Bilangan Kompleks

Anwar Mutaqin
Program Studi Pendidikan Matematika UNTIRTA

DAFTAR ISI

BAB 1

BILANGAN KOMPLEKS

1.1 Eksistensi Bilangan Kompleks

Perhatikan persamaan kuadrat berikut

$$x^2 + 1 = 0!$$

Persamaan kuadrat tersebut tidak memiliki solusi bilangan real. Dalam hal ini solusinya adalah $x = \pm\sqrt{-1}$. Jelas $\sqrt{-1}$ bukan bilangan real karena tidak ada bilangan real yang kuadratnya sama dengan -1. Serupa dengan hal tersebut, persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dengan $a \neq 0$, tidak memiliki solusi bilangan real jika $D = b^2 - 4ac < 1$. Sebagai contoh $x^2 - 2x + 5 = 0$, dengan rumus abc seperti yang telah dipelajari sejak SMA, solusinya adalah

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

Dalam hal ini, persamaan kuadrat tersebut tidak memiliki solusi dalam sistem bilangan real.

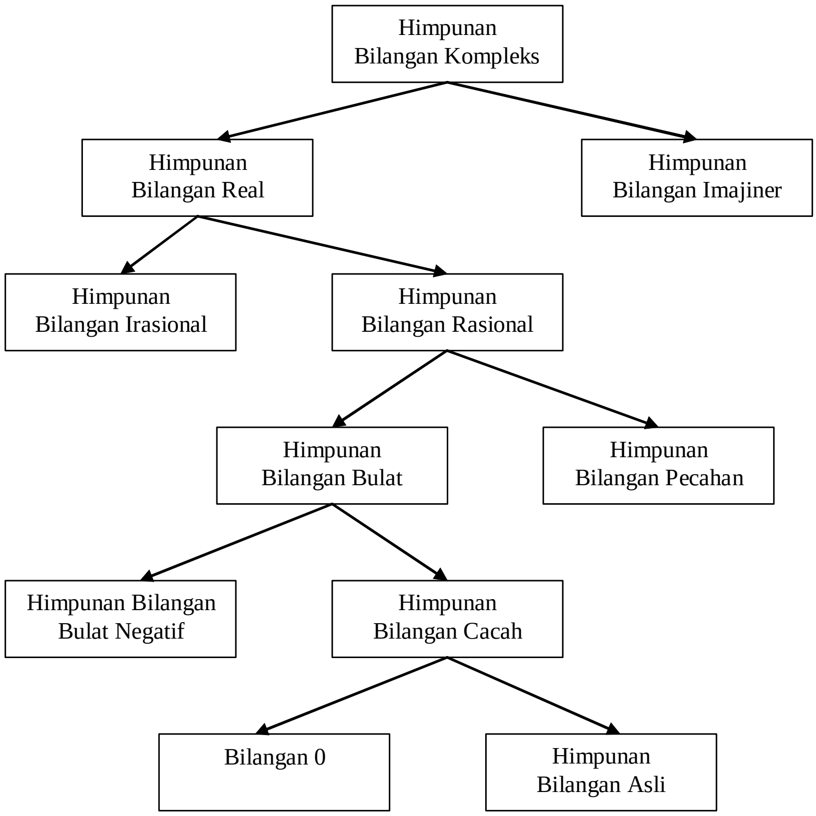
Agar setiap persamaan kuadrat memiliki solusi, kita perlu memperluas sistem bilangan. Sistem bilangan yang dimaksud adalah sistem bilangan kompleks. Lihat kembali solusi persamaan kuadrat di atas! Dalam solusi tersebut terdapat akar bilangan negatif (jelas, akar bilangan negatif bukan bilangan real). Setiap bilangan yang bukan bilangan real disebut bilangan imajiner dengan notasi $\mathbb{R}^c$ (komplemen dari $\mathbb{R}$). Anggota bilangan imajiner adalah semua akar bilangan real negatif bersama negatifnya.

Selanjutnya, untuk memudahkan dalam penulisan, didefinisikan $i = \sqrt{-1}$. Jadi, $\sqrt{-16} = \sqrt{16}\sqrt{-1} = 4i$. Dengan cara serupa, $\sqrt{-20} = 2\sqrt{5}i$, $\sqrt{-27} = 3\sqrt{3}i$, dan lain-lain. Dengan demikian, bilangan imajiner adalah bilangan yang dapat ditulis sebagai bi dengan $0 \neq b \in \mathbb{R}$.

Selain bilangan real, kita telah memiliki jenis bilangan lain, yaitu bilangan imajiner. Gabungan bilangan real dan bilangan imajiner membentuk bilangan kompleks dengan notasi $\mathbb{C}$. Himpunan bilangan kompleks ditulis

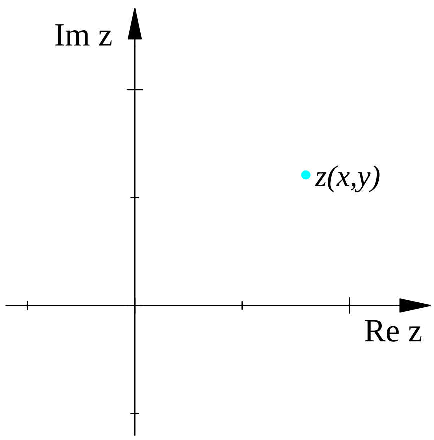
$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\},$$

dengan a adalah bagian real dan b bagian imajiner. Hubungan antar himpunan bilangan dapat pada bagan 1 .



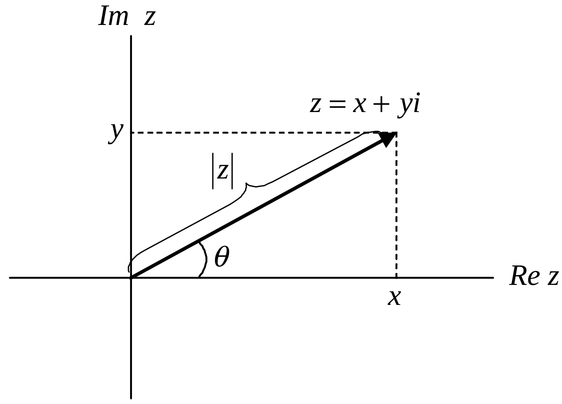
Bagan 1

Bilangan kompleks dinyatakan dalam bentuk $z = x + yi$ atau dapat dipandang sebagai pasangan terurut $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Jika bilangan real dapat ditempatkan pada garis lurus, maka bilangan kompleks ditempatkan pada bidang $\mathbb{R}^2$ atau dalam hal ini disebut bidang kompleks (lihat grafik 2).



Grafik 2

Untuk selanjutnya, penyajian bilangan kompleks dalam bidang kompleks dapat dipandang sebagai vektor di $\mathbb{R}^2$ (Lihat Grafik 3). Hal ini mempermudah dalam interpretasi secara geometris.



Grafik 3

Lihat kembali persamaan kuadrat di atas, solusi $x^2 + 1 = 0$ adalah $\{-i, i\}$ dan solusi $x^2 - 2x + 5 = 0$ adalah $\{1 - 2i, 1 + 2i\}$. Secara umum, kita selalu dapat mencari solusi persamaan polinom

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

dengan $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$ dan $a_n \neq 0$. Pernyataan tersebut dikenal sebagai Teorema Dasar Aljabar yang dibuktikan pertama kali oleh Gauss.

Soal-Soal

1. Tentukan solusi dari persamaan kuadrat berikut:

   a. $x^2 - 4x + 8 = 0$

   b. $x^2 - x + 7 = 0$

2. Ubahlah akar bilangan negatif berikut dalam bentuk yi dengan y bilangan real!

   a. $\sqrt{-27}$

   b. $\sqrt{-12}$

   c. $\sqrt{-64}$

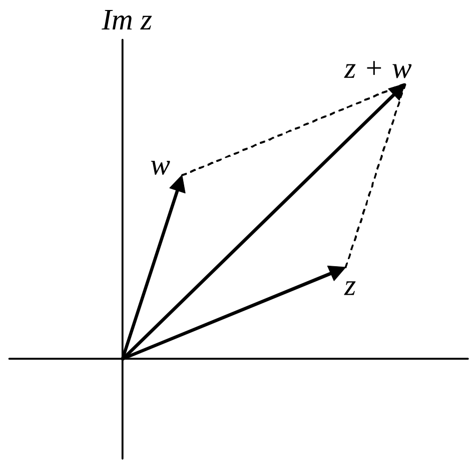
3. Apakah bilangan imajiner memenuhi sifat lapangan? Jelaskan!

1.2 Operasi Aritmatika

Sebagaimana halnya pada sistem bilangan real, perlu didefinisikan operasi aritmatika bilangan kompleks. Misalkan $z = x + yi$ dan $w = u + vi$, penjumlahan dan pengurangan bilangan kompleks didefinisikan sebagai

$$z \pm w = (x \pm u) + (y \pm v)\, i.$$

Penjumlahan dua bilangan kompleks serupa dengan penjumlahan dua buah vektor. Secara grafik



Grafik 4

Perkalian bilangan kompleks sebagai berikut

$$\begin{aligned} z.w &= (x+yi)\,.\,(u+vi) \\ &= xu + xvi + yiu + yvi^2 \\ &= xu + xvi + uyi + (-1)\,yv \\ &= (xu - yv) + (xv + uy)\,i. \end{aligned}$$

Pembagian dua buah bilangan kompleks seperti merasionalkan penyebut

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{x+yi}{u+vi} \times \frac{u-vi}{u-vi} \\ &= \frac{(xu+yv) - (xv-uy)\,i}{u^2+v^2} \\ &= \frac{(xu+yv)}{u^2+v^2} + \frac{(-xv+uy)}{u^2+v^2} i. \end{aligned}$$

Dalam bentuk pasangan terurut, penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian adalah berturut-turut

$$\begin{aligned} z \pm w &= (x,y) \pm (u,v) \\ &= (x \pm u, y \pm v) \\ z.w &= (x,y)\,.\,(u,v) \\ &= (xu - yv, xv + uy) \\ \frac{z}{w} &= \frac{(x,y)}{(u,v)} \\ &= \left(\frac{xu+yv}{u^2+v^2}, \frac{(-xv+uy)}{u^2+v^2} \right). \end{aligned}$$

1.3 Sifat Aljabar

Dengan definisi operasi aritmatika seperti di atas, bilangan kompleks membentuk lapangan (Field). Sifat Lapangan bilangan kompleks adalah sebagai berikut:

Teorema 1.1 (Sifat Lapangan Bilangan Kompleks)
Misalkan $z_1, z_2,$ *dan* $z_3 \in \mathbb{C}$, *maka*

1. $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$
2. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
3. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
4. *Terdapat* $0 \in \mathbb{C}$ *sehingga* $z + 0 = z$ *untuk setiap* $z \in \mathbb{C}$.
5. *Untuk setiap* $z \in \mathbb{C}$ *terdapat* $-z$ *sehingga* $z + (-z) = 0$
6. $z_1.z_2 \in \mathbb{C}$
7. $z_1.z_2 = z_2.z_1$
8. $(z_1.z_2).z_3 = z_1.(z_2.z_3)$
9. *Terdapat* $1 \in \mathbb{C}$ *sehingga* $z.1 = z$ *untuk setiap* $z \in \mathbb{C}$.
10. *Untuk setiap* $0 \neq z \in \mathbb{C}$ *terdapat* z^{-1} *sehingga* $zz^{-1} = 0$ *(dalam hal ini* $z^{-1} = \frac{1}{z}$*)*
11. $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$.

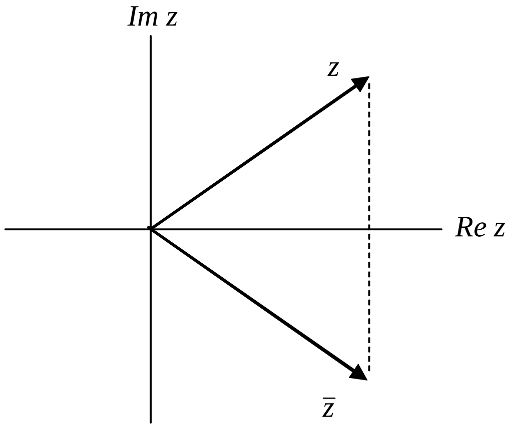
Bukti. diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. ■
Dalam bilangan kompleks tidak berlaku sifat urutan. Dua buah bilangan kompleks tidak dapat dibandingkan dengan tanda pertidaksamaan. Secara umum tanda pertidaksamaan ($<, \leq, >$, dan $\geq$) tidak memiliki arti. Sifat kelengkapan didefinisikan dengan kekonvergenan bilangan Cauchy di bidang kompleks.

Soal-Soal

Buktikan sifat lapangan bilangan kompleks!

1.4 Kojugate dan Modulus

Salah satu komponen yang penting dalam bilangan kompleks adalah konjugate (*sekawan*). Konjugate bilangan kompleks $z = x+yi$ adalah $\overline{z} = x-yi$. Konjugate $\overline{z}$ tidak lain adalah pencerminan z terhadap sumbu $\operatorname{Re} z$. Secara grafik dapat dilihat sebagai berikut



Grafik 5

Beberapa sifat dasar tentang Konjugate adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}\overline{\overline{z}} &= z \\ \overline{z \pm w} &= \overline{z} \pm \overline{w}\ , \qquad \overline{zw} = \overline{z}\overline{w}, \qquad \text{dan } \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}} \\ \operatorname{Re} z &= \frac{z+\overline{z}}{2}, \text{ dan } \operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}\end{aligned}$$

Pembaca dapat membuktikan sifat-sifat dasar tersebut sebagai latihan. Bilangan real z dalam $\mathbb{C}$ dapat dikenali dengan sifat $\overline{z} = z$. Sebuah bilangan imajiner (murni) berarti $\operatorname{Re} z = 0$, atau tepatnya $\overline{z} = -z$.

Modulus $|z|$ dari $z = x + yi$ didefinisikan sebagai $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Buku lain menggunakan istilah *magnitude* atau *nilai mutlak*. Sebagai contoh, $|-3 + 4i| = 5$. Jelaslah $|z|$ memberikan arti panjang vektor yang berkorespondensi dengan z (lihat kembali grafik 3). Secara umum, $|z - w|$ adalah jarak antara dua titik yang merepresentasikan z dan w di bidang. Sifat-sifat modulus terangkum dalam teorema berikut.

Teorema 1.2
Misalkan $z, w \in \mathbb{C}$, maka

a. $|z| = |\overline{z}|$ *dan* $z\overline{z} = |z|^2$;

b. $|zw| = |z|\,|w|$ *dan* $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$;

c. $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ *dan* $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$;

d. $|z \pm w| \leq |z| + |w|$;

e. $|z - w| \geq ||z| - |w||$.

Bukti. Hanya akan disajikan bukti untuk bagian b dan d, sisanya diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. Berdasarkan bagian a dan sifat konjugate,

$$\begin{aligned}|zw|^2 &= (zw)\,\overline{(zw)} = (zw)\,(\overline{z}\overline{w}) = (z\overline{z})\,(w\overline{w}) \\ &= |z|^2\,|w|^2 .\end{aligned}$$

Jadi $|zw| = |z|\,|w|$. Selanjutnya untuk bagian d (d dan e dikenal juga sebagai ketaksamaan segitiga)

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\,\overline{(z+w)} = (z+w)\,(\overline{z}+\overline{w}) \\ &= z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} \\ &= |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2\,|z|\,|w| + |w|^2 \\ &= (|z| + |w|)^2 . \end{aligned}$$

Jadi,

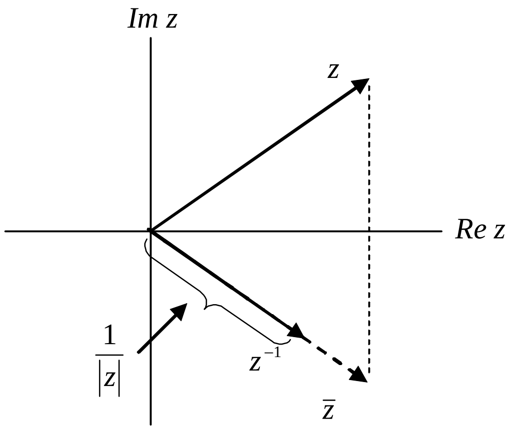
$$|z+w| \leq |z| + |w| .$$

Selanjutnya, $|z-w| = |z+(-w)| \leq |z| + |-w| = |z| + |w|$. ■

Perhatikan bahwa jika $z \neq 0$, maka

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Secara Khusus, $z^{-1} = \overline{z}$ jika $|z| = 1$. Hal ini memberikan perbandingan secara grafis antara z^{-1} dan z. Grafik berikut menunjukkan z^{-1} dalam arah $\overline{z}$ dan memiliki modulus $\frac{1}{|z|}$.



Grafik 6

Soal-Soal

1. Buktikan teorema 1.2!

2. Gambarkan dalam grafik secara vektor bilangan kompleks berikut!

   (a) $-2i$

   (b) $3-4i$

   (c) $2+\pi i$

3. Tunjukkan dengan menggunakan sifat konjugat dan modulus!

   a. $4-3i =$

1.5 Bentuk Polar dan Rumus Euler

Selanjutnya bilangan kompleks $z \neq 0$ dapat ditulis dalam bentuk polar

$$z = |z|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right),$$

atau disingkat $z = |z|\ cis\ \theta$,dengan θ adalah bilangan real. Jika $z = x + yi$, kita dapat memilih sebarang θ yang memenuhi

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|} \text{ dan } \sin\theta = \frac{y}{|z|}.$$

Sebagai contoh $1 + i$ dapat ditulis dalam bentuk polar

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Contoh-contoh lain:

$$\begin{aligned} 3 - 3i &= 3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ -1 + \sqrt{3}i &= 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right), \end{aligned}$$

dan lain-lain.

Setiap bilangan real θ yang memenuhi $z = |z|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$ disebut argumen. Secara geometris, θ (dalam radian) adalah besarnya sudut dari sumbu $\operatorname{Re} z$ positif dalam arah berlawanan jarum jam sampai dengan vektor (yang berkorepondensi dengan) z dalam bidang kompleks. Notasi $\arg z$ digunakan untuk menyatakan himpunan semua argumen z. Sedangkan $Arg\ z$ menyatakan argumen utama z. Dalam buku ini digunakan argumen utama $-\pi < Arg\ z \leq \pi$(Beberapa buku menggunakan argumen utama $0 \leq Arg\ z < 2\pi$).

Contoh 1.1

1. $\arg(1 + i) = \left\{\frac{1}{4}\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$, *sedangkan* $Arg\,(1 + i) = \frac{\pi}{4}$.
2. $\arg\left(3\sqrt{3} - 3i\right) = \left\{\frac{11}{6}\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$, *sedangkan* $Arg\left(3\sqrt{3} - 3i\right) = -\frac{1}{6}\pi$.

Dalam bentuk polar, perkalian bilangan kompleks tak nol menjadi lebih mudah. Misalkan $z = |z|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$ dan $w = |w|\left(\cos\phi + i\sin\phi\right)$, maka

$$\begin{aligned} zw &= |z|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)|w|\left(\cos\phi + i\sin\phi\right) \\ &= |z|\,|w|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)\left(\cos\phi + i\sin\phi\right) \\ &= |z|\,|w|\left[\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi + \left(\cos\theta\sin\varphi + \cos\theta\sin\varphi\right)i\right] \\ &= |z|\,|w|\left[\cos\left(\theta + \phi\right) + i\sin\left(\theta + \phi\right)\right]. \end{aligned}$$

Jadi, zw adalah bilangan kompleks dengan modulus $|z|\,|w|$ dan $\theta + \phi$ sebagai salah satu argumennya.

Selanjutnya pembagian bilangan kompleks menjadi

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{|z|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)}{|w|\left(\cos\phi + i\sin\phi\right)} \\ &= \frac{|z|}{|w|}\left[\cos\left(\theta - \phi\right) + i\sin\left(\theta - \phi\right)\right]. \end{aligned}$$

Sebagai implikasi dari perkalian bilangan kompleks, maka $z^2 = |z|^2 [\cos(2\theta) + i \sin(2\theta)]$. Bagaimana halnya dengan z^n untuk sebarang n bilangan bulat? Dengan memanfaatkan rumus de Moivre

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

untuk setiap bilangan real θ dan sebarang n bilangan bulat, maka dengan mudah kita dapatkan

$$z^n = |z|^n [\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$$

untuk sebarang n bilangan bulat.

Selain bentuk polar, bilangan kompleks dapat ditulis dalam rumus Euler. Ingat kembali pada mata kuliah kalkulus ekspansi deret Taylor

$$\begin{aligned}
e^t &= 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \cdots + \frac{1}{n!}t^n + \cdots \\
\sin t &= t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + \cdots \\
\cos t &= 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \cdots
\end{aligned}$$

untuk sebarang bilangan real t. Jika kita substitusi t dengan θi, maka akan kita dapatkan

$$\begin{aligned}
e^{\theta i} &= 1 + \theta i + \frac{1}{2!}(\theta i)^2 + \frac{1}{3!}(\theta i)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(\theta i)^n + \cdots \\
&= 1 + \theta i - \frac{1}{2!}\theta^2 - i\frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 + i\frac{1}{5!}\theta^5 - \cdots \\
&= \left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \cdots\right) \\
&= \cos\theta + i\sin\theta.
\end{aligned}$$

Ini berarti

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z| e^{\theta i}$$

dengan $|z|$ adalah modulus dari z dan $\theta = \arg z$. Sebagai contoh, $1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{1}{4}\pi i}$.

Serupa dengan bentuk polar,

$$\begin{aligned}
zw &= |z||w| e^{(\theta+\phi)i} \\
\frac{z}{w} &= \frac{|z|}{|w|} e^{(\theta-\phi)i} \\
z^n &= |z|^n e^{n\theta i}.
\end{aligned}$$

1.6 Akar Bilangan Kompleks

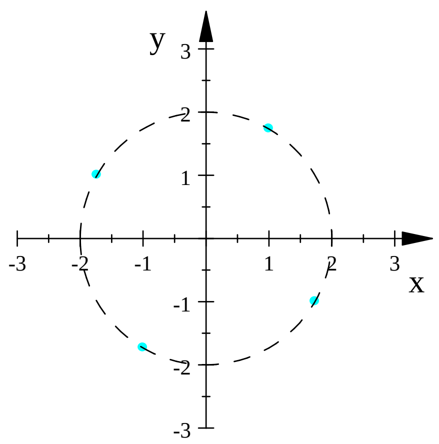
Sebagai akibat dari penyajian bilangan kompleks dalam bentuk polar/euler tidak tunggal, kita dapat mendefinisikan akar pangkat-n dari bilangan kompleks. Berbeda dengan bilangan real, akar pangkat-n bilangan kompleks tidak tunggal yaitu sebanyak n. Akar pangkat-n dari bilangan kompleks z adalah

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)$$

atau dalam rumus Euler

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{\frac{\theta+2\pi k}{n}i}$$

dengan $k = 0, 1 \ldots, n-1$. Secara geometris, akar pangkat-n dari z adalah himpunan n titik di sepanjang lingkaran dengan jari-jari $\sqrt[n]{|z|}$ dan berpusat di $(0,0)$ dan membagi lingkaran tersebut menjadi n bagian yang sama. Berikut ini ilustrasi dari $\sqrt[4]{8 + 8\sqrt{3}i}$



Grafik 7

Akar pangkat-n bilangan kompleks yang diperoleh dari $k = 0$ disebut akar pangkat-n utama. Dalam buku ini, $\sqrt[n]{z}$ berarti akar pangkat-n utama dari z, yaitu

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{Arg\ z}{n} + i\sin\frac{Arg\ z}{n}\right)$$

atau dalam rumus Euler

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{\frac{Arg\ z}{n}i}$$

dengan $k = 0, 1 \ldots, n-1$.

Contoh. Hitunglah $\sqrt[4]{8 + 8\sqrt{3}i}$!
Jawab. $\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi$, $2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$, $2\left(\cos\frac{1}{6}\pi - i\sin\frac{1}{6}\pi\right)$, dan $2\left(\cos\frac{2}{3}\pi - i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$. Setelah dihitung, maka didapat $1 + i\sqrt{3}$, $-\sqrt{3} + 1$, $\sqrt{3} - i$, dan $-1 - \sqrt{3}i$.

Contoh. Hitung $\sqrt[3]{27i}$!
Jawab. $3i$, $-\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i$, dan $\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i$

Contoh. Tentukan Solusi persamaan kuadrat $z^2 - 3z + 3 + i = 0$!
Jawab. $\{1 + i, 2 - i\}$.

1.7 Eksponen dan Logaritma Natural

Tujuan sub bab ini adalah mendefinisikan e^z dan $\ln z$ untuk $z \in \mathbb{C}$ dan sifat-sifat yang diturunkannya. Kita tulis $z = x + yi$ dan hasil dari ekspansi deret Taylor untuk $e^{iy} = \cos y + i \sin y$. Salah satu sifat eksponen natural untuk bilangan real adalah $e^{s+t} = e^s e^t$. Sifat ini kita anggap berlaku untuk bilangan kompleks yaitu, $e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi}$. Jadi,

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Notasi lain untuk e^z adalah $\exp(z)$, khususnya jika e dipangkatkan dengan $f(z)$, seperti $\exp\left(-\frac{1}{z^2}\right)$. Berikut ini beberapa contoh menghitung e^z:

$$\begin{aligned} e^0 &= 1 \\ e^{\pi i} &= \cos \pi + i \sin \pi = -1 \\ e^{2+4i} &= e^2 (\cos 4 + i \sin 4) \\ e^{1-i} &= e (\cos 1 - i \sin 1). \end{aligned}$$

Berdasarkan definisi, jelas $e^z \neq 0$ untuk setiap $z \in \mathbb{C}$. Sifat-sifat lain yang diturunkan dari definisi adalah

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \arg e^z = \operatorname{Im} z.$$

Lebih lanjut, berdasarkan hukum De Moivre didapat

$$(e^z)^n = e^{nz}$$

untuk setiap bilangan bulat n. Khususnya,

$$(e^z)^{-1} = e^{-z}.$$

Seperti halnya eksponen bilangan real, dalam bilangan kompleks berlaku sifat

$$\begin{aligned} e^z e^w &= e^x (\cos x + i \sin y)\, e^u (\cos v + i \sin v) \\ &= e^{x+u} [\cos (y + v) + i \sin (y + v)] \\ &= e^{z+w}. \end{aligned}$$

Begitu juga

$$e^{z-w} = \frac{e^z}{e^w}.$$

Sifat-sifat lainnya diserahkan kepada pembaca untuk dieksplorasi.

Selanjutnya, bagaimana menentukan solusi $e^{z^2-z} = e^{z+8}$? Untuk menjawab persoalan tersebut atau persamaan eksponen secara umum, kita harus mulai dengan mencari nilai-nilai z yang memenuhi $e^z = 1$. Jika kita tulis $z = x + yi$, maka

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y) = 1.$$

Ini berarti $e^x = 1$, $\cos y = 1$, dan $\sin y = 0$. Hal tersebut akan dipenuhi untuk $x = 0$ dan $y = 2\pi k$ untuk setiap $k \in \mathbb{Z}$. Jadi solusi untuk $e^z = 1$ adalah $\{z = 2\pi ki : k \in \mathbb{Z}\}$.
Berdasarkan hasil tersebut kita dapat mencari solusi persamaan eksponen. Jadi, persoalan persamaan eksponen di atas dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} e^{z^2-z} &= e^{z+8} \\ e^{z^2-2z-8} &= 1. \end{aligned}$$

Dan, solusinya didapat dengan menyelesaikan persamaan

$$z^2 - 2z - 8 = 2\pi ki$$

untuk setiap $k \in \mathbb{Z}$, yaitu $\left\{1 + \sqrt{9 + 2\pi ki}, 1 - \sqrt{9 + 2\pi ki}\right\}$ untuk setiap $k \in \mathbb{Z}$.

Solusi persamaan eksponen $e^z = 1$ ternyata tidak tunggal, yaitu terdapat tak hingga banyak solusi. Demikian pula dengan persamaan $e^w = z$. Solusi persamaan $e^w = z$ disebut logaritma natural z (ditulis $\ln z = w$). Hal ini berarti nilai $\ln z$ tak hingga banyak. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} e^w &= z = |z|\, e^{i \arg z} = e^{\ln|z|} e^{i \arg z} \\ &= e^{\ln|z| + i \arg z}. \end{aligned}$$

Jadi,

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

Logaritma utama (*principal logarithm*) z didapat dengan mengambil argumen utama, yaitu

$$Ln\ z = \ln |z| + i\ Arg\ z.$$

Agar lebih jelas, perhatikan contoh-contoh berikut:

$$\begin{aligned} Ln\ (1+i) &= \ln|1+1| + i\ Arg\ |1+1| = \ln 2 + \frac{\pi}{4} i \\ Ln\ (-4) &= \ln 4 + \pi i \\ Ln\ \left(5 - 5\sqrt{3}i\right) &= \ln 10 - \frac{1}{3}\pi i. \end{aligned}$$

Sedangkan

$$\begin{aligned} \ln\ (1+i) &= \ln 2 + \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) i \\ \ln\ (-4) &= \ln 4 + (\pi + 2\pi k)\, i \\ \ln \left(5 - 5\sqrt{3}i\right) &= \ln 10 + \left(-\frac{1}{3}\pi + 2\pi k\right) i \end{aligned}$$

untuk setiap $k \in \mathbb{Z}$.

1.8 Pangkat Bilangan Kompleks

Cara yang baku untuk mendefinisikan x^y dengan x bilangan real positif dan y sebarang bilangan real adalah dengan rumus $x^y = e^{y \ln x}$. Jika rumus ini kita bawa ke bilangan kompleks, maka $z^w = e^{w \ln z}$. Tetapi, nilai $\ln z$ ada tak hingga banyak, oleh karena itu kita dapat mengambil nilai logaritma utama (*principal logarithm*) untuk mendapatkan nilai utama (*principal value*) dari z^w, yaitu

$$z^w = e^{w.Ln\ z}.$$

Berikut beberapa contoh menghitung nilai utama z^w:

$$\begin{aligned} i^{2\pi i} &= e^{2\pi i.Ln\ i} = e^{2\pi i.\left(\ln 1 + \frac{\pi}{2} i\right)} = e^{-\pi^2} \\ (-1+i)^i &= e^{i.Ln(-1+i)} = e^{i\left(\ln\sqrt{2} + \frac{3}{4}\pi i\right)} = e^{-\frac{3}{4}\pi + i \ln \sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa jika w bilangan bulat, maka akan kembali ke pembahasan di sub bab 1.5 tentang perpangkatan bilangan kompleks dengan bilangan bulat.

BAB 2

FUNGSI KOMPLEKS

2.1 Daerah pada Bidang Kompleks

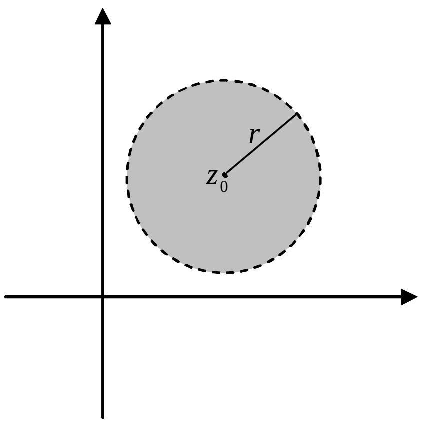
Pada bab ini akan dibahas fungsi bernilai kompleks dengan variabel kompleks. Tetapi sebelumnya terlebih dahulu dibahas beberapa konsep topologi bilangan kompleks. Pembahasan topologi bilangan kompleks hanya menyangkut istilah dan ilustrasi geometris, tanpa analisis lebih dalam. Beberapa hal yang akan dibahas adalah: titik interior, titik eksterior dan titik batas suatu himpunan di bidang kompleks, cakram, himpunan buka, himpunan tutup, closure, himpunan terhubung, dan domain.

Setelah membaca sub bab ini, pembaca diharapkan dapat menyebutkan definisi dan menunjukkan secara geometris istilah-istilah di atas. Kajian lebih mendalam tentang topologi bilangan kompleks dapat dibaca di daftar pustaka [1] atau buku *Elements of Real Analysis* yang ditulis oleh Bartle.

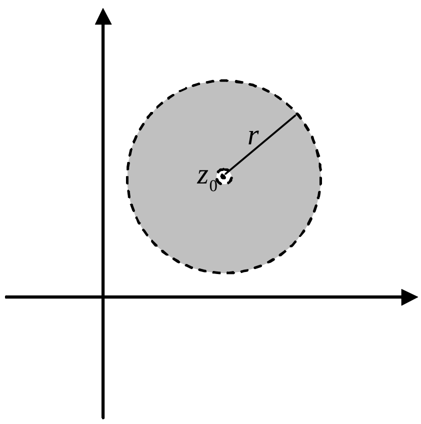
Jika z_0 suatu titik di bidang kompleks dan $0 < r < \infty$, maka

$$\begin{aligned} \triangle(z_0, r) &= \{z : |z - z_0| < r\} \\ \triangle^*(z_0, r) &= \{z : |z - z_0| < r\} - \{z_0\} \\ \overline{\triangle}(z_0, r) &= \{z : |z - z_0| \leq r\} \\ K(z_0, r) &= \{z : |z - z_0| = r\} \end{aligned}$$

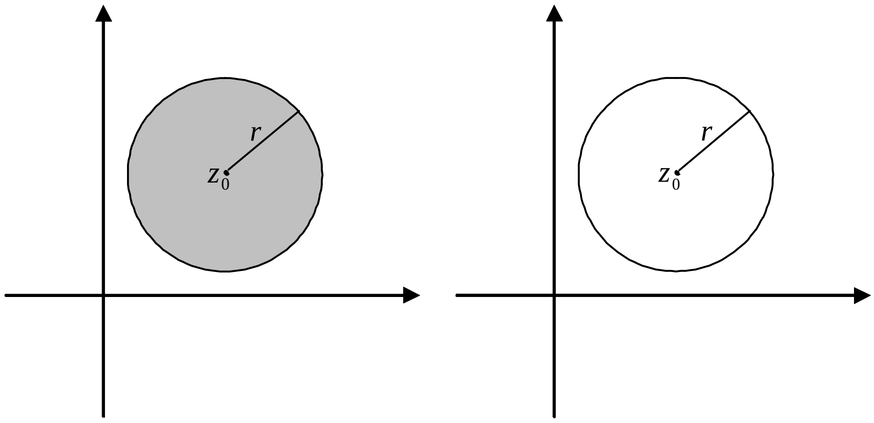
masing-masing disebut cakram buka, cakram buka terhapus, dan cakram tutup dan lingkaran. Titik z_0 disebut pusat dan r adalah jari-jari. Lihat grafik di bawah,



Cakram Buka



Cakram Buka



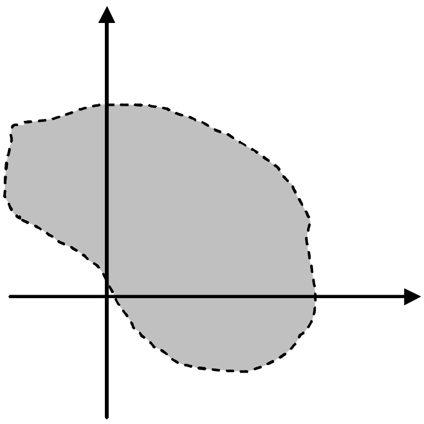
Cakram Tutup Lingkaran

Cakram buka digunakan untuk mendefinisikan titik interior, titik eksterior dan titik batas himpunan.

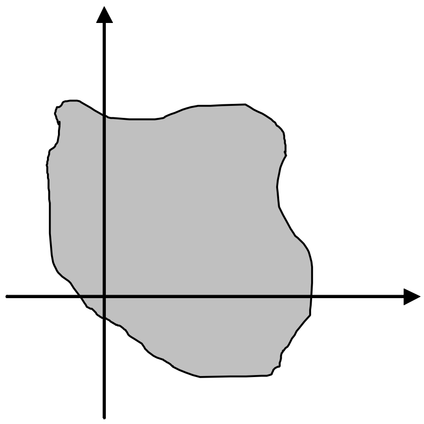
Definisi 2.1
Misalkan $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{C}$.

1. *Titik* $z_0 \in A$ *disebut titik interior* A *jika terdapat* $r > 0$ *sehingga* $\triangle(z_0, r) \subset A$. *Himpunan semua titik interior* A *ditulis* $int(A)$.
2. *Titik* $z_0 \in \mathbb{C}$ *disebut titik eksterior* A *jika terdapat* $r > 0$ *sehingga* $\triangle(z_0, r) \cap A = \emptyset$. *Himpunan semua titik interior* A *ditulis* $ext(A)$.
3. *Titik* $z_0 \in \mathbb{C}$ *disebut titik batas* A *jika setiap* $r > 0$, $\triangle(z_0, r) \cap A \neq \emptyset$ *dan* $\triangle(z_0, r) \cap A^c \neq \emptyset$. *Himpunan semua titik batas* A *ditulis* $\delta(A)$.

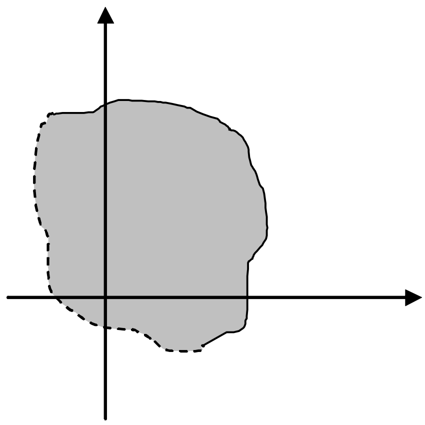
Suatu himpunan $A \subseteq \mathbb{C}$ disebut himpunan buka jika setiap titiknya adalah titik interior A. Berikut ini adalah contoh beberapa himpunan buka: $\triangle(z_0, r)$, $\triangle^*(z_0, r)$, $\{z : |z - z_0| > r\}$, $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, $\{z : |z - 2| + |z + 2| < 6\}$, dan lain-lain. Selanjutnya $A \subseteq \mathbb{C}$ disebut himpunan tutup jika $\mathbb{C} \backslash A$ adalah himpunan buka. Beberapa contoh himpunan tutup adalah $\overline{\triangle}(z_0, r)$, $\{z : \operatorname{Im} z \geq 3\}$, dan lain-lain. Perhatikan contoh-contoh himpunan buka dan himpunan tutup tersebut, batas-batas masing-masing himpunan adalah sebagai berikut: $\delta(\{z : \operatorname{Re} z > 0\}) = \mathbb{R}^c$, $\delta(\{z : |z - z_0| > r\}) = \delta(\{z : |z - z_0| \leq r\}) = K(z_0, r)$, dan lain-lain. Closure suatu himpunan A adalah $\overline{A} = A \cup \delta(A)$. Perhatikan gambar di bawah



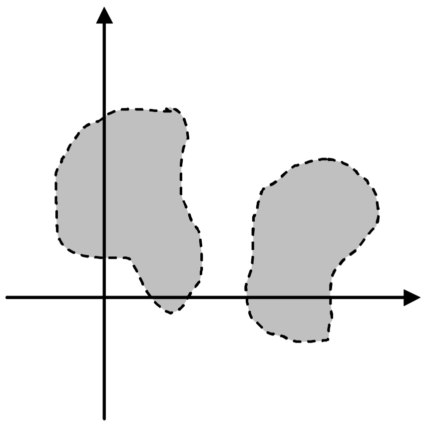
Himpunan Buka Terhubung



Himpunan Tutup



Himpunan Tidak Buka dan Tidak Tutup



Himpunan Buka Tidak Terhubung

Teorema 2.2
Gabungan sebarang koleksi himpunan buka adalah himpunan buka. Irisan koleksi berhingga himpunan buka adalah himpunan buka

Teorema 2.3
Irisan sebarang koleksi himpunan tutup adalah himpunan tutup. Gabungan koleksi berhingga himpunan tutup adalah himpunan tutup.

Teorema 2.4
$\overline{A}$ *dan* $\delta(A)$ *adalah himpunan tutup*

Teorema 2.5
Himpunan A *tutup jika dan hanya jika* $\overline{A} = A$.

Himpunan $A \subseteq \mathbb{C}$ disebut tidak terhubung (*disconnected*) jika terdapat himpunan buka U dan V sedemikian sehingga: (i) $U \cap V = \emptyset$, (ii) $A \cap U \neq \emptyset$ dan $A \cap V \neq \emptyset$, dan (iii) $A \subset U \cup V$. Jika A tidak memenuhi syarat tersebut, maka A

disebut himpunan terhubung. Sedangkan domain adalah himpunan buka yang terhubung.

2.2 Definisi Fungsi

Pada bagian ini dibahas fungsi bernilai kompleks dengan variabel kompleks (selanjutnya cukup disebut fungsi kompleks). Simbol untuk variabel kompleks adalah z, untuk membedakan dengan fungsi bernilai real dengan simbol variabel x. Sebuah fungsi kompleks f adalah aturan yang mengaitkan setiap anggota himpunan A dengan anggota himpunan B (notasi : $f : A \longrightarrow B$). Himpunan A disebut domain fungsi (ingat domain adalah himpunan buka dan terhubung), himpunan B disebut kodomain dan $f(A)$ disebut range. Peta dari z oleh f adalah $f(z)$ (disebut juga nilai fungsi). Dalam hal ini, fungsi yang akan dibahas adalah fungsi dengan domain $A \subset \mathbb{C}$ dan kodomain $\mathbb{C}$. Fungsi kompleks

$$\begin{aligned} f &: A \to \mathbb{C} \\ &: z \longmapsto z^2 \end{aligned}$$

biasanya hanya ditulis $f(z) = z^2$.

Misalkan diketahui fungsi $f : A \to \mathbb{C}$ dan $g : B \to \mathbb{C}$ dan $c \in \mathbb{C}$, maka

$$\begin{aligned} (cf)(z) &= cf(z) \\ (f \pm g)(z) &= f(z) \pm g(z) \\ (f.g)(z) &= f(z).g(z) \end{aligned}$$

dan jika $g(z) \neq 0$, maka

$$\frac{f}{g}(z) = \frac{f(z)}{g(z)}.$$

Domain untuk fungsi-fungsi tersebut adalah $A \cap B$. Selain itu, fungsi kompleks dapat dikomposisikan, yaitu

$$(f \circ g)(z) = f(g(z))$$

asalkan $g(B) \subseteq A$.

Selain dalam variabel bebas z, fungsi kompleks dapat ditulis dalam bentuk

$$f(z) = u(x, y) + v(x, y)\, i$$

dengan $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Berdasarkan hal tersebut, fungsi kompleks dapat dipandang sebagai pemetaan dari $\mathbb{R}^2$ ke $\mathbb{R}^2$, yaitu

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)).$$

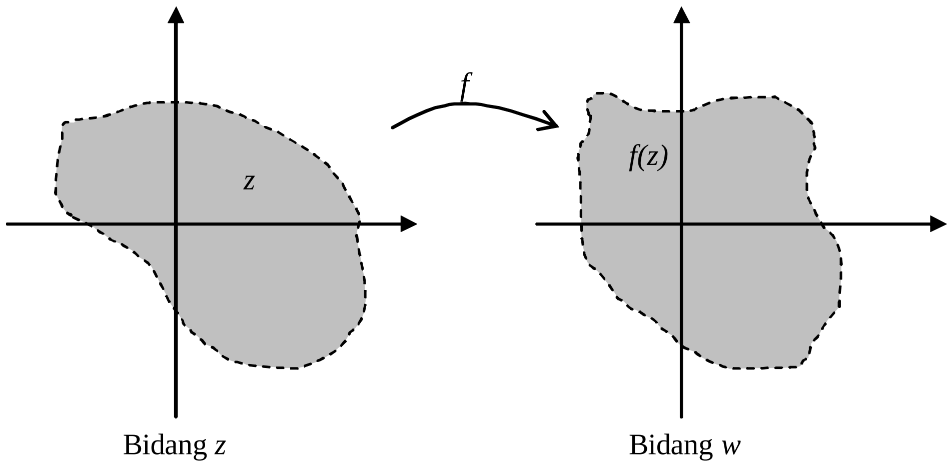
Sebagai contoh, fungsi $f(z) = z^2$ dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} f(z) &= (x + yi)^2 \\ &= x^2 - y^2 + 2xyi \end{aligned}$$

atau sebagai pemetaan dari $\mathbb{R}^2$ ke $\mathbb{R}^2$, yaitu

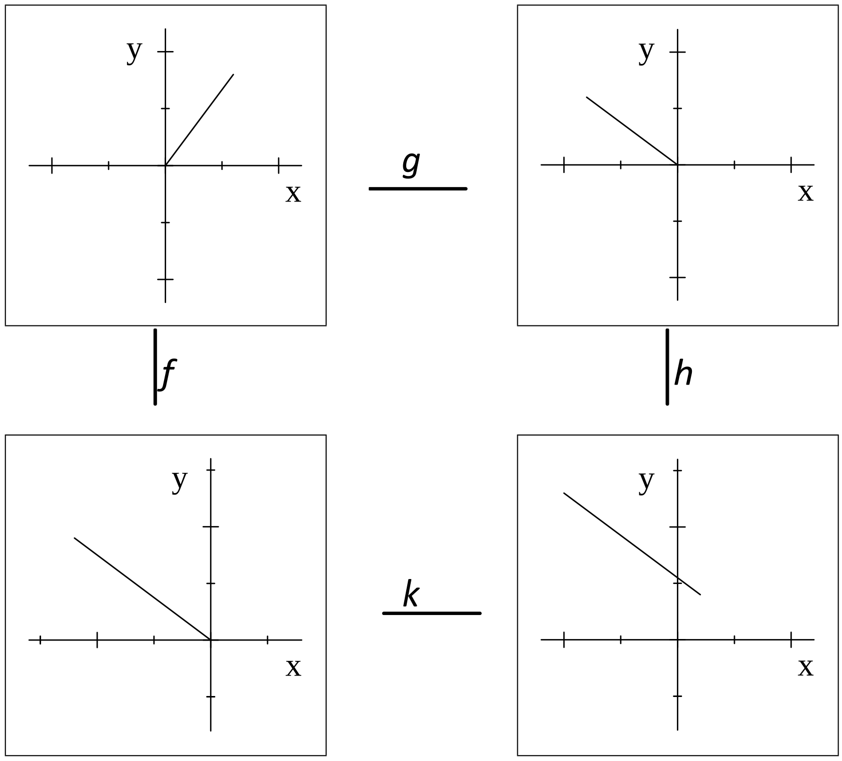
$$f(x, y) = \left(x^2 - y^2, 2xy\right).$$

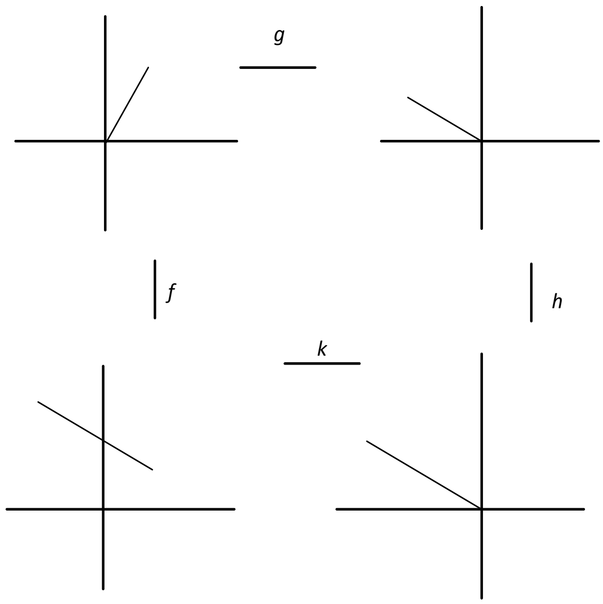
Grafik fungsi kompleks tidak dapat digambar secara utuh dalam sistem koordinat. Hal ini karena untuk menggambar grafik fungsi kompleks diperlukan ruang empat dimensi. Untuk itu, fungsi kompleks dapat dipandang sebagai pemetaan (*mapping*) atau transformasi dari $\mathbb{R}^2$ ke $\mathbb{R}^2$. Daerah domain dinamakan bidang z sedangkan daerah *range* disebut bidang w. Dalam hal ini fungsi kompleks ditulis $w = f(z)$. Grafiknya digambarkan sebagai berikut



Contoh 2.1
Gambarkan fungsi $f(z) = az + b$ *dengan* $a, b \in \mathbb{C}$.

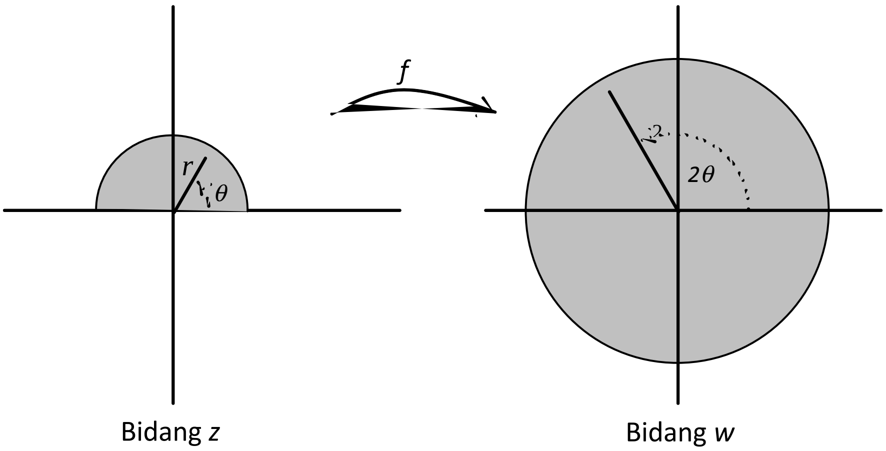
Jawab. Misalkan $g(z) = iz$, $h(z) = |a| z$, dan $k(z) = z + b$, maka $f(z) = (k \circ h \circ g)(z)$. Fungsi g, h, dan k berturut-turut adalah rotasi, dilatasi dan translasi. perhatikan bahwa f mentransformasikan segmen garis sebagai berikut





Contoh 2.2
Gambarkan fungsi $f(z) = z^2$

Jawab. Perhatikan bahwa fungsi tersebut dapat ditulis sebagai $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Misalkan daerah domain berbentuk cakram dengan pusat $(0, 0)$ dan jari-jari r. Batas daerah domain tersebut adalah lingkaran



Fungsi kompleks dapat bernilai majemuk (ingat akar pangkat-n dari bilangan kompleks), oleh karena itu dalam definisi fungsi kata-kata '*secara tunggal*' dihilangkan. Jika untuk setiap anggota domain petanya hanya satu buah, maka disebut fungsi bernilai tunggal. Jika tidak demikian, maka disebut fungsi bernilai majemuk. Sebagai contoh, $f(z) = z^2$ adalah fungsi benilai tunggal, sedangkan $f(z) = z^{\frac{1}{3}}$ adalah fungsi benilai majemuk.

Fungsi bernilai majemuk dapat dipandang sebagai koleksi himpunan fungsi bernilai tunggal. Setiap anggotanya disebut cabang (*branch*) dari fungsi. Pembahasan fungsi benilai majemuk biasanya difokuskan pada satu cabang utama (*principal value*) dari fungsi dan disebut nilai utama (*principal value*). Dalam buku ini jika disebutkan fungsi, maka yang dimaksud adalah fungsi bernilai tunggal kecuali disebutkan secara khusus.

2.3 Limit Fungsi

Limit merupakan salah satu konsep kunci dalam kajian analisis. Sedangkan limit fungsi merupakan konsep masuk untuk kekontinuan fungsi, turunan fungsi, dan integral. Begitu pun halnya dalam fungsi kompleks. Limit fungsi di suatu z_0 menggambarkan perilaku fungsi di sekitar z_0. Secara intuisi kita dapat menghitung limit fungsi kompleks, seperti di kalkulus.

Perhatikan contoh-contoh berikut:

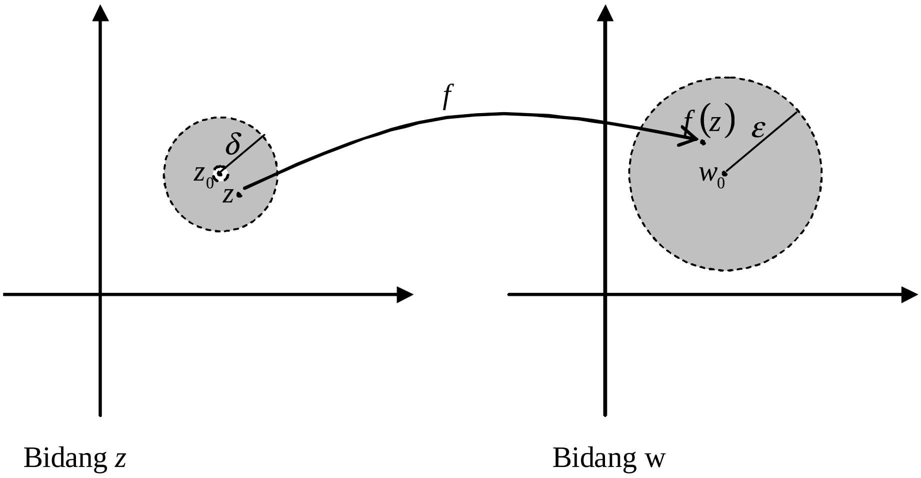
1. $\lim\limits_{z \to 2-3i} (3z + 4 - i) = 3(2 - 3i) + 4 - i = 10 - 10i$

2. $\lim\limits_{z \to \pi i} z^2 = (\pi i)^2 = -\pi^2$

3. $\lim\limits_{z \to 2i} \frac{z^2+4}{z-2i} = \lim\limits_{z \to 2i} \frac{(z-2i)(z+2i)}{z-2i} = \lim\limits_{z \to 2i} (z + 2i) = 4i$

4. $\lim\limits_{z \to 1+i} \frac{z^2-z+1-i}{z^2-2z+2} = 1 - \frac{1}{2}i$

Secara formal definisi limit fungsi di suatu titik adalah sebagai berikut.



Definisi 2.6
$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ *jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $\delta > 0$ *sedemikian sehingga jika* $0 < |z - z_0| < \delta$, *maka* $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.

Berikut ilustrasi definisi limit di atas secara geometris
Perhatikan kembali contoh-contoh di atas. Bukti $\lim\limits_{z \to 2-3i} (3z + 4 - i) = 10 - 10i$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} |(3z + 4 - i) - (10 - 10i)| &= |3z - (6 - 9i)| \\ &= 3|z - (2 - 3i)| \end{aligned}$$

Karena $0 < |z - (2 - 3i)| < \delta$, maka

$$|(3z + 4 - i) - (10 - 10i)| < 3\delta < \varepsilon$$

Ini berarti harus dipilih $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$. Bukti formalnya sebagai berikut: Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang, pilih $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$ sehingga jika $0 < |z - (2 - 3i)| < \delta$ maka

$$\begin{aligned} |(3z + 4 - i) - (10 - 10i)| &= |3z - (6 - 9i)| \\ &= 3|z - (2 - 3i)| \\ &< 3\delta < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ini membuktikan bahwa $\lim\limits_{z \to 2-3i} (3z + 4 - i) = 10 - 10i$.
Selanjutnya, bukti $\lim\limits_{z \to \pi i} z^2 = -\pi^2$. Perhatikan bahwa

$$\left|z^2 - \left(-\pi^2\right)\right| = |(z - \pi i)(z + \pi i)| = |(z - \pi i)|\,|(z + \pi i)|.$$

Kita batasi $\delta \leq 1$, maka berdasarkan ketaksamaan segitiga

$$||z| - |\pi i|| \leq |(z - \pi i)| \leq 1$$

atau dapat ditulis $|z| \leq 1 + \pi$.Dengan demikian

$$|(z + \pi i)| \leq |z| + \pi \leq 1 + 2\pi.$$

Selanjutnya
$$\left|z^2-\left(-\pi^2\right)\right|\leq(1+2\pi)\left|(z-\pi i)\right|<\varepsilon.$$
Jadi, kita harus memilih $\delta<\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{1+2\pi}\right\}$. Bukti formalnya sebagai berikut: Diberikan $\varepsilon>0$ sebarang, pilih $\delta<\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{1+2\pi}\right\}$ sehingga jika $0<|z-(\pi i)|<\delta$ maka
$$\begin{aligned}\left|z^2-\left(-\pi^2\right)\right| &= \left|(z-\pi i)\right|\left|(z+\pi i)\right|\\ &\leq (1+2\pi)\left|(z-\pi i)\right|<\varepsilon.\end{aligned}$$
Ini membuktikan bahwa $\lim\limits_{z\to\pi i} z^2=-\pi^2$.

Contoh. $\lim\limits_{z\to 0}\frac{z}{\bar{z}}$ tidak ada. Jika limit tersebut ada, maka $z\to 0$ dari arah mana pun, nilai limitnya akan sama. Perhatikan bahwa jika $z=x+0i$ dengan $x\to 0$, maka
$$\lim_{x\to 0}\frac{x+0i}{x-0i}=1.$$
Tetapi jika $z=0+yi$ dengan $y\to 0$, maka
$$\lim_{y\to 0}\frac{0+yi}{0-yi}=-1.$$
Karena kedua limit tersebut tidak sama, maka $\lim\limits_{z\to 0}\frac{z}{\bar{z}}$ tidak ada.

Bagaimana menghitung $\lim\limits_{z\to 0}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}i\right)$? Menggunakan definisi tentu sangat sulit. Dengan intuisi pun sulit menebak nilai limit tersebut. Tetapi jika kita ingat limit fungsi dua peubah, maka limit tersebut dengan mudah dapat diselesaikan dengan teorema berikut.

Teorema 2.7
Misalkan $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z_0=x_0+y_0 i$ *dan* $w_0=u_0+v_0 i$, *maka* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w_0$ *jika dan hanya jika* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u_0$ *dan* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v_0$

Bukti teorema tersebut cukup mudah, oleh karena itu diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. Kembali ke persoalan mencari $\lim\limits_{z\to 0}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}i\right)$. Perhatikan bahwa
$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}$$
sehingga $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$. Dengan cara yang sama, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$. Jadi,
$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}i\right)=0.$$
Berikut ini adalah beberapa aturan berkaitan dengan mencari limit suatu fungsi. Sifat-sifat ini pun sudah dikenal dengan baik pada saat kuliah kalkulus.

Teorema 2.8
Misalkan $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ *dan* $\lim\limits_{z \to z_0} g(z)$ *ada, maka*

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} cf(z) &= c \lim_{z \to z_0} f(z) \\ \lim_{z \to z_0} [f(z) \pm g(z)] &= \lim_{z \to z_0} f(z) \pm \lim_{z \to z_0} g(z) \\ \lim_{z \to z_0} [f(z) . g(z)] &= \lim_{z \to z_0} f(z) . \lim_{z \to z_0} g(z) \end{aligned}$$

dan

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim\limits_{z \to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z \to z_0} g(z)}$$

asalkan $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) \neq 0$.

2.4 Fungsi Kontinu

Suatu fungsi f dikatakan kontinu pada z_0 jika $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Definisi tersebut mensyaratkan tiga hal, yaitu (i) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ ada, (ii) $f(z_0)$ ada, dan (iii) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Dalam bahasa $\varepsilon - \delta$, fungsi f dikatakan kontinu pada z_0 jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga jika $|z - z_0| < \delta$ maka $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Suatu fungsi f dikatakan kontinu pada domain A jika f kontinu di setiap $z \in A$.

Berdasarkan teorema-teorema limit, jika f dan g masing-masing fungsi kontinu dan $c \in \mathbb{C}$, maka cf, $f \pm g$, dan $f.g$ fungsi-fungsi yang kontinu. Fungsi $\frac{f}{g}$ juga kontinu asalkan $g(z) \neq 0$ untuk setiap z anggota domain.

Berikut ini adalah contoh-contoh fungsi kontinu:

1. Fungsi polinom $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$ dengan $a_n \neq 0$.

2. Fungsi rasional asalkan penyebut tidak nol untuk setiap anggota domain.

3. Fungsi eksponen natural.

BAB 3

FUNGSI ANALITIK

3.1 Turunan Fungsi

Suatu fungsi $f : A \to \mathbb{C}$ dikatakan mempunyai turunan (terdiferensialkan) di z_0 dengan z_0 adalah titik interior A jika

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

ada. Notasi untuk turunan adalah f' dan ditulis

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

atau dapat ditulis

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Fungsi f dikatakan mempunyai turunan di domain A jika $f'(z)$ ada untuk setiap $z \in A$.

Keterdiferensialan fungsi f pada suatu titik mengakibatkan kekontinuan fungsi f pada titik tersebut. Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 3.1
Jika f mempunyai turunan di z_0, maka f kontinu di z_0.

Bukti.

$$\begin{aligned}
\lim_{z\longrightarrow z_0} f(z) &= \lim_{z\longrightarrow z_0} \left[f(z_0) + (z - z_0) \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right] \\
&= f(z_0) + 0.f'(z_0) \\
&= f(z_0)
\end{aligned}$$

■

Kebalikan teorema tersebut tidak berlaku. Contoh penyangkalnya adalah $f(z) = |z|$ kontinu di $z = 0$, tetapi $f'(0)$ tidak ada (Buktikan!).

Contoh. Hitung $f'(z)$ jika $f(z) = z^n$ untuk n bilangan bulat positif
Untuk sebarang bilangan $z_0 \in \mathbb{C}$, maka

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{z\to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{(z - z_0)\left(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + zz_0^{n-2} + z_0^{n-1}\right)}{z - z_0} \\
&= \lim_{z\to z_0} \left(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + zz_0^{n-2} + z_0^{n-1}\right) \\
&= nz_0^{n-1}.
\end{aligned}$$

Hal ini berarti hasil yang diperoleh dari kalkulus berlaku juga di bilangan kompleks, yaitu $f'(z) = nz^{n-1}$ untuk sebarang $z \in \mathbb{C}$.

Selanjutnya, jika f dan g dua buah fungsi yang terdiferensialkan di z_0, maka kita dapat mencari turunan $cf, f \pm g, fg$, dan f/g. Khusus bagian yang terakhir ditambahkan syarat $g(z_0) \neq 0$. Aturan turunannya adalah seperti yang ada di kalkulus, yaitu:

$$\begin{aligned} (cf)'(z_0) &= cf'(z_0) \\ (f \pm g)'(z_0) &= f'(z_0) \pm g'(z_0) \\ (fg)'(z_0) &= f'(z_0).g(z_0) + f(z_0).g'(z_0) \\ \frac{f}{g}(z_0) &= \frac{f'(z_0).g(z_0) - f(z_0).g'(z_0)}{[g(z_0)]^2}. \end{aligned}$$

Buktinya seperti yang ada di buku teks kalkulus. Dengan aturan tersebut, contoh 1 berlaku untuk sebarang n bilangan bulat.
Contoh. Carilah $f'(z)$ jika

1. $f(z) = z^2 - (3+i)z + 4 - 2i$
2. $f(z) = 3z^4 + \pi z^2 + iz^{-1}$
3. $f(z) = \frac{z^2-3+2i}{z^2+iz}$

Jawab. Kita gunakan aturan turunan, maka didapat

1. $f'(z) = 2z - (3+i)$
2. $f'(z) = 12z^3 + 2\pi z - iz^{-2}$
3. $f'(z) = \frac{2z(z^2+iz)-(z^2-3+2i)(2z+i)}{(z^2+iz)^2} = \frac{iz^2+(6-4i)z+2+3i}{z^4+2iz^3-z^2}$

Seperti halnya di kalkulus, salah satu aturan yang penting dalam turunan adalah aturan rantai, yaitu mencari turunan fungsi komposisi. Dalam hal ini, $(f \circ g)' = (f' \circ g)\, g'$. Untuk lebih lengkapnya, perhatikan teorema berikut!

Teorema 3.2
Misalkan $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ dan $g : A \longrightarrow \mathbb{C}$ adalah fungsi sehingga $f(A) \subseteq B$. Jika f terdiferensialkan di z_0 dan g terdiferensialkan di $f(z_0)$, maka $g \circ f$ terdiferensialkan di z_0 dan $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0)$.

Sebagai contoh tentukan $f'(z)$ jika $f(z) = \left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right)^{10}$! Maka

$$f'(z) = 10\left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right)^9 \frac{4z}{(z^2+1)^2} = 40\frac{(z^2-1)^9}{(z^2+1)^{11}}.$$

Secara umum, menentukan turunan fungsi yang variabelnya masih dalam z tidaklah sukar karena cara-cara yang telah dipelajari di kalkulus dapat diterapkan. Tetapi jika fungsi tersebut tidak dalam z (misalnya $f(z) = \overline{z}$ atau $f(z) = 2xy + (x^2 + y^2)\, i$), maka aturan di atas tidak sepenuhnya dapat diterapkan. Bahkan kita harus mencari di titik mana saja fungsi-fungsi tersebut mempunyai turunan. Hal ini membawa kita pada *Persamaan Caucy-Riemann*.

3.2 Persamaan Cauchy-Riemann

Misalkan $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fungsi yang terdiferensialkan di $z_0 = x_0 + y_0 i$. Berdasarkan definisi, z_0 mestilah titik interior domain f dan

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

ada. Penting dicatat bahwa limit tersebut ada dalam setiap arah $z \to z_0$. Jadi, jika kita pilih $z = x + y_0 i$ dengan $x \to x_0$, maka nilai limitnya sama. Dalam hal ini, f dapat dipandang sebagai fungsi dua variabel x dan y, yaitu

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x + y_0 i) - f(x_0 + y_0 i)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \to x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= u_x(z_0) + iv_x(z_0). \end{aligned}$$

Kita simpulkan turunan parsial $u_x(z_0)$ dan $v_x(z_0)$ —hal ini berarti turunan parsial $f_x(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0)$ —ada dan memenuhi

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) = f_x(z_0).$$

Serupa dengan hal tersebut, jika kita pilih $z = x_0 + yi$ dengan $y \to y_0$, maka

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0 + yi) - f(x_0 + y_0 i)}{i(y - y_0)} \\ &= \lim_{y \to y_0} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} - i \lim_{y \to y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0} \\ &= v_y(z_0) - iu_y(z_0). \end{aligned}$$

Hal ini berarti $f_y(z_0) = u_y(z_0) + iv_y(z_0)$ juga ada dan memenuhi

$$f'(z_0) = v_y(z_0) - iu_y(z_0) = -if_y(z_0).$$

Jika kedua hasil itu dibandingkan, maka akan didapat

$$u_x(z_0) = v_y(z_0) \text{ dan } u_y(z_0) = -v_x(z_0).$$

Sistem persaman diferensial parsial tersebut dikenal sebagai persamaan Cauchy - Riemann sebagai penghargaan kepada Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857) dan Georg Bernhard Riemann (1826 - 1866), dua orang arsitek Analisis Kompleks.

Dalam koordinat polar, jika $f(r,\theta) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$, maka persamaan Cauchy-Riemann fungsi tersebut adalah

$$u_r(r,\theta) = \frac{1}{r} v_\theta(r,\theta) \text{ dan } v_r(r,\theta) = -\frac{1}{r} u_\theta(r,\theta).$$

Pembaca dapat membuktikan bentuk persamaan tersebut sebagai latihan.

Persamaan Cauchy-Riemann merupakan syarat perlu keterdiferensialan sebuah fungsi. Uraian di atas dapat dirangkum dalam teorema berikut.

Teorema 3.3
Jika $f = u + iv$ mempunyai turunan di z_0, maka u dan v memenuhi Persamaan Cauchy-Riemann di z_0.

Kebalikan teorema tersebut, secara umum tidak berlaku. Sebagai contoh, fungsi yang didefinisikan dengan

$$f(z) = \begin{cases} \exp(-z^{-4}) & \text{jika } z \neq 0 \\ 0 & \text{jika } z = 0 \end{cases}$$

memenuhi persamaan Cauchy-Riemann di 0, tetapi tidak terdiferensialkan di 0 bahkan tidak kontinu di 0 (Silakan diperiksa!) . Teorema berikut menjamin kriteria keterdiferensialan fungsi $f = u + iv$ di suatu titik z_0.

Teorema 3.4
Misalkan $f = u+iv$ terdefinisi pada domain $A \subseteq \mathbb{C}$ dan turunan parsial u_x, u_y, v_x, dan v_y ada di setiap elemen A.Jika semua turunan parsial tersebut kontinu dan memenuhi persamaan Cauchy Riemann di $z_0 \in A$, maka f mempunyai turunan di z_0 dan $f'(z_0) = f_x(z_0) = -if_y(z_0)$.

Contoh. Di titik mana fungsi $f(z) = \overline{z}$ mempunyai turunan?
Fungsi $f(z) = \overline{z}$ dapat ditulis sebagai $f = x - yi$. Turunan parsial u dan v masing-masing $u_x(z) = 1$, $v_y(z) = -1$, dan $u_y(z) = v_x(z) = 0$ untuk setiap z. Perhatikan bahwa tidak ada z yang memenuhi persamaan Cauchy-Riemann. Jadi, $f(z) = \overline{z}$ tidak mempunyai turunan di mana-mana.
Contoh. Di titik mana fungsi $f(z) = 2xy + (x^2 + y^2)i$ mempunyai turunan dan hitung nilai turunannya?
Turunan parsial u dan v masing-masing $u_x(z) = 2y$, $u_y(z) = 2x$, $v_x(z) = 2x$, dan $v_y(z) = 2y$ untuk setiap z. Persamaan Cauchy-Riemann:

$$\begin{array}{ccc} u_x(z) = v_y(z) & \text{dan} & u_y(z) = -v_x(z) \\ 2y = 2y & & 2x = -2x \end{array}$$

hanya terpenuhi untuk setiap z dengan $x = 0$. Jadi, f mempunyai turunan di $z = yi$ dan $f'(iy) = u_x(iy) + v_x(iy) = 2y$.
Contoh. Tentukan di titik mana fungsi $f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi$ mempunyai turunan dan hitung turunannya dititik tersebut!
Perhatikan bahwa Persamaan Cauchy-Riemann:

$$\begin{array}{ccc} u_x(z) = v_y(z) & \text{dan} & u_y(z) = -v_x(z) \\ 2x = 2x & & -2y = -2y \end{array}$$

terpenuhi untuk setiap z. Jadi, f mempunyai turunan di setiap $z = x + yi$ dan $f'(z) = u_x(z) + v_x(z) = 2x + 2y = 2(x + y) = 2z$. Hasil tersebut sesuai karena fungsi di atas tak lain adalah $f(z) = z^2$ yang turunannya $f'(z) = 2z$ untuk setiap z.

3.3 Fungsi Analitik

Salah satu konsep yang penting dalam analisis kompleks adalah fungsi analitik. Istilah lain untuk fungsi analitik adalah holomorpik dan reguler. Misalkan $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ suatu fungsi (ingat bahwa A adalah himpunan buka dan terhubung) dan $z_0 \in A$, fungsi f dikatakan analitik di z_0 jika terdapat $\triangle(z_0, r)$ sehingga f mempunyai turunan di seluruh $\triangle(z_0, r)$. Fungsi f dikatakan analitik pada A jika f analitik di setiap $z \in A$(secara sederhana, f analitik di A jika f mempunyai turunan di seluruh A).

Sebagai contoh, fungsi $f(z) = \frac{1}{z}$ adalah fungsi analitik di $\mathbb{C} - \{0\}$. Fungsi $f(z) = |z|^2$ tidak analitik di mana-mana karena hanya mempunyai turunan di $z = 0$, tetapi tidak mempunyai turunan di cakram buka $\triangle(0, r)$ untuk setiap $r > 0$. Sedangkan fungsi $f(z) = z^2$ analitik di seluruh bidang kompleks.

Jika fungsi f analitik di suatu domain A, maka berdasarkan definisi A termuat di domain f'. Kemudian dapat dibuktikan bahwa f' sendiri analitik di A, yaitu turunan kedua f'' ada di setiap elemen A. Dengan menggunakan induksi dapat ditunjukkan f', f'', $\ldots$, $f^{(n)}$, $\ldots$ ada di setiap elemen A. Hal ini berarti f dapat diekspansi menjadi deret Taylor.

Selanjutnya, berdasarkan aturan turunan, jika f dan g fungsi analitik, maka cf dengan c konstanta, $f \pm g$, dan $f.g$ adalah fungsi-fungsi analitik. Sedangkan $\frac{f}{g}$ analitik pada domain $\{z \in A : g(z) \neq 0\}$. Kemudian berdasarkan aturan rantai, maka komposisi fungsi analitik juga fungsi analitik

Seperti halnya pada turunan, menentukan analitik fungsi sangat mudah jika variabel fungsi masih dalam z. Tetapi akan sulit jika variabelnya tidak lagi dalam z. Namun demikian, dengan menggunakan teorema 3.4 kita dapat menentukan apakah suatu fungsi analitik atau tidak di suatu domain.

Fungsi yang analitik di seluruh bidang kompleks disebut fungsi *entire*. Fungsi polinom $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$ dengan $a_n \neq 0$, fungsi eksponen $f(z) = e^z$ adalah contoh-contoh fungsi *entire*. Titik-titik di mana sebuah fungsi kompleks tidak analitik disebut titik singular. Jenis-jenis titik singular adalah sebagai berikut:

1. Titik singular terisolasi. Titik z_0 disebut titik singular terioslasi dari $f(z)$ jika terdapat $\triangle(z_0, r)$ sehingga di luar cakram tersebut f analitik.
2. Pole. Titik z_0 disebut pole jika terdapat bilangan bulat positif n sehingga $\lim\limits_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0$.
3. Singular terhapus. Titik z_0 disebut titik singular terhapus jika $\lim\limits_{z \rightarrow z_0} f(z)$ ada.
4. Singular essensial. Jika bukan pole dan bukan singular terhapus.