MODUL 1

Barisan dan Deret Tak Hingga

Dra. Sapti Wahyuningsih, M.Si.

PENDAHULUAN

Modul ini menyajikan kajian tentang Barisan dan Deret Tak Hingga. Kajian tentang barisan dan deret memegang peranan sangat penting karena sebagai dasar untuk pembahasan Integral Tentu.

Barisan dan Deret tak hingga yang dibahas dalam modul ini, meliputi berikut ini.

1. Pengertian barisan.
2. Kemonotonan barisan.
3. Limit barisan.
4. Kekonvergenan barisan.
5. Pengertian deret.
6. Limit suatu deret.
7. Kekonvergenan suatu deret.
8. Uji kekonvergenan deret.

Kajian tentang pengertian barisan memberikan kemampuan mendefinisikan barisan secara umum melalui fungsi dan menentukan suku ke-n suatu barisan.

Kajian kemonotonan barisan memberikan kemampuan menyelesaikan soal-soal bahwa suatu barisan monoton naik, monoton tidak turun, monoton turun dan monoton tidak naik.

Kajian limit barisan memberikan kemampuan mendefinisikan limit suatu barisan, membuktikan sifat-sifat limit barisan, serta menyelesaikan soal-soal tentang limit barisan baik dengan menggunakan definisi maupun teorema apit untuk limit barisan.

Kajian tentang kekonvergenan barisan memberikan kemampuan membuktikan bahwa suatu barisan konvergen atau divergen, memberikan kemampuan mengaitkan kekonvergenan barisan dengan kemonotonan dan barisan terbatas.

Kajian tentang pengertian deret memberikan kemampuan mendefinisikan deret tak hingga dan menentukan jumlah bagian deret tak hingga.

Kajian limit suatu deret memberikan kemampuan menyelesaikan soal bahwa suatu deret mempunyai limit atau tidak dan membuktikan sifat-sifat kelinieran limit suatu deret.

Kajian tentang kekonvergenan suatu deret memberikan kemampuan membuktikan suatu deret konvergen atau divergen.

Kajian tentang uji kekonvergenan deret memberikan kemampuan membuktikan kekonvergenan atau kedivergenan suatu deret dengan uji banding dengan deret lain, uji banding limit, uji hasil bagi dan uji kekonvergenan deret ganti tanda.

Dalam mempelajari modul ini lebih baik kalau dilakukan dengan belajar kelompok terdiri atas tiga atau empat orang jika ada hal-hal yang kurang dipahami dicatat untuk selanjutnya dapat ditanyakan pada waktu tutorial.

Kemampuan umum yang diharapkan setelah mempelajari modul ini, Anda dapat:

1. mendefinisikan barisan secara umum melalui fungsi;
2. menyelesaikan soal-soal tentang limit barisan;
3. menyelesaikan soal tentang barisan konvergen/divergen;
4. mendefinisikan deret tak hingga dan jumlah bagian deret;
5. menyelesaikan soal-soal tentang limit suatu deret
6. menyelesaikan soal tentang kekonvergenan/kedivergenan suatu deret;
7. menyelesaikan soal-soal dengan melakukan uji kekonvergenan deret dengan uji banding dengan deret lain, uji banding limit, uji hasil bagi dan uji kekonvergenan deret ganti tanda.

KEGIATAN BELAJAR 1

Barisan Tak Hingga

Sebelum membahas definisi barisan, perlu Anda ingat lagi pengertian barisan pada materi di SMU, yaitu barisan aritmatika dan barisan geometri. Sebagai contoh, barisan (a) 2, 8, 14, 20, …, (b) 3, 5, 7, 9, … (c) 25, 20, 15, 10, …. Misalkan, suku ke-n adalah U_n maka barisan $U_1, U_2, ..., U_{n-1}, U_n, ...$ disebut barisan aritmatika jika $U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = ... = U_n - U_{n-1} =$ konstanta. Dalam hal ini konstanta disebut beda (b). Jika suku pertama a dan beda b, Anda mengenal rumus suku ke-n barisan aritmatika adalah $U_n = a + (n-1)b$.

Perhatikan barisan 2, 6, 18, 54, … dan barisan 5, -10, 20, -40, … Misalkan, suku ke-n adalah U_n maka barisan $U_1, U_2, ..., U_{n-1}, U_n, ...$ disebut barisan geometri jika $\frac{U_1}{U_2} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{U_4}{U_3} = ... = \frac{U_n}{U_{n-1}} = r =$ rasio. Jika suku pertama a dan r rasio maka rumus suku ke-n barisan geometri dapat ditentukan dengan $U_n = ar^{n-1}$.

Barisan aritmatika dan barisan geometri adalah barisan yang mempunyai sifat khusus sehingga dapat ditentukan rumus umum suku ke-n.

Di bawah ini dibahas definisi barisan secara umum.

1. Pengertian Barisan

Untuk pembahasan barisan secara umum adalah dengan fungsi. Anda ingat definisi fungsi sebagai berikut. Misalkan, A, B adalah sebarang dua himpunan bagian dari himpunan bilangan real yang tak kosong maka fungsi (atau pemetaan) dari A ke B adalah suatu aturan yang menghubungkan setiap $a \in A$ dengan tepat satu $b \in B$. Notasi yang digunakan untuk menunjukkan bahwa f adalah fungsi dari A ke B adalah $f : A \to B$.

Definisi 1.1

Suatu barisan adalah suatu fungsi yang domainnya adalah himpunan bilangan bulat positif (Z^+ atau N) atau himpunan bagiannya.

Suatu barisan yang daerah hasilnya (*range*) adalah himpunan bagian dari himpunan bilangan real disebut barisan bilangan real atau dengan kata lain:

Suatu barisan bilangan real adalah suatu fungsi $f : N \to R$.

Contoh 1.1

$f : N \to R$.

$n \to \dfrac{1}{n}$

$f(n) = a_n$ dengan $a_n = \dfrac{1}{n}$.

f adalah suatu barisan bilangan real karena domainnya adalah N (yaitu himpunan bilangan asli/bulat positif) dan rangenya adalah himpunan bilangan real.

Dalam pembahasan selanjutnya untuk mempersingkat penulisan, suatu barisan bilangan real hanya akan ditulis sebagai barisan saja, mengingat himpunan semesta yang membatasi hanya terbatas pada himpunan bilangan real saja.

Penting untuk membedakan penulisan suatu himpunan dengan suatu barisan. Oleh karena itu, suatu barisan akan ditulis di antara tanda “< “ dan “>”, sedangkan untuk menyatakan suatu himpunan akan ditulis di antara tanda kurung kurawal “{“ dan “}”. Selanjutnya, suatu barisan akan ditulis dengan $< a_n >$. Untuk menyatakan barisan yang berbeda akan ditulis dengan huruf yang berbeda pula, seperti $<b_n>$, $<x_n>$, dan $<y_n>$.

Untuk Contoh 1.1 di atas $< a_n >$ barisan bilangan dengan a_n sebagai suku ke-n atau rumus umum suatu barisan. Suatu barisan dapat dinyatakan dengan menyebutkan beberapa (sejumlah berhingga) suku awalnya, dengan rumus eksplisit untuk suku ke-n, dan dengan bentuk rekursif. Pada Contoh 1.1, beberapa suku awalnya adalah $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots$, sedangkan $a_n = \dfrac{1}{n}, n \geq 1$ adalah rumus eksplisit, dan rumus rekursifnya adalah $a_1 = 1$ dan $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + a_n}$.

Anda perlu hati-hati dalam menuliskan rumus suku ke-n dari suatu barisan, karena dalam beberapa kasus adalah tidak tunggal.

Contoh 1.2

Barisan 1, -1, 1, -1, … mempunyai rumus suku ke-n $a_n = (-1)^{n+1}$ atau $a_n = \cos(n-1)\pi, n \in N$ atau $a_n = \sin(n - \frac{1}{2})\pi$

Suatu barisan terkadang belum dapat dikenali hanya dengan melihat sejumlah berhingga sukunya, karena dapat mempunyai lebih dari satu rumus ke-n dan menghasilkan barisan yang berbeda.

Contoh 1.3

Perhatikan barisan 4, $2\frac{1}{2}$, 2, … rumus ke-n untuk barisan tersebut dapat berbentuk $a_n = 1 + \frac{3}{n}$ atau $a_n = \frac{1}{2}n^2 - 3n + 6\frac{1}{2}$ yang masing-masing akan menghasilkan barisan

4, $2\frac{1}{2}$, 2, $1\frac{3}{4}$, $1\frac{3}{5}$, … dan barisan 4, $2\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 4,…yang merupakan barisan yang berbeda.

2. Kemonotonan Barisan

Definisi 1.2

Barisan $< a_n >$ dikatakan

a. monoton naik jika untuk setiap $n \in N$ berlaku $a_{n+1} > a_n$
b. monoton tidak turun jika untuk setiap $n \in N$ berlaku $a_{n+1} \geq a_n$
c. monoton turun jika untuk setiap $n \in N$ berlaku $a_{n+1} < a_n$
d. monoton tidak naik jika untuk setiap $n \in N$ berlaku $a_{n+1} \leq a_n$

Contoh 1.4

Barisan $< a_n >$ dengan $a_n = \frac{1}{n}$ merupakan barisan yang monoton turun sebab $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{(n+1)n} = -\frac{1}{(n+1)n} < 0.$

Jadi, $a_{n+1} < a_n$, yaitu $< a_n >$ barisan monoton turun.

Atau cara lain:

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1}.\frac{n}{1} = \frac{n}{n+1} < 1$. Jadi, $a_{n+1} < a_n$,

yaitu $< a_n >$ barisan monoton turun.

Barisan $< a_n >$ dengan $a_n = \frac{-1}{n}$ adalah bukan suatu barisan monoton.

Suku-suku barisan tersebut adalah –1, $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ karena

$a_1 < a_2$ & $a_2 > a_3$ maka $< a_n >$ bukan suatu barisan monoton.

3. Limit Barisan

Definisi 1.3

Misalkan $< a_n >$ barisan dan $L \in R$. Barisan $< a_n >$ mempunyai limit L ditulis $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$ apabila untuk setiap bilangan positif ε , terdapat bilangan positif K sehingga $|a_n - L| < \varepsilon, \forall n, n \geq K$.

Contoh 1.5

Barisan $< a_n >$ dengan $a_n = \frac{1}{n}, n \in N$ mempunyai limit 0 sebab ambil sebarang $\varepsilon. > 0$ dan pilih $K > \frac{1}{\varepsilon}$ maka berlaku

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon, \forall n, n \geq K$$

Contoh 1.6

Barisan $< a_n >$ dengan $a_n = 1 - \frac{1}{n}, n \in N$ mempunyai limit 1 sebab ambil sebarang $\varepsilon. > 0$ dan pilih $K > \frac{1}{\varepsilon}$ maka berlaku

$$|a_n - 1| = \left|1 - \frac{1}{n} - 1\right| = \left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon, \forall n, n \geq K .$$

Sifat-sifat dari limit barisan dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 1.1

Misalkan, barisan $< a_n >$ dan barisan $< b_n >$ masing-masing mempunyai limit $L_1 \& L_2$ dan k suatu konstanta maka

a. $\lim\limits_{n\to\infty} k = k$

b. $\lim\limits_{n\to\infty} k\ a_n = k \lim\limits_{n\to\infty} a_n = kL_1$

c. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_1 \pm L_2$

d. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n.b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n . \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_1.L_2$

e. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{L_1}{L_2}$ asalkan $L_2 \neq 0.$

Contoh 1.7

Tentukan $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3}{5n^3 + n^2}$

Penyelesaian:

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3}{5n^3 + n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4}{5 + (\frac{1}{n})}$ (pembilang dan penyebut dibagi dengan pangkat n yang terbesar yang ada pada penyebut)

$= \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} 4}{\lim\limits_{n\to\infty}(5 + (\frac{1}{n}))}$ (berdasar teorema bagian e)

$= \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} 4}{\lim\limits_{n\to\infty} 5 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}$ (berdasar teorema bagian c)

$= \dfrac{4}{5 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}$ (berdasar teorema bagian a))

$$= \frac{4}{5+0} \quad \text{(dari hasil contoh 5)}$$
$$= \frac{4}{5}$$

Teorema apit untuk barisan
Misalkan, $< a_n >, < b_n >$ dan $< c_n >$ barisan.
Jika $a_n \leq b_n \leq c_n, \forall n \in N$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$ maka $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

Contoh 1.8

Dengan teorema apit tunjukkan bahwa $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0$

Penyelesaian:

Oleh karena $0 \leq \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$ dan dari Contoh 1.5 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ maka

$\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0$

Teorema 1.2

Jika $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0,$ maka $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Bukti:
Oleh karena $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0,$ maka

dengan teorema apit diperoleh
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Contoh 1.9

Tunjukkan bahwa jika $|r| < 1$ maka $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$

Penyelesaian:

Oleh karena $|r| < 1$ maka $\dfrac{1}{|r|} > 1$ dan dapat ditulis $\dfrac{1}{|r|} = 1 + k,$ untuk suatu $k > 0.$

Sehingga $\dfrac{1}{|r|^n} = (1+k)^n = 1 + kn +$ (bilangan positif) $\geq kn$.

Diperoleh $0 \leq |r|^n \leq \dfrac{1}{kn}$.

Oleh karena $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{kn} = \dfrac{1}{k} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{k}.0 = 0$ maka berdasar teorema apit $\lim\limits_{n\to\infty} |r|^n = 0.$

Oleh karena $\lim\limits_{n\to\infty} |r|^n = 0$ maka berdasar Teorema $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0.$

4. Kekonvergenan Barisan

Definisi 1.4

Barisan $< a_n >$ dikatakan konvergen ke $L \in R$ jika $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L.$

Barisan $< a_n >$ yang tidak mempunyai limit dikatakan divergen.

Barisan yang divergen kemungkinan yang terjadi adalah limit barisannya $\infty, -\infty$, atau beroskilasi.

Contoh 1.10

a. Barisan $< a_n >$ dengan $a_n = \dfrac{2+n}{4n}$ konvergen ke $\dfrac{1}{4}$ karena $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+n}{4n} = \dfrac{1}{4}$.

b. Barisan $< a_n >$ dengan $a_n = (-1)^n$ adalah divergen karena limit barisannya beroskilasi karena untuk n ganjil limit barisannya –1, sedangkan untuk n genap limit barisannya 1.

c. Barisan $< a_n >$ dengan $a_n = -n$ adalah divergen karena $\lim\limits_{n\to\infty}(-n) = -\infty$.

Ada hubungan antara barisan konvergen, kemonotonan barisan dan barisan terbatas. Sebelumnya diberikan pengertian barisan terbatas sebagai berikut.

Definisi 1.5

Misalkan, $< a_n >$ suatu barisan, barisan $< a_n >$ dikatakan terbatas atas jika ada suatu bilangan real M, sedemikian hingga $a_n \le M$ untuk semua $n \in N$. Barisan $< a_n >$ dikatakan terbatas bawah jika ada suatu bilangan real M, sedemikian hingga $a_n \ge M$ untuk semua $n \in N$.

Ditulis dengan notasi matematika:
Misalkan, $< a_n >$ suatu barisan,
$< a_n >$ terbatas atas $\Leftrightarrow \exists M \in R \ni a_n \le M, \forall n \in N$
$< a_n >$ terbatas bawah $\Leftrightarrow \exists M \in R \ni a_n \ge M, \forall n \in N$

Selanjutnya, barisan $< a_n >$ dikatakan terbatas jika $< a_n >$ terbatas atas dan terbatas bawah. Atau dengan kata lain, barisan $< a_n >$ terbatas jika dan hanya jika ada M > 0 sedemikian hingga $|a_n| \langle M$ untuk semua n $\in$ N, di mana $|a_n| \le M, M \rangle 0$, berarti juga $-M \le a_n \le M$.

Contoh 1.11

Barisan $<-n^2>$ adalah barisan yang terbatas atas karena terdapat M = 1 sehingga $-n^2 < 1, \ \forall n \in N$

Contoh 1.12

Barisan $<n^2>$ adalah barisan yang terbatas bawah karena terdapat M = 0 sehingga $n^2 > 0, \ \forall n \in N$

Contoh 1.13

Barisan $<(-1)^n>$ adalah barisan yang terbatas karena terdapat M = 2, sehingga $\left|(-1)^n\right| = 1 \le 2, \forall n \in N$.

Teorema 1.3

Setiap barisan yang konvergen selalu terbatas

Bukti:

Misalkan, barisan $< a_n >$ konvergen ke L. Akan ditunjukkan barisan $< a_n >$ terbatas, yaitu terdapat $M > 0$ sehingga $|a_n| < M, \forall n \in N$.

Oleh karena $< a_n >$ barisan yang konvergen ke L maka terdapat bilangan positif K sehingga $|a_n - L| < 1, \forall n, n \geq K$.

Sehingga berlaku:

$|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < 1 + |L|$, untuk setiap $n \geq K$.

Pilih $M = maks\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_K|, 1 + |L|\}$

Maka, diperoleh $|a_n| \leq M, \forall n \in N$, yaitu $< a_n >$ barisan terbatas.

Teorema 1.4

Setiap barisan yang monoton dan terbatas selalu konvergen

Dari teorema ini dimaksudkan:

a. Jika barisan $< a_n >$ monoton naik atau monoton tidak turun dan terbatas di atas maka barisan $< a_n >$ konvergen.
b. Jika barisan $< a_n >$ monoton turun atau monoton tidak naik dan terbatas di bawah maka barisan $< a_n >$ konvergen.

Contoh 1.14

Tunjukkan bahwa barisan $< a_n >$ dengan $a_n = \dfrac{2}{2-4n}$ konvergen tanpa menghitung limit.

Penyelesaian:

Ditunjukkan bahwa barisan $< a_n >$ terbatas di atas dan monoton naik.

Suku-suku barisan tersebut adalah $-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \ldots$ jelas bahwa barisan terbatas atas oleh 0.

Ditunjukkan barisan monoton naik, yaitu $a_{n+1} > a_n$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2}{2-4(n+1)} - \frac{2}{2-4n} = \frac{4-8n+4+8n}{(-2-4n)(2-4n)}$$
, yaitu
$$= \frac{8}{(4n+2)(4n-2)} > 0, n \in N$$

$a_{n+1} > a_n$, jadi $< a_n >$ barisan monoton naik.

Oleh karena barisan $< a_n >$ monoton naik dan terbatas di atas maka barisan $< a_n >$ konvergen.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Tunjukkan bahwa barisan $< a_n >$ dengan $a_n = \frac{n}{n+1}$ adalah barisan yang monoton naik!
2) Tunjukkan bahwa limit barisan $< a_n >$ dengan $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ adalah 0!
3) Tunjukkan bahwa barisan $< a_n >$ dengan $a_n = (-1)^n$ tidak mempunyai limit!
4) Tunjukkan bahwa $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$!
5) Tunjukkan barisan $< a_n >$ dengan $a_n = \frac{4n^2 - 5n}{8n^2 + 9n}$ konvergen ke $\frac{1}{2}$!

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Diketahui barisan $< a_n >$ dengan $a_n = \frac{n}{n+1}$

   Untuk menunjukkan barisan monoton naik, harus ditunjukkan bahwa untuk setiap $n \in N$, berlaku $a_n < a_{n+1}$.

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} \\
&= \frac{n+1-n}{(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0, \forall n \in N
\end{aligned}
$$

Jadi, setiap $n \in N$, berlaku $a_n < a_{n+1}$.

2) Diketahui barisan $< a_n >$ dengan $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Untuk menunjukkan limit barisan $< a_n >$ adalah 0, ditunjukkan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $K \in N$ sehingga

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} - 0 \right| < \varepsilon, \forall n \geq K.$$

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ pilih $K > \frac{1}{\varepsilon}$ sehingga

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} - 0 \right| < \frac{1}{n} < \frac{1}{K} < \varepsilon$$

Terbukti bahwa limit barisan $< a_n >$ adalah 0.

3) Untuk menunjukkan barisan $< a_n >$ dengan $a_n = (-1)^n$ tidak mempunyai limit adalah diandaikan limitnya ada. Jika terjadi kontradiksi maka pengandaian harus diingkar.

Andaikan $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ dan misalnya $\varepsilon = \frac{1}{3}$, pilih $K \in N$ sehingga $\left|(-1)^n - L\right| < \varepsilon, \forall n, n \geq K$ sehingga berlaku $\left|(-1)^{2K} - L\right| < \varepsilon$ dan $\left|(-1)^{2K+1} - L\right| < \varepsilon$,

yaitu $|1-L| < \varepsilon$ dan $|-1-L| = |1+L| < \varepsilon$

Terdapat kontradiksi $2 = |(1+L)+(1-L)| \leq |1+L| + |1-L| < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

4) Oleh karena berlaku $0 < \dfrac{1}{2^n} \le \dfrac{1}{n}$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ maka dengan menggunakan teorema apit diperoleh $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$.

5) Diketahui barisan $< a_n >$ dengan $a_n = \dfrac{4n^2 - 5n}{8n^2 + 9n}$, akan ditunjukkan barisan $< a_n >$ konvergen ke $\dfrac{1}{2}$.

Pembilang dan penyebut dari $a_n = \dfrac{4n^2 - 5n}{8n^2 + 9n}$ dibagi dengan n^2

diperoleh $\dfrac{4n^2 - 5n}{8n^2 + 9n} = \dfrac{4 - \frac{5}{n}}{8 + \frac{9}{n}}$

Jadi, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2 - 5n}{8n^2 + 9n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4 - \frac{5}{n}}{8 + \frac{9}{n}} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

RANGKUMAN

1. Pengertian Barisan

   Definisi

   Suatu barisan adalah suatu fungsi yang domainnya adalah himpunan bilangan bulat positif (Z^+ atau N) atau himpunan bagiannya.

   Suatu barisan yang daerah hasilnya (*range*) adalah himpunan bagian dari himpunan bilangan real disebut barisan bilangan real, atau dengan kata lain:

   Suatu barisan bilangan real adalah suatu fungsi $f : N \to R$.

2. Kemonotonan Barisan

   Definisi

   Barisan $< a_n >$ dikatakan

   a. monoton naik jika untuk setiap $n \in N$ berlaku $a_{n+1} > a_n$

   b. monoton tidak turun jika untuk setiap $n \in N$ berlaku $a_{n+1} \ge a_n$

c. monoton turun jika untuk setiap $n \in N$ berlaku $a_{n+1} < a_n$

d. monoton tidak naik jika untuk setiap $n \in N$ berlaku $a_{n+1} \leq a_n$

3. Limit Barisan

Definisi

Misalkan, $< a_n >$ barisan dan $L \in R$. Barisan $< a_n >$ mempunyai limit L ditulis $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$ apabila untuk setiap bilangan positif ε, terdapat bilangan positif K sehingga $|a_n - L| < \varepsilon, \forall n, n \geq K$.

Teorema

Misalkan, barisan $< a_n >$ dan barisan $< b_n >$ masing-masing mempunyai limit $L_1 \,\&\, L_2$ dan k suatu konstanta maka

a. $\lim\limits_{n \to \infty} k = k$

b. $\lim\limits_{n \to \infty} k\, a_n = k \lim\limits_{n \to \infty} a_n = kL_1$

c. $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n \to \infty} a_n \pm \lim\limits_{n \to \infty} b_n = L_1 \pm L_2$

d. $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n . b_n) = \lim\limits_{n \to \infty} a_n . \lim\limits_{n \to \infty} b_n = L_1 . L_2$

e. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n \to \infty} a_n}{\lim\limits_{n \to \infty} b_n} = \dfrac{L_1}{L_2}$ asalkan $L_2 \neq 0$.

Teorema apit untuk barisan

Misalkan, $< a_n >, < b_n >$ dan $< c_n >$ barisan.

Jika $a_n \leq b_n \leq c_n, \forall n \in N$ dan $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} c_n = L$

maka $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = L$.

Teorema

Jika $\lim\limits_{n \to \infty} |a_n| = 0$ maka $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

4. Kekonvergenan Barisan

Definisi

Barisan $< a_n >$ dikatakan konvergen ke $L \in R$ jika $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$

Barisan $< a_n >$ yang tidak mempunyai limit dikatakan divergen.

Barisan yang divergen kemungkinan yang terjadi adalah limit barisannya $\infty, -\infty$ atau beroskilasi.

Ada hubungan antara barisan konvergen, kemonotonan barisan dan barisan terbatas. Sebelumnya diberikan pengertian barisan terbatas sebagai berikut.

Definisi

Misalkan, $< a_n >$ suatu barisan, barisan $< a_n >$ dikatakan terbatas atas jika ada suatu bilangan real M, sedemikian hingga $a_n \leq M$ untuk semua $n \in N$. Barisan $< a_n >$ dikatakan terbatas bawah jika ada suatu bilangan real M, sedemikian hingga $a_n \geq M$ untuk semua $n \in N$.

Selanjutnya, barisan $< a_n >$ dikatakan terbatas jika $< a_n >$ terbatas atas dan terbatas bawah. Atau dengan kata lain, barisan $< a_n >$ terbatas jika dan hanya jika ada M > 0 sedemikian hingga $|a_n| \langle M$ untuk semua $n \in$ N, di mana $|a_n| \leq M, M \rangle 0$, berarti juga $-M \leq a_n \leq M$.

Teorema

Setiap barisan yang konvergen selalu terbatas

Teorema

Setiap barisan yang monoton dan terbatas selalu konvergen

Dari teorema ini dimaksudkan:

a. Jika barisan $< a_n >$ monoton naik atau monoton tidak turun dan terbatas di atas maka barisan $< a_n >$ konvergen.
b. Jika barisan $< a_n >$ monoton turun atau monoton tidak naik dan terbatas di bawah maka barisan $< a_n >$ konvergen.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Limit barisan $< a_n >$ dengan $a_n = \dfrac{7n^2 - 5n}{3n^2 + 11}$ adalah ….

A. $-\dfrac{5}{3}$

B. $\dfrac{7}{3}$

C. $\dfrac{7}{11}$

D. 0

2) Limit barisan $< a_n >$ dengan $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2} + 5$ adalah ….

A. 5
B. 0
C. - 1
D. - 3

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n}$ adalah ….

A. 1

B. 0

C. $\dfrac{1}{2}$

D. $\dfrac{1}{4}$

4) Barisan $< a_n >$ dengan $a_n = \dfrac{1}{1-2n}$ adalah ….

A. monoton turun
B. monoton naik
C. monoton tidak turun
D. monoton tidak naik

5) Barisan $< a_n >$ dengan $a_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$ adalah ….

A. monoton turun
B. monoton naik
C. monoton tidak turun
D. monoton tidak naik

6) Barisan $< a_n >$ dengan $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ adalah ….

A. terbatas di atas oleh 0
B. terbatas di atas oleh 2
C. terbatas di bawah oleh 2
D. terbatas di bawah oleh 0

7) Barisan $< a_n >$ dengan $a_n = \dfrac{11+5n}{n^7}$ adalah konvergen ke ….

A. 5
B. 11
C. 0
D. $\dfrac{5}{11}$

8) Barisan $< a_n >$ dengan $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$ adalah ….

A. konvergen ke 0
B. konvergen ke $\dfrac{1}{2}$
C. konvergen ke –1
D. divergen

9) Barisan $< a_n >$ dengan $a_n = (-1)^{n+1}(\dfrac{1}{n})$ adalah ….

A. konvergen ke $\dfrac{1}{2}$
B. konvergen ke 0
C. konvergen ke 1
D. divergen

10) Barisan $< a_n >$ dengan $a_n = \dfrac{(n-1)}{n}$ adalah ….

A. konvergen ke 0
B. konvergen ke $\dfrac{1}{2}$
C. konvergen ke 1
D. divergen

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan:	90 - 100%	= baik sekali
	80 - 89%	= baik
	70 - 79%	= cukup
	< 70%	= kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Deret Tak Hingga

Sebelum membahas pengertian deret tak hingga, Anda ingat kembali pengertian deret aritmatika dan deret geometri pada materi di SMU. Anda perhatikan barisan 4, 7, 10, 13, 16, …, selanjutnya dibentuk barisan $S_1, S_2, S_3, \ldots$ berdasarkan barisan tersebut dengan $S_1 = 4$

$$S_2 = 4 + 7 = 11$$
$$S_3 = 4 + 7 + 10 = 21$$
$$\vdots$$

Secara umum, dari U_n suku ke-n barisan aritmatika dapat dibentuk deret aritmatika $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n + \ldots$.

$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$ merupakan jumlah bagian ke-*n* dari deret aritmatika. Oleh karena $U_n = a + (n-1)b$ maka rumus umum jumlah bagian deret aritmatika $S_n = \frac{1}{2} n\ (2a + (n-1)\,b)$.

Sedangkan U_n suku ke-n barisan geometri, dapat dibentuk deret geometri $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n + \ldots$.

$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$ merupakan jumlah bagian ke-*n* dari deret geometri.

Oleh karena $U_n = ar^{n-1}$ maka rumus umum jumlah bagian deret geometri $S_n = \dfrac{a\,(1 - r^n)}{1 - r}$.

Pada pengertian deret di atas didasarkan pada barisan aritmatika dan barisan geometri yang diketahui. Berikut didefinisikan pengertian deret secara umum.

1. Pengertian Deret

Definisi 1.6

Misalkan, $< a_n >$ suatu barisan. Penjumlahan $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ dari semua suku-suku barisan $< a_n >$ ditulis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ disebut deret tak hingga.

Definisi 1.7

Misalkan, $< a_n >$ suatu barisan dan $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$. Maka, $< S_n >$ disebut barisan jumlah bagian dari deret tak hingga $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Bilangan a_n disebut suku ke-n dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan S_n disebut jumlah bagian ke-n dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Limit suatu Deret

Misalkan, S_n jumlah bagian ke-n dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Jika barisan $< S_n >$ konvergen atau $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ maka S disebut sebagai limit suatu deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan ditulis $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Contoh 1.15

Tentukan limit dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Penyelesaian:

Jumlah bagian ke-n dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ adalah

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1})=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\ldots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

$$=\ 1-\frac{1}{n+1}$$

Jadi, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} 1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 1-0=1$

Sehingga limit dari deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ adalah 1.

Teorema 1.5

Jika $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = T$ dan C konstanta maka

a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Ca_n = CS$

b. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = S+T$

c. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n) = S-T$

Bukti:

b. $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i, T_n=\sum\limits_{i=1}^{n} b_i$ dan $U_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a_i+b_i\right)$

Misalkan,

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) = \lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^{n} a_i+\sum_{i=1}^{n} b_i) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} a_i + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$= \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} T_n = S+T$$

Jadi, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = S+T$.

3. Kekonvergenan suatu Deret

Definisi 1.8

Deret tak hingga $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dikatakan konvergen jika $< S_n >$ barisan dari jumlah bagiannya konvergen.

Deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dikatakan divergen jika $< S_n >$, yaitu barisan dari jumlah bagiannya divergen.

Contoh 1.16

Deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergen karena $< S_n >$ barisan dari jumlah bagiannya konvergen. Oleh karena $\lim_{n \to \infty} S_n = 1$ maka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergen ke 1 atau ditulis

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Contoh 1.17

Tunjukkan bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ adalah divergen.

Penyelesaian:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$$

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) > 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = 1 + \frac{2}{2}$$

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) > 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8})$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}$$

$$S_{16} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{9} + ... + \frac{1}{16})$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{16} + ... + \frac{1}{16})$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{4}{2}$$

Dengan cara yang sama $S_{32} > 1 + \frac{5}{2}$ & $S_{64} > 1 + \frac{6}{2}$

Secara umum, $S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$.

Hal ini menunjukkan bahwa $\lim\limits_{n \to \infty} S_{2^n} = \infty$

Jadi, $< S_n >$ adalah barisan divergen.

Sehingga deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ adalah divergen. Deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ disebut deret harmonik.

Contoh 1.18

Tunjukkan deret geometri $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}, a \neq 0$

a. Konvergen jika $|r| < 1$.

b. Divergen jika $|r| \geq 1$.

Penyelesaian:

Misalkan,

$$S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$$

$$S_n - rS_n = (a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + ... + ar^n) = a - ar^n$$

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

Jika $|r| < 1$ maka $\lim\limits_{n \to \infty} r^n = 0$ sehingga $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1 - r} = S$

Oleh karena $< S_n >$ jumlah bagian deret geometri adalah konvergen maka deret geometri $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}, a \neq 0$ juga konvergen.

Jika $|r| \geq 1$ maka barisan $< r^n >$ divergen, sehingga barisan $< S_n >$ juga divergen.

Hal ini mengakibatkan deret geometri $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}, a \neq 0$ divergen jika $|r| \geq 1$.

Ada kaitan antara kekonvergenan suatu deret dengan limit tak hingga suku deret ke-n yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 1.6

Jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen maka $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Bukti:

Misalkan, S_n jumlah bagian ke-n deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Oleh karena diketahui deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen maka terdapat $S \in R$ sehingga $\lim_{n\to\infty} S_n = S$

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$

$S_{n-1} = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}$

$\therefore a_n = S_n - S_{n-1}, \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$

Kebalikan pernyataan dalam teorema di atas tidak berlaku, yaitu $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ tidak benar bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen, contoh penyangkalnya adalah $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, tetapi deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen.

Sedangkan ekivalen dengan pernyataan dalam teorema di atas adalah

Jika $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ atau $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ tidak ada maka deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen.

Contoh 1.19

Periksa apakah deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2n^3+5n^2}$ merupakan deret konvergen atau divergen?

Penyelesaian:

Pandang deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ dengan $a_n = \frac{n^3}{2n^3+5n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{2n^3+5n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{5}{n}} = \frac{1}{2}$$

Oleh karena $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ maka deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen

Teorema 1.7

Jika $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen dan $C \neq 0$ maka $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Ca_n$ divergen.

Contoh 1.20

Periksa deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$ apakah merupakan deret konvergen atau divergen?

Penyelesaian:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4}.\frac{1}{n}, C = \frac{1}{4}$ dan karena $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ merupakan deret divergen maka deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$ merupakan deret divergen.

Dari uraian di atas, untuk melihat kekonvergenan suatu deret Anda harus menentukan jumlah bagian deretnya. Terkadang bentuk umum jumlah bagiannya sulit ditentukan sehingga sulit untuk menentukan kekonvergenan deretnya. Ada cara lain untuk menentukan suatu deret konvergen atau divergen dengan membandingkan dengan deret lain yang sudah diketahui kekonvergenannya. Jika Anda mengetahui suku-suku deretnya positif, untuk menguji kekonvergenannya juga dapat dengan menentukan limit dari suku deretnya. Uji kekonvergenan deret demikian seperti yang diuraikan di bawah.

4. Uji Kekonvergenan Deret

a. Uji banding dengan deret lain

Teorema 1.8

Misalkan, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ adalah deret dengan suku-suku positif $(a_n \geq 0 \text{ dan } b_n \geq 0, \forall n \in N)$

1) Jika $a_n \leq b_n, \forall n \in N$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ juga konvergen.
2) Jika $a_n \geq b_n, \forall n \in N$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergen maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ juga divergen.

Dalam hal ini jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ didominasi oleh deret $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yang konvergen maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen. Sebaliknya jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mendominasi deret $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yang divergen maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen.

Contoh 1.21

Selidiki apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-5}$ merupakan deret konvergen atau divergen?

Penyelesaian:

$$\frac{n}{4n^2-5} > \frac{n}{4n^2} = \frac{1}{4n}$$

Oleh karena deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$ divergen maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-5}$ juga divergen.

b. Uji banding limit dengan deret lain

Teorema 1.9

Misalkan, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ adalah deret dengan suku-suku positif $(a_n \geq 0 \text{ dan } b_n \geq 0, \forall n \in N)$.

1) Jika $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L, L > 0$ maka kedua deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ bersama-sama konvergen atau divergen.
2) Jika $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ dan deret $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ juga konvergen.
3) Jika $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ dan deret $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergen maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ juga divergen.

Contoh 1.22

Periksa kekonvergenan deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n^3-4n^2+5}$.

Penyelesaian:

Dengan uji banding limit maka perlu dicari pembanding suku ke-n dari deret ini.

Misalkan, $a_n = \frac{3n-1}{n^3-4n^2+5}$ dan $b_n = \frac{3}{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n - \frac{1}{n^3} - 4n^2 + 5}{\frac{3}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - n^2}{3n^3 - 12n^2 + 15}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{1}{n}}{3 - \frac{12}{n} + \frac{15}{n^3}} = 1$$

Oleh karena deret $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen dan berdasarkan bagian (i) maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ juga konvergen.

c. ***Uji hasil bagi (pengujian dengan suku-suku deretnya)***

Teorema 1.10

Misalkan, deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ merupakan deret suku positif dan misalkan $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$.

1) Jika $\rho < 1$ maka deret konvergen.
2) Jika $\rho > 1$ maka deret divergen.
3) Jika $\rho = 1$, pengujian ini tidak bisa digunakan menentukan deret konvergen atau divergen.

Contoh 1.23

1) Selidiki apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ merupakan deret konvergen atau divergen?

Penyelesaian:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} . \frac{n!}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 .$$

Berdasar uji hasil bagi deret maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ merupakan deret konvergen.

2) Selidiki apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^3}$ merupakan deret konvergen atau divergen?

Penyelesaian:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)^3} . \frac{n^3}{5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3}{(n+1)^3} = \lim_{n\to\infty} (\frac{5n^3}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}) = 5$$

Berdasar uji hasil bagi deret maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^{10}}$ merupakan deret divergen.

3) Pandang deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Deret yang pertama, misalkan $a_n = \frac{1}{n}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}.\frac{n}{1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$$

Anda tahu bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ merupakan deret divergen.

Anda perhatikan deret yang kedua misalkan $a_n = \frac{1}{n^2}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}.\frac{n^2}{1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1$$

Sedangkan Anda juga tahu bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ merupakan deret konvergen.

d. *Uji deret ganti tanda*

Misalkan, $< a_n >$ adalah barisan yang semua suku barisannya positif $\left(a_n > 0, \forall n \in N\right)$, monoton turun $\left(a_n > a_{n+1}, \forall n \in N\right)$. Jika $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ maka deret ganti tanda/deret berayun/*alternating series* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ konvergen.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...$$

Misalkan, jumlah bagian deret ganti tanda adalah
$S_n = a_1 - a_2 + a_3 - ... + (-1)^{n+1}a_n$

Untuk n bilangan genap tulis $n = 2m$ sehingga jumlah bagian deret dapat ditulis $S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2m-1} - a_{2m})$ karena barisan $< a_n >$ monoton turun maka $a_1 - a_2, a_3 - a_4, ..., a_{2m-1} - a_{2m}$ semuanya merupakan suku-suku positif yaitu barisan $< S_{2m} >$ monoton naik.

Dapat juga Anda menulis jumlah bagian deret S_{2m} sebagai berikut.

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - ... - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m} < a_1$$

Barisan $< S_{2m} >$ ini terbatas di atas karena

$a_2 - a_3, a_4 - a_5, ..., a_{2m-2} - a_{2m-1}, a_{2m}$ semuanya merupakan suku-suku positif karena barisan $< a_n >$ monoton turun.

Anda perhatikan dari kedua penulisan di atas barisan $< S_{2m} >$ monoton naik dan terbatas di atas. Hal ini Anda ingat kembali pada pembahasan pada barisan bahwa barisan yang monoton naik dan terbatas di atas adalah konvergen. Jadi barisan $< S_{2m} >$ konvergen, yaitu terdapat $S \in R$ sehingga $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2m} = S$.

Sedangkan untuk n bilangan ganjil (Anda dapat menuliskan $n = 2m+1)$) akan ditunjukkan barisan $< S_{2m+1} >$ konvergen.

Anda dapat menuliskan $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2m} + \lim_{n\to\infty} a_{2m+1}$$

Karena $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2m} = S$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2m+1} = 0,$ maka $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2m+1} = S + 0 = S$

Hal ini berarti untuk n bilangan ganjil barisan $< S_{2m+1} >$ konvergen.

Sehingga dapat Anda simpulkan untuk n bilangan ganjil dan n bilangan genap barisan $< S_n >$ konvergen. Hal ini menunjukkan bahwa deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konvergen.

Contoh 1.24

Tunjukkan kekonvergenan deret ganti tanda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} . \frac{1}{n}$

Penyelesaian:

Deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} . \frac{1}{n}$ dapat ditulis sebagai $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} . a_n$ dengan $a_n = \frac{1}{n}$.

Ditunjukkan barisan $< a_n >$ monoton turun dan limitnya adalah 0.

Oleh karena $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n}{n+1} < 1$ maka $a_{n+1} < a_n, \forall n \in N$ ini menunjukkan barisan $< a_n >$ monoton turun. Perhatikan pula bahwa semua suku-suku barisannya positif dan $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$. Jadi deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} . \dfrac{1}{n}$ konvergen.

Definisi 1.9

Deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ disebut konvergen mutlak jika deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergen dan disebut konvergen bersyarat jika $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergen.

Contoh 1.25

Tunjukkan bahwa deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} . \dfrac{1}{n}$ konvergen bersyarat.

Penyelesaian:

Anda tahu bahwa dari contoh di atas deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} . \dfrac{1}{n}$ konvergen, sedangkan deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \dfrac{1}{n} \right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ deret divergen.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Tentukan limit deret geometri $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{9} (\dfrac{1}{3})^{n-1}$!

2) Periksa apakah deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ merupakan deret konvergen/divergen?

3) Selidiki apakah $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ merupakan deret konvergen/divergen?

4) Periksa kekonvergenan deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2 \sqrt{n}}$ dan sebutkan uji kekonvergenan deret yang digunakan!

5) Periksa apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1} + 1}$ merupakan deret konvergen/divergen?

6) Periksa apakah deret $\sum_{i=1}^{n} \frac{(2n)!}{n!\, n!}$ merupakan deret konvergen/divergen?

7) Tunjukkan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} . \frac{1}{n^2}$ konvergen mutlak!

Petunjuk Jawaban Latihan

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9} (\frac{1}{3})^{n-1} = \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + ...$

deretnya merupakan deret geometri dengan $a = \frac{1}{9}, r = \frac{\frac{1}{27}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ karena

$|r| < 1$ maka deret konvergen dan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9} (\frac{1}{3})^{n-1} = \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{6}$

2) Misalkan, $a_n = (-1)^{n+1}$ maka $\lim_{n \to \infty} a_n$ tidak ada.

3) Misalkan,

$$a_n = \frac{1}{2^n - 1}, \text{ dan } b_n = \frac{1}{2^n}, \text{ maka } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - (\frac{1}{2^n})} = 1,$$

selanjutnya digunakan uji banding limit dengan deret lain.

Oleh karena $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 > 0$ dan deret $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ juga Konvergen.

4) Misalkan, $a_n = \frac{n+3}{n^2\sqrt{n}}$, dan $b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+3}{n^2\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}}{1} = 1 > 0$$

Maka, deret konvergen dengan uji banding limit.

5) Oleh karena $\frac{1}{3^{n-1}+1} < \frac{1}{3^{n-1}}$, dan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$ merupakan deret konvergen, selanjutnya digunakan uji banding dengan deret lain. Jadi, deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}+1}$ merupakan deret konvergen.

6) Untuk memeriksanya digunakan uji banding.

Misalkan, $a_n = \frac{2n!}{n!n!}$, $a_{n+1} = \frac{2(n+1)!}{(n+1)!(n+1)!}$ dan $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4$

karena $\rho > 1$ maka deret $\sum_{i=1}^{n} \frac{(2n)!}{n!n!}$ divergen.

7) Deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ disebut konvergen mutlak jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergen.

Oleh karena $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1}.\frac{1}{n^2}\right| = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1}.\frac{1}{n^2}\right|$ adalah deret konvergen.

Jadi, deret $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.\frac{1}{n^2}$ konvergen mutlak.

RANGKUMAN

Dari uraian tentang deret tak hingga, Anda dapat merangkum sebagai berikut.

1. Pengertian Deret

Definisi

Misalkan, $< a_n >$ suatu barisan.

Penjumlahan $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ dari semua

Suku-suku barisan $< a_n >$ ditulis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ disebut deret tak hingga.

Definisi

Misalkan, $< a_n >$ suatu barisan dan

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$. Maka, $< S_n >$

disebut barisan jumlah bagian dari deret tak hingga $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Bilangan a_n disebut suku ke-n dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan S_n disebut jumlah bagian ke-n dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Limit suatu deret

   Misalkan, S_n jumlah bagian ke-n dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Jika barisan $< S_n >$ konvergen atau $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ maka S disebut sebagai limit suatu deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan ditulis $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3. Kekonvergenan suatu Deret
   Definisi

   Deret tak hingga $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dikatakan konvergen jika $< S_n >$ barisan dari jumlah bagiannya konvergen.

   Deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dikatakan divergen jika $< S_n >$ yaitu barisan dari jumlah bagiannya divergen.

Untuk mengetahui suatu deret konvergen atau divergen, Anda dapat menguji kekonvergenan deret sebagai berikut.

a. Uji banding dengan deret lain

Teorema

Misalkan, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ adalah deret dengan suku-suku positif

i) Jika $a_n \le b_n, \forall n \in N$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ juga konvergen.

ii) Jika $a_n \geq b_n, \forall n \in N$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergen maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ juga divergen.

Dalam hal ini jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ didominasi oleh deret $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yang konvergen maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen. Sebaliknya jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mendominasi deret $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yang divergen maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen.

b. Uji banding limit dengan deret lain

Teorema

Misalkan, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ adalah deret dengan suku-suku positif $\left(a_n \geq 0 \text{ dan } b_n \geq 0, \forall n \in N\right)$.

i) Jika $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L, L > 0$ maka kedua deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ bersama-sama konvergen atau divergen.

ii) Jika $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ dan deret $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ juga konvergen.

iii) Jika $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$ dan deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergen maka deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ juga divergen.

c. *Uji hasil bagi (pengujian dengan suku-suku deretnya)*

Teorema

Misalkan, deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ merupakan deret suku positif dan misalkan $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$.

i) Jika $\rho < 1$ maka deret konvergen.

ii) Jika $\rho > 1$ maka deret divergen.

iii) Jika $\rho = 1$, pengujian ini tidak bisa digunakan menentukan deret konvergen atau divergen.

4. *Uji deret ganti tanda*

Misalkan, $< a_n >$ adalah barisan yang semua suku barisannya positif $\left(a_n > 0, \forall n \in N\right)$, monoton turun $\left(a_n > a_{n+1}, \forall n \in N\right)$. Jika $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ maka deret ganti tanda/deret berayun/*alternating series* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konvergen.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

Suatu deret dapat Anda lihat juga nilai mutlak dari suku-sukunya.

Definisi

Deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ disebut konvergen mutlak jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergen dan disebut konvergen bersyarat jika $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergen.

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ adalah ….
   A. konvergen ke 0
   B. konvergen ke $\frac{1}{2}$
   C. konvergen ke 1
   D. divergen

2) Deret $\sum (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$ adalah deret yang ….
   A. konvergen ke 0
   B. konvergen ke 1
   C. konvergen ke $\frac{1}{2}$
   D. divergen

3) Limit dari deret geometri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5}{4^n}$ adalah ….
   A. $-\frac{1}{4}$
   B. –1
   C. 0
   D. 1

4) Deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7-2n}$ adalah ….

A. konvergen ke $-\frac{1}{2}$

B. konvergen ke $\frac{1}{7}$

C. konvergen ke $-\frac{1}{7}$

D. divergen

5. Deret geometri $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}}$ adalah konvergen ke ….

A. $-\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $-\frac{2}{3}$

6) Deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n-1}$ adalah ….

A. konvergen ke $\frac{2}{3}$

B. konvergen ke 2

C. konvergen ke –1

D. divergen

7) Deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dengan $a_n = \frac{4n^3 + 3n}{n^5 - 4n^2 + 1}$ adalah deret konvergen dengan uji banding limit dengan b_n sama dengan ….

A. $\frac{4}{n^2}$

B. $\frac{4}{n^3}$

C. $\frac{3}{n^4}$

D. $\frac{3}{n^5}$

8) Deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$ dengan uji hasil bagi diperoleh ....

A. deret konvergen dengan $\rho = 2$
B. deret konvergen dengan $\rho = 2$
C. deret divergen dengan $\rho = 2$
D. deret divergen dengan $\rho = 2$

9) Deret $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2})$ dengan uji banding diperoleh ....

A. konvergen ke 0
B. konvergen ke –1
C. konvergen ke 1
D. divergen

10) Deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + 2n + 1}$ adalah merupakan deret ....

A. konvergen absolut
B. konvergen bersyarat
C. konvergen
D. divergen

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 3. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) B Bagi pembilang dan penyebut dalam $a_n = \dfrac{7n^2 - 5n}{3n^2 + 11}$ dengan n^2.

2) A $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{(-1)^n}{n^2} + 5)$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} = 0$.

3) B $0 \le \dfrac{\cos n}{n} \le \dfrac{1}{n}$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ dengan teorema apit maka $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n} = 0$.

4) B $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{1-2n-2} - \dfrac{1}{1-2n} = \dfrac{2}{-1+4n^2} > 0$, yaitu $a_{n+1} > a_n$.
   Jadi, barisan $< a_n >$ monoton naik.

5) C $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{3(n+1)+1}{(n+1)+1} \cdot \dfrac{n+1}{3n+1} = \dfrac{3n^2 + 7n + 4}{3n^2 + 7n + 2} > 1$.
   Jadi, barisan $< a_n >$ monoton naik.

6) C $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$, barisannya adalah $2 = \dfrac{2^1}{1!}, \dfrac{2^2}{2!}, \ldots$
   Sehingga barisan $< a_n >$ terbatas di bawah oleh 2.

7) C Pembilang dan penyebut dari $a_n = \dfrac{11 + 5n}{n^7}$ dibagi dengan n^7.
   Sehingga $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{11}{n^7} + \dfrac{5n}{n^7}}{1} = \dfrac{0}{1} = 0$

8) D Oleh karena $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$ maka barisannya adalah $-\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{3}{4}, \ldots$, yaitu beroskilasi sehingga $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$ tidak ada.
   Jadi, barisan $< a_n >$ divergen.

9) B Ditunjukkan untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $K \in N$ sehingga $\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n} - 0\right| < \varepsilon$, untuk setiap $n \geq K$. Oleh karena $\varepsilon > 0$ maka $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ dan pilih $K > \frac{1}{\varepsilon}$.

10) C Ditunjukkan untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $K \in N$ sehingga

$$\left|\frac{(n-1)}{n} - 1\right| = \left|\frac{n-1-n}{n}\right| = \left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{K} < \varepsilon \text{, untuk setiap } n \geq K.$$

Oleh karena $\varepsilon > 0$ maka $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ dan pilih $K > \frac{1}{\varepsilon}$.

Tes Formatif 2

1) D Jumlah bagian deret adalah $S_n = \sum_{k=1}^{n} (\frac{k+1}{k}) = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + ... + \frac{n+1}{n}$

Setiap sukunya lebih besar dari 1 sehingga $\frac{n+1}{n} > n$

Jadi, $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ yaitu deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ adalah divergen.

2) B Jumlah bagian deret adalah

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + ... + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Jadi, $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1$

3) B Deret geometri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5}{4^n} = -\frac{5}{4} + \frac{5}{16} - \frac{5}{64} + ...$ adalah deret geometri dengan $a = -\frac{5}{4}, r = -\frac{1}{4}$ maka deret konvergen ke $\frac{a}{1-r} = -1$.

4) D Dapat menggunakan uji banding

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)}{7-2(n+1)} . \frac{(7-2n)}{n} > 1$$

5) C Deret $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+...$

Deret geometri dengan $a=1, r=-\frac{1}{2}$ maka deret $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}$ konvergen ke $\frac{a}{1-r}=\frac{2}{3}$.

6) D Deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3n-1}$ divergen karena $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n-1}=\frac{2}{3}\neq 0$.

7) A $a_n=\frac{4n^3+3n}{n^5-4n^2+1}$, misalkan $b_n=\frac{4}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n^3+3n)n^2}{(n^5-4n^2+1)\ .4}=1>0$ karena $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ konvergen maka dengan uji banding limit deret $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ dengan $a_n=\frac{4n^3+3n}{n^5-4n^2+1}$ juga konvergen.

8) C Deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^3}$ divergen dengan uji hasil bagi

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)^3}.\frac{n^3}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3}{n^3+3n^2+3n+1}=2$$

9) D Misalkan, $a_n=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ karena $2n\geq 2\sqrt{n}\geq\sqrt{2n+1}$

maka $\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\geq\frac{1}{2n}$. Selanjutnya, misalkan $b_n=\frac{1}{2n}$ dan karena deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ divergen maka dengan uji banding deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ divergen.

10) A Ditunjukkan deret $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+2n+1}\right|$ konvergen. Oleh karena

$\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2+2n+1}\right| = \dfrac{1}{n^2+2n+1}$, $\dfrac{1}{n^2+2n+1} < \dfrac{1}{n^2}$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ merupakan deret konvergen.

Daftar Pustaka

Martono. (1999). *Kalkulus.* Jakarta: Erlangga.

Purcell, Varberg. (2001). *Calculus and Analytic Geometry*. 7th Ed. New York: Prentice-Hall (Terjemahan oleh I Nyoman Susila).

Salas, Hill. (1990). *Calculus One and Several Variables*. New York: Jhon Wiley and Sons.

Thomas, Finney. (1996). *Calculus and Analytic Geometry*. 9th Ed. New York: Addison-Wesley.

Wasan and Prakash. (1985). *Real Analysis*. New Delhi: MC Graw Hill Publishing Company Limited.