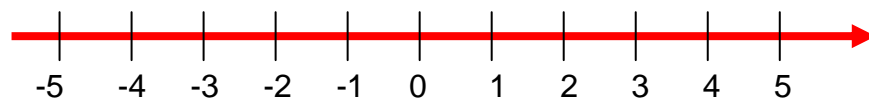


BILANGAN KOMPLEKS

1. Bilangan-Bilangan Real

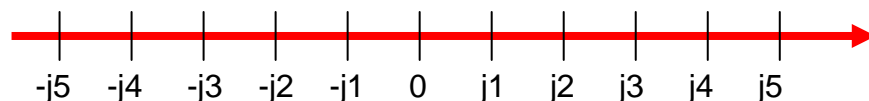
- Sekumpulan bilangan-bilangan real yang dapat menempati seluruh titik pada garis lurus, hal ini dinamakan garis bilangan real seperti pada Gambar 1.
- Operasi penjumlahan, pengurangan, pembagian dan perkalian dapat dilakukan pada setiap bilangan dalam sistem ini.
- Akar kuadrat positif dari bilangan real dapat dinyatakan pada garis bilangan real, tetapi akar kuadrat negatif bilangan real tidak ada dalam sistem bilangan real.



Gambar 1. Garis bilangan real

2. Bilangan-Bilangan Imajiner

- Akar kuadrat negatif bilangan real dinamakan bilangan imajiner.
Contoh : $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-6}$, $\sqrt{-2}$ dst.
- Semua bilangan imajiner dapat dinyatakan sebagai titik pada garis lurus dan dinamakan garis bilangan imajiner seperti pada Gambar 2.



Gambar 2. Garis bilangan imajiner

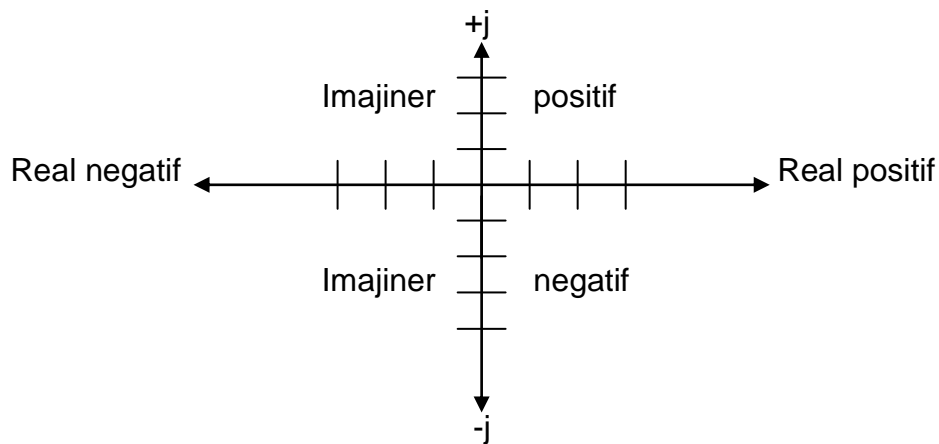
3. Bilangan-Bilangan Kompleks

- Bilangan kompleks $Z = X + jY$
dimana X dan Y adalah bilangan real dan $j = \sqrt{-1}$.
- Dalam bilangan kompleks $X + jY$, maka suku pertama yaitu X dinamakan bagian real dan suku kedua jY dinamakan imajiner.

- Bila $X=0$; maka bilangan kompleks adalah imajiner murni dan terletak pada sumbu j , bila $Y=0$ maka bilangan kompleks adalah bilangan real dan terletak pada sumbu real.

4. Bidang Kompleks

Pada bidang kompleks sumbu horisontal disebut sumbu real dan sumbu vertikal disebut sumbu imajiner seperti pada Gambar 3.



Gambar 3. Bidang kompleks

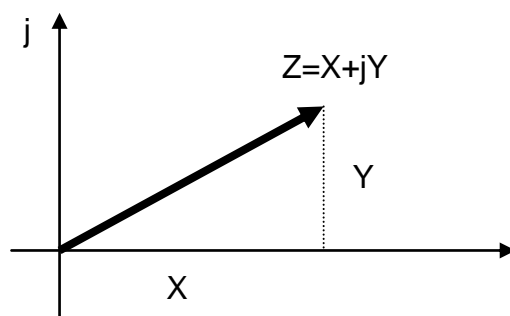
5. Bentuk Rektangular dan Polar

5.1 Bentuk Rektangular / Tegak

Format untuk bentuk rektangular adalah

$$Z = X + jY \quad \dots\dots\dots(1)$$

dan diperlihatkan seperti pada Gambar 4.



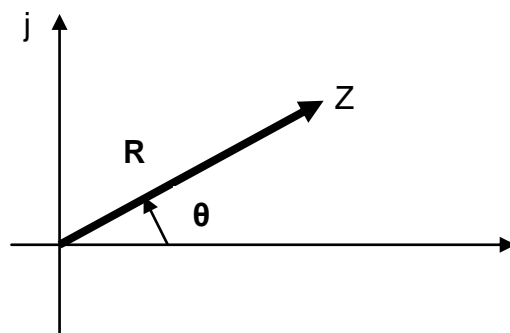
Gambar 4. Bentuk rektangular

5.2 Bentuk Polar / Sudut

Format untuk bentuk polar adalah

$$Z = R \angle \theta \quad \dots\dots\dots(2)$$

dimana R menunjukkan magnituda dan θ adalah sudut yang diukur berlawanan dengan arah jarum dari sumbu real positif dan diperlihatkan seperti pada Gambar 5. Bentuk polar sangat luas penggunaannya dalam analisis rangkaian listrik.



Gambar 5. Bentuk polar

5.3 Konversi antara bentuk polar dan rektanguler

Kedua bentuk tersebut dihubungkan oleh persamaan (3), dan sebagai ilustrasi ditunjukkan pada Gambar 6.

Rektanguler ke Polar

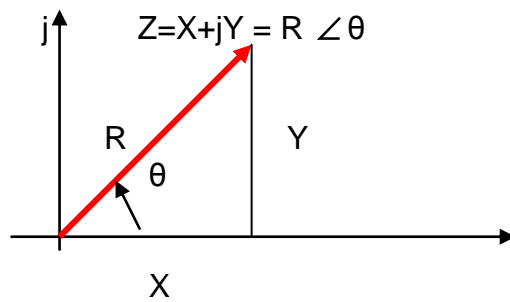
$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{Y}{X} \quad \dots\dots\dots(4)$$

Polar ke Rektanguler

$$X = R \cos \theta \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$Y = R \sin \theta \quad \dots\dots\dots(6)$$



Gambar 6. Konversi antara bentuk polar dan rektanguler

Contoh 1 :

Konversi bentuk berikut ini dari rektanguler ke polar :

a. $Z = 3 + j4$

b. $Z = -6 + j3$

Jawab

a. $R = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53,13^{\circ}$$

$$Z = 5 \angle 53,13^{\circ}$$

b. $R = \sqrt{(-6)^2 + (3)^2} = \sqrt{45} = 6.71$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{6}\right) = 26,57^{\circ}$$

$$\theta = 180^{\circ} - 26,57^{\circ} = 153,43^{\circ}$$

$$Z = 6.71 \angle 153,43^{\circ}$$

Contoh 2 :

Konversi bentuk berikut ini dari polar ke rektanguler :

a. $Z = 10 \angle 45^{\circ}$

b. $Z = 8 \angle -60^{\circ}$

Jawab

a. $X = 10 \cos 45^{\circ} = (10) (0.707) = 7.07$

$$Y = 10 \sin 45^{\circ} = (10) (0.707) = 7.07$$

$$Z = 7.07 + j7.07$$

b. $X = 8 \cos (-60)^\circ = (8) (0.5) = 4$

$$Y = 8 \sin (-60)^\circ = (8) (-0.866) = -6.928$$

$$Z = 4 - j6.928$$

6. Operasi Matematika Dengan Bilangan Kompleks

Definisi

Simbol j dihubungkan dengan bilangan imajiner, dengan definisi sebagai berikut :

$$j = \sqrt{-1} \quad \text{maka} \quad j^2 = -1 \quad \dots\dots\dots(7)$$

dan

$$\begin{aligned} j^3 &= j^2 \cdot j = (-1) \cdot j = -j \\ j^4 &= j^2 \cdot j^2 = (-1) \cdot (-1) = +1 \end{aligned} \quad \text{dst}$$

selanjutnya :

$$\frac{1}{j} = (1) \left(\frac{1}{j} \right) = \left(\frac{j}{j} \right) \left(\frac{1}{j} \right) = \frac{j}{j^2} = \frac{j}{-1} = -j \quad \dots\dots\dots(8)$$

Konyugat

Konyugat bilangan kompleks diperoleh dengan mengubah tanda dari bagian imajiner baik dalam bentuk polar maupun bentuk rektanguler. Simbol konyugat adalah menambah bentuk $*$ pada variabelnya.

Contoh 3 :

- a. $Z = -3 + j6$ konyugatnya adalah $Z^* = -3 - j6$
- b. $Z = -4 \angle 30$ konyugatnya adalah $Z^* = -4 \angle -30$

6.1 Penjumlahan dan Pengurangan bilangan kompleks

Penjumlahan maupun pengurangan bilangan kompleks harus dalam bentuk rektanguler. Jika bilangan dinyatakan dalam bentuk polar maka terlebih dahulu mengkonversi bilangan tersebut ke bentuk rektanguler. Penjumlahan atau pengurangan dua buah bilangan kompleks

dilakukan dengan menjumlah atau mengurangi bagian real dan bagian imajiner secara terpisah.

Contoh 4 :

- a. Jumlahkan $Z_1 = -2 + j3$ dan $Z_2 = 4 + j1$
- b. Kurangkan $Z_1 = 6 - j6$ dan $Z_2 = -10 - j4$

Jawab

- a. $Z_1 + Z_2 = (-2 + j3) + (4 + j1) = (-2+4) + j(3+1)$
 $= 2 + j4$
- b. $Z_1 - Z_2 = (6 - j6) - (-10 - j7) = (6-(-10)) - j(-6+7)$
 $= 16 - j1$

6.2 Perkalian bilangan kompleks

Perkalian bilangan kompleks dapat dilakukan baik dalam bentuk polar maupun bentuk rektanguler. Dalam banyak kasus bahwa lebih mudah melakukan operasi perkalian dalam bentuk polar sehingga apabila bilangannya dalam bentuk rektanguler terlebih dahulu mengkonversi ke bentuk polar, tetapi hal ini tidak selamanya menguntungkan tergantung dari nilai bilangan kompleks.

Contoh 5 :

- a. Kalikan nilai $Z_1 = -6 + j3$ dan $Z_2 = 4 + j7$
- b. Kalikan nilai $Z_1 = 2,37 + j3,65$ dan $Z_2 = 4,23 - j1,25$
- c. Kalikan nilai $Z_1 = 2 \angle -30$ dan $Z_2 = -6 \angle 40$

Jawab

- a. $Z_1 \cdot Z_2 = (-6 + j3) \cdot (4 + j7)$
 $= (-6) \cdot (4) + (-6) \cdot (j7) + (j3) \cdot (4) + (j3) \cdot (j7)$
 $= -24 - j42 + j12 + j^2 21$
 $= (-24 - 21) + j(-42+12)$
 $= -35 - j30$
- b. $Z_1 \cdot Z_2 = (2,37 + j3,65) \cdot (4,23 - j1,25)$
 $= (4,35 \angle 57) \cdot (4,41 \angle -16)$
 $= 19,18 \angle 57+(-16)$
 $= 19,18 \angle 41$
- c. $Z_1 \cdot Z_2 = (2 \angle -30) \cdot (-6 \angle 40)$

$$= -12 \angle -30 + 40 = -12 \angle 10$$

6.3 Pembagian bilangan kompleks

Pembagian bilangan kompleks dapat dilakukan baik dalam bentuk polar maupun bentuk rektanguler. Sama seperti pada perkalian yaitu lebih mudah melakukan operasi pembagian dalam bentuk polar. Pembagian dua bilangan kompleks dalam bentuk rektanguler, dilakukan dengan mengalikan pembilang dan penyebut dengan konjugat dari penyebut bilangan kompleks tersebut.

Contoh 6 :

- a. Bagi nilai $Z_1 = -6 + j3$ dan $Z_2 = 4 + j7$
- b. Bagi nilai $Z_1 = 3 \angle -30$ dan $Z_2 = -6 \angle 40$

Jawab :

$$a. \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(-6 + j3)}{(4 + j7)} = \frac{(-6 + j3) \cdot (4 - j7)}{(4 + j7)(4 - j7)}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(-24 + j42 + j12 + 21)}{(16 - j28 + j28 + 49)} = \frac{(-3 + j36)}{(65)} = \mathbf{0.046 + j0,554}$$

$$b. \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(3 \angle -30)}{(-6 \angle 40)} = \mathbf{-0.5 \angle -70}$$

7. Bentuk lain dari bilangan kompleks

Bentuk Trigonometri

$$Z = R \cos \theta + j R \sin \theta = R (\cos \theta + j \sin \theta)$$

Bentuk Eksponensial / Formula Euler

$$Z = R \cos \theta + j R \sin \theta = R e^{j\theta}$$

LATIHAN SOAL :

1. Konversi bilangan berikut ke bentuk polar
 - a. $40 - j40$
 - b. $98 + j45$
2. Konversi bilangan berikut ke bentuk rektangular
 - a. $15 \angle -87$
 - b. $-32 \angle 45$
3. Kurangkan bilangan kompleks berikut
 - a. $9 + j3$ dan $5 - j8$
 - b. $8 - j4$ dan $3 \angle 25$
4. Kalikan bilangan berikut
 - a. $15 \angle -87$ dan $-32 \angle 45$
 - b. $4 - j3$ dan $-3 \angle 38$
5. Bagi bilangan berikut
 - a. $15 \angle -87$ dan $-32 \angle 45$
 - b. $4 - j3$ dan $-3 \angle 38$
6. Hitunglah :

a.
$$\frac{2,5 \angle 65 - 1,8 \angle -23}{1,2 \angle 37}$$

b.
$$\frac{(10 \angle 15)(8,5 - j15)}{2,5 + j4,5}$$