 terus diturunkan maka shock wave yang melengkung terus bergerak menjauhi benda (ke arah *upstream*). (Setelah tercapai M_1 di mana $\theta = \theta_{max}$, persamaan (O.S.2) tidak memberikan solusi apabila M_1 terus diturunkan.

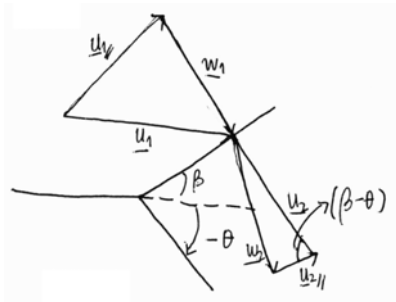
Sehingga proses menjauhnya shock wave dari body tidak dijelaskan dalam “ θ - β - M diagram”)

- Untuk setiap M_1 , apabila θ dinaikkan maka β akan naik (untuk *weak solution*) dan shock wave akan bertambah kuat ($\frac{p_2}{p_1}$ naik). Namun apabila θ dinaikkan hingga $\theta > \theta_{max}$, maka shock wave akan melengkung dan menjauhi benda (*detached shock wave*).



- Bow shock wave* terbentuk apabila ada aliran supersonik di depan sebuah “*blunt body*”. Jarak antara shockwave dan body adalah δ . Untuk kasus ini didapatkan seluruh kemungkinan solusi dari persamaan (O.S.2) untuk sebuah M , seperti terlihat dalam θ - β - μ diagram di atas. Titik titik a, b, c adalah kasus dimana terdapat “*strong shock solution*” dan pada titik c' aliran menjadi sonic ($u_2 = a_2$). Setelah titik c' , aliran di belakang shockwave menjadi supersonik. Pada titik e , $\beta = \mu$ dan aliran di belakang shock wave sejajar dengan aliran di depan shock wave ($\theta = 0$).

9. Untuk kasus di mana permukaan dibelokkan secara diskontinyu ke arah $\theta < 0$,



perubahan arah vektor kecepatan tidak mungkin dilakukan dengan menggunakan sebuah shock wave. Alasannya adalah sebagai berikut. Karena untuk shock wave, $u_{1//} = u_{2//}$ dan $[w] < 0$ atau $\underline{u}_2 \cdot \hat{n} < \underline{u}_1 \cdot \hat{n}$, maka

$$u_2^2 = u_{2//}^2 + (\underline{u}_2 \cdot \hat{n})^2 < u_{1//}^2 + (\underline{u}_1 \cdot \hat{n})^2 = u_1^2 \text{ atau } u_2$$

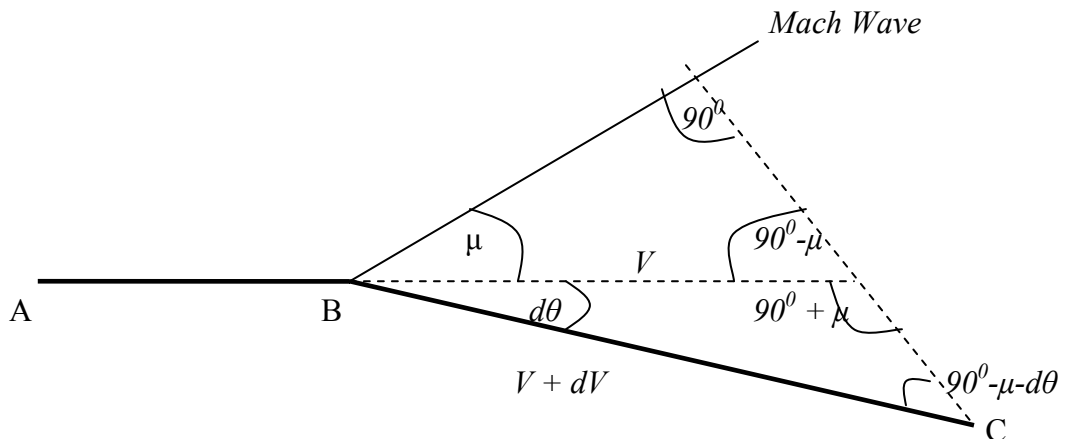
$< u_1$. Namun, untuk kasus ini dapat dilihat dari geometri dalam sketsa diatas,

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_{1//}/u_1}{u_{2//}/u_2} = \frac{\cos \beta}{\cos(\beta - \theta)} = \frac{\cos \beta}{\cos(\beta + |\theta|)} > 1 \text{ atau } u_2 > u_1.$$

Dengan demikian terjadi kontradiksi antara kedua hasil diatas yang menandakan bahwa proses tersebut tidak mungkin terjadi. Lebih tepatnya, karena untuk kasus ini $u_2 > u_1$ maka $p_2 > p_1$, $T_2 > T_1$ sehingga $s_2 < s_1$. Hasil terakhir tentunya bertentangan dengan Hukum Termodinamika II untuk shock wave (lihat pertidaksamaan (s.4)). Tetapi, kita akan lihat di subbagian berikutnya, bahwa proses ini masih mungkin terjadi apabila sudut θ sangat kecil.

11.6 Mach Wave

Dalam paragraf terakhir 11.5, telah dijelaskan bahwa apabila permukaan dibelokkan secara diskontinyu ke arah yang menjauhi *freestream* maka shock wave tidak mungkin terbentuk karena proses ini menyebabkan $s_2 < s_1$. Namun, apabila sudut θ sangat kecil maka "gangguan" terhadap *freestream* juga sangat kecil sehingga yang terbentuk adalah weak oblique shock wave. Menurut persamaan (s.5), untuk kasus ini $s_2 \approx s_1$ sehingga kontradiksi yang dijelaskan di paragraf terakhir 11.5 tidak ditemui. Dengan kata lain untuk kasus ini, sebuah weak oblique shock wave dapat terbentuk.



Sekarang kita akan pelajari apa yang akan terjadi apabila sebuah fluid element melintasi weak oblique shock. Pertama-tama kita ketahui bahwa pada limit dari $\theta \sim 0$, di setiap titik dalam aliran terdapat *Mach line*. Karena untuk kasus ini θ sangat kecil maka kita anggap weak shock yang terbentuk mempunyai sudut yang sama dengan *Mach line* sehingga $\beta = \mu$. Weak oblique shock wave, yang mempunyai sudut kurang lebih sama dengan *mach line*, ini dikenal dengan sebutan *Mach wave*.

Karena sudut defleksi sangat kecil maka kecepatan fluida di permukaan BC dapat diaproksimasikan menjadi,

$$u_2 \approx u_1 + du \equiv V + dV .$$

Dari geometri dalam sketsa dan hubungan trigonometri didapatkan,

$$\frac{u_2}{u_1} \approx \frac{V + dV}{V} = \frac{\text{Sin}\left(\frac{\pi}{2} + \mu\right)}{\text{Sin}\left(\frac{\pi}{2} - \mu - d\theta\right)} = \frac{\text{Cos}\mu}{\text{Cos}\mu \text{Cos}d\theta - \text{Sin}\mu \text{Sin}d\theta} = \frac{1}{1 - d\theta \text{Tan}\mu}$$

Suku terakhir dapat diekspansikan dengan menggunakan *power series*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots \text{ sehingga,}$$

$$1 + \frac{dV}{V} = 1 + d\theta \text{Tan}\mu + \dots$$

Apabila kita abaikan suku-suku dengan pangkat yang lebih tinggi dari 1 maka hubungan diatas menjadi,

$$d\theta = \frac{dV}{V \tan \mu} = \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V}$$

dimana telah digunakan hubungan $\frac{1}{\tan \mu} = \sqrt{M^2 - 1}$ yang didapatkan dari definisi

$$\sin \mu \equiv \frac{1}{M}$$

Karena pada kasus ini harga s adalah konstan maka kita dapat nyatakan $a = a(h)$ dimana h adalah entalpi. Selain itu pada kasus ini,

$$h + \frac{1}{2} V^2 = \text{konstan}$$

sehingga $a = a(h) = a(V)$. Dengan demikian maka $M = V/a(V) = M(V)$ atau $V(M)$ dan kita dapat definisikan,

$$dv \equiv \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V} = d\theta$$

Variabel v dalam persamaan diatas disebut fungsi *Prandtl-Mayer*. Fungsi ini dapat diintegrasikan karena, seperti telah dijelaskan diatas, suku sebelah kanan adalah fungsi M . Ini akan kita lakukan nanti di Bab 12.

Jadi, persamaan terakhir memberikan hubungan antara bilangan Mach M dengan sudut θ . Apabila M telah diketahui maka harga V dibelakang gelombang juga diketahui. Dengan menggunakan persamaan Bernoulli, maka h dibelakang gelombang juga dapat dihitung. Dari harga h ini, karena kasus ini adalah kasus homentropik, tekanan, massa jenis, dan temperatur dapat dihitung. Dalam praktik biasanya variabel-variabel termodinamik didapatkan dengan menggunakan *tabel isentropik* yang merupakan fungsi dari M didaerah tersebut (kita akan lihat ini di bab berikutnya). Dengan demikian persoalan aliran yang didefleksikan dengan sudut yang kecil ini dapat diselesaikan.

Dari penurunan diatas, dapat dilihat bahwa *Mach wave* juga akan terbentuk apabila terdapat defleksi aliran ke arah yang "mendekati" *freestream* (seperti dalam kasus terbentuknya oblique shock wave). Jadi, pada subbagian ini telah ditunjukkan bahwa aliran supersonik yang didefleksikan dengan sudut yang kecil akan menghasilkan oblique shock lemah yang disebut *Mach wave*.

BAB

12

Teori Potensial Untuk Aliran Kompresibel

12.1 Aliran Steady kompresibel 3-D

Setelah membahas aliran kompresibel 1-D kita akan mempelajari aliran kompresibel 3-D. Lebih spesifiknya dalam bab ini kita akan pelajari adalah aliran steady irotasional. Namun, sebelum kita mempelajari bagaimana menghitung aliran irotasional, kita perlu melihat apakah asumsi irotasional dapat digunakan dalam kasus aliran kompresibel.

Seperti telah dijelaskan di awal pembahasan aliran kompresibel, aliran kompresibel dapat diasumsikan sebagai aliran isentropik (di luar lapisan batas dan shock wave, tentunya). Apabila aliran di depan adalah aliran yang seragam, maka aliran dibagian depan ini dapat diasumsikan sebagai aliran irotasional dan kita dapat gunakan teori aliran potensial sehingga $\underline{u} = \nabla \phi$. Apabila aliran ini adalah aliran subsonik, maka aliran dengan *freestream* yang seragam ini dapat diasumsikan sebagai aliran homentropik dan teorema Kelvin berlaku. Dengan adanya *freestream* yang seragam, aliran ini dapat diasumsikan sebagai aliran irotasional diseluruh daerah diluar lapisan batas, sebagaimana telah dibahas di bab-bab awal buku ini.

Apabila aliran ini adalah aliran supersonik, maka shock wave dapat terbentuk. Kita ketahui bahwa asumsi aliran irrotasional dapat kita gunakan sampai daerah sebelum shock wave. Untuk melihat apakah aliran di belakang shockwave ini adalah aliran “irrotasional” atau “rotasional” kita perlu perhatikan hal-hal berikut.

Bentuk persamaan Euler untuk aliran yang steady dan inviscid adalah (asumsi inviscid dapat digunakan dalam aliran kompresibel untuk daerah di luar shock wave dan lapisan batas).

$$\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = \underline{\omega} \times \underline{u} + \frac{1}{2} \nabla u^2 = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

dari termodinamika,

$$dh = Tds + \frac{1}{\rho} dp$$

Dengan demikian maka,

$$\underline{\omega} \times \underline{u} + \frac{1}{2} \nabla u^2 = T \nabla s - \nabla \left(h + \frac{u^2}{2} \right)$$

Kita telah lihat bahwa banyak kasus dimana $h + \frac{u^2}{2} = \text{konstan}$ atau aliran

hemenergetik. Bahkan untuk shock wave yang *steady* ($\underline{v} = 0$), $h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$

(persamaan (s.3)). Jadi dapat disimpulkan bahwa untuk kasus-kasus ini $\nabla \left(h + \frac{u^2}{2} \right) = 0$

sehingga,

$$\boxed{\underline{\omega} \times \underline{u} = T \nabla s} \quad (\text{Teorema Crocco})$$

, teorema yang juga telah diturunkan di Bab 3.

Untuk aliran supersonic di sekitar benda, aliran di depan shock wave adalah aliran potensial ($\underline{\omega}_1 = 0$, $s = s_1$). Di belakang oblique atau normal shock wave terjadi lompatan entropi ($s = s_2$) namun s_2 adalah konstan di manapun di belakang shock wave. Oleh karena itu di belakang shockwave $\nabla s_2 = 0$ sehingga,

$$\underline{\omega}_2 \times \underline{u}_2 = 0$$

Di sini terdapat dua kemungkinan:

1. $\underline{\omega}_2$ paralel dengan \underline{u}_2 . Hal ini tidak mungkin terjadi untuk kasus shock wave karena $\underline{u}_2 \cdot \hat{n} \neq 0$ dan $\underline{\omega}_2 \cdot \hat{n} = 0$ ($\underline{\omega}_2 \cdot \hat{n} = 0$ karena $\underline{\omega}_2 \cdot \hat{n}$ adalah turunan parsial di arah yang paralel dengan permukaan dari $\underline{u}_{2//}$ yang tidak berubah atau $\underline{u}_{2//} = \underline{u}_{1//} = \text{konstan}$).
2. $\underline{\omega}_2 = 0$, atau di belakang shockwave terdapat juga aliran potensial. Karena kasus $\underline{u}_2 = 0$ adalah kasus “trivial” maka kita dapat simpulkan bahwa aliran di belakang shock wave yang oblique atau normal adalah aliran potensial.

Dari pembahasan diatas maka dapat disimpulkan bahwa asumsi aliran potensial dapat digunakan pada kasus aliran kompresibel yang subsonik. Untuk aliran supersonik dimana terdapat shock wave yang oblique atau normal, asumsi aliran potensial dapat digunakan di daerah di depan dan belakang shock wave tersebut (tentunya aliran potensial tidak dapat digunakan di dalam shock wave).

Catatan:

- Apabila bila terdapat “bow shockwave” maka harga s_2 berbeda-beda di belakang shockwave karena β berbeda-beda. Untuk kasus ini $\nabla s_2 \neq 0$ sehingga $\underline{\omega}_2 \neq 0$ atau aliran di belakang shockwave adalah aliran rotasional.
- Untuk weak shockwave $[s \sim [p]^3] \approx 0$. Jadi di sini $\underline{\omega}_2 \approx 0$

12.2 Aliran potensial 3-D

Kita telah lihat bahwa untuk aliran subsonic kompresibel, aliran yang awalnya (upstreamnya) seragam maka aliran di luar lapisan batas dapat diasumsikan sebagai aliran potensial. Asumsi ini dapat juga digunakan dalam kasus aliran supersonic di mana terjadi kemungkinan terbentuknya shockwave yang oblique atau normal. Pengecualian adalah untuk kasus di mana “bow shockwave terbentuk. Karenanya aliran

potensial sangat berguna dan kita akan turunkan persamaan yang menjelaskan aliran steady, kompresibel, dan irrotasional.

Persamaan (a) untuk kasus ini adalah

$$\rho \nabla \cdot \underline{u} + \underline{u} \cdot \nabla \rho = 0$$

Persamaan (b),

$$\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

Persamaan energy menjadi $\nabla s = 0$ atau

dengan $dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho ds$ dan $ds = 0$,

$$\nabla p = a^2 \nabla \rho$$

sehingga persamaan (b) menjadi

$$\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\frac{a^2}{\rho} \nabla \rho$$

Substitusikan ke persamaan (a) maka,

$$\rho \nabla \cdot \underline{u} - \frac{\rho}{a^2} \underline{u} \cdot (\underline{u} \cdot \nabla \underline{u}) = 0$$

atau

$$\boxed{a^2 \nabla \cdot \underline{u} - \underline{u} \cdot (\underline{u} \cdot \nabla \underline{u}) = 0} \quad (P.1)$$

Apabila kita gunakan $\underline{u} = \nabla \phi$ maka (P.1) dapat dituliskan menjadi,

$$(a^2 - \phi^2_{,1})\phi_{,11} + (a^2 - \phi^2_{,2})\phi_{,22} + (a^2 - \phi^2_{,3})\phi_{,33} - 2(\phi_{,1}\phi_{,2}\phi_{,12} + \phi_{,2}\phi_{,3}\phi_{,23} + \phi_{,3}\phi_{,1}\phi_{,31}) = 0 \quad (P.2)$$

di mana $\phi_{,1} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x_1}$, $\phi_{,11} \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2}$, $\phi_{,12} \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2}$, dll.

Catatan:

1. Untuk aliran inkompresibel $u \ll a$ sehingga $\nabla \cdot \underline{u} \gg \frac{1}{a^2} \underline{u} \cdot (\underline{u} \cdot \nabla \underline{u})$ atau $\nabla \cdot \underline{u} = \nabla^2 \phi = 0$.
2. Ada kasus-kasus di mana (P.1) atau (P.2) dapat diselesaikan secara analitik. Kasus-kasus tersebut adalah kasus aliran supersonik 2-D dan aliran 2-D di

sekitar benda “*slender*”. Untuk kasus terakhir asumsi dapat digunakan sehingga persamaan menjadi linear.

3. Untuk aliran irrotational dan steady persamaan Bernoulli adalah (abaikan $\underline{G} = -\nabla\psi$)

$$h + \frac{u^2}{2} = \text{konstan di manapun}$$

karena $s = \text{konstan}$ maka h dapat dinyatakan sebagai, $h = h(s, a) \underset{s = \text{konstan}}{\equiv} h(a)$,

sehingga persamaan Bernoulli menjadi,

$$h(a) + \frac{u^2}{2} = \text{konstan} \tag{P.3}$$

yang merupakan hubungan antara a dan u ($a = a(u)$). Jadi untuk menyelesaikan persoalan aliran potensial 3-D persamaan yang digunakan adalah,

$\begin{aligned} a^2 \nabla \cdot \underline{u} - \underline{u} \cdot (\underline{u} \cdot \nabla \underline{u}) &= 0 \\ \nabla \times \underline{u} &= \omega = 0 \\ h(a) + \frac{u^2}{2} &= \text{konstan} \end{aligned}$	(P.a)
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------

atau

$\begin{aligned} (a^2 - \phi^2_{,1})\phi_{,11} + (a^2 - \phi^2_{,2})\phi_{,22} + (a^2 - \phi^2_{,3})\phi_{,33} - 2(\phi_{,1}\phi_{,2}\phi_{,12} + \phi_{,2}\phi_{,3}\phi_{,23} + \phi_{,3}\phi_{,1}\phi_{,31}) &= 0 \\ h(a) + \frac{u^2}{2} &= \text{konstan} \end{aligned}$

(P.b)

12.2.1 Hubungan antara M dan variabel termodinamika untuk Perfect Gas pada kasus $s = \text{konstan}$

Seperti telah dijelaskan sebelumnya persamaan energy untuk aliran potensial kompresible adalah,

$$h + \frac{u^2}{2} = \text{konstan} = h_0.$$

, dimana h adalah fungsi dari hanya satu variable termodinamik. Untuk melihat bentuk eksplisit dari ketergantungan ini, kita lihat kasus *perfect gas*. Untuk *perfect gas*,

$$h = C_p T + \text{konstan} \quad \text{dan} \quad C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \quad \text{sehingga,} \quad C_p T + \frac{u^2}{2} = C_p T_0 \quad \text{atau}$$

$$\boxed{\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u^2}{\gamma R T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \quad (\text{M.1})$$

Karena $s = \text{konstan}$, persamaan (IR) dapat digunakan sehingga

$$\frac{T_0}{T} = \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\gamma-1}$$

Dengan demikian apabila M diketahui maka rasio-rasio $\frac{T_0}{T}$, $\frac{p_0}{p}$, $\frac{\rho_0}{\rho}$, $\frac{a_0}{a}$ dapat dihitung. Rasio-rasio ini biasanya diberikan di dalam sebuah “TABEL ISENTROPIK” dalam buku-buku teks.

Harga-harga dengan *subscript* “0” disebut harga-harga “total”. Harga “total” adalah harga yang didapatkan dengan mengimajinasikan bahwa partikel fluida di sebuah titik dalam aliran dihentikan secara isentropik (tanpa *heat conduction* (secara adiabatic) dan inviscid).

12.3 Aliran Steady Supersonic 2-D

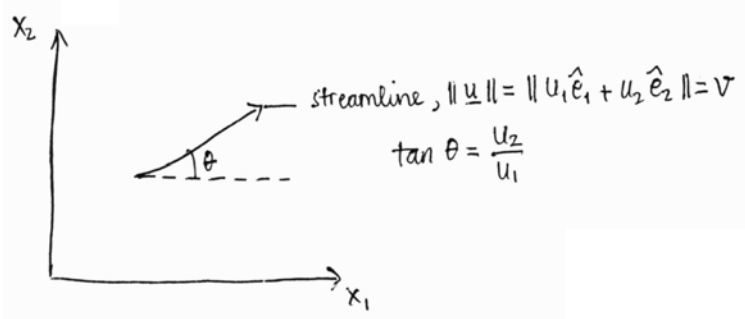
Telah dijelaskan di subbagian sebelumnya, persamaan (P.1) dapat diselesaikan secara analitik untuk aliran supersonic 2-D (steady). Sekarang kita akan mulai analisis untuk mendapatkan solusi tersebut.

Persamaan (P.1) untuk aliran 2-D adalah

$$(u_1^2 - a^2) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (u_2^2 - a^2) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_1 u_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (\text{s.s.1})$$

Karena $\omega = 0$, maka untuk kasus ini

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0 \tag{s.s.2}$$



Untuk menyelesaikan persamaan (s.s.1) dan (s.s.2) kita tuliskan u_1 dan u_2 dengan menggunakan variabel-variabel v dan θ di mana v adalah

besar/magnitude dari kecepatan dan θ adalah sudut antara vektor u dengan \hat{e}_1 sehingga,

$$\tan \theta = \frac{u_2}{u_1}$$

$$u_1 = V \cos \theta, \quad u_2 = V \sin \theta$$

Dengan menggunakan transformasi ini maka,

$$\boxed{\begin{aligned} V_x &\equiv \frac{\partial V}{\partial x_1}, V_y \equiv \frac{\partial V}{\partial x_2} \\ \theta_x &\equiv \frac{\partial \theta}{\partial x_1}, \theta_y \equiv \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \end{aligned}}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \equiv V_x \cos \theta - V \theta_x \sin \theta$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = V_y \cos \theta - V \theta_y \sin \theta$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = V_y \sin \theta + V \theta_y \cos \theta$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = V_x \sin \theta + V \theta_x \cos \theta$$

Apabila hasil di atas disubstitusikan ke persamaan (s.s.1) dan (s.s.2) maka hasilnya adalah

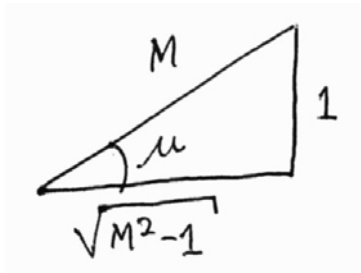
$$\frac{a}{V} (\theta_x \sin \theta - \theta_y \cos \theta) + \frac{\sqrt{V^2 - a^2}}{V} (V_x \cos \theta + V_y \sin \theta) - \frac{\sqrt{V^2 - a^2}}{a} = 0 \tag{s.s.3}$$

$$\theta_x \cos \theta + \theta_y \sin \theta + \frac{1}{V} (V_x \sin \theta - V_y \cos \theta) = 0 \tag{s.s.4}$$

Sekarang kita definisikan $M \equiv \frac{V}{a}$. Pada waktu kita membahas oblique shock wave kita telah diperkenalkan dengan apa yang disebut *mach line* dan garis ini dijelaskan oleh (persamaan O.S.3).

$$\sin \mu = \frac{1}{M} = \frac{a}{V}$$

Apabila kita lihat geometri dari persamaan di atas maka kita dapat membentuk geometri dibawah ini. Dari geometri di atas maka,



$$\tan \mu = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}, \cot \mu = \sqrt{M^2 - 1}, \cos \mu = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M}$$

Dengan hasil di atas maka persamaan (s.s.3) dapat dituliskan sebagai berikut;

$$\sin \mu (\theta_x \sin \theta - \theta_y \cos \theta) + \frac{\cot \mu}{V} (V_x \cos \theta + V_y \sin \theta) \cos \mu = 0 \tag{s.s.5}$$

Apabila persamaan (s.s.4) dikalikan dengan $\cos \mu$ maka,

$$\cos \mu (\theta_x \cos \theta + \theta_y \sin \theta) + \frac{\cos \mu}{V} (V_x \sin \theta - V_y \cos \theta) = 0 \tag{s.s.6}$$

Apabila kita lakukan tambahkan dan kurangi (s.s.5) dan (s.s.6) maka akan didapatkan,

$$\theta_x \cos(\theta - \mu) + \theta_y \sin(\theta - \mu) + \frac{\cot \mu}{V} (V_x \cos(\theta - \mu) + V_y \sin(\theta - \mu)) = 0$$

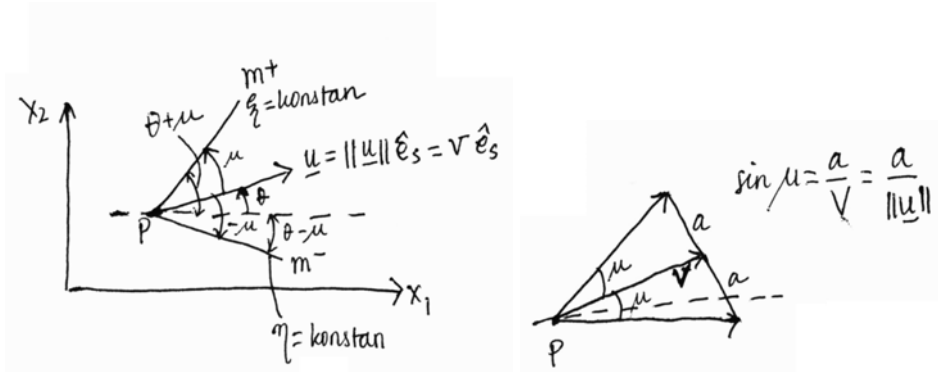
$$\theta_x \cos(\theta + \mu) + \theta_y \sin(\theta + \mu) - \frac{\cot \mu}{V} (V_x \cos(\theta + \mu) + V_y \sin(\theta + \mu)) = 0$$

Atau

$$\left(\cos(\theta - \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin(\theta - \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \theta + \frac{\cot \mu}{V} \left(\cos(\theta - \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin(\theta - \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) V = 0 \tag{s.s.7}$$

$$\left(\cos(\theta + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin(\theta + \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \theta - \frac{\cot \mu}{V} \left(\cos(\theta + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin(\theta + \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) V = 0 \tag{s.s.8}$$

Dalam kedua persamaan diatas terdapat kombinasi $\cos(\theta \pm \mu)$ dan $\sin(\theta \pm \mu)$. Untuk itu, kita selidiki hasil di atas dengan mengamati sebuah titik (P) dalam aliran supersonic 2-D.



Dalam gambar di atas terlihat bahwa di titik P, sudut antara vektor \underline{u} dan \hat{e}_1 adalah θ . Sudut antara \underline{u} dan $\xi = \text{konstan}$ adalah μ dan sudut antara \underline{u} dan $\eta = \text{konstan}$ adalah $-\mu$.

Jadi dari gambar di atas garis $\xi = \text{konstan}$ dan $\eta = \text{konstan}$ adalah garis-garis Mach (*Mach lines*). Garis-garis ini dijelaskan oleh persamaan :

$$m^+ : \left(\frac{dx_2}{dx_1} \right)_{\xi=\text{konstan}} = \tan(\theta + \mu) = \frac{\sin(\theta + \mu)}{\cos(\theta + \mu)}$$

$$m^- : \left(\frac{dx_2}{dx_1} \right)_{\eta=\text{konstan}} = \tan(\theta - \mu) = \frac{\sin(\theta - \mu)}{\cos(\theta - \mu)}$$

Karena $\xi = \xi(x_1, x_2)$ dan $\eta = \eta(x_1, x_2)$ maka,

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \xi}{\partial x_2} dx_2 \stackrel{\xi = \text{konstan}}{=} 0 \Rightarrow \left(\frac{dx_2}{dx_1} \right)_{\xi=\text{konstan}} = - \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x_1}}{\frac{\partial \xi}{\partial x_2}}$$

$$d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \eta}{\partial x_2} dx_2 \stackrel{\eta = \text{konstan}}{=} 0 \Rightarrow \left(\frac{dx_2}{dx_1} \right)_{\eta=\text{konstan}} = - \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x_1}}{\frac{\partial \eta}{\partial x_2}}$$

Sekarang kita akan lihat perubahan (turunan) sebuah fungsi (f) di arah m^- (sepanjang garis $\eta = \text{konstan}$)

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial m^-} \Delta m^- .$$

Karena $f = f(x_1, x_2)$ maka,

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 = \frac{\partial f}{\partial m^-} \Delta m^- .$$

Karena di arah m^- , η adalah konstan maka,

$$\Delta x_1 = (\Delta x_1)_{\eta=\text{konstan}} = \Delta m^- \cos(\theta - \mu)$$

$$\Delta x_2 = (\Delta x_2)_{\eta=\text{konstan}} = \Delta m^- \sin(\theta - \mu)$$

Dengan demikian maka,

$$\frac{\partial f}{\partial m^-} \Delta m^- = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \cos(\theta - \mu) + \frac{\partial f}{\partial x_2} \sin(\theta - \mu) \right] \Delta m^-$$

atau

$$\Delta m^- \frac{\partial}{\partial m^-} f = \Delta m^- \left(\cos(\theta - \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin(\theta - \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) f \dots\dots(s.s.9)$$

Untuk perubahan f di arah m^+ (sepanjang $\xi = \text{konstan}$),

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial m^+} \Delta m^+ = \frac{\partial f}{\partial x_1} (\Delta x_1)_{\xi=\text{konstan}} + \frac{\partial f}{\partial x_2} (\Delta x_2)_{\xi=\text{konstan}} \tag{s.s.10}$$

$$\Delta m^+ \frac{\partial}{\partial m^+} f = \Delta m^+ \left(\cos(\theta + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin(\theta + \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) f$$

Apabila kita gunakan (s.s.9) untuk (s.s.7), dan (s.s.10) untuk (s.s.8) dan mengingat bahwa hasil di atas didapatkan untuk sembarang Δm^+ dan Δm^- , maka hasilnya adalah :

$$\frac{\partial \theta}{\partial m^-} + \frac{\cot \mu}{V} \frac{\partial V}{\partial m^-} = 0 \tag{s.s.11}$$

dan

$$\frac{\partial \theta}{\partial m^+} - \frac{\cot \mu}{V} \frac{\partial V}{\partial m^+} = 0 \quad (\text{s.s.12})$$

Karena $\cot \mu = \sqrt{M^2 - 1} = \sqrt{\left(\frac{V}{a}\right)^2 - 1}$ dan persamaan energi untuk aliran potensial

adalah (*steady*) $h + \frac{V^2}{2} = \text{konstan}$ (di mana kita dapat nyatakan $h = h(s, a) \underset{s=\text{konstan}}{=} h(a)$)

maka, persamaan energi menunjukkan bahwa $a = a(V)$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\cot \mu$ adalah fungsi dari v (kecepatan).

Oleh karena itu kita dapat definisikan,

$$dv \equiv \frac{\cot \mu}{V} dV = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{V} dV \quad (\text{Prandt'l-Mayer})$$

di mana v : fungsi *Prandt'l-Mayer*. Karena $v = v(V)$ maka,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial m^-} &= \frac{\partial v}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial m^-} = \frac{\cot \mu}{V} \frac{\partial V}{\partial m^-} \\ \frac{\partial v}{\partial m^+} &= \frac{\partial v}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial m^+} = \frac{\cot \mu}{V} \frac{\partial V}{\partial m^+} \end{aligned}$$

sehingga persamaan di atas dapat dituliskan sebagai berikut, [(s.s.11) dan (s.s.12)] :

$$\frac{\partial}{\partial m^-}(\theta + v) = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial}{\partial m^+}(\theta - v) = 0 \quad (\text{s.s.13})$$

Jadi

$$\theta + v = \text{konstan} \equiv k^- \quad (\text{Sepanjang } \textit{mach line } m^-)$$

$$\theta - v = \text{konstan} \equiv k^+ \quad (\text{Sepanjang } \textit{mach line } m^+)$$

Jadi “*mach lines*” adalah garis *characteristic*, di mana:

$$\textit{Mach line } (m^+) \text{ dijelaskan oleh } \frac{dx_2}{dx_1} = \tan(\theta + \mu)$$

$$\textit{Mach line } (m^-) \text{ dijelaskan oleh } \frac{dx_2}{dx_1} = \tan(\theta - \mu)$$

(s.s)

Hasil yang didapatkan di atas mirip dengan hasil yang didapatkan pada waktu kita mempelajari aliran *unsteady* 1-D. Jadi metode yang digunakan untuk menyelesaikan soal aliran *unsteady* 1-D dapat digunakan di sini.

Note :

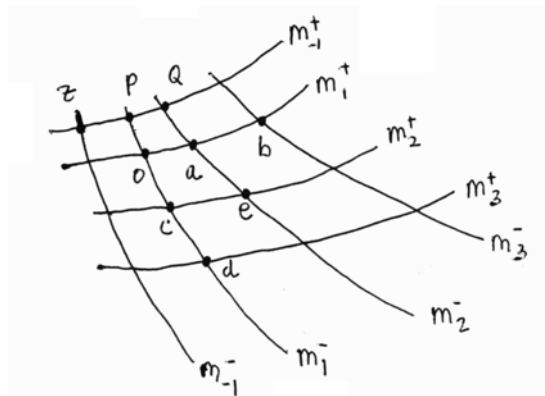
- 1) Karena θ adalah “*deflection angle*”, maka apabila ada perubahan arah kecepatan (disebabkan oleh perubahan permukaan, misalnya), maka dari persamaan (s.s) dapat dilihat bahwa v akan berubah. Karena $v = v(v)$, maka v akan berubah. Karena $a = a(v)$, maka a juga berubah. Karena aliran yang dijelaskan oleh (s.s) adalah aliran homentropik, maka semua variabel termodinamik adalah fungsi dari salah satu variabel termodinamik lainnya, misalnya $p = p(a)$, $\rho = \rho(a)$, $T = T(a)$. Jadi, apabila ada perubahan θ , maka p, ρ, T juga akan berubah.
- 2) Sudut antara *mach line* m^- dan m^+ dengan *streamline* adalah $-\mu$ dan $+\mu$. Jadi, di setiap titik dalam aliran supersonic 2-D dilintasi oleh m^- dan m^+ (*mach lines*).
- 3) Karena hasil yang didapatkan serupa dengan hasil untuk aliran *unsteady* 1-D, maka metode penggunaan persamaan (s.s) juga serupa dengan metode yang digunakan untuk menyelesaikan persoalan aliran *unsteady* 1-D.

Aliran dapat dikategorikan menjadi 3 tipe:

a. *General Region/Non-simple Region*

Untuk tipe ini, karakteristik melengkung. Harga v dan θ di titik pertemuan antara dua karakteristik (m^+ dan m^-) adalah

$$v = \frac{1}{2}(k^- + k^+), \theta = \frac{1}{2}(k^- - k^+) \tag{s.s, 14}$$



Dari hasil diatas kita lihat bahwa harga-harga θ , p , ρ , dan T di sebuah titik ditentukan oleh harga k_i^+ pada m_i^+ dan k_i^- m_i^- yang melintasi titik tersebut. Sepanjang m_i^+ , k_i^+ adalah konstan. Jadi, perubahan harga dari v dan θ sepanjang m_i^+ tergantung dari perubahan k^- (lihat persamaan s.s.14). Karena, secara umum, harga k^- berubah-ubah maka harga v dan θ juga berubah-ubah sepanjang m_i^+ . Karena v dan θ berbeda-beda sepanjang m_i^+ , maka harga $\frac{dx_2}{dx_1} = \tan(\theta + \mu)$ sepanjang m_i^+ juga berubah-ubah sehingga garis karakteristik ini melengkung. Argumen serupa juga dapat kita gunakan untuk membuktikan bahwa secara umum garis m_i^- adalah garis yang melengkung.

Sebagai contoh prosedur perhitungan, misalkan harga-harga v dan θ di titik a dan c (lihat sketsa diatas) diketahui. Maka solusi di titik e (v dan θ) adalah,

$$v_e = \frac{1}{2}(k_a^- + k_c^+) \quad \& \quad \theta_e = \frac{1}{2}(k_a^- - k_c^+)$$

Sepanjang m_2^- , k^- adalah konstan sehingga,

$$k_a^- = \theta_a + v_a = k_e^- = \text{konstan sepanjang } m_2^-.$$

Sedangkan sepanjang m_2^+ , k^+ adalah konstan sehingga,

$$k_c^+ = \theta_c - v_c = k_e^+ = \text{konstan sepanjang } m_2^+.$$

Karena v dan θ di titik a dan c diketahui, maka k_a^- dan k_c^+ sehingga harga v dan θ di titik e dapat kita hitung.

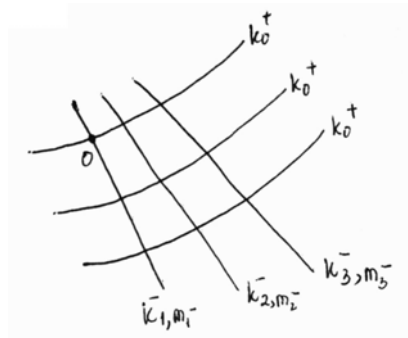
b. Simple Region

Untuk tipe ini salah satu k (k^+ atau k^-) adalah konstan di manapun di daerah tersebut. Dari persamaan (s.s.14) dapat dilihat bahwa apabila k^+ konstan di manapun, misalnya, maka v dan θ adalah konstan sepanjang setiap m^- (harga v dan θ untuk m^- yang berbeda tentunya juga berbeda). Karenanya

garis m^- adalah garis lurus. Untuk kasus ini apabila harga ν dan θ diketahui di titik O dan k_o^+ juga diketahui maka sepanjang m_i^- ,

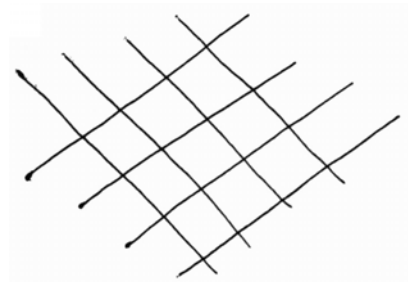
$$\begin{aligned} \nu_i &= \nu_o + \frac{1}{2}(k_o^+ - k_1^-) \\ &= \text{konstan sepanjang } m_i^- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_i &= \theta_o - \frac{1}{2}(k_o^+ - k_1^-) \\ &= \text{konstan sepanjang } m_i^- \end{aligned}$$



c. *Uniform Region*

Untuk tipe ini k^+ dan k^- adalah konstan di manapun di dalam daerah uniform. Oleh karena itu ν dan θ adalah konstan di manapun sehingga garis-garis m^+ adalah garis-garis paralel, demikian pula garis-garis m^- .

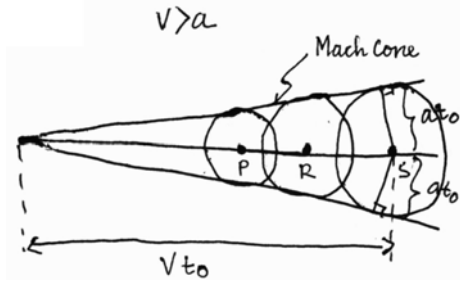


4) Interpretasi fisik dari *Mach Lines*

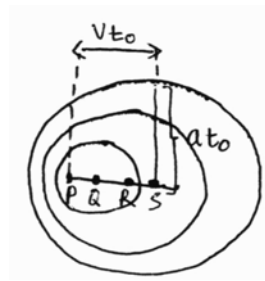
- a. Seperti telah dijelaskan, karakteristik untuk aliran supersonic 2-D yang *steady* adalah *Mach line* (m^+ dan m^-). Interpretasi dari *Mach line* dapat dilihat dengan melakukan “eksperimen” sebagai berikut:

Misalkan ada sebuah sumber suara (yang sangat tipis) yang bergerak dengan kecepatan $V > a$ dan memancarkan suara secara berkala (perhatian!!! ini adalah

kasus *unsteady*!!!). Pada waktu $t = t_0$ sumber suara ini berada di titik P. Signal-signal yang dipancarkan di titik S, R, Q (sebelum titik P)



[gambar a]



[gambar b]

merambat ke segala arah (3-D) dengan kecepatan a . Pada waktu $t = t_0$, signal-signal ini (signal-signal yang dipancarkan sebelum $t = t_0$) berada di dalam sebuah kerucut (cone) yang berpusat di titik P, di luar kerucut ini suara tidak terdengar. Apabila kita lihat geometri gambar a) maka

$$\sin \beta = \frac{a_{t_0}}{V_{t_0}} = \frac{1}{M} \equiv \sin \mu$$

Jadi “gangguan-gangguan” (signal-signal) tersebut pada saat $t = t_0$ berada di permukaan *Mach cone*. Dengan kata lain permukaan *Mach cone* adalah jejak propagasi dari gangguan. Kasus di atas adalah kasus *unsteady*. Untuk kasus *steady*, kita tinggal tempatkan pengamat di sumber suara. Untuk pengamat ini fluida di depannya bergerak dengan kecepatan $V > a$ (gambar a) tidak berubah. Untuk kasus 2-D permukaan *Mach cone* berubah menjadi *Mach lines* (m^+ dan m^-). Jadi m^+ dan m^- adalah jejak propagasi dari gangguan yang diberikan di titik P. Di luar daerah yang dibatasi m^+ dan m^- , suara tidak terdengar (gangguan tidak dirasakan). Untuk kasus yang lebih umum *Mach lines* melengkung karena V dan a dapat saja berbeda-beda di setiap titik.

- b. Untuk kasus $V < a$ dijelaskan dalam gambar b. untuk kasus ini “gangguan” selalu mendahului sumber suara. Untuk kasus ini terjadi Doppler Effect yaitu frekuensi suara turun ketika sumber suara menjauhi pengamat yang diam/tidak bergerak.

12.3.1 Fungsi Prandt'l Mayer untuk Perfect Gas

Definisi fungsi Prandt'l Mayer adalah

$$dv = \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V}$$

Karena $V = aM$ maka,

$$\ln V = \ln a + \ln M, \quad \frac{dV}{V} = \frac{da}{a} + \frac{dM}{M}$$

Untuk aliran irrotasional persamaan Bernoulli adalah,

$$h + \frac{V^2}{2} = \text{konstan di manapun}$$

Untuk perfect gas,

$$h = C_p T + \text{konstan} = \frac{\gamma RT}{\gamma - 1} + \text{konstan}$$

$$h = \frac{a^2}{\gamma - 1} + \text{konstan}$$

sehingga

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{V^2}{2} = \text{konstan di manapun.}$$

Jadi

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} da + \frac{V^2}{2} dV = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{da}{a} + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{M}{a} dV = 0$$

$$\frac{da}{a} = -\frac{\gamma - 1}{2} M^2 \frac{dV}{V}$$

Dengan demikian maka,

$$\frac{dV}{V} = -\frac{\gamma - 1}{2} M^2 \frac{dV}{V} + \frac{dM}{M} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$$

sehingga

$$dv = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M} \quad (5.5.15)$$

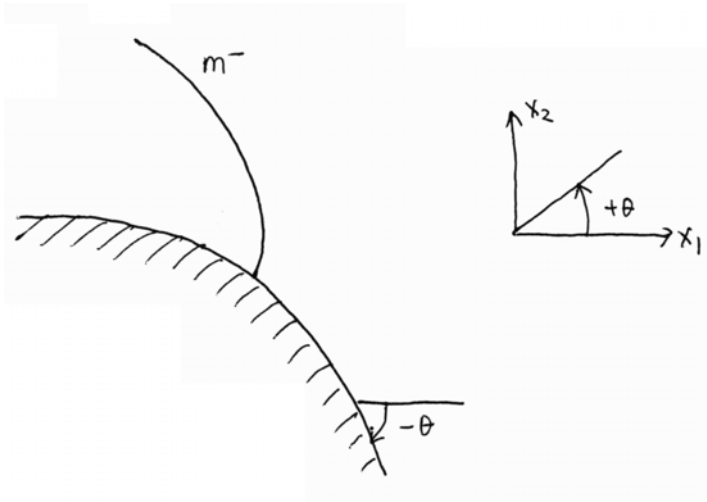
Persamaan (s.s.15) dapat diintegrasikan dengan memilih konstan integrasi $v(M=1) = 0$ dan hasilnya adalah,

$$v(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} (M^2 - 1) \right) - \tan^{-1} \sqrt{M^2 - 1}$$

Persamaan di atas biasanya ditabulasikan dalam tabel.

12.4 Supersonic Turning (Perfect Gas)

Salah satu contoh di mana teori aliran stedy Supersonic 2-D digunakan adalah dalam kasus aliran uniform dan supersonic yang dibelokkan secara kontinyu.



Misalnya aliran supersonic yang mengikuti permukaan yang awalnya sejajar dengan sumbu x . Pada sebuah titik, permukaan benda “membelok” (dibentuk oleh “circular arc”) hingga setelah itu permukaan benda membentuk sudut θ dengan sumbu x . Untuk memudahkan diskusi ini, kita misalkan aliran uniform mempunyai $M = 1.775$ dan $\theta = \pm 16^\circ$. Karena aliran di depan adalah aliran uniform, kasus ini adalah kasus simple wave. Jadi dalam kasus ini salah satu *Riemann Invariant* atau k adalah konstan di manapun. Misalkan k^- adalah konstan untuk kasus yang digambarkan di gambar c. Maka

$$\theta + v = v_1 \text{ (di manapun)}$$

sedangkan

$$\theta - \nu = k^+ \text{ (konstan sepanjang } m^+ \text{).}$$

Dengan demikian maka,

$$\theta = \text{konstan sepanjang } m^+ \text{ dan } \nu = \nu_1 - \theta = \text{konstan sepanjang } m^+.$$

Karena θ dan ν konstan sepanjang m^+ maka p , ρ , T , a , dan μ dan lain-lain adalah konstan sepanjang m^+ sehingga $\frac{dx_2}{dx_1} = \tan(\theta + \mu)$ adalah konstan sepanjang m^+ , atau m^+ adalah garis lurus. Karena perubahan dari $\theta = 0$ ke $\theta = \pm 16^\circ$ dilakukan secara kontinu maka θ berubah sedikit demi sedikit. Setiap terjadi perubahan θ , “kemiringan” m^+ juga berubah. Sekarang kita lihat bagaimana slope m^+ berubah dengan membuat tabel di bawah ini ($\nu_1 = 20$).

Label m^+	θ	$\nu_{\theta>0}$	$\nu_{\theta<0}$	$M_{\theta>0}$	$M_{\theta<0}$
11	± 0	20	20	1.775	1.775
12	± 2	18	22	1.71	1.844
13	± 4	16	24	1.64	1.915
14	± 6	14	26	1.57	1.986
15	± 8	12	28	1.5	2.056
16	± 10	10	30	1.435	2.134
17	± 12	8	32	1.365	2.210
18	± 14	6	34	1.295	2.286
19	± 16	4	36	1.22	2.369

Sekarang kita akan lihat kasus $\theta > 0$ dan $\theta < 0$ secara satu persatu.

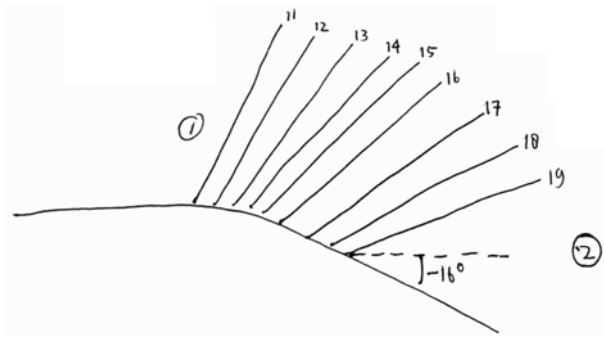
Kasus $\theta < 0$

Untuk kasus ini dari tabel diatas dapat dilihat bahwa $\mu = \sin^{-1} \frac{1}{M}$ turun ketika θ turun

secara negatif (dari $\theta = 0$ ke $\theta = -16$). Untuk $\theta = 0$, $\frac{1}{M} = 0.5634$, jadi

$(\theta + \mu)_{\theta=0} = 34.3^\circ$. Untuk $\theta = -16$, $\frac{1}{M} = 0.422$ jadi $(\theta + \mu)_{\theta=-16} = 9^\circ$. Dengan

demikian untuk kasus ini kemiringan m^+ turun dari 34.3° sampai dengan 9° .



Kondisi akhir di daerah 2 adalah $M_2 = 2.369$. Variabel-variabel aliran seperti p_2, T_2, ρ_2 dan lain-lain dapat dihitung dengan menggunakan $h + \frac{v^2}{2} = h_0$ atau dengan

$$h = C_p T + \text{konstan} \text{ dan } C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}.$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{V^2}{\gamma R T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \text{ Sehingga, } \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2}{T_0} \frac{T_0}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}$$

$\frac{p_2}{p_1}, \frac{\rho_2}{\rho_1}$, dan lainnya dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (IR) karena

untuk kasus ini $s = \text{konstan}$.

Catatan:

- 1) Untuk kasus ini, m^+ “menyebar”(diverge).
- 2) Untuk kasus ini, $p_2 < p_1, \rho_2 < \rho_1, M_2 < M_1, T_2 < T_1$.

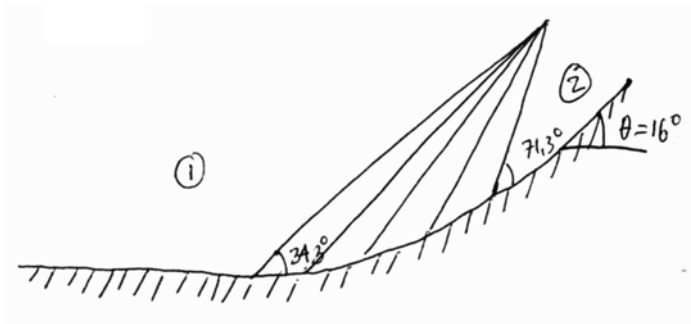
Kasus $\theta > 0$

Untuk kasus ini dari tabel di atas dapat dilihat bahwa $\mu = \sin^{-1} \frac{1}{M}$ naik ketika θ naik

(dari $\theta = 0$ ke $\theta = 16$). Untuk $\theta = 0, (\theta + \mu)_{\theta=0} = 34.3^\circ$ sedangkan untuk $\theta = 16,$

$(\theta + \mu)_{\theta=16} = 71^\circ$. Jadi untuk kasus ini kemiringan m^+ naik dari 34.3° sampai dengan

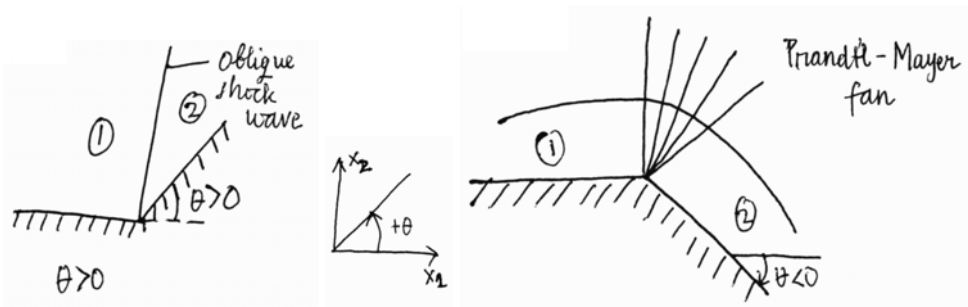
71° .



Karena kemiringan dari m^+ naik, beberapa m^+ akan bertemu di titik S. Karena setiap m^+ mempunyai harga p , ρ , T , v dan lain lain yang unik, maka harga-harga tersebut pada titik S menjadi *multi-valued*. Karena ini tidak mungkin maka shock wave (oblique) akan terbentuk dan aliran tidak lagi menjadi aliran homentropik sehingga hasil di sub bagian ini tidak dapat digunakan. Perhitungan harus menggunakan persamaan untuk oblique shock wave.

12.4.1 Discontinuous Supersonic Turning

Untuk kasus ini aliran steady supersonic 2-D dibelokkan secara tiba-tiba, misalnya dengan dibelokkan oleh permukaan yang mempunyai sudut yang lancip. Untuk kasus $\theta > 0$, oblique shock wave akan langsung terbentuk di sudut tersebut.



Untuk kasus $\theta < 0$, Prandtl – Mayer Fan akan terbentuk. Kasus ini adalah “*limiting case*” dari *continous turning* di mana $\theta < 0$ (di sub bagian sebelumnya telah dijelaskan bahwa untuk kasus ini m^+ menyebar). Perbedaannya hanyalah m^+ bertemu di titik di mana θ diskontinyu. Untuk kasus ini θ_1 , M_1 , dan θ_2 diketahui sehingga karena m^- konstan dan,

$$\theta_1 + \nu(M_1) = \theta_2 + \nu(M_2)$$

atau

$$v(M_2) = v(M_1) - (\theta_2 - \theta_1)$$

$$\boxed{v(M_2) = v(M_1) - \Delta\theta} \quad \text{(PMEW)}$$

Untuk kasus $\theta_1 = 0$, persamaan (P.M.E.W) menjadi ,

$$\boxed{v(M_2) = v(M_1) + |\theta_2|}$$

Jadi untuk menyelesaikan kasus ini, pertama-tama dengan M_1 yang diberikan, tentukan $v(M_1)$ dari tabel, lalu hitung $v(M_2)$ dan gunakan lagi tabel untuk menentukan M_2 . Hubungan antara p_2, ρ_2, T_2 , dll dengan p_1, ρ_1, T_1 , dll dapat ditentukan seperti yang telah kita lakukan di subbagian sebelum ini. jadi

$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2}{T_0} \frac{T_0}{T_1} = \frac{1 + M_1^2 \frac{(\gamma - 1)}{2}}{1 + M_2^2 \frac{(\gamma - 1)}{2}}} \quad \text{(P.M.E.W.1)}$$

dari persamaan (IR),

$$\boxed{\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2}{p_0} \frac{p_0}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \text{ dan } \frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}} \quad \text{(P.M.E.W.2)}$$

BAB 13

Interaksi Gelombang

13.1 Pendahuluan

Kita telah lihat di bab-bab sebelum ini bahwa secara umum ada dua tipe gelombang dalam aliran kompresibel: shock wave dan expansion wave. Yang menjadi pertanyaan sekarang apa yang terjadi apabila gelombang-gelombang ini bertemu dengan “*solid boundary*”, “*contact surface*”, “*open end*”, gelombang sejenis, dan yang tidak sejenis. Proses yang disebutkan di atas disebut interaksi gelombang dan kita akan bahas proses-proses tersebut dalam bab ini.

Kunci dalam menyelesaikan persoalan *interaksi gelombang* atau interaksi gelombang adalah kondisi batas di tempat terjadinya interaksi tersebut. Di bawah ini adalah kondisi batas di tempat terjadinya interaksi gelombang dengan *solid boundary*, *contact surface*, *open end*:

- a) *Solid boundary/permukaan benda*

$$\text{Kondisi batas adalah } \boxed{\underline{u} \cdot \hat{n} = \underline{U} \cdot \hat{n}} \quad (\text{WI.1})$$

di mana \underline{U} adalah kecepatan solid/ benda tersebut.

- b) *Contact surface/Batas antara dua fluida*

Kondisi batas adalah

$$\boxed{p_A = p_B \text{ dan } \underline{u}_A \cdot \hat{n} = \underline{u}_B \cdot \hat{n}} \quad (\text{WI.2})$$

(Contact surface adalah diskontinuitas tangensial dimana $\rho_A \neq \rho_B$ atau $\underline{u}_{//A} \neq \underline{u}_{//B}$)

c) *Open end*

Kondisi batasnya adalah $p_e = p_a$ (WI.3)

di mana p_a diketahui dan p_e adalah p di tempat terjadinya interaksi.

Contoh untuk kasus ini adalah shock wave yang merambat di dalam silinder yang bagian belakangnya terbuka sehingga $p_a =$ tekanan amosfir di tempat tersebut.

13.2 Kasus Unsteady 1-D

Untuk kasus *unsteady* 1-D, persoalan interaksi gelombang biasanya diselesaikan dengan bantuan diagram p vs Δu di mana $\Delta u \equiv (u_2 \cdot \hat{n} - u_1 \cdot \hat{n}) = [w]$. Sekarang kita harus mencari hubungan antara p dan Δu untuk shock wave dan expansion wave.

Shock wave :

Dari persamaan (S.N) (normal shock),

$$\frac{\Delta u}{a_d} = \frac{[w]}{a_d} = -\frac{2}{\gamma + 1} \left(M_d - \frac{1}{M_d} \right), \quad M_d \equiv \frac{w_d}{a_d}$$

$$\frac{[p]}{p_d} = \frac{\Delta p}{p_d} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_d^2 - 1)$$

subscript "d" artinya "di depan" shockwave

Apabila kita gabungkan kedua persamaan di atas hasilnya adalah,

$$\frac{\Delta p}{p_d} = \frac{\gamma(\gamma + 1)}{4} \left(\frac{\Delta u}{a_d} \right)^2 \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{4}{\gamma + 1} \frac{a_d}{\Delta u} \right)^2} \right] \quad (WI.4)$$

Expansion wave:

Untuk kasus expansion wave hubungan antara Δu dan p didapatkan seperti di bawah ini.

Untuk kasus *simple wave* salah satu J adalah konstan (J^+ atau J^-) di manapun. Jadi

$$u_d \pm \frac{2}{\gamma-1} a_d = u_b \pm \frac{2}{\gamma-1} a_b$$

subscript “b” artinya “di belakang” expansion wave. Karena kasus ini adalah kasus di mana s =konstan maka persamaan (IR) dapat digunakan,

$$\frac{p_b}{p_d} = \left(\frac{a_b}{a_d} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$$

Apabila kedua persamaan di atas digabung maka hasilnya adalah,

$$\frac{p_b}{p_d} = \left(1 \mp \frac{\gamma-1}{2} \frac{\Delta u}{a_d} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$$

+ = gelombang bergerak ke arah +x
 - = gelombang bergerak ke arah -x

(WI.5)

Pada proses interaksi, biasanya gelombang-gelombang baru dihasilkan. Gelombang-gelombang ini bisa shock wave bisa juga expansion wave. Persamaan (WI.4) dan (WI.5) dapat digunakan untuk menentukan gelombang apa yang dihasilkan oleh proses interaksi. Namun, kita tidak perlu membuat grafik/ diagram p vs Δu dan menggambarkan solusi persamaan (WI.4) dan (WI.5) secara lengkap. Kita hanya perlu mengingat sifat-sifat shock wave dan expansion wave. Misalnya, untuk shock wave $[p] > 0$ ($p_b > p_d$) dan untuk expansion wave $[p] < 0$. Juga limit dari shock wave dan expansion wave adalah gelombang akustik, maka kita dapat gunakan persamaan dari akustik: $dp = \pm \rho_d a_d du$ untuk menentukan arah dari Δu dalam p vs Δu diagram. Hasilnya adalah sebagai berikut,

- a) Untuk gelombang yang bergerak ke arah positif x ,

$$\Delta p = \rho_d a_d \Delta u$$

Untuk shock wave, $\Delta p > 0$ jadi $\Delta u > 0$

Untuk expansion wave, $\Delta p < 0$ jadi $\Delta u < 0$

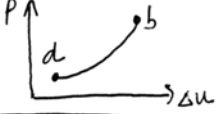
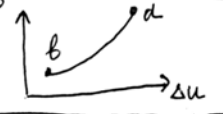

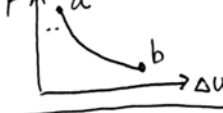
- b) Untuk gelombang yang bergerak ke arah negatif x ,

$$\Delta p = -\rho_d a_d \Delta u$$

Untuk shock wave, $\Delta p > 0$ jadi $\Delta u < 0$

Untuk expansion wave, $\Delta p < 0$ jadi $\Delta u > 0$

Arah pergerakan di dalam diagram p vs Δu untuk gelombang-gelombang tersebut dirangkum dalam tabel di bawah ini:

arah gelombang	shock wave	expansion wave
+x		
-x		

[Tabel WI]

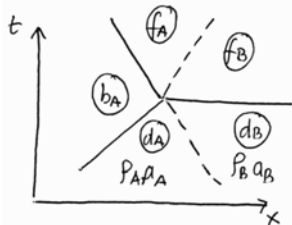
Persoalan interaksi gelombang dapat diselesaikan dengan menggunakan (tabel WI), kondisi batas, dan persamaan-persamaan untuk shock wave dan expansion wave prosedurnya adalah sebagai berikut:

1. Apabila kondisi di depan gelombang (d) diketahui maka kondisi (b) dapat dihitung dengan menggunakan persamaan-persamaan shock atau expansion wave sehingga titik-titik (b) dan (d) diketahui. Gambarkan titik-titik tersebut dan kurva yang menghubungkan titik-titik tersebut (seperti dalam table WI) dalam p vs Δu ini dalam keadaan sebelum interaksi.
2. Gunakan kondisi batas untuk menentukan p dan Δu dalam p vs Δu (titik ini dapat kita namakan titik f).
3. Gunakan Tabel WI untuk menentukan gelombang tipe mana yang dibutuhkan untuk “mencapai” titik f dalam diagram p vs Δu .
4. Setelah seluruh gelombang yang dibutuhkan dalam proses interaksi ditemukan, gambarkan gelombang-gelombang ini dalam diagram x - t .
5. Gunakan persamaan-persamaan untuk shock dan expansion wave untuk mendapatkan “flow variable” yang belum diketahui seperti kecepatan “gelombang baru”, ρ_f , T_f , dll.

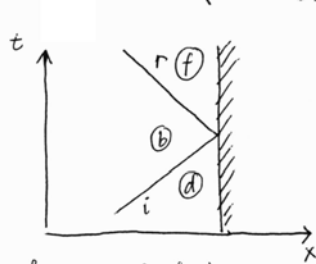
Catatan:

Keadaan di daerah-daerah di belakang dan depan sebuah gelombang direpresentasikan dengan sebuah titik dalam diagram p vs Δu .

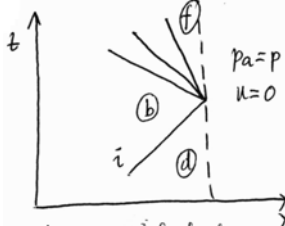
Sekarang kita akan lihat bagaimana prosedur di atas direpresentasikan untuk menyelesaikan persoalan interaksi gelombang untuk kasus unsteady 1-D. Namun, sebelumnya di bawah ini adalah diagram x-t untuk beberapa kasus interaksi gelombang dalam aliran unsteady 1-D (kasus-kasus shock interaction)



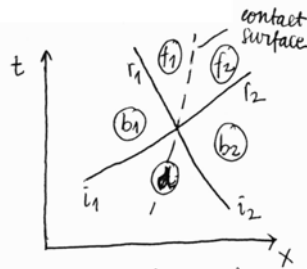
shock wave bertemu dengan "contact surface" yg membatani 2 gas yg berbeda, untuk kasus ini $p_A a_A < p_B a_B$



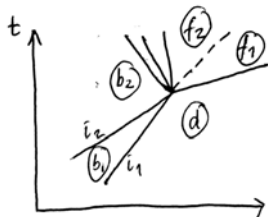
kasus normal shock wave bertemu dengan dinding



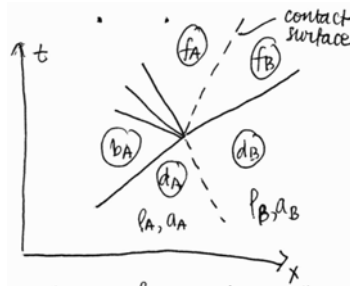
kasus normal shock wave bertemu dengan "open end" yang mempunyai $p = p_a$



2 shock wave yg bertabrakan dimana kedua shock wave ini awalnya bergerak ke arah yg berlawanan



2 shock wave yg bergerak ke arah yang sama bertabrakan

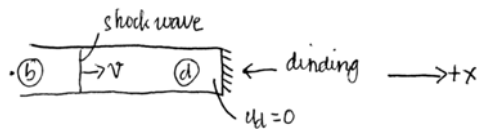


shock wave bertemu dengan "contact surface" yang membatani 2 gas yg berbeda, untuk kasus ini $p_A a_A > p_B a_B$

[Gambar WI].

13.2.1 Shock reflection

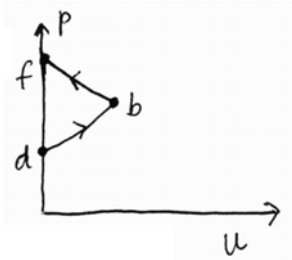
Kasus ini adalah kasus di mana shock wave yang bergerak dengan kecepatan v bertemu dengan dinding.



Untuk kasus ini kondisi batasnya adalah :

$$U_{\text{dinding}} = 0$$

Keadaan di daerah d diketahui sehingga kita bisa gunakan (S.N) untuk menghitung keadaan di b (p_b dan u_b). Sekarang kita gambarkan titik-titik b dan d dalam diagram p vs Δu .

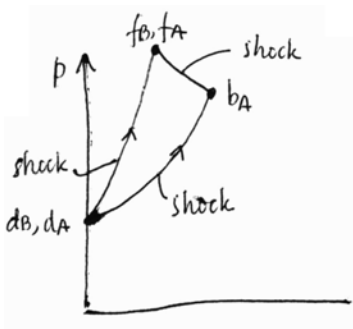


Sekarang kita akan lihat apa yang terjadi ketika shock wave bertemu dengan dinding. Apabila tidak ada “gelombang baru” yang dihasilkan dalam proses ini maka titik b adalah keadaan di dinding. Namun, ini berarti $U_{\text{dinding}} \neq u_{\text{fluida}}$ di dekat dinding dan ini tidak mungkin. Jadi ada “gelombang baru” yang terbentuk dan bergerak ke arah-x. dari (tabel WI) dapat dilihat bahwa gelombang baru ini adalah shock wave karena apabila gelombang baru adalah expansion, titik f akan berada di sebelah kanan titik b ($u_f \neq 0$). Dengan menggunakan persamaan (S.N) kecepatan shock wave yang baru ini (sebenarnya shock wave yang lama direfleksikan) dan ρ_f, T_f dll dapat ditemukan. Kasus ini adalah kasus yang digambarkan di pojok kiri atas gambar WI (No. 1).

13.2.2 Shock Wave bertemu dengan “Contact Surface” yang membatasi 2 gas berbeda (gas A dan gas B) di mana

$$\rho_f a_A < \rho_B a_B.$$

Kasus ini adalah kasus yang digambarkan di pojok kanan bawah gambar WI (No. 6). Seperti contoh sebelumnya, gunakan persamaan (S.N) untuk menentukan keadaan di daerah b_A . Karena untuk kasus ini kondisi batasnya adalah $p_{dA} = p_{dB}$ dan $u_{dA} = u_{dB}$ maka titik d_A dan d_B adalah titik yang sama di p vs u .



Kondisi batas untuk “final state” dalam kasus ini adalah :

$$p_{fA} = p_{fB} \text{ dan } u_{fA} = u_{fB}$$

Sekarang kita lihat apabila tidak ada gelombang yang di “transmisikan” ke gas B maka untuk memenuhi $u_{fA} = u_{fB}$ dalam gas A harus ada expansion wave yang bergerak ke arah-x. Namun, ini berarti $p_{fA} \neq p_{fB}$ jadi hal ini tidak mungkin. Apabila yang ditransmisikan ke gas B adalah expansion maka, dari tabel WI, dapat dilihat bahwa $p_{fB} < p_{dB}$ atau $p_{fB} < p_{dA}$. Untuk memenuhi kondisi batas “final state”, dibutuhkan sebuah gelombang di gas A yang akan “membawa” kita dari titik b_A ke titik f_B dan gelombang ini harus bergerak ke arah-x. Namun, dari Tabel WI tidak ada gelombang yang kita butuhkan untuk proses ini. Dengan kata lain, tidak mungkin gelombang di gas B adalah expansion wave.

Jadi di gas B harus ada shock wave yang bergerak ke arah +x. Karena untuk kasus ini

$$\rho_B a_B < \rho_A a_A \text{ maka dari persamaan } \frac{\Delta p}{\Delta u} = \rho_o a_o \text{ dapat dilihat bahwa}$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta u} \Big|_{db \rightarrow f_B} > \frac{\Delta p}{\Delta u} \Big|_{dA \rightarrow b_A} \text{ dan titik } f_B \text{ dapat digambarkan seperti yang digambarkan di } p \text{ vs } u$$

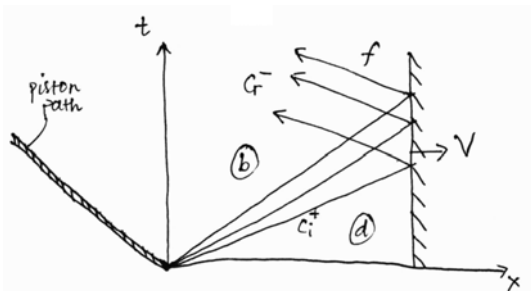
di halaman sebelah. Titik f_B harus berada di atas titik b_A karena apabila titik ini di bawah titik b_A maka untuk memenuhi kondisi batas “final state”, dibutuhkan expansion wave yang bergerak ke arah-x dalam gas A. Namun, dari tabel WI dapat dilihat bahwa ini berarti $u_{fA} \neq u_{fB}$. Untuk memenuhi kondisi batas untuk “final state” harus ada shock wave dalam gas A yang bergerak ke arah-x. Sekarang semua gelombang yang terlibat dalam proses interaksi telah didapatkan dan persoalan ini dapat diselesaikan dengan menggunakan persamaan-persamaan untuk shock dan expansion.

Apabila $p_{fb} > p_b$ dan kita tahu bahwa $p_{bE} < p_b$ maka dari tabel WI dapat dilihat bahwa tidak ada gelombang yang bergerak ke arah-x (gelombang R) yang akan memenuhi persyaratan $p_{fa} = p_{fb}$. Jadi dapat disimpulkan bahwa $p_{fb} < p_b$ dan titik f_b berada di antara titik d dan b .

Sekarang di mana posisi titik b_E (di atas atau di bawah kurva $d-b$)? Untuk menentukan posisi titik b_E , kita gunakan informasi dari gelombang R . Apabila titik b_E berada di atas kurva $d-b$ maka dari tabel WI titik b_E harus berada di atas titik f_b (apabila b_E berada di bawah titik f_b maka tidak ada gelombang yang bergerak ke arah-x yang akan memenuhi kondisi batas). Jadi untuk kasus ini terdapat dua kemungkinan, kedua kemungkinan ini digambarkan dalam p vs u di atas. Untuk kasus di mana titik b_E di bawah kurva $d-b$ adalah shock wave sedangkan untuk kasus di mana titik b_E berada di atas kurva $d-b$ adalah expansion wave. Kasus mana yang terjadi ditentukan oleh keadaan di daerah d dan kecepatan shock wave 1 karena apabila keduanya diketahui maka keadaan di b_E dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan-persamaan untuk shock wave (S.N) dan expansion wave (p_{bE} dan u_{bE} dapat dihitung jadi titik b_E diketahui).

13.2.4 Expansion Wave Reflection

Sekarang kita akan lihat apa yang terjadi apabila sebuah expansion wave bertemu dengan dinding yang bergerak dengan kecepatan v .



Untuk kasus ini, J_i^+ diketahui dan yang harus ditemukan adalah harga J_r^- . Di dinding kedua karakteristik ini bertemu dan u di sana adalah v . Jadi

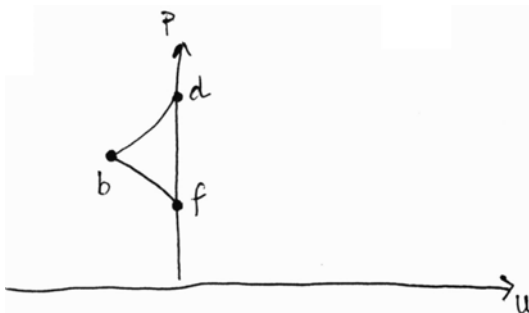
$$J_i^+ = v + F_{dinding}, J_r^- = v - F_{dinding}$$

Dengan demikian maka,

$$J_r^- = -J_i^+ + 2v$$

sehingga J_r^- diketahui dan $F_{dinding}$ dapat dihitung.

Untuk kasus $v = 0$, $\zeta_r^- = \zeta_i^+$ atau karakteristik-karakteristik J_i^+ “dipantulkan” dengan perubahan “*sign*” (dari positif ke negatif). Diagram p vs u untuk kasus ini dapat dilihat pada sketsa dibawah.



Untuk kasus $v = 0$, $u_d = 0 = u_f$ juga

$$u_b = u_{piston} = -\dot{x}.$$

Dari persamaan (WI. 4),

$$\frac{p_b}{p_d} = \left(1 + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) \left(\frac{u_b - u_d}{a_d} \right) \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}$$

$$\frac{p_b}{p_d} = \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{\dot{x}}{a_d} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}$$

$$\frac{p_b}{p_d} = \left(1 - \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) (u_f - u_b) \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}} = \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{\dot{x}}{a_b} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}$$

Karena untuk expansion wave $\frac{p_b}{p_d} < 1$ dan $\frac{a_b}{a_d} < 1$, maka dari hasil di atas

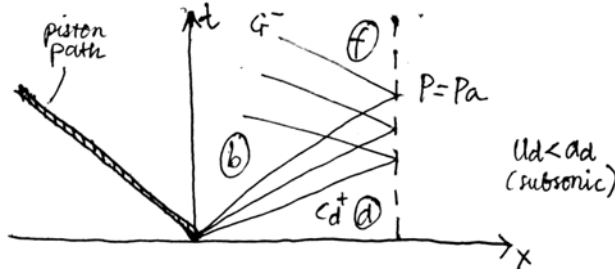
$$\frac{p_f}{p_b} < \frac{p_b}{p_d} \text{ dan } \frac{p_f}{p_b} < 1 \text{ atau } p_f = p_b.$$

Sesuai dengan diagram p vs u di atas gelombang yang dipantulkan adalah gelombang ekspansi.

13.2.5 Expansion Wave bertemu dengan Open End di mana

$$p = p_a$$

Diagram $x-t$ untuk kasus ini adalah,



Kondisi batas yang harus dipenuhi dalam kasus ini adalah

$$p_f = p_a = p_d$$

atau karena $F = F(p)$, $F_f = F(p_a)$.

Kasus ini sama dengan kasus sebelumnya namun sekarang kondisi batasnya untuk tekanan atau F . Jadi,

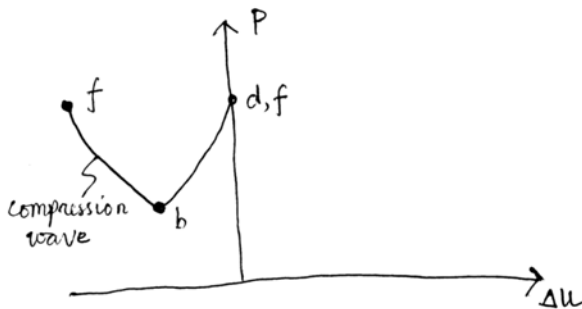
$$J_i^+ = u + F(p_a)$$

$$J_r^- = u - F(p_a)$$

di "open end". Jadi untuk kasus ini,

$$J_r^- = J_i^+ - 2F(p_a).$$

Diagram p vs Δu untuk kasus ini dapat dilihat pada sketsa dibawah.



Karena $p_f = p_d$ maka harus ada gelombang kompresi (shock wave tidak langsung terbentuk karena $u_d = a_d$ / subsonic). Apabila $u_d = a_d$ tidak terbentuk C_r^- karena gangguan tidak dapat merambat ke depan

(upstream)

13.3 Kasus Steady 2-D

Untuk kasus steady 2-D, persoalan interaksi gelombang biasanya diselesaikan dengan bantuan diagram p vs $\Delta\theta$. Hubungan antara p dan $\Delta\theta$ untuk shock dan expansion wave (Oblique Shock dan Prandtl-Mayer Expansion) adalah sebagai berikut ($\Delta\theta = \theta_b - \theta_d$);

Oblique Shock Wave:

Dari persamaan (5) dengan $M_{n_1} = M_d \sin \beta$ dan (OS.2),

dan	$\frac{p_b}{p_d} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_d^2 \sin^2 \beta - 1)$
	$\tan \theta = \frac{2 \cos \beta (M_d^2 \sin^2 \beta - 1)}{(\gamma+1)M_d^2 - 2(M_d^2 \sin^2 \beta - 1)}$

(WI.6)

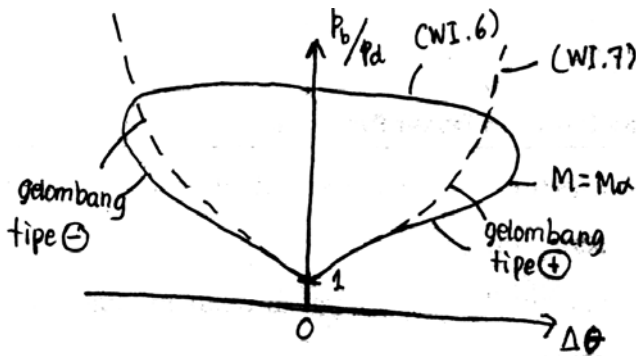
Prandtl-Mayer Expansion Wave (P-M wave) :

Dari persamaan (PMEW) sampai dengan (PMEW2),

$\frac{p_b}{p_d} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_d^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_b^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$
di mana M_b adalah solusi dari persamaan
$v(M_b) = v(M_d) - \Delta\theta$

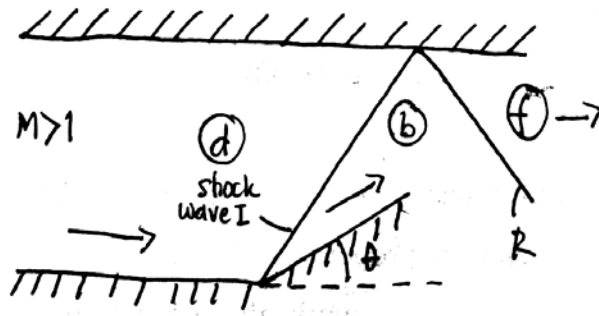
(WI.7)

Apabila hasil dari (WI.6) dan (WI.7) digambarkan dalam diagram $\frac{p_b}{p_d}$ vs $\Delta\theta$ maka hasilnya adalah (untuk sebuah $M = M_d$)



Dari grafik di atas dapat dilihat bahwa untuk sebuah M_d , kurva untuk P - M wave bergabung/ bertemu dengan kurva untuk oblique shock di dekat $\Delta\theta = \Delta\theta_{max}$. Sekarang kita akan lihat bagaimana menggunakan hasil-hasil di atas dalam menyelesaikan persoalan interaksi gelombang untuk kasus steady 2-D.

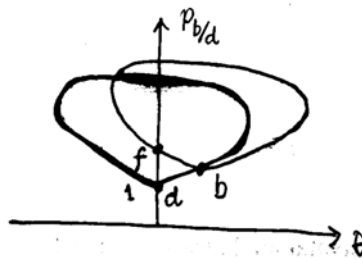
13.3.1 Pemantulan Shock Wave dari dinding



Misalkan dalam sebuah “duct” di mana ada aliran supersonik sudut permukaan duct tersebut berubah (ada $\Delta\theta$) seperti gambar di bawah ini. Karena alirannya supersonic maka, shock wave akan terbentuk (oblique shock) sehingga aliran di belakang shock wave paralel dengan permukaan duct tersebut (lihat gambar 1). Namun, aliran di dekat permukaan atas harus pula paralel dengan permukaan tersebut. Apabila $M_b > 1$ maka sebuah gelombang harus terbentuk. Kondisi batas untuk kasus ini adalah

$$\theta_f = 0 \text{ atau } \Delta\theta_l = -\Delta\theta_R$$

Dalam diagram p vs θ situasinya adalah seperti di bawah ini,



Jadi harus ada gelombang tipe (-) yang akan membelokkan arah aliran sehingga $\theta_f = 0$.

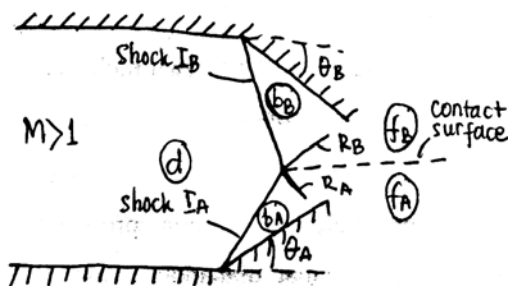
Karena $\frac{P_b}{P_d}$ -nya naik maka gelombang ini haruslah sebuah shock wave. Jadi

Gelombang R adalah shock wave.

Catatan: Dalam menyelesaikan contoh di atas sebuah diagram $\frac{P_b}{P_d}$ vs θ yang baru

digambarkan. Diagram ini dimulai dari titik b dan digambarkan untuk $M=M_b$. Ini dilakukan karena “freestream” untuk daerah (b) berada di titik b dan “free stream Mach number“-nya adalah M_b .

13.3.2 Pertemuan dua buah Shock Wave (yang berbeda jenis))

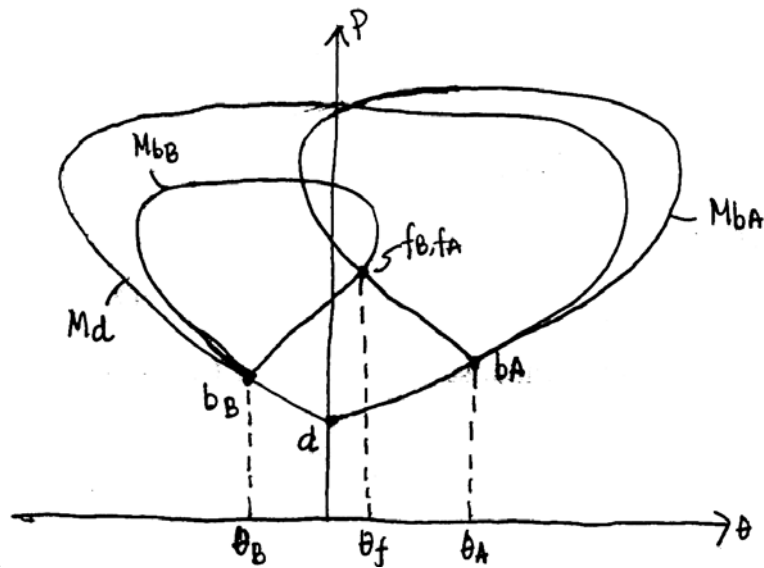


Kasus ini serupa dengan kasus sebelum ini. Namun dalam kasus ini permukaan atas duct tersebut juga mengalami perubahan θ seperti digambarkan di atas. Karenanya sebuah oblique shock terbentuk di permukaan atas. Oblique shock ini akan bertemu dengan oblique shock I_A (dari permukaan bawah) di sebuah titik. Karena aliran di belakang shock I_A dan I_B paralel dengan permukaan A dan B , respectively, maka dua

buah gelombang harus terbentuk (gelombang R_A dan R_B), karena pada akhirnya kedua aliran ini harus paralel (di daerah f_b dan f_a). Jadi kondisi batasnya adalah

$$\theta_{fA} = \theta_{fB} \text{ dan } p_{fA} = p_{fB}$$

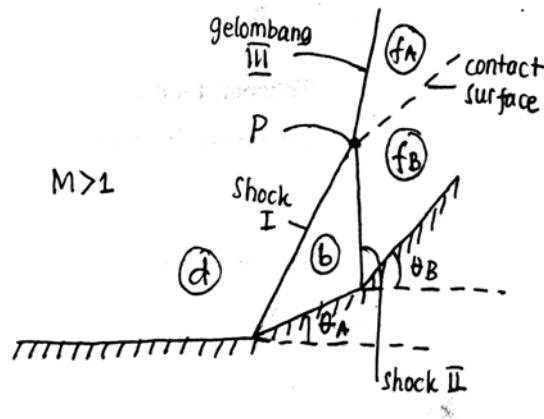
Untuk menentukan jenis gelombang R_A dan R_B , kita gambarkan diagram p vs θ . Untuk kasus ini kita misalkan $|\theta_A| > |\theta_B|$



Karena $p_{fB} = p_{fA} > p_{bB}$ atau p_{bA} maka gelombang R_A dan R_B adalah oblique shock. Walaupun $p_{fB} = p_{fA}$, $s_{fB} \neq s_{fA}$ karena I_B, R_B dan I_A, R_A adalah shock yang berbeda. Jadi $\rho_{fB} \neq \rho_{fA}$ (ada *contact surface*).

13.3.3 Pertemuan 2 Shock Wave yang sejenis

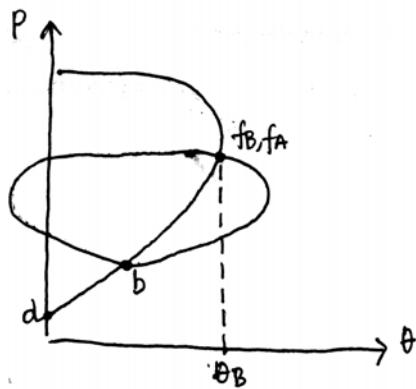
Sekarang misalkan ada permukaan yang mengalami dua tahap perubahan θ seperti di bawah



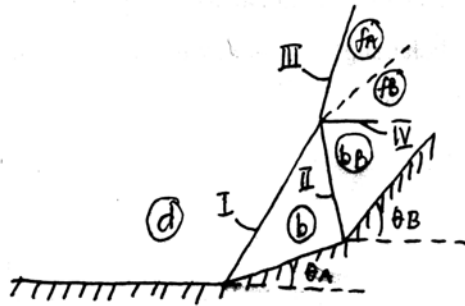
Apabila $M_b > 1$ maka shock II akan terbentuk karena $\theta_b > \theta_A$. Karena $\theta_b > \theta_A$ kedua shock ini akan bertemu. Sebuah gelombang baru harus terbentuk karena aliran di atas titik pertemuan (titik P) haruslah paralel dengan θ_B . Jadi kondisi batas untuk kasus ini adalah,

$$p_{fA} = p_{fB} \text{ dan } \theta_{fA} = \theta_{fB}$$

Untuk menentukan jenis gelombang III, kita gambarkan p vs θ diagram.

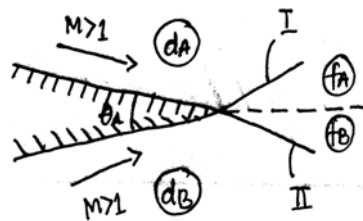


Dari diagram di atas dapat dilihat bahwa solusi untuk shock wave III adalah “*strong solution*”. Seperti telah dijelaskan di bab tentang shock wave, *strong solution* ini sangat jarang terjadi. Untuk itu kemungkinan lain adalah terbentuknya sebuah gelombang lagi (gelombang IV). Apabila ini terjadi maka diagram interaksinya adalah sebagai berikut



Untuk kasus ini diagram p vs θ harus digambarkan lebih hati-hati. Apabila kondisi di daerah d diberikan maka kita bisa gunakan persamaan (s) sampai daerah b_B . Jadi kurva p vs θ untuk shock I dan II dapat digambarkan dengan akurat. Gelombang III adalah shockwave sedangkan jenis gelombang IV tergantung dari kondisi d, θ_A , dan θ_B .

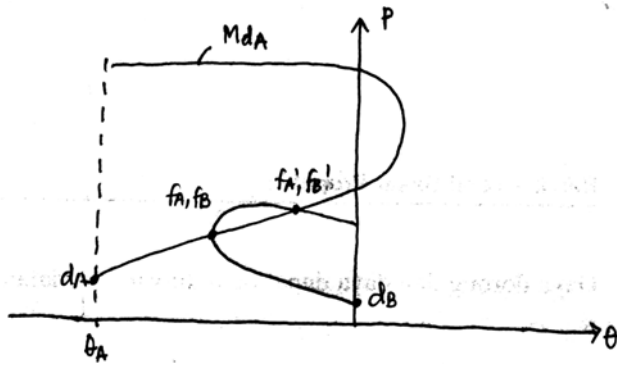
13.3.4 Aliran supersonik di Trailing Edge sebuah airfoil



Apabila aliran di bagian atas dan bawah sebuah airfoil supersonik, maka di *trailing edge* akan terbentuk dua gelombang (I dan II) untuk memenuhi kondisi batas. Kondisi batasnya untuk kasus ini adalah,

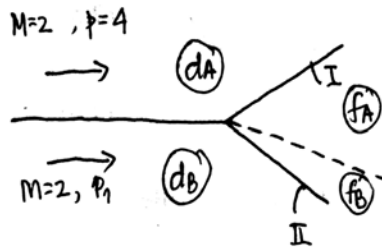
$$p_{fA} = p_{fB} \text{ dan } \theta_A = \theta_B$$

Untuk mengetahui jenis-jenis dari gelombang tersebut kita gambarkan p vs θ untuk M_{dA} dan M_{dB} (Mach number di daerah d_A dan d_B).



Dari diagram di atas dapat dilihat bahwa kedua kurva bertemu di dua titik f_A dan f'_A (weak dan strong solution). Namun, dari diagram di atas jelas terlihat bahwa gelombang I dan II adalah shock wave.

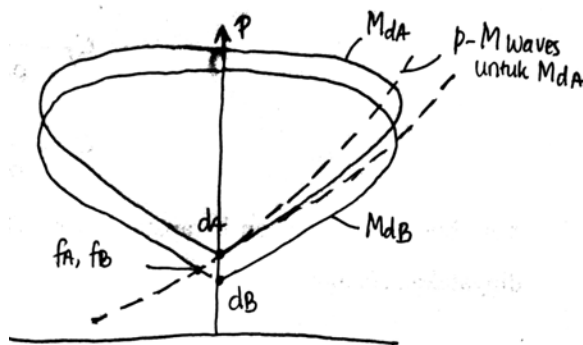
13.3.5 Pertemuan dua aliran supersonik



Apabila dua aliran supersonik yang mempunyai M yang sama namun tekanan yang berbeda bertemu, seperti gambar di atas, maka dua gelombang akan terbentuk (I dan II) untuk memenuhi kondisi batas. Kondisi batasnya adalah:

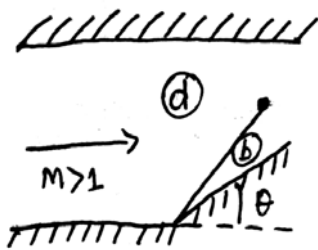
$$p_{f_A} = p_{f_B} \text{ dan } \theta_{f_A} = \theta_{f_B}$$

Sekarang kita gambarkan p vs θ diagram untuk menentukan jenis gelombang I dan II.

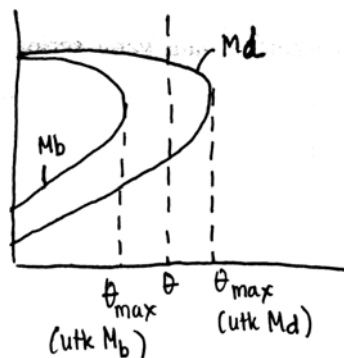


Dalam diagram di atas terlihat bahwa kedua kurva bertemu di dua titik dan kedua titik tersebut adalah *strong solution* yang kemungkinan besar tidak akan terjadi dalam kenyataan (bentuk kedua kurva ini harus sama karena $M_{dA} = M_{dB}$). Namun, apabila kita gambarkan solusi untuk *P-M wave* dari daerah d_A maka ada titik baru (f_A, f_B) di mana kedua kurva tersebut bertemu dan ini adalah solusi yang sangat mungkin terjadi. Jadi dapat disimpulkan bahwa gelombang II adalah shock wave (karena $p_{fB} > p_{dB}$) dan gelombang I adalah *P-M wave*. Ini adalah contoh di mana terjadi interaksi antara shock wave dan expansion wave dalam kasus steady 2-D.

13.3.6 Mach Reflection



Sekarang kita akan kembali ke contoh pertama di mana ada aliran supersonik di dalam duct yang permukaannya bawahnya menekuk secara diskontinyu dengan sudut θ . Dalam contoh tersebut, diasumsikan bahwa θ lebih kecil dari θ_{max} untuk M_b sehingga shock wave R terbentuk. Sekarang, apabila $\theta > \theta_{max}$ untuk M_b seperti terlihat dalam " θ - β - M diagram" di bawah ini, maka tidak ada solusi oblique shock wave untuk gelombang R (namun, untuk gelombang I ada solusi oblique shock karena $\theta < \theta_{max}$ untuk M_d).



Untuk kasus ini "*regular reflection*" (refleksi seperti dalam contoh pertama) tidak mungkin terjadi. Yang terjadi adalah sebuah normal shock terbentuk di daerah atas dari duct. Pembentukan normal shock ini untuk menentukan kondisi batas: aliran di daerah

atas duct parallel dengan permukaan duct. “*shock pattern*” seperti ini disebut “*Mach reflection*”. Karena ada normal shock, maka aliran di bagian atas dari duct (daerah sekitar normal shock) adalah subsonik.

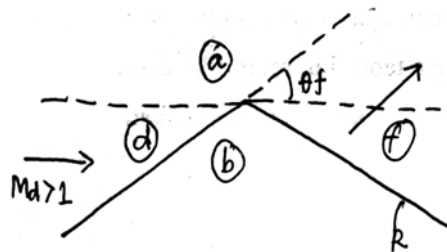
13.3.7 Gelombang yang dipantulkan oleh “Free Boundary”

“*Free Boundary*” adalah kondisi batas di mana tekanan harus memenuhi persyaratan (Free Boundary adalah “open end”)

$$p = p_a = \text{konstan}$$

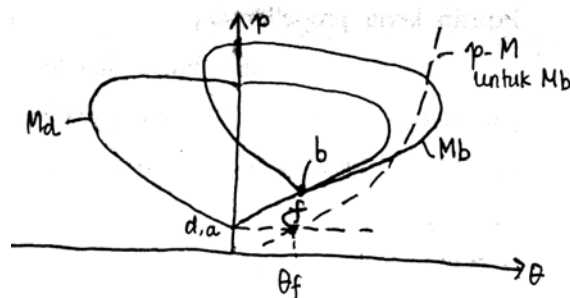
Sekarang kita akan lihat bagaimana atau apa yang terjadi apabila sebuah gelombang bertemu dengan “*free boundary*”.

a) *Shock wave bertemu dengan free boundary*



Kondisi batasnya: $p_f = p_a$

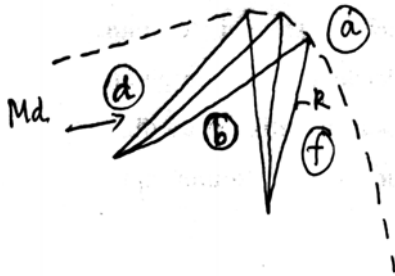
Sekarang kita gambarkan diagram p vs θ untuk menentukan jenis gelombang R.



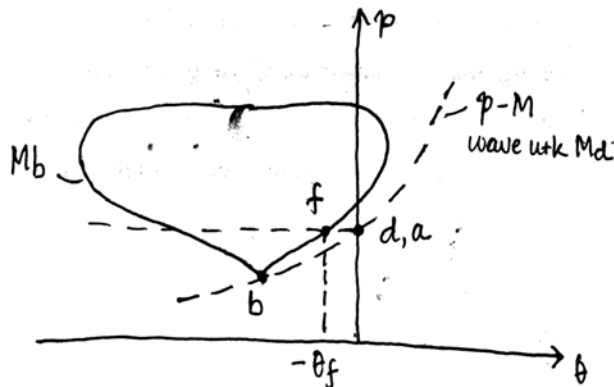
Dari diagram kurva untuk M_b dapat dilihat bahwa R tidak mungkin shock wave karena p di kurva tersebut lebih besar dari p_a . Apabila kita gambarkan kurva untuk P - M wave (untuk $M=M_0$) maka kondisi batas dapat dipenuhi di titik R. Jadi dapat disimpulkan bahwa R adalah P - M expansion wave. Karena di titik f,

$\theta = \theta_f$ maka aliran di belokkan ke arah θ_f (ini dapat terjadi karena *free boundary* bukan solid)

b) *Expansion wave bertemu dengan free boundary*



Kondisi batas kasus ini sama dengan kondisi di a) ($p_f = p_a$). Untuk menentukan jenis R kita gambarkan diagram p vs θ .



Untuk memenuhi $p_f = p_a$ dapat dilihat dari diagram di atas bahwa R haruslah gelombang kompresi (yang akhirnya menjadi shock wave), serupa dengan hasil dari a) aliran di daerah f dibelokkan (untuk kasus ini ke arah $-\theta_f$).

Kesimpulan :

Hasil yang didapatkan di subbagian ini sama persis dengan hasil yang didapatkan di subbagian sebelum ini untuk kasus unsteady 1-D interaksi gelombang. Jadi dapat disimpulkan bahwa :

1. Apabila sebuah gelombang ekspansi/kompresi bertemu dengan “*free boundary*” atau “*open end*” maka gelombang yang dipantulkan adalah gelombang kompresi/ekspansi.

2. Apabila sebuah gelombang ekspansi/kompresi bertemu dengan “*solid boundary*”, maka yang dipantulkan adalah gelombang ekspansi/kompresi (gelombang se-tipe).

BAB

14

Aliran "Quasi" 1D

14.1 Dasar teori

Pada kasus-kasus tertentu dalam aliran steady kompresibel 2-D, salah satu gradien sangat kecil dibandingkan dengan gradien di arah lainnya (misalnya $\frac{\partial}{\partial x^2} \ll \frac{\partial}{\partial x^1}$).

Untuk kasus-kasus seperti ini, persoalan dapat diselesaikan dengan menggunakan *approximasi aliran quasi-one dimensional*. Dalam approximasi ini, diasumsikan bahwa $u = u(x_1)$, $p = p(x_1)$, $\rho = \rho(x_1)$, $T = T(x_1)$ tetapi ada perubahan area penampang sehingga aliran tidak dapat dianggap sebagai aliran *steady* satu dimensi. Model quasi-one dimensional ini sering digunakan untuk mempelajari aliran di dalam nozzle.

Dalam model ini aliran diasumsikan sebagai aliran di mana $s = \text{konstan}$ sehingga persamaan Bernoulli untuk aliran steady berlaku.

$$h + \frac{u^2}{2} = \text{konstan sepanjang streamline}$$

Selain $s = \text{konstan}$, model ini juga mengasumsikan bahwa aliran disetiap *cross-section* adalah aliran yang seragam. Oleh karena itu persamaan di atas menjadi,

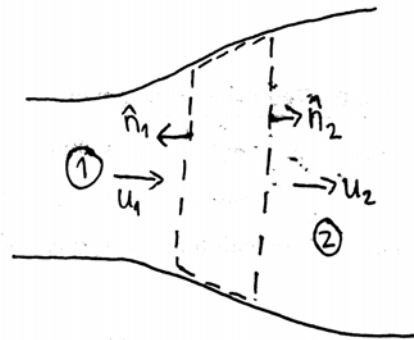
$$h + \frac{u^2}{2} = \text{konstan} = h_0 \tag{Q.1}$$

Persamaan di atas adalah persamaan energi untuk model ini. Karena semua variable aliran adalah fungsi x , maka persamaa momentum untuk kasus ini adalah persamaan Euler untuk kasus steady 1-D.

$$u \frac{du}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = 0 \tag{Q.2}$$

Untuk memasukkan efek perubahan luas penampang ke dalam sistem persamaan untuk model ini, kita gunakan persamaan kontinuitas dalam bentuk integral

$$\int_{S^*} \rho \underline{u} \cdot \hat{n} ds = 0 \quad (\underline{v} = 0)$$



Apabila kita gunakan persamaan tersebut untuk volume atur dalam gambar di atas maka hasilnya adalah

$$\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2 \equiv \dot{m} = \text{konstan} \tag{Q.3}$$

Persamaan (Q.1), (Q.2), dan (Q.3) adalah sistem persamaan yang digunakan dalam model quasi-one-dimensional. Pertama-tama, kita akan gunakan persamaan di atas untuk melihat hubungan antara A dan u . Persamaan (Q.3) dapat dituliskan seperti di bawah ini.

$$\ln \rho + \ln u + \ln A = \ln(\text{konstan})$$

Apabila kita diferensialkan maka hasilnya adalah,

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0.$$

Karena untuk aliran ini $s = \text{konstan}$ maka kita dapat nyatakan $p = p(s, \rho) = p(\rho)$ sehingga,

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s d\rho = a^2 d\rho$$

Apabila ini kita gunakan, maka persamaan kontinuitas menjadi,

$$\frac{dp}{\rho a^2} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (\text{Q.4})$$

Sekarang kita akan gunakan persamaan (Q.2) untuk mengeliminasi suku pertama dalam (Q.4). Persamaan (Q.2) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx}$$

sehingga

$$\frac{dp}{\rho} = -u du .$$

Berikutnya kita substitusikan hasil ini ke dalam (Q.4) dan hasilnya adalah,

$$\boxed{\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{du}{u} \text{ di mana } M \equiv \frac{u}{A}} \quad (\text{Q.5})$$

Persamaan inilah yang menjelaskan hubungan antara A dan u . Dari persamaan (Q.5) kita dapat mengambil kesimpulan-kesimpulan di bawah ini:

1. Untuk $0 \leq M < 1$ (subsonic). Apabila $dA > 0$ maka $du < 0$ dan sebaliknya. Jadi kecepatan naik untuk *duct* yang menyempit dan kecepatan turun untuk *duct* yang melebar.
2. Untuk $M > 1$. Apabila $dA > 0$ maka $du > 0$
Jadi apabila aliran di dalam duct adalah supersonic maka kecepatan naik di daerah yang melebar dan kecepatan turun di daerah yang menyempit.
3. Untuk kasus $M = 1$, $\frac{dA}{A} = 0$. Jadi pada saat $M = 1$ area adalah minimum atau maximum.

Untuk mengetahui apakah A adalah minimum atau maksimum pada saat $M = 1$, kita harus melihat apakah harga $\frac{d^2 A}{dx^2}$ positif atau negatif. Untuk mendiferensialkan (Q.5)

maka variabel u harus diubah menjadi M dan untuk itu kita harus dapatkan hubungan antara A dan u (karena $M = \frac{u}{a}$). Karena $s = \text{konstan}$ maka, $a = a(p)$,

$$da = \left(\frac{\partial a}{\partial p} \right)_s dp \equiv \frac{\beta}{\rho a} dp \text{ di mana } \beta \equiv \rho a \left(\frac{\partial a}{\partial p} \right)_s$$

Apabila kita gunakan hasil ini dalam persamaan momentum maka,

$$-u du = \frac{dp}{\rho} = \frac{ada}{\beta}$$

sehingga

$$\frac{da}{a} = -\beta M^2 \frac{du}{u}$$

Karena $M = \frac{u}{a}$ maka $\ln M = \ln u - \ln a$ sehingga,

$$\frac{dM}{M} = \frac{du}{u} - \frac{da}{a} = (1 + \beta M^2) \frac{du}{u}$$

Apabila hasil ini disubstitusikan ke (Q.5) maka

$$\boxed{\frac{dA}{A} = \frac{M^2 - 1}{1 + \beta M^2} \frac{dM}{M}} \tag{Q.6}$$

Apabila persamaan diatas diturunkan (L'Hospitals rule dapat digunakan karena $\frac{dA}{dx} = 0$

$\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \frac{1}{M^2 - 1} = \frac{1}{1 + \beta M^2} \frac{dM}{dx}$) maka didapatkan,

$$\frac{1}{A} \frac{d^2 A}{dx^2} \Big|_{M=1} = \frac{2}{\beta + 1} \left(\frac{dM}{dx} \right)^2$$

Dari hasil di atas dapat disimpulkan bahwa A minimum atau maximum tergantung dari harga $\Gamma \equiv \beta + 1 > 0$ atau $\Gamma < 0$

Untuk perfect gas: $a = \left(\frac{\gamma p}{\rho}\right)^{1/2}$ dan $p = \rho^\gamma$ konstan (persamaan IR) jadi $\beta = \frac{\gamma-1}{2}$ dan $\Gamma = \frac{\gamma+1}{2}$. Karena $\gamma = 1.4$ (untuk udara) dan secara umum $\gamma > 1$ maka $\Gamma > 0$ sehingga $\frac{dA}{dx}$ minimum untuk $M = 1$ ($\frac{d^2 A}{dx^2} > 0$ untuk $M = 1$)

Jadi untuk kasus-kasus di mana $\Gamma > 0$ (fluida normal), maka

$$\left(\frac{dM}{dx}\right)^2 = \frac{\Gamma}{2} \frac{1}{A} \frac{dA^2}{dx^2} > 0.$$

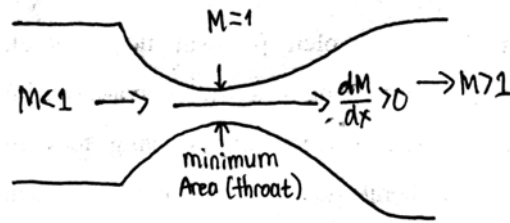
$\begin{matrix} >0 & & >0 \Rightarrow \Gamma > 0 \\ <0 & & <0 \Rightarrow \Gamma < 0 \end{matrix}$

Dengan demikian maka transisi dari subsonik ke supersonik ($\frac{dM}{dx} > 0$) dalam sebuah nozzle harus melewati daerah di mana "cross sectional area" minimum, demikian pula transisi dari supersonik ke subsonik atau kasus ($\frac{dM}{dx} < 0$). Daerah di mana area penampang minimum disebut "throat" dan di daerah inilah terjadi transisi dari aliran subsonik ke supersonik. Namun, apabila aliran di "throat" tidak mencapai sonik (apabila $M \neq 1$ di throat) maka dari persamaan (Q.6) yang dituliskan seperti di bawah.

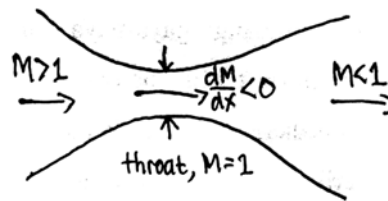
$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \frac{1}{M^2 - 1} = \frac{1}{1 + \beta M^2} \frac{dM}{dx}$$

Dapat dilihat bahwa $\frac{dM}{dx} = 0$ di throat ($\frac{dA}{dx} = 0$ di throat dan $M \neq 1$). Untuk kasus seperti ini aliran di daerah, di mana seharusnya alirannya supersonic menjadi aliran subsonik.

Dari diskusi di atas maka dapat disimpulkan bahwa bentuk sebuah nozzle yang berfungsi untuk menghasilkan aliran supersonik dari aliran subsonik adalah seperti gambar di bawah ini.



Sedangkan untuk sebuah diffuser yang berfungsi untuk menghasilkan aliran subsonik dari aliran supersonik mempunyai bentuk seperti gambar dibawah ini.



14.1.1 Kondisi Sonic

Kadangkala hubungan antara p , ρ , T , a , dan M di sebuah titik dalam aliran diberikan dengan menggunakan *kondisi sonic* di mana hubungan-hubungan tersebut dituliskan dengan harga "a" pada "M = 1". Dari definisi kecepatan untuk kondisi ini adalah $u = a = a_*$ sehingga

$$a^2 + \frac{\gamma-1}{2}u = \frac{\gamma-1}{2}a_*^2 + a_*^2 = \frac{\gamma+1}{2}a_*^2 = a_0^2.$$

Dari hubungan yang terakhir antara (a_* dan a_0) didapatkan,

$$\frac{T_*}{T_0} = \frac{2}{\gamma+1}, \quad \frac{p_*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad \frac{\rho_*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Dengan menggunakan a_* , kita dapat definisikan

$$M_* \equiv \frac{u}{a_*} = \frac{u}{a} \frac{a}{a_0} \frac{a_0}{a_*} = \frac{M}{\left(\frac{2}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}M^2\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{M.2}$$

Catatan: untuk $M \rightarrow \infty$, $M_* \rightarrow \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$ (sebuah konstan)

14.2 Aliran dalam Variabel-Area Duct untuk Perfect Gas

Dari diskusi sebelumnya, didapatkan kesimpulan bahwa kecepatan di "throat"/ daerah di mana A adalah minimum (atau maksimum untuk kasus $\Gamma < 0$) adalah $u = a$ ($M = 1$). Dengan menggunakan subscript "*" untuk menandakan kondisi sonik, persamaan (Q.3) dapat ditulis:

$$\rho_* u_* A_* = \rho u A$$

Karena $u_* = a_*$ maka,

$$\frac{A_*}{A} = \frac{\rho}{\rho_*} \frac{u}{a_*} = \frac{\rho}{\rho_*} M^* = \frac{\rho}{\rho_o} \frac{\rho_o}{\rho_*} M^*$$

Dengan menggunakan (M.2) dan $\frac{\rho_*}{\rho_o} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$ didapatkan,

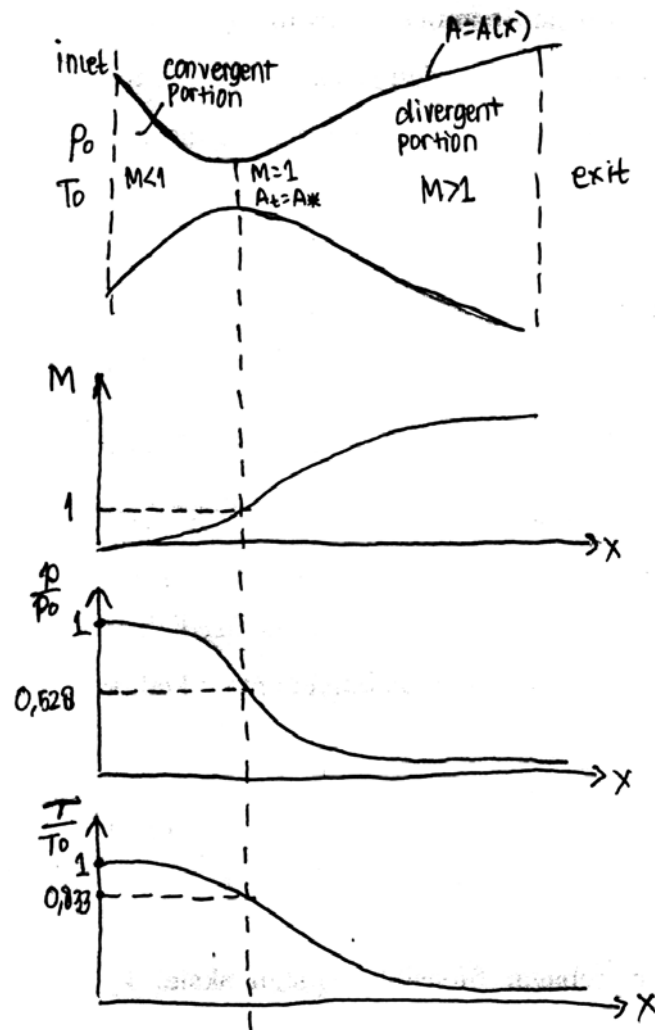
$$\boxed{\left(\frac{A}{A_*} \right)^2 = \frac{1}{M^2} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}} \quad (\text{Q.7})$$

Persamaan di atas disebut "Area-Mach Number Relation". Persamaan ini memberikan hubungan antara M dan $\frac{A}{A_*}$. Dari diskusi disubagian sebelumnya telah disimpulkan

bahwa $A > A_*$. Untuk setiap harga $\frac{A}{A_*}$, ada dua harga M , harga subsonik dan

supersonik. Apakah untuk sebuah harga $\frac{A}{A_*}$ aliran di daerah tersebut supersonik atau

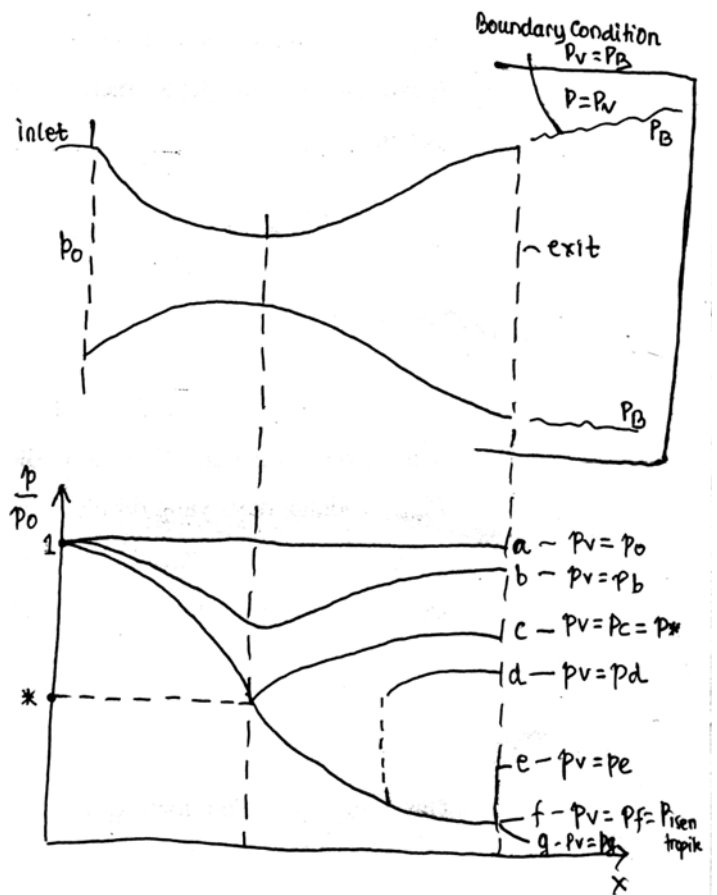
subsonik tergantung dari kondisi batasnya.



Misalkan $A = A(x)$ diberikan seperti di gambar di atas. Gas yang berada di inlet berasal dari sebuah reservoir di mana $p = p_0$, $T = T_0$, dll. Apabila *convergent-divergent nozzle* di atas bekerja secara isentropik ($s = \text{konstan}$), maka hanya ada satu solusi untuk aliran di dalam nozzle tersebut dan solusi ini diberikan oleh persamaan (Q.7). Dari persamaan ini maka M dapat ditentukan (2 harga M untuk setiap $\frac{A}{A^*}$). Di daerah konvergen, aliran adalah aliran subsonik, maka di daerah ini harga M adalah harga M yang subsonik. Di bagian konvergen, gas diakselerasikan sehingga mencapai kecepatan sonik ($M = 1$) di *throat*. Setelah itu, gas diakselerasikan lagi sehingga $M > 1$ di bagian divergen dari nozzle.

Karena M dapat dihitung apabila $\frac{A}{A_*}$ di ketahui, maka $\frac{p_o}{p}$, $\frac{T_o}{T}$, $\frac{\rho_o}{\rho}$ dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (M.1) dan (IR). Variasi M , $\frac{p_o}{p}$, $\frac{T_o}{T}$ yang merupakan fungsi x digambarkan di halaman sebelah. Dapat dilihat bahwa p , T turun secara kontinyu (karena p dan T turun maka ρ juga turun). Di daerah exit, $\frac{p_o}{p}$, $\frac{\rho_e}{\rho_o}$, $\frac{T_e}{T_o}$ hanya bergantung dengan $\frac{A}{A_*}$. Jadi dapat disimpulkan bahwa design sebuah nozzle ditentukan oleh $\frac{A}{A_*}$, p_e , dan T_e (misalkan nozzle didesign untuk mencapai M_{exit} tertentu maka $\frac{A}{A_*}$ dapat dihitung, dan p_o , T_o yang dibutuhkan dapat ditentukan).

14.2.1 Operasi sebuah Nozzle



Sekarang kita akan mempelajari cara kerja sebuah nozzle. Misalkan sebuah nozzle diletakkan di dalam ruangan/ chamber di mana tekanan (p_v) dapat diatur dan tekanan di inlet nozzle adalah tetap ($p_i = p_o$). Apabila tekanan di ruangan tersebut diatur sehingga $p_v = p_o$ maka tidak ada aliran di dalam nozzle (kurva a dalam grafik $\frac{P}{p_o}$ vs x) dan tekanan di seluruh bagian nozzle adalah p_o maka nozzle ini mulai bekerja (karena ada perbedaan tekanan di inlet dan exit dari nozzle. Untuk kasus ini, $p_{exit} = p_b > p_{isentropic}$ di mana $p_{isentropic}$ adalah p di exit yang dibutuhkan agar nozzle beroperasi sesuai dengan persamaan (Q.7), (M.1) dan (IR). Untuk kasus ini aliran di "throat" bukanlah aliran sonik ($M_{throat} < 1$). Karena aliran di throat tidak mencapai kecepatan sonik maka aliran di bagian divergen menjadi aliran subsonik sesuai dengan persamaan (Q.5). Karena $M_{throat} \neq 1$ dan $\left. \frac{dA}{dx} \right|_{throat} = 0$, maka persamaan (Q.5) mengharuskan $\left. \frac{dM}{dx} \right|_{throat} = 0$ sehingga Mach number di throat adalah maksimum. Kasus ini dijelaskan dalam kurva "b" di grafik $\frac{P}{p_o}$ vs x .

Apabila p_v diturunkan lagi menjadi p_c , di mana p_c adalah $p_{exit\ max}$ yang dibutuhkan untuk mendapatkan $p_{throat} = p^*$, maka aliran di throat mencapai kecepatan sonik. Namun karena $p_{exit} = p_c > p^*$, maka aliran di daerah divergen haruslah aliran subsonik. Sampai saat ini aliran di dalam nozzle adalah aliran subsonik dengan $s = \text{konstan}$. Jadi karena p_{exit} diketahui maka M_{exit} dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (M.1) dan (1R).

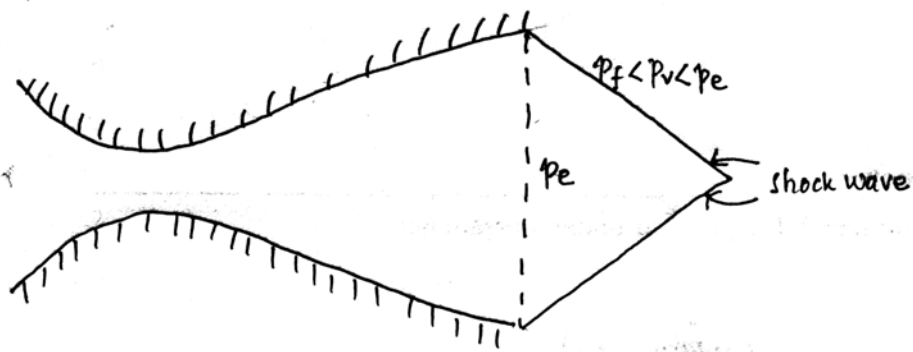
Ketika tekanan diturunkan dari $p_v = p_a$ s.d. $p_v = p_c$, *mass flux* dari nozzle naik. Ini dapat dilihat dengan mengevaluasi $\dot{m} \equiv \rho u A$ di "throat" sehingga $\dot{m} = \rho_t u_t A_t$. Ketika tekanan (p_v) diturunkan ρ_t juga turun dan u_t naik. Namun u_t naik dengan laju yang lebih tinggi daripada turunnya ρ_t sehingga $\rho_t u_t$ naik ketika p_t diturunkan. Apabila p_v diturunkan di bawah p_c , *mass flux* \dot{m} adalah $\dot{m} = \dot{m}_{throat} = \rho_* u_* A_*$ atau $\dot{m} = \rho_* u_* A_*$ yang merupakan sebuah konstan (karena setelah $p_v = p_c$ maka apabila p_v diturunkan aliran di *throat* adalah aliran sonik dengan $\rho_t = \rho_*$, $u_t = a_*$). Untuk kasus $p_{exit} < p_c$, nozzle dikatakan

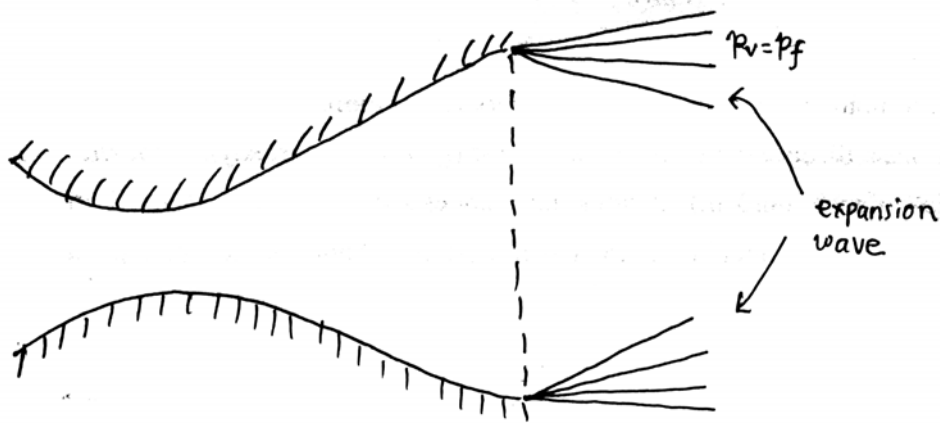
menjadi "choked" (tercekik). Dengan kata lain "gangguan" di exit tidak mempengaruhi aliran di daerah konvergen dari nozzle di mana terdapat aliran subsonik. Fenomena ini dapat dimengerti karena apabila $p_{exit} < p_c$ maka aliran di sebagian daerah di divergent section dari nozzle menjadi super sonik sehingga "gangguan" di exit tidak dapat merambat melewati daerah tersebut.

Apabila p_v diturunkan lagi menjadi p_d maka ada daerah di bagian yang divergen dari nozzle di mana terdapat aliran supersonik. Namun p di daerah ini lebih kecil daripada p_{exit} sehingga untuk mencapai p_{exit} sebuah "normal shock" akan terbentuk di dalam nozzle. Di belakang "normal shock" ini aliran menjadi subsonik dan tekanan naik dan akan terus naik sehingga mencapai $p = p_{exit}$ di exit karena di daerah ini $\frac{dA}{dx} > 0$ dan $M <$

1 sehingga menurut (Q.5) $\frac{dM}{dx} < 0$. Apabila p_v diturunkan lagi menjadi p_e , normal shock ini akan terbentuk di exit dari nozzle.

Apabila p_v terus diturunkan hingga $p_f < p_v < p_e$ maka aliran di exit menjadi aliran supersonik. Untuk kasus ini $p_{exit} \neq p_v$ dan untuk memenuhi kondisi batas (untuk mencapai p_v) maka oblique shock akan terbentuk (lihat gambar di bawah!). Apabila p_v diturunkan lagi sehingga $p_v < p_f$ maka sebuah expansion wave akan terbentuk (di sini p_{exit} juga tidak sama dengan p_v atau $p_{exit} > p_v$ sehingga dibutuhkan expansion wave untuk memenuhi kondisi batas) (lihat gambar !).



Catatan:

- i) Dalam kasus $p_v = p_a$ s/d $p_v = p_e$ diasumsikan, secara implisit, bahwa $p_{exit} = p_B = p_v$ di mana p_B adalah tekanan di perbatasan antara nozzle "discharge" dengan gas dalam ruang chamber. Kondisi batasnya sendiri adalah $p_B = p_v$, karena daerah perbatasan antara nozzle "discharge" dan gas dalam chamber adalah sebuah "tangential discontinuity". Asumsi $p_{exit} = p_B$ adalah asumsi yang cukup baik dalam kenyataanya (untuk kasus $p_v = p_a$ s/d $p_v = p_e$).
- ii) Dalam kasus $p_v > p_c = p^*$, A_{throat} tidak sama dengan A^* karena definisi A^* adalah luas penampang di mana $M = 1$. Juga dalam kasus ini dikatakan bahwa \dot{m} naik ketika p_v diturunkan hingga p_c . Ini dapat dibuktikan dengan menggunakan persamaan (Q.7) dan $\dot{m} = \text{konstan}$ untuk setiap $M_{exit} = \rho_t u_t A_t$. Dari persamaan (Q.7), ($A_t \equiv A_{throat}$)

$$\frac{A_t}{A^*} = \frac{\rho_* u_*}{\rho_t u_t} = \frac{1}{M_t} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_t^2 \right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$

ketika p_v diturunkan ($p_v > p_c$), M_t naik. Karena $M_t < 1$ maka dari persamaan di atas $\rho_t u_t$ naik (ρ_* dan $u_* = a_*$ tetap untuk setiap ρ_0, p_0, T_0). Karenanya $\dot{m} = \rho_t u_t A_t$ juga naik (A_t tentunya sebuah konstan).

BAB

15

Aerodinamika Kompresibel

15.1 Teori potensial linier

Pada Bab “aliran steady kompresibel 3-D” telah dijelaskan bahwa aliran di daerah belakang sebuah shock wave (bow, oblique, normal) yang lemah (weak shock) adalah aliran potensial ($\omega = 0$). Pada aliran supersonik, shock wave yang lemah dihasilkan oleh sebuah benda slender seperti “thin airfoil”. Sedangkan untuk benda yang berada di dalam aliran subsonik dengan freestream yang seragam, kita selalu dapat asumsikan bahwa aliran adalah aliran potensial. Harap diingat bahwa asumsi $\omega = 0$ hanya dapat digunakan di luar di daerah lapisan batas dan shock wave.

Pada kasus-kasus yang dijelaskan di atas, kita dapat gunakan teori aliran potensial untuk mempelajari aliran-aliran tersebut. Persamaan yang digunakan ialah persamaan (P.a) atau (P.b), yang untuk kasus 2-D,

$$(a^2 - u_1^2) + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (a^2 - u_2^2) + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - 2u_1u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0$$

$$h(a) + \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2) = \text{konstan} \quad (\text{TA.1})$$

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \quad u_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2}$$

Dalam bab ini kita akan sederhanakan pers (TA.1) untuk mempelajari aliran di sekitar benda slender, khususnya thin airfoil. Persamaan (TA.1) dapat disederhanakan menjadi persamaan yang linier apabila benda adalah benda slender dengan *angle of attack* yang rendah. Untuk benda-benda jenis ini, benda tersebut berlaku sebagai “gangguan kecil” dalam aliran seragam. Apabila aliran freestream sejajar dengan x_1 , maka asumsi “gangguan kecil” atau “*small perturbation*” adalah :

$$u_1 = U_\infty + \hat{u}_1, \quad u_2 = \hat{u}_2$$

dimana $\frac{\hat{u}_1}{U_\infty}, \frac{\hat{u}_2}{U_\infty} \ll 1$, U_∞ : kecepatan freestream.

Untuk perfect gas,

$$h + \frac{u^2}{2} = C_p T + \frac{1}{2} u^2 + \text{konstan} = \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} (u_1^2 + u_2^2) + \text{konstan}$$

sehingga persamaan Bernoulli dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} [(U_\infty + \hat{u}_1)^2 + \hat{u}_2^2] = \frac{a_\infty^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} U_\infty^2.$$

Apabila persamaan ini disubstitusikan ke dalam persamaan (TA.1), maka hasilnya adalah,

$$\underbrace{\left(1 - M_\infty^2\right)}_A \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_2} = \underbrace{M_\infty^2 \left[(\gamma + 1) \frac{\hat{u}_1}{U_\infty} + \frac{\gamma + 1}{2} \left(\frac{\hat{u}_1}{U_\infty} \right)^2 + \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{\hat{u}_2}{U_\infty} \right)^2 \right]}_B \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_1} + \underbrace{M_\infty^2 \left[(\gamma - 1) \frac{\hat{u}_1}{U_\infty} + \frac{\gamma + 1}{2} \left(\frac{\hat{u}_2}{U_\infty} \right)^2 + \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{\hat{u}_1}{U_\infty} \right)^2 \right]}_D \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_2} + \underbrace{M_\infty^2 \left[\frac{\hat{u}_2}{U_\infty} \left(1 + \frac{\hat{u}_1}{U_\infty} \right) \right]}_E \left(\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_2} \right)$$

Karena $\frac{\hat{u}_1}{U_\infty}, \frac{\hat{u}_2}{U_\infty} \ll 1$ maka kita dapat bandingkan koefisien-koefisien dari $\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_1}$ dan

$\frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_2}$ dan hasilnya adalah :

1. untuk aliran subsonik dan supersonik maka :
 $A \gg B$ dan $C \gg D$ sedangkan $E \approx 0$
2. untuk aliran transonik ($0.8 \leq M_\infty^2 \leq 1.2$), $A \ll 1$ sehingga untuk kasus ini
 $(1 - M_\infty^2) \approx M_\infty^2 (\gamma + 1) \frac{\hat{u}_1}{U_\infty}$ di mana $\left[\left(\frac{\hat{u}_1}{U_\infty} \right)^2, \left(\frac{\hat{u}_2}{V_\infty} \right)^2 \ll \ll \ll 1 \right]$. Namun $C \gg D$
 dan $E \approx 0$.
3. Untuk aliran Hipersonik walaupun $\frac{\hat{u}_1}{U_\infty}, \frac{\hat{u}_2}{U_\infty} \ll 1$, namun apabila dikalikan
 dengan M_∞^2 maka hasilnya tidak dapat dikatakan sangat kecil sehingga dapat
 diabaikan .

Jadi untuk kasus *slender body* ”gangguan kecil” maka kita dapat gunakan persamaan

$$\left(\hat{u}_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \hat{u}_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right)$$

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = 0 \quad (\text{TA.2})$$

untuk aliran subsonik dan supersonik. Sedangkan untuk aliran transonik,

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = \frac{M_\infty^2 (\gamma + 1)}{U_\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} \quad (\text{TA.3})$$

(persamaan (TA.3) juga berlaku untuk aliran subsonik dan supersonik sebagai
 “higher-order approximation”)

Catatan:

1. (TA.2) dan (TA.3) didapatkan dengan mengabaikan suku-suku yang dianggap
 sangat kecil. Jadi kedua persamaan itu adalah aproksimasi!
2. Persamaan (TA.3) ialah persamaan linier yang jenisnya tergantung dari harga
 M_∞ . Untuk $M_\infty > 1$ maka (TA.2) adalah persamaan diferensial parsial
 hiperbolik dan untuk $M_\infty < 1$ maka (TA.2) adalah persamaan diferensial parsial
 elliptik.
3. Persamaan (TA.3) ialah persamaan diferensial parsial yang nonlinier sehingga
 lebih sulit untuk mendapatkan solusinya. Hal inilah yang menyebabkan sulitnya

mempelajari aliran transonik, walaupun telah mengabaikan banyak suku namun persamaan diferensial parsial -nya tetap nonlinier.

Karena kita akan menggunakan aproksimasi ini untuk mempelajari airfoil maka yang kita perlukan ialah distribusi tekanan. Tekanan didapatkan apabila ϕ atau \hat{u}_1 dan \hat{u}_2 telah diperoleh dengan menggunakan solusi persamaan (TA.2) atau (TA.3). Hubungan antara \hat{p} dan \hat{u}_1, \hat{u}_2 didapatkan dari persamaan Bernoulli.

$$h - h_\infty = -\frac{1}{2} \left[(U_\infty + \hat{u}_1)^2 + \hat{u}_2^2 - U_\infty^2 \right] = -\frac{1}{2} (\hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2 + 2U_\infty \hat{u}_1).$$

Karena $s = \text{konstan}$, maka $p(s, h) = p(h)$ sehingga

$$p - p_\infty \approx \left(\frac{\partial p}{\partial h} \right)_s \Big|_{h=h_\infty} (h - h_\infty).$$

Namun, $dh = Tds - \frac{1}{\rho} dp$ dan $\left(\frac{\partial p}{\partial h} \right)_s = \rho$ sehingga,

$$p - p_\infty \approx \frac{-\rho_\infty}{2} (\hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2 + 2U_\infty \hat{u}_1)$$

$$C_p \equiv \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} = - \left[\left(\frac{\hat{u}_1}{U_\infty} \right)^2 + \left(\frac{\hat{u}_2}{U_\infty} \right)^2 + 2 \frac{\hat{u}_1}{U_\infty} \right].$$

Karena $\left(\frac{\hat{u}_1}{U_\infty} \right)^2, \left(\frac{\hat{u}_2}{U_\infty} \right)^2 \ll \ll \ll \ll 1$ maka

$$\boxed{C_p = -2 \frac{\hat{u}_1}{U_\infty}} \quad (\text{TA.4})$$

Untuk menyelesaikan persamaan (TA.2) atau (TA.3) dibutuhkan kondisi batas. Untuk *slender body* kondisi batasnya adalah (rangka acuan bergerak bersama benda):

$$\hat{u}_1 = 0 = \hat{u}_2 \text{ di } \infty \quad (u_1 = U_\infty, u_2 = 0 \text{ di } x_1 \rightarrow \infty)$$

$$\underline{u} \cdot \hat{n} = 0 \text{ di permukaan benda atau } (U_\infty + \hat{u}_1)n_{x_1} + \hat{u}_2 n_{x_2} = 0$$

Apabila permukaan benda dijelaskan oleh persamaan

$$F(x_1, x_2) = 0$$

maka, karena \hat{n} adalah vektor yang paralel dengan ∇f , kondisi batasnya dapat dituliskan seperti di bawah ini,

$$(U_\infty + \hat{u}_1) \frac{\partial F}{\partial x_1} + \hat{u}_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0$$

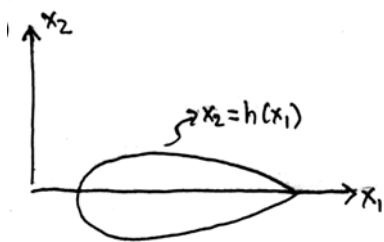
Selain itu karena $\frac{\hat{u}_1}{U_\infty} \ll 1$ maka $(U_\infty + \hat{u}_1) \approx U_\infty$.

Karena benda adalah benda slender maka kita dapat tuliskan \hat{u}_2 dengan menggunakan ekspansi Taylor,

$$\hat{u}_2(x_1, x_2) = \hat{u}_2(x_1, 0) + \left. \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_2} \right|_{(x_1, 0)} \Delta x_2 + \dots$$

atau $\hat{u}_2(x_1, x_2) \approx \hat{u}_2(x_1, 0)$. Dengan demikian maka kondisi batas untuk di permukaan menjadi $U_\infty \frac{\partial F}{\partial x_1} + \hat{u}_2(x_1, 0) \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0$ atau $(\hat{u}_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2})$,

$$\frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) \Big|_{(x_1, 0)}}{U_\infty} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial x_2}}$$



Apabila permukaan dijelaskan oleh persamaan $x_2 = h(x_1)$, maka $F(x_1, x_2) = h(x_1) - x_2 = 0$ sehingga,

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial h}{\partial x_1} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = -1$$

Dengan demikian maka kondisi batas untuk kasus ini menjadi,

$\frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) \Big _{(x_1, 0)}}{U_\infty} = \frac{\partial h}{\partial x_1} = \left(\frac{dx_2}{dx_1} \right)_{\text{permukaan}} \quad \text{dan} \quad \phi(\infty, x_2) = \text{konstan}$	(TA.5)
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------

Berikutnya kita akan lihat solusi (TA.2) dengan (TA.5) untuk kasus subsonik dan supersonik.

15.2 Teori airfoil tipis untuk aliran subsonik

Untuk aliran subsonik, $1 - M_\infty^2 > 0$ sehingga persamaan TA.2 menjadi persamaan diferensial parsial tipe elliptic. Apabila kita definisikan,

$$\beta^2 \equiv 1 - M_\infty^2$$

maka persamaan (TA.2) menjadi

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = 0$$

Persamaan di atas serupa dengan persamaan untuk kasus inkompresible. Namun, dalam persamaan di atas terdapat faktor β^2 yang tidak ditemui dalam persamaan untuk kasus inkompresible ($\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = 0$).

Apabila kita transformasikan koordinat (x_1, x_2) ke koordinat $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ dengan menggunakan persamaan-persamaan transformasi

$$\tilde{x}_1 = x_1, \quad \tilde{x}_2 = x_2 \beta$$

maka persamaan diferensial di atas menjadi persamaan untuk kasus inkompresible seperti didemonstrasikan di bawah ini.

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}_1^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} = \beta^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}$$

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{x}_1^2} + \beta^2 \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}_2} = 0 \quad \text{atau} \quad \boxed{\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{x}_2^2} = 0} \quad (\text{TA.6})$$

Kondisi batas untuk persamaan (TA.6) didapatkan dengan mentransformasikan $x_1 \rightarrow \tilde{x}_1$ dan $x_2 \rightarrow \tilde{x}_2$ dalam persamaan (TA.5) yang hasilnya,

$$\phi(\infty, \tilde{x}_2) = \text{konstan}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}_2} = \frac{U_\infty}{\beta} \left(\frac{dx_2}{dx_1} \right)_{body}$$

Apabila kita definisikan sebuah potensial baru,

$$\tilde{\phi} \equiv \beta \phi$$

maka persamaan (TA.6) dengan kondisi batasnya berubah menjadi,

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}_2^2} = 0 \text{ dengan kondisi batas } \tilde{\phi}(\infty, \tilde{x}_2) = \text{konstan}, \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}_2} = U_\infty \left(\frac{dx_2}{dx_1} \right)_{body}$$

(TA.7)

Karena kondisi batas $\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}_2}$ harus dipenuhi di $\left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1} \right)_{body}$ yang sama (benda yang sama),

maka (TA.7) adalah persamaan yang harus dipenuhi oleh $\tilde{\phi}$ dari sebuah aliran inkompresible di sekitar airfoil tersebut. Dengan kata lain persoalan untuk menentukan distribusi kecepatan dalam aliran kompresible subsonic di sekitar sebuah airfoil dalam ruang x_1 - x_2 sama dengan persoalan untuk menentukan distribusi kecepatan dalam aliran inkompresible di ruang $\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2$.

Apabila kita gunakan hasil di atas untuk mencari C_p maka

$$C_p = -\frac{2\hat{u}_1}{U_\infty} = -\frac{2}{U_\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = +\frac{1}{\beta} \left(-\frac{2}{U_\infty} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}_1} \right) = \frac{1}{\beta} \tilde{C}_p$$

di mana \tilde{C}_p adalah *pressure coefficient* untuk airfoil tersebut apabila aliran adalah aliran inkompresible. Karena *lift coefficient* dan *moment coefficient* adalah integral dari C_p , maka

$$C_l = \frac{\tilde{C}_l}{\sqrt{1-M_\infty^2}}, C_m = \frac{\tilde{C}_m}{\sqrt{1-M_\infty^2}}, C_p = \frac{\tilde{C}_p}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \quad (\text{Prandt'l-Glauert Rule})$$

15.3 Teori airfoil tipis untuk aliran supersonik

Untuk aliran supersonik, $1-M_\infty^2 < 0$ sehingga persamaan (TA.2) menjadi persamaan diferensial parsial tipe hyperbolic. Apabila kita definisikan $\lambda \equiv \sqrt{M_\infty^2 - 1}$, maka persamaan (TA.2) menjadi,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = \lambda^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} \quad (\text{TA.8})$$

Persamaan di atas adalah persamaan gelombang yang telah kita jumpai sebelumnya pada waktu mempelajari kasus akustik 1-D ($x_2 \rightarrow t, x_1 \rightarrow x, \lambda \rightarrow a_0$). Solusi dari persamaan ini adalah

$$\phi = f(x_1 - \lambda x_2) + g(x_1 + \lambda x_2)$$

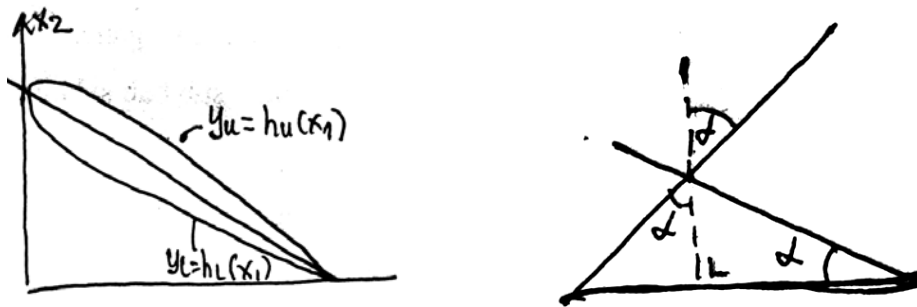
Untuk kasus $g = 0$ maka garis-garis karakteristik

$$x_1 - \lambda x_2 = \text{konstan}$$

adalah garis-garis di mana $\phi = \text{konstan}$. Kemiringan dari garis ini adalah,

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} = \tan \mu$$

di mana μ adalah *Mach angle*, jadi garis-garis ini adalah *Mach lines*. Karena *Mach line* adalah jejak dari gangguan, dan gangguan dalam aliran supersonik hanya dapat merambat kebelakang, maka kasus $g = 0$ adalah solusi untuk bagian atas ($x_2 > 0$) dari benda. Sedangkan kasus $f = 0$ adalah solusi untuk bagian bawah ($x_2 < 0$) dari benda.



Apabila permukaan atas dan bawah dijelaskan oleh persamaan untuk $y_u = h_u(x_1)$ dan $y_l = h_l(x_1)$,

maka

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right|_{x_2 \rightarrow 0^+} = U_\infty h'_u(x_1) \Rightarrow -\lambda f' = +U_\infty h'_u$$

dan

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right|_{x_2 \rightarrow 0^-} = U_\infty h'_l(x_1) \Rightarrow \lambda g' = +U_\infty h'_l$$

Dengan demikian maka solusi dari (TA. 8) adalah ,

$$\phi(x_1, x_2) = -\frac{U_\infty}{\lambda} h_u(x_1 - \lambda x_2), \quad x_2 > 0$$

$$\phi(x_1, x_2) = \frac{U_\infty}{\lambda} h_l(x_1 + \lambda x_2), \quad x_2 < 0$$

Potensial kecepatan diatas dapat kita gunakan untuk mendapatkan distribusi tekanan di permukaan airfoil dan hasilnya adalah,

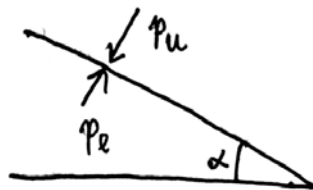
$$C_p = -\frac{2\hat{u}_1}{U_\infty} = -\frac{2}{U_\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x_1}$$

$$C_{p_u} = +\frac{2}{\lambda} h'_u(x_1 - \lambda x_2), \quad x_2 > 0$$

$$C_{p_l} = -\frac{2}{\lambda} h'_l(x_1 + \lambda x_2), \quad x_2 < 0$$

Dengan informasi C_{p_u} dan C_{p_l} maka C_l dan C_d dapat dihitung.

Contoh : *Pelat datar dengan α yang kecil*



Untuk kasus ini:

$$h'_u = -\alpha, \quad h'_l = -\alpha$$

$$C_{p_u} = -\frac{2\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad C_{p_l} = \frac{2\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

$$C_{l_u} = -C_{p_u} \cos \alpha \approx -C_{p_u} \quad C_{l_l} = C_{p_l} \cos \alpha \approx C_{p_l}$$

$$C_l = C_{l_l} + C_{l_u} = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

$$C_{d_u} = -C_{p_u} \sin \alpha \approx -C_{p_u} \alpha \quad C_{d_l} = C_{p_l} \sin \alpha \approx C_{p_l} \alpha$$

$$C_d = C_{d_l} + C_{d_u} = \frac{4\alpha^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$