



Universidade de Aveiro Departamento de Engenharia Mecânica
2010

**BRUNO MIGUEL
SERRANO PEREIRA**

**CARACTERIZAÇÃO DA FLEXIBILIDADE DE TUBOS
CURVOS COM TERMINAÇÕES TANGENTES**



**BRUNO MIGUEL
SERRANO PEREIRA**

**CARACTERIZAÇÃO DA FLEXIBILIDADE DE TUBOS
CURVOS COM TERMINAÇÕES TANGENTES**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica, realizada sob a orientação científica do Doutor Francisco José Malheiro Queirós de Melo e do Doutor Rui Pedro Ramos Cardoso, Professores Associados do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro.

Dedico este trabalho aos meus pais e à Débora por terem sempre uma palavra de apoio e incentivo.

o júri

presidente

Prof. Doutor Alfredo Manuel Balacó de Morais

Professor Associado do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro

Prof. Doutora Maria Luísa Romariz Madureira

Professora Auxiliar da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Prof. Doutor Francisco José Malheiro Queirós de Melo

Professor Associado do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro

Prof. Doutor Rui Pedro Ramos Cardoso

Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro

agradecimentos

Um agradecimento a todos os que ajudaram de forma directa ou indirecta para a realização deste trabalho.

Em especial ao Professor Doutor Francisco Queirós de Melo pelo seu total empenho, dedicação, paciência e orientação na realização deste trabalho.

Ao Professor Doutor Rui Cardoso o qual sempre que tive algum problema para resolução se mostrou sempre disponível e de grande ajuda.

Aos meus amigos que sempre me incentivaram a prosseguir e que me fizeram rir quando tudo estava nublado.

Por último, mas sempre presente ao longo do trabalho e da vida, à minha família e à Débora, pela motivação, apoio e incentivo na conclusão deste trabalho.

palavras-chave

Tubo curvo, funções hermitianas, formulação semianalítica e séries de Fourier.

resumo

A inserção de elementos de tubo curvo em sistemas de tubagens industriais é de extrema importância, visto que a condução de fluidos e gases, pode ter trajetórias de grande complexidade geométrica. Complexidade essa que provoca solicitações de origem mecânica e reacções internas devidas a restrições estruturais.

Este trabalho pretende desenvolver uma ferramenta numérica, com base em estudos analíticos, a caracterização do estado de tensão de um tubo curvo quando submetido a esforços de flexão sob o plano de curvatura.

Elaborou-se um programa em MATLAB[®] que caracteriza o estado de tensão no plano de curvatura num tubo curvo de forma interactiva e calcula os integrais dos elementos compondo a matriz de rigidez dos elementos finitos.

Numa segunda fase reformulou-se um código em FORTRAN-90 (INTEL[®] *compilers*) que permite a montagem matricial numa matriz global de cada matriz referente aos elementos finitos integrando a malha em que a estrutura é discretizada.

Numa última fase comparou-se os resultados com valores reconhecidos cientificamente.

keywords

Curved pipe, hermitian functions, semi-analytic formulation and Fourier series.

abstract

The inclusion of curved accessories in piping systems is of recognized importance for a correct fluid transport, given the complexity of the trajectories of the fluid conduction. A complex force system arises from the non-uniformity of such fluid path transportation as result of the effects of inertial forces and fluid pressure, coupled with other structural constraints

This work proposes the development of a numerical tool for the stress and deformation analysis of curved pipes subjected to in-plane forces. Two computer programs in FORTRAN and MATLAB language were prepared to evaluate the stress and deformation state of curved pipes eventually combined with tangent terminations subjected to generalized in-plane bending forces. The programs prepare the stiffness matrices of the elements, assemble them and insert the force system in order to solve the matrix equation where the displacement field is obtained.

The proposed method operates with a displacement field combining 3rd order hermitian polynomials in the beam type displacement with the shell surface displacement where here Fourier expansions are used. The obtained results were compared with technical literature about the theme.

CONTEÚDO

Lista de Figuras	3
1. Introdução	5
1.1. Objectivos.....	5
1.2. Organização da dissertação	6
1.3. Relevância do tema	7
1.4. Estado de arte	11
1.4.1. Formulação dos elementos finitos de tubo ou anel	14
1.4.2. Método da energia de deformação mínima.....	15
2. Método dos elementos finitos	20
2.1. Introdução.....	20
2.2. Caracterização do método	22
2.2.1. Exemplo de aplicação de modelação estrutural.....	25
3. Caso de estudo	26
3.1. Organização dos termos da estrutura matricial do problema da flexão do elemento de tubo curvo	26
3.1.1. O campo de deslocamentos	26
3.1.2. O campo de deformações.....	28
3.2. A matriz de rigidez do elemento de viga-tubo.....	31
3.2.1. Efeito de W sobre os termos de ovalização.....	34
3.2.2. Efeito de W sobre os termos de empeno	34
3.2.3. Efeito de φ sobre os termos de empeno.....	34
3.3. Interação de deslocamentos	35

3.3.1. Na secção i sobre a secção j.....	35
3.4. Exemplo sobre a geração de termos da matriz	38
3.5. Exemplos de comparação com investigação efectuada	50
3.5.1. Exemplo 1 – Tubo Curvo Com Flanges Rígidas	50
3.5.2. Exemplo 2 – Tubo Curvo Com Flanges Finas	51
3.5.3. Exemplo 3 – Tensão De Membrana e Tensão De Flexão.....	53
3.5.4.Exemplo 4 – Tubo Curvo Com Flanges Rígidas	55
4. Conclusões e futuro desenvolvimento	57
5. Bibliografia.....	59

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1: Pormenor de tubagem numa refinaria [Shutterstock images].....	5
FIGURA 2: Exemplo de representação de um elemento finito de tubo para simulação de uma estrutura de tubos [ANSYS, release 11.0 documentation]	9
FIGURA 3: Malha de elementos finitos pelo pré-processador TRUEGrid® [TRUEGrid,2010]	10
FIGURA 4: Distribuição da tensão equivalente de Von Mises num tubo curvo sob flexão (estudo efectuado por pipestar) [PIPESTAR,2010].....	10
FIGURA 5: Parâmetros de geometria de um tubo curvo.....	15
FIGURA 6: representação esquemática do processo de discretização [Press-sci].....	23
FIGURA 7: Algumas formas geométricas possíveis para elementos finitos. a) unidimensional; . b) bidimensionais; c) tridimensionais [Teixeira Dias, F.; Pinho da Cruz, J.; Fontes Valente, R.A.; e Alves de Sousa, R.J., 2007]	24
FIGURA 8: Modelo tridimensional de uma chave de bocas e discretização em elementos finitos [Teixeira Dias, "Mecânica Computacional" - Uma introdução aos métodos aproximados de engenharia].....	25
FIGURA 9: Elemento de tubo: deslocamentos nodais nas secções i e j	41
FIGURA 10: Factores de flexibilidade para várias proporções geométricas de tubos curvos com flanges ou terminações tangentes: comparação com o resultado obtido com a solução em estudo [Fonseca, 2002]	49
FIGURA 11: Módulo toroidal do sistema de equilibragem do foguete europeu ARIANE...	50
FIGURA 12: Tensão σ_{xx} : comparação de resultados (acima) com o teste por Wilczek (1984) e Elza Fonseca (2002) (em baixo; tubo com flanges rígidas).....	51
FIGURA 13: Tensão σ_{xx} : comparação de resultados com o teste por Wilczek (1984) e Elza Fonseca (2002) (tubo com flanges finas, não ovalizável mas com empeno possível)	52

FIGURA 14: tensão de membrana longitudinal σ_{xx} para o tubo no exemplo analisado por Melo e castro (1996) para a tensão longitudinal num tubo curvo testado por E. wilczek (1984)..... 54

FIGURA 15: Comparação de resultados referentes à tensão σ_{xx} na secção equidistante dos extremos para o tubo analisado com o presente método (a) e por L. Madureira (2000) *et al* (b) [Wilczek, 1984] 56

1. INTRODUÇÃO

1.1. OBJECTIVOS

A inserção de elementos de tubo curvo em sistemas de tubagens industriais é imprescindível, uma vez que a condução de fluidos através de tal sistema pode ter trajectórias de grande complexidade geométrica, tal como exemplifica a figura 1.



FIGURA 1: PORMENOR DE TUBAGEM NUMA REFINARIA [SHUTTERSTOCK IMAGES]

O traçado de uma grande tubagem pode ser causa de complexo estado de tensão devido não só a solicitações de origem mecânica (forças estáticas ou dinâmicas) mas também a reacções internas devidas a restrições estruturais (suportes ou ligações) que impeçam a livre expansão térmica do sistema. A determinação do estado de tensão quando a estrutura é submetida a esforços de flexão é tarefa complicada, tornando-se necessário numa prática comum, recorrer a análise por elementos finitos. Em casos de modelação mais difícil por métodos numéricos, a verificação por técnicas experimentais é

uma alternativa de grande rigor, porém mais demorada e dispendiosa do que as ferramentas numéricas.

Este trabalho consiste na modelação estrutural por elementos finitos de um tubo curvo com duas terminações tangentes. O modelo estrutural será submetido a esforços de flexão apenas no plano de curvatura, possibilitando o estudo da distribuição das tensões e avaliar o esforço limite a partir da inclusão de um critério de cedência. É mais uma ferramenta numérica destinada a projectos de tubagens, uma vez que se restringe a soluções lineares e no campo elástico.

Para o estudo anunciado, elaborou-se um programa em MATLAB® que caracteriza o estado de tensão no plano de curvatura num tubo curvo de forma interactiva. Esta ferramenta de trabalho deixa campo de progresso no estudo de flexão fora do plano de curvatura e incursão na análise dinâmica. As potencialidades deste programa não foram totalmente aproveitadas, uma vez que o autor da tese dispôs de uma versão FORTRAN-90 (INTEL® *compilers*) capaz de efectuar a tarefa de montagem matricial numa matriz global de cada matriz referente aos elementos finitos integrando a malha em que a estrutura é discretizada. O programa MATLAB® permitiu efectuar os cálculos referentes aos integrais dos elementos compondo a matriz de rigidez dos elementos finitos.

1.2. ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Este trabalho pretende desenvolver uma ferramenta numérica com base em estudos analíticos efectuados anteriormente na caracterização do estado de tensão de um tubo curvo quando submetido a esforços de flexão sob o plano de curvatura. Numa primeira fase foi efectuada uma breve pesquisa bibliográfica, com o objectivo de conhecer os métodos de estudo já existentes; depois foram estabelecidas as expressões que permitem definir o campo de deformações resultante de esforços no plano de curvatura. Foram depois definidas expressões para o campo de deslocamentos admissíveis nestes acessórios sob o tipo de carregamento já referido. O uso de técnicas variacionais na obtenção da mínima energia de deformação do elemento finito permite formar a matriz de rigidez, etapa fundamental para se poder estruturar o programa de

elementos finitos. A dissertação apresenta a seguir exemplos de solicitações em tubos curvos comparados com outros estudos. Por fim, discute-se o progresso que este método permite e são propostas linhas de investigação para futuro desenvolvimento.

1.3. RELEVÂNCIA DO TEMA

A maioria dos elementos disponíveis nos programas de computador considera o tubo como uma viga curva (embora tubular, eventualmente com parede fina), o que é incorrecto uma vez que não se admite que a secção transversal possa distorcer por *ovalização*. A secção transversal também não fica plana, passando a apresentar-se empenada. Este programa de elementos finitos tubulares pretende ser uma ferramenta mais completa no tratamento do estado de tensão nos tubos curvos, na medida em que os deslocamentos relacionados com a distorção das secções transversais, serão incluídos no campo de deslocamentos da formulação.

A inclusão de terminações tangentes na modelação de uma tubagem com estes elementos pode ser efectuada a partir da formulação para o tubo curvo em que se dá um valor muito elevado ao raio de curvatura R , aproximando deste modo um elemento curvo a um troço recto. Pode deste modo modelar-se uma secção da tubagem com elementos curvos e terminações tangentes.

A formulação deste elemento foi levada a cabo sobrepondo o deslocamento de uma viga ao de uma casca, isto é, separando as deformações globais numa parte em que a secção não muda, como se fosse uma viga de parede fina (o tubo), mas sem qualquer deformação da secção transversal, com outra em que o elemento de casca tem possibilidade de deformações da secção transversal do tubo.

Esta solução inclui nos coeficientes de matriz de rigidez termos referentes a elementos de viga (correntes em mecânica de estruturas), em que as funções de forma são cúbicas (*hermitianas*) garantindo uma continuidade do campo de deslocamentos tipo (C1); por sua vez, os termos referentes à deformação tipo casca, foram tratados com funções de forma do primeiro grau como se descreve a seguir.

Os elementos de tubos podem ser submetidos a solicitações bastante complexas, por vezes envolvendo factores de risco, como o caso do efeito combinado de forças externas com as tensões térmicas devidas à expansão a altas temperaturas. Tal pode eventualmente referir-se ao transporte de matérias corrosivas. As normas de segurança que regulam todo um projecto têm de ter estes factores em conta, sendo os elementos de tubo curvo bastante mais vulneráveis ao efeito de forças externas combinadas com pressão do que é o caso dos elementos de tubo rectos.

O estudo de forças e momentos actuando numa tubagem de desenho complicado é uma tarefa bastante dispendiosa, significando também considerável investimento em tempo de projecto. Há dois meios fundamentais para se levar a cabo este estudo, a simulação numérica e as técnicas experimentais. As primeiras são um meio muito atractivo de desenvolver o projecto, porque permitem efectuar a custo bastante baixo a análise das forças instaladas. Claro que os resultados assim obtidos só são de confiança se os métodos de simulação o forem; quer dizer que os modelos numéricos devem reproduzir o mais realisticamente possível, o comportamento físico esperado na tubagem sob a acção das variáveis perturbadoras, as quais podem ser de origem mecânica ou térmica.

A figura 2 exemplifica um modo simbólico de representar em relação a um referencial coordenado e ortonormado um elemento estrutural, o qual se designa genericamente por elemento de tubo (*pipe element*), disponível na biblioteca de elementos finitos do programa ANSYS®.

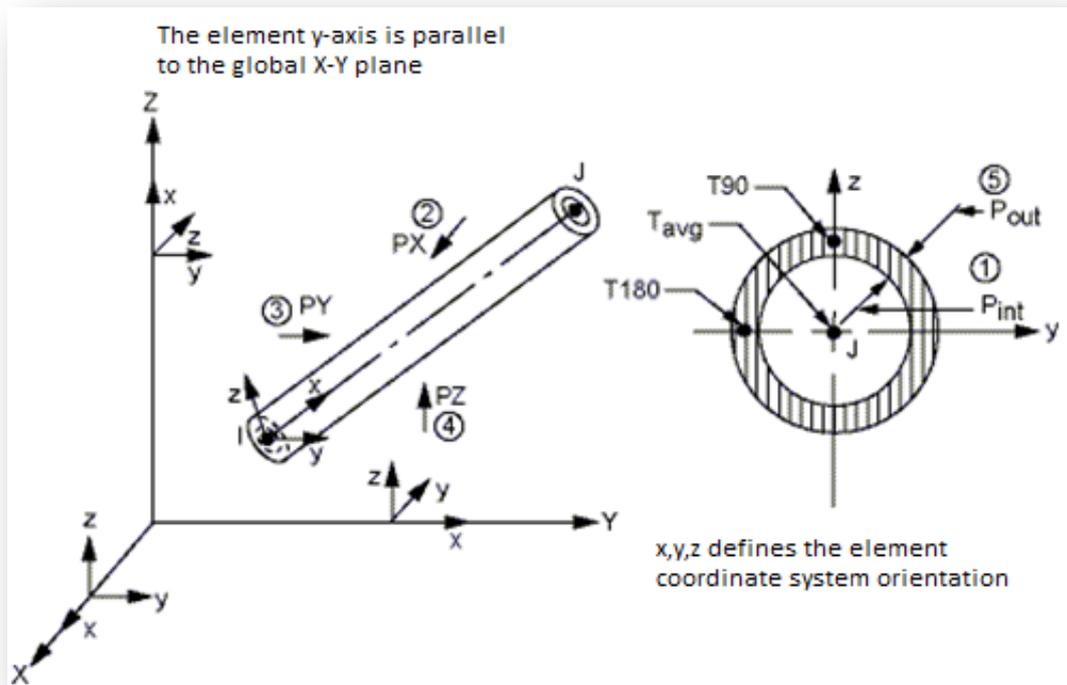


FIGURA 2: EXEMPLO DE REPRESENTAÇÃO DE UM ELEMENTO FINITO DE TUBO PARA SIMULAÇÃO DE UMA ESTRUTURA DE TUBOS [ANSYS, RELEASE 11.0 DOCUMENTATION]

Para a geração de modelos com geometria e propriedades compatíveis com os mais eficientes programas de elementos finitos é necessário dispor-se de programas capazes de discretizar o modelo estrutural em conjuntos de elementos, podendo tal acção envolver um número muito elevado de elementos, de acordo com o grau de complexidade geométrica ou o sistema de forças que a estrutura apresente. A figura 3 mostra a visualização espacial de uma malha de elementos finitos de um tubo curvo com extremos flangeados enquanto a figura 4 mostra a distribuição de tensões equivalentes de Von-Mises num tubo submetidos à flexão (etapa de *post-processamento*) em tubos fabricados por PIPESTAR®

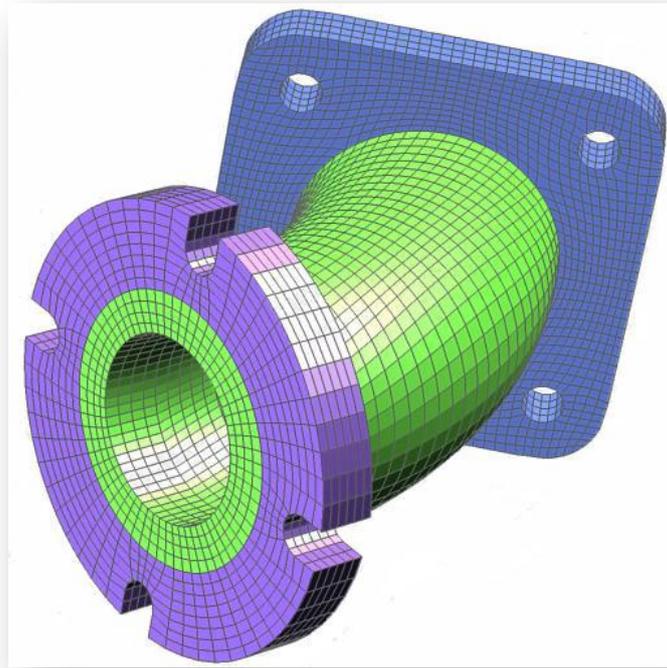


FIGURA 3: MALHA DE ELEMENTOS FINITOS PELO PRÉ-PROCESSADOR TRUEGRID® [TRUEGRID,2010]

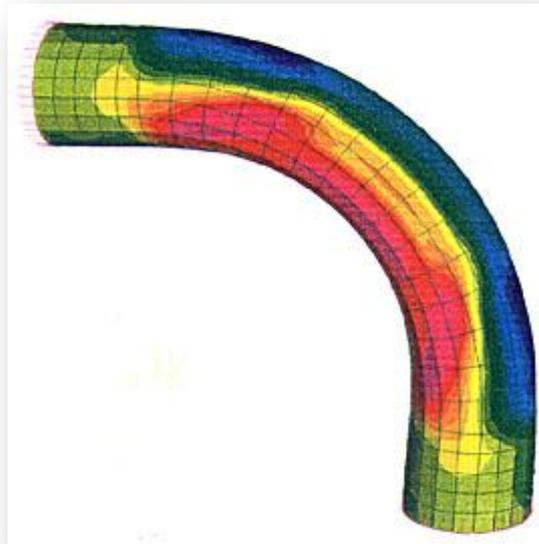


FIGURA 4: DISTRIBUIÇÃO DA TENSÃO EQUIVALENTE DE VON MISES NUM TUBO CURVO SOB FLEXÃO (ESTUDO EFECTUADO POR PIPESTAR) [PIPESTAR,2010]

1.4. ESTADO DE ARTE

No início do século XX em 1910, o alemão Arnold Bantini teve uma contribuição importante e inovadora na resolução do problema da flexão de tubos curvos, onde neste seu trabalho, constatou a existência da ovalização da secção transversal em tubos curvos de secção circular. Depois deste estudo a primeira solução numérica para obter a deformada da secção transversal de tubos curvos circulares podia ser aproximada por um desenvolvimento em séries de termos trigonométricos, sendo os coeficientes determinados a partir do método de Ritz.

Já em 1911 Theodore von Kármán, propôs a primeira solução eficaz com base na expansão do campo de deslocamentos em séries de Fourier [Kármán, 1911]. A rigidez à flexão de um tubo curvo é menor do que a de um tubo recto com a mesma secção transversal, o comprimento igual ao perímetro médio do tubo curvo e o mesmo material.

Esta resistência à flexão deve-se à tendência da secção transversal ovalizar, em virtude de se obter uma resultante das forças de membrana geradas por flexão que é perpendicular à superfície toroidal do tubo curvo. Efectuando um corte transversal verifica-se que esta se deforma ficando com uma forma oval. Para além desta característica, o corte transversal na curva tende a deformar-se para fora do seu plano (no caso de flexão fora do plano), originando uma flexibilidade adicional. Estas duas deformações denominam-se ovalização e curvatura.

Na sequência deste estudo, W. Hovgaard (1930) demonstrou experimentalmente que a ovalização das secções transversais de tubos curvos tem uma configuração semelhante à que Von Kármán propunha como aproximação por séries trigonométricas. Nos trabalhos experimentais que W. Hovgaard efectuou, usou ataque químico para distinguir na superfície metálica do tubo as zonas que foram afectadas pelo efeito das tensões de flexão geradas pela variação da curvatura. [Hovgaard, 1930]

Vigness (1943) apresentou uma generalização da solução apresentada por Theodore Von Kármán que consistia num procedimento experimental para verificação das derivadas das equações de flexão. Mais tarde, Cheng e Thailer (1970) simplificaram este mesmo problema, do plano de flexão, a duas equações diferenciais conjugadas, podendo estas ser integradas sem simplificações. [Vigness, 1943]

Por volta do final dos anos 50, N. Gross e H. Ford, efectuaram testes experimentais em tubos curvos com terminações tangentes. Foram estudadas as tensões na superfície do tubo assim como medida a ovalização em várias secções transversais. Como técnica inovadora para a época, estes investigadores utilizaram a extensometria eléctrica, que permitia grande rigor na avaliação das deformações, embora tivesse como limitação a de ser possível obter informação de modo discreto.

No final dos anos 70, os investigadores G. E. Findlay e J. Spence efectuaram medições na distribuição de tensões e calcularam o factor de flexibilidade em tubos curvos mas com extremos possuindo flanges rígidas. A técnica experimental consistiu em extensometria eléctrica, tendo os autores projectado um “*rig*” de precisão com célula de carga para efectuar com rigor as medições. [Findlay e Spence, 1979]

G. Thomson (1980) realizou uma formulação analítica usando, no campo de deslocamentos, um desenvolvimento com séries de funções trigonométricas duplamente definidas, tendo também realizado vários estudos experimentais. U. Öry e E. Wilczek (1983) apresentaram um método económico, com base em técnicas de Matriz de Transferência, o qual é baseado numa solução exponencial e na repetição periódica de termos trigonométricos que fazem parte das séries de Fourier usadas na solução. O método da Matriz de Transferência tem a vantagem de precisar de poucos termos (cerca de 8 apenas) nas séries trigonométricas, exigindo muito menos graus de liberdade que as soluções por elementos finitos. [Öry e Wilczek, 1983]

Seguindo um caminho paralelo ao que U. Öry e E. Wilczek propuseram, A. Millard e R. Roche utilizaram uma formulação variacional onde adoptavam funções analíticas desconhecidas, caracterizando a ovalização do tubo curvo na direcção longitudinal. Estas funções eram combinadas com séries trigonométricas caracterizando agora a ovalização segundo a direcção circunferencial. A partir desta estrutura numérica, era calculada a

energia de deformação, resultando do campo de deformações baseado na combinação de funções analíticas e trigonométricas. A solução do problema resultava de minimizar a energia de deformação em ordem às funções analíticas desconhecidas obtendo-se um sistema de equações diferenciais normalmente de ordem elevada. Esta técnica, sendo bastante precisa, exige uma formulação matemática complicada e não é versátil quanto às condições de fronteira. Tendo em conta este problema, L. Madureira reanalisou-o tendo proposto formas alternativas para tratar a solução da caracterização numérica das condições de fronteira. [Millard e Roche, 1984]

A formulação de soluções em Mecânica Estrutural por séries trigonométricas consiste essencialmente em aproximar todo o campo de deslocamentos a partir de tais expansões ou combinar os termos trigonométricos com outro tipo de funções, como polinómios algébricos, semelhantes aos usados em elementos finitos. Oñate (1992) apresentou uma solução detalhada baseada na dupla expansão de Fourier do campo de deslocamentos.

O estudo do efeito de cargas radiais em cascas cilíndricas tem um papel extremamente importante no projecto de engenharia e nas condições de instalação de condutas de pressão, tendo uma forma cilíndrica. Os métodos de avaliação do efeito estrutural dessas cargas têm actualmente ferramentas eficientes de investigação numérica e experimental. Uma das várias empresas existentes no mercado, que está na vanguarda do estudo de elementos finitos é a ABAQUS. As técnicas experimentais têm um grande destaque possibilitando obter resultados realistas e satisfatórios, desde que as condições de carga do projecto sejam reproduzidas fielmente ao sistema de forças esperado pelo projecto em desenvolvimento.

Em 1997 Rhodes apresenta várias contribuições de investigadores da Universidade de Stranthclyde, onde o estado de tensão em elementos cilíndricos, utilizando métodos experimentais, foi alvo de investigação durante anos. [J. Rhodes, 1997]

Embora não sendo do âmbito do presente trabalho, é interessante mencionar que estudos numéricos e experimentais quanto a solicitações dinâmicas em tubos curvos foram efectuados. Carneiro *et al* propuseram um modelo numérico e procedimento

experimental destinados a obter as frequências e modos próprios de vibração. O tubo tinha bordos livres ou flanges rígidas. [Carneiro, Melo, Rodrigues, Lopes, e Teixeira, 2005]

1.4.1. FORMULAÇÃO DOS ELEMENTOS FINITOS DE TUBO OU ANEL

1.4.1.1. GENERALIDADES

A técnica proposta serve para a solução de problemas simulando estruturas de tubos rectos ou curvos submetidos a sistemas de forças apenas no plano de curvatura. Desde o trabalho pioneiro de Ray Clough (1960) [Clough, Sept. 1960], os elementos finitos têm vindo a conhecer variantes formuladas para fins específicos, como é o caso do trabalho de Ohtsubo e Watanabe (1978), tendo estes autores apresentado uma interessante formulação para elementos de tubo curvo e recto que permitiam por malhas extremamente simples (na realidade eram visualizadas como uma simples linha recta ou curva), uma simulação bastante completa das forças ou momentos actuando em sistemas de tubagens industriais em regime linear ou não linear.

O modelo de deformação usado por estes autores contemplava todas as curvaturas e torção da superfície da casca, sendo pois um elemento de ordem de deformação elevada. A solução que foi desenvolvida neste trabalho segue uma estratégia de modelação simplificada, adequada sempre que a casca tenha um raio de curvatura principal bastante maior do que o outro. Assim, pode considerar-se acessória a contribuição quanto à energia de flexão da casca na direcção de curvatura com o maior raio R (o qual é o longitudinal), retendo apenas a contribuição segundo a direcção circunferencial ou também dita meridional (raio r), tal como mostra a figura 5.

Este modelo de deformação é conhecido como tendo resistência de semi-membrana, bastante usado na formulação de soluções em problemas de flexão de tubos rectos e curvos Wilczek (1984), E. Fonseca *et al* [Fonseca, 2002] e L. Madureira *et al* . [Madureira e Q. Melo, 2000]

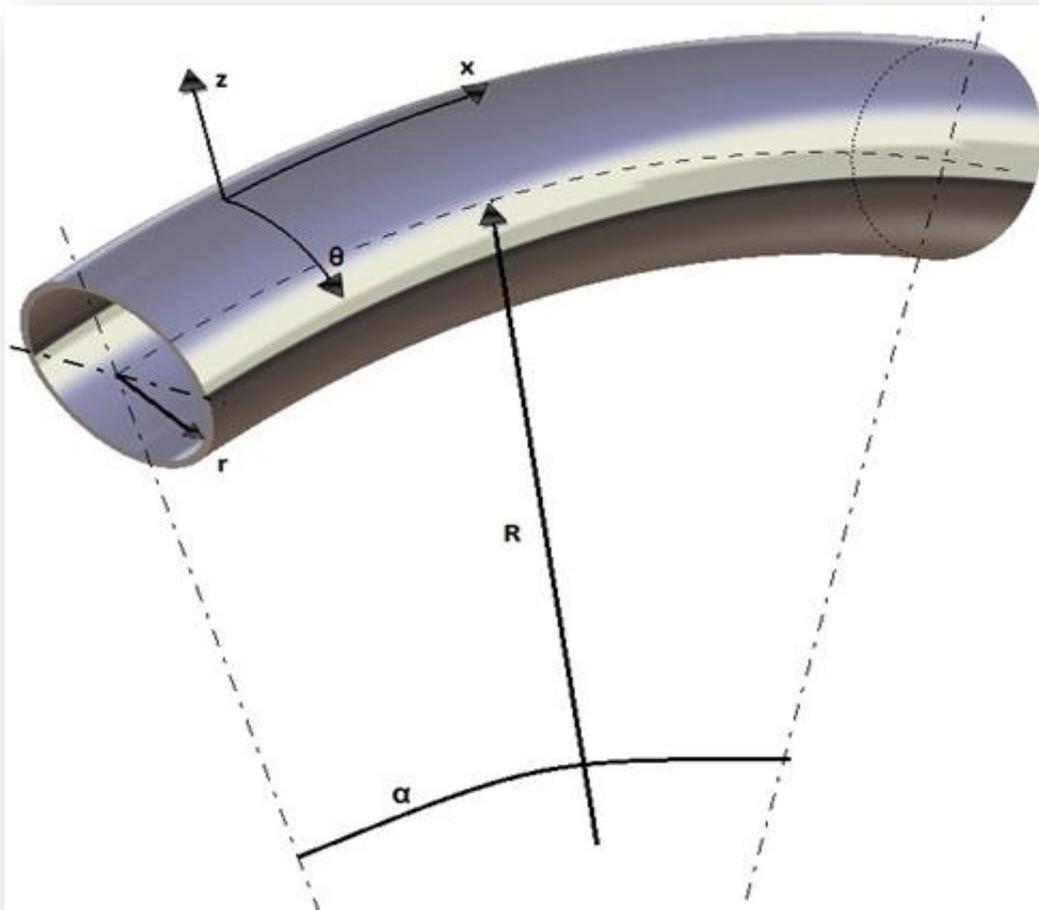


FIGURA 5: PARÂMETROS DE GEOMETRIA DE UM TUBO CURVO.

1.4.2. MÉTODO DA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO MÍNIMA

Esta técnica constitui a ferramenta nuclear para o desenvolvimento de elementos finitos aplicados a qualquer área de simulação estrutural. Actualmente, os elementos finitos encontram aplicações em mecânica de estruturas, mecânica dos fluidos e biomecânica. O aspecto inovador deste modelo numérico incide na aplicação em mecânica de estruturas, trabalho que se deve a R. Clough e E. Wilson (1960). É importante lembrar, contudo que, o estudo matemático do desenvolvimento da técnica se deve a importante trabalho de Boris (ou Bubnov) Galerkin (matemático russo, 1871-1945), que foi o introdutor do Método dos Resíduos Pesados (*Weighted Residual*

Method), o qual era destinado a resolver equações diferenciais ordinárias ou em derivadas parciais em que a solução não era possível de ser obtida sob forma analítica acessível. Consideremos por exemplo, a seguinte forma diferencial em notação simplificada:

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad (1.1)$$

Onde u é o vector de incógnitas da equação diferencial, L é um operador diferencial que gera os termos derivados de uma equação; $f(u)$ é o 2º membro da equação. Se substituirmos u pela solução exacta, a forma da equação (1.1) é cumprida, mas se colocarmos um valor aproximado \hat{u} , então a equação (1.1) terá um erro assim definido:

$$\mathbf{L}(\hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{u}}) = \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.2)$$

A solução aproximada \hat{u} tem na realidade a forma esperada da solução real, a qual consiste em satisfazer as condições de continuidade e de fronteira; tal função tem ainda parâmetros desconhecidos que são determinados com a técnica a seguir resumida:

- Introduzindo uma função w , semelhante à solução aproximada, \hat{u} , como *função de ponderação*, ou simplesmente *de peso*, vai-se calcular a *expressão integral* do erro “pesado” deste modo:

$$\int_{\Omega} w[\mathbf{L}(\hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{u}})]d\Omega = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = w\boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.3)$$

(o integral efectua-se sobre o domínio de validade das funções \hat{u}).

- Minimiza-se o erro anterior efectuando a derivação da equação (1.3) em ordem ao conjunto de parâmetros que participam no vector \hat{u} e procuremos o mínimo:

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \left\{ \int_{\Omega} w[\mathbf{L}(\hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{u}})]d\Omega \right\} = \mathbf{0} \quad (1.4)$$

Esta forma diferencial leva a um sistema de equações algébricas nas incógnitas a_i , uma vez que os integrais são números. No desenvolvimento desta técnica,

Galerkin usou como funções de peso as mesmas que eram usadas como aproximação à solução, ou seja, $\mathbf{w} = \hat{\mathbf{u}}$. Deste modo, a forma da equação (1.3) tem semelhança com o Método dos Mínimos Quadrados, onde o erro quadrático ponderado sobre o domínio de validade das funções de aproximação é minimizado por método semelhante ao da equação (1.4).

Este método consiste, muito resumidamente, na técnica proposta por Boris Galerkin, um processo muito eficiente na obtenção de soluções aproximadas para grande parte de problemas na Física-Matemática.

No caso de análise estrutural, segue-se uma linha de obtenção de soluções aproximadas muito semelhante; parte-se da equação constitutiva de um elemento de casca sob forma matricial:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (1.5)$$

Onde $\{\boldsymbol{\sigma}\}$, $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ e $[\mathbf{D}]$ representam, respectivamente, o vector das tensões, das deformações e a matriz contendo as propriedades mecânicas do material relacionando o estado de tensão com as deformações a que é submetido. O vector das deformações depende da forma das funções $\hat{\mathbf{u}}$ usadas para aproximar o campo dos deslocamentos, à semelhança do que se efectua no método de Galerkin. Assim, a equação (1.5) pode ser reescrita de forma aproximada:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} - [\mathbf{D}]\{\boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{u}})\} = \textit{erro} \quad (1.6)$$

Por motivo de maior clareza de notação e coerência com a formulação matemática, vamos exprimir o vector das deformações a partir de um operador diferencial L , tal como efectuado acima:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = L\{\hat{\mathbf{u}}\} = L[\mathbf{N}]\{\hat{\mathbf{u}}_e\} \quad (1.7)$$

Onde $[N]$ representa uma matriz contendo as funções de aproximação introduzidas com o objectivo já mencionado e $\{\hat{\mathbf{u}}_e\}$ é um vector contendo parâmetros α_i desconhecidos que são as incógnitas do problema a serem determinadas no processo explicado na equação (1.4). O vector $\{\hat{\mathbf{u}}_e\}$ representa os deslocamentos nodais de um elemento finito, mas também pode significar termos de séries de Fourier, se forem usadas como funções de aproximação. Seguindo agora um procedimento igual ao do método de Galerkin, vamos reescrever a equação (1.6) usando a forma da equação (1.7):

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} - [D](L[N]\{\hat{\mathbf{u}}_e\}) = \textit{erro} \quad (1.8)$$

Pondera-se a equação (1.7) multiplicando-a à esquerda pelo vector representando uma variação do campo de deformações (mas sendo tal variação dirigida aos deslocamentos apenas) $\Delta\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T = L\{\Delta\hat{\mathbf{u}}\}^T$ e efectuando a integração sobre o domínio de validade do elemento, tem-se:

$$\int_{\Omega} [(L[N]\{\Delta\hat{\mathbf{u}}_e\})^T \{\boldsymbol{\sigma}\} - (L[N]\{\Delta\hat{\mathbf{u}}_e\})^T \cdot [D] \cdot (L[N]\{\hat{\mathbf{u}}_e\})] d\Omega = \textit{erro} \quad (1.9)$$

Fraccionando os integrais, pode-se distinguir duas importantes parcelas, que permitem reescrever de modo abreviado a equação (1.9):

$$\Delta\{W_{ext}\} - \Delta\{\hat{\mathbf{u}}_e\}^T [K] \{\hat{\mathbf{u}}_e\} = \textit{erro} \quad (1.10)$$

Onde $\Delta\{W_{ext}\}$ representa fisicamente o incremento de trabalho realizado por forças externas que desenvolvem as tensões internas no elemento e este integral representa o incremento na energia de deformação internamente gerada no elemento como resultado de acção do incremento no sistema de forças externas:

$$\Delta U = \int_{\Omega} [(L[N]\{\Delta\hat{\mathbf{u}}_e\})^T \cdot [D] \cdot (L[N]\{\hat{\mathbf{u}}_e\})] d\Omega \quad (1.11)$$

Por facilidade de notação, o seguinte integral:

$$[K] = \int_{\Omega} [(L[N])^T [D] (L[N])] d\Omega \quad (1.12)$$

Representa a Matriz de Rigidez do elemento, anota-se que o vector dos deslocamentos nodais $\{\hat{u}_e\}$ não depende do integral da equação (1.9), pelo que pode a forma da equação (1.11) ser obtida. Efectuando a minimização tal como na equação (1.4) em ordem aos deslocamentos desconhecidos $\{\hat{u}_e\}$, de modo a procurar as condições de mínimo do funcional U , a energia de deformação para uma variação pequena dos deslocamentos $\Delta\{\hat{u}_e\}^T$, passa a ser usada a forma matricial:

$$[K]\{\hat{u}_e\} = \{F_e\} \quad (1.13)$$

Esta é uma equação de grande importância no método de elementos finitos pela facilidade que permite em programar o processo em computador, como se explica mais à frente neste trabalho.

2. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

2.1. INTRODUÇÃO

O fundamento básico do Método dos Elementos Finitos, usualmente designado por MEF, consiste na modelação de um problema genérico que envolve meios contínuos, através da análise de partes discretas, para os quais é possível obter uma descrição matemática.

A primeira referência bibliográfica referente ao método dos elementos finitos surgiu em 1960 no trabalho de Ray Clough, sobre a análise de problemas de elasticidade em estado plano de tensão. Estabeleceu a nomenclatura que viria a tornar-se escolhida para o método. Contribuições anteriores nos anos 40 apresentam métodos de discretização de meios contínuos em elementos triangulares para analisar problemas de torção com o trabalho de Courant (1943). Em 1959, Greenstadt determina a solução de funções matemáticas através da discretização do domínio das funções em subdomínios contíguos, sendo estes caracterizados por funções de aproximação. [Teixeira Dias, F.; Pinho da Cruz, J.; Fontes Valente, R.A.; e Alves de Sousa, R.J., 2007]

Em 1956 Turner *et al* desenvolveram três tipos de elemento finito; triangular, quadrilátero e rectangular. A formulação do elemento triangular tem como base três componentes constantes do tensor das deformações e três modos de deformação de corpo rígido, para a análise de problemas planos. Estas seis componentes de deformação são expressas em termos dos seis graus de liberdade do elemento.

Com o avanço tecnológico nos equipamentos computacionais, todos estes métodos e estudos sofreram adaptações como é o exemplo do Método de Ritz (1908). O método dos elementos finitos é actualmente considerado um método matemático para a solução de equações diferenciais parciais, entre as quais se destacam a Equação de Poisson, Equação de Laplace, Navier-Stokes, entre outras. [Wikipedia,2010]

A estabilidade numérica e flexibilidade permitem a este método ser implementado na forma de um sistema computacional de forma consistente e sistemática, o que explica a sua popularidade actualmente.

O método dos elementos finitos é actualmente aplicado em diversas áreas, projecto e análise de estruturas podendo ser análise de tensões, escoamento de fluidos ou distribuição de temperaturas, também como projecto de equipamentos electromecânicos.

O método dos elementos finitos é um poderoso método matemático de análise e resolução, quase sempre aproximada, de problemas científicos e de engenharia. [Teixeira Dias, F.; Pinho da Cruz, J.; Fontes Valente, R.A.; e Alves de Sousa, R.J., 2007]

2.2. CARACTERIZAÇÃO DO MÉTODO

A aplicação do método dos elementos finitos é definida como a discretização do domínio que se pretende estudar, consiste em dividir o domínio num conjunto finito de subdomínios (elementos, nós e malhas), para realizar o estudo de cada subdomínio isoladamente, fazendo o cálculo das propriedades de cada elemento finito. Cada elemento é caracterizado por dispor de um campo de deslocamentos que é assumido *a priori*; quer dizer que a sua forma é conhecida, mas tal campo de deslocamentos dentro do elemento depende de valores nodais que devem ser determinados usando técnicas variacionais para minimizar um funcional, que normalmente é a energia de deformação armazenada no elemento. Tal energia de deformação deve equilibrar o trabalho realizado pelas forças externas aplicadas aos nós do conjunto (malha) definido pela associação dos vários elementos finitos que modelam a peça ou o conjunto estrutural.

Este procedimento permite obter uma equação sob forma matricial, onde se caracteriza o equilíbrio entre as forças externas (aplicadas aos nós do elemento) e as forças internas, ou forças de reacção estrutural. Resulta pois formalmente uma equação constitutiva, onde os deslocamentos nodais do elemento se relacionam com o campo de forças externas através da matriz de rigidez do elemento.

O próximo passo consiste em efectuar a assemblagem de todas as matrizes de rigidez, vectores de deslocamentos e forças externas para calcular uma solução aproximada, fazendo a montagem de cada equação matricial num conjunto global, onde aparece uma matriz contendo os factores de cada um dos elementos da malha devidamente ordenados e relacionados com as incógnitas do problema (os deslocamentos nodais; este processo é conhecido nos manuais em língua inglesa como *matrix assembling*). A figura 6 exemplifica uma malha gerada para estudo de deformação num tubo curvo com um extremo recto ou tangente.

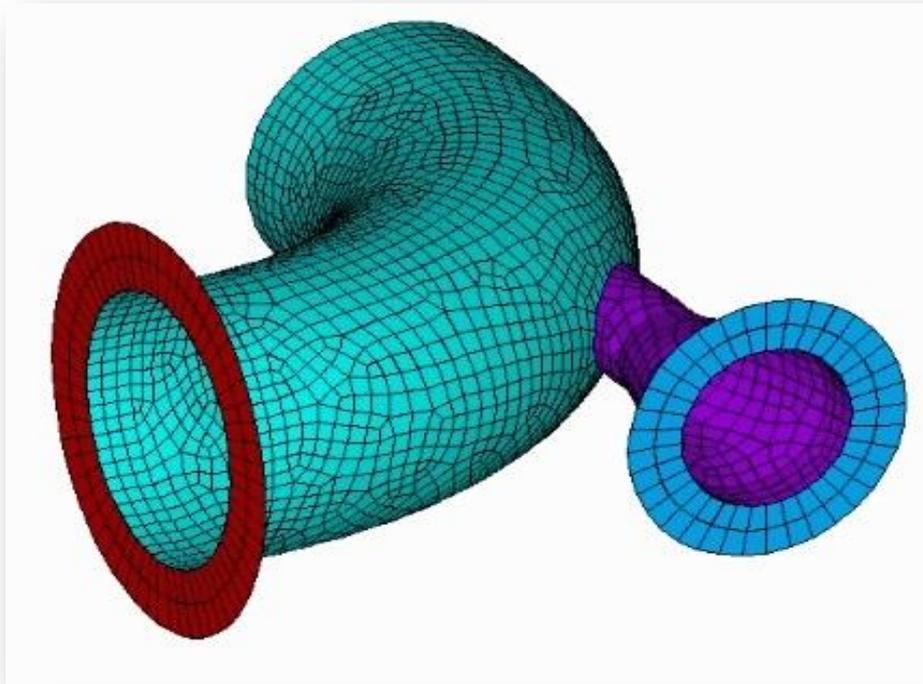


FIGURA 6: REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DO PROCESSO DE DISCRETIZAÇÃO [PRESS-SCI]

Os elementos finitos podem assumir diversas formas geométricas como se pode observar na figura 7, servindo objetivos bem definidos sob o ponto de vista de modelação estrutural. Por exemplo, em estruturas do tipo casca, como a que aqui se analisa, existem disponíveis elementos finitos em que o campo de deslocamentos se caracteriza basicamente no plano tangente à casca mas tendo sobreposto um conjunto complementar de deslocamentos, que são os deslocamentos normais à superfície e rotações da normal, modelando deste modo as consequências dos esforços de flexão.

Nos elementos de casca há uma dimensão, a espessura, que é bastante menor que as restantes dimensões, sendo tal hipótese usada para simplificar a formulação das deformações e os deslocamentos assumidos. Há casos porém que, precisam de uma formulação tridimensional, ou seja, os elementos são do tipo sólido, tendo cada nó a possibilidade de definir deslocamentos segundo três coordenadas espaciais. Aplicações destes elementos têm destaque na modelação de estruturas contendo defeitos (Mecânica da Fractura) em que a presença de uma fenda (singularidade estrutural) determina que a modelação deste pormenor necessite de elementos tridimensionais.

Estes elementos são de obtenção mais laboriosa e podem apresentar alguns problemas de convergência para o resultado correcto. Há técnicas numéricas específicas para contornar esta limitação, permitindo a obtenção de resultados com bastante rigor.

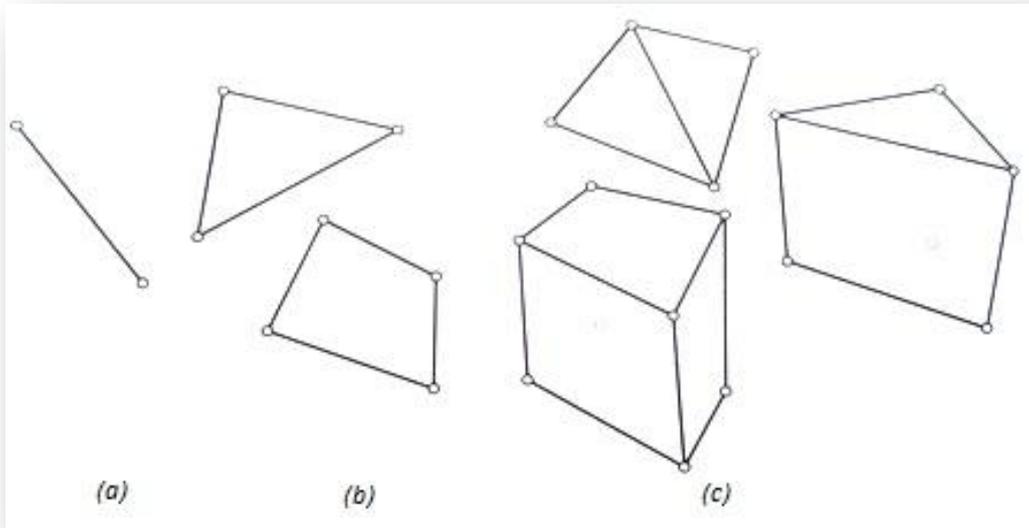


FIGURA 7: ALGUMAS FORMAS GEOMETRICAS POSSÍVEIS PARA ELEMENTOS FINITOS. A) UNIDIMENSIONAL; B) BIDIMENSIONAIS; C) TRIDIMENSIONAIS [TEIXEIRA DIAS, F.; PINHO DA CRUZ, J.; FONTES VALENTE, R.A.; E ALVES DE SOUSA, R.J., 2007]

2.2.1. EXEMPLO DE APLICAÇÃO DE MODELAÇÃO ESTRUTURAL

Na imagem seguinte pode-se ver o que o método dos elementos finitos realiza através da computação.

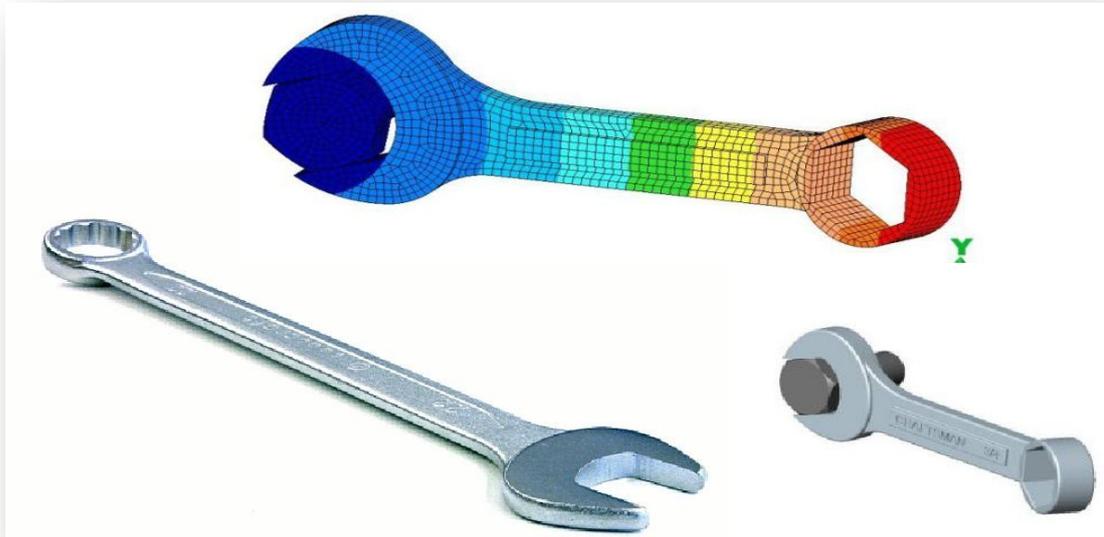


FIGURA 8: MODELO TRIDIMENSIONAL DE UMA CHAVE DE BOCAS E DISCRETIZAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS [TEIXEIRA DIAS, "MECÂNICA COMPUTACIONAL" - UMA INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS APROXIMADOS DE ENGENHARIA]

3. CASO DE ESTUDO

3.1. ORGANIZAÇÃO DOS TERMOS DA ESTRUTURA MATRICIAL DO PROBLEMA DA FLEXÃO DO ELEMENTO DE TUBO CURVO

3.1.1. O CAMPO DE DESLOCAMENTOS

O problema em estudo refere-se à flexão de tubos curvos no plano de curvatura. Muitos autores caracterizam o campo de deslocamentos de pontos da superfície da casca do tubo como resultado da sobreposição de deslocamentos tipo viga (em que a secção transversal do tubo não ovaliza nem distorce no seu plano) em que a secção do tubo apresenta empenos e ovalização. Assim, a seguinte equação define de modo compacto os deslocamentos:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \left[\begin{Bmatrix} N_{viga} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} N_{oval} \end{Bmatrix} \right] \cdot \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_e \\ W_e \\ \varphi_e \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} a_e \\ b_e \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Onde u , v , w são os deslocamentos de um ponto na superfície do tubo referido a um sistema de eixos global, estas componentes são interpoladas entre as duas secções extremas do elemento de tubo por funções de forma, respectivamente para o modo de viga e de ovalização. Por sua vez, os elementos dos deslocamentos concentrados nas secções extremas são:

$$\{\delta_e\} = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_e \\ W_e \\ \varphi_e \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} a_e \\ b_e \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

Onde

$$\{\delta_{e-viga}\}^T = \{U_e \quad W_e \quad \varphi_e\} \text{ e } \{\delta_{e-oval}\}^T = \{a_e \quad b_e\} \quad (3.3)$$

Os deslocamentos de viga são obtidos a partir de valores nodais usando polinómios *hermitianos* como se segue:

$$W(x) = W_i N_{Hi} + \varphi_i \bar{N}_{Hi} + W_j N_{Hj} + \varphi_j \bar{N}_{Hj} \quad (3.4)$$

Onde

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{Hi} = 2. \xi^3 - 3. \xi^2 + 1 \\ \bar{N}_{Hi} = L. (\xi^3 - 2. \xi^2 + \xi) \\ N_{Hj} = -2. \xi^3 + 3. \xi^2 \\ \bar{N}_{Hj} = L. (\xi^3 - \xi^2) \end{array} \right\} \xi = \frac{x}{L}, (\xi \in (0,1)) \quad (3.5)$$

A característica essencial deste elemento de viga é a de manter as secções transversais sempre perpendiculares ao eixo médio passando pelo centro de massa das secções transversais. Deste modo, não há deformação de corte em flexão em qualquer ponto da secção; contudo, as tensões de corte podem ser obtidas por derivação do esforço transversal, como se verá mais adiante. Apresenta-se a forma matricial resumida para a obtenção dos deslocamentos referidos na equação (3.1):

$$\{u\} = [N(x, \theta)] \{u_e\} \quad (3.6)$$

Onde no primeiro membro estão os termos referentes às três componentes generalizadas dos deslocamentos; respectivamente u na direcção longitudinal (circunferência de curvatura), v na direcção meridional à superfície do tubo (na circunferência transversal) e w na direcção normal à superfície do tubo. Por extenso, escreve-se uma expressão sob forma matricial mais pormenorizada:

$$\left\{ \begin{array}{l} u \\ v \\ w \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} N_i & -r. \cos(\theta). N'_{Hi} & -r. \cos(\theta). \bar{N}'_{Hi} & 0 & N_i C_\theta^T & \\ 0 & -N_{Hi}. \sin(\theta) & -\bar{N}_{Hi}. \sin(\theta) & N_i S_\theta^T & 0 & \\ 0 & N_{Hi}. \cos(\theta) & \bar{N}_{Hi}. \cos(\theta) & N_i C_\theta^T & 0 & \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} U_i \\ W_i \\ \varphi_i \\ \{a_i\} \\ \{b_i\} \\ \{(Nó j)\} \end{array} \right\} \quad (3.7)$$

Os deslocamentos u dependem da cota z do ponto em análise em relação ao eixo médio da viga; por sua vez é a rotação da secção (a derivada de W) que condiciona a intensidade de u .

Nesta equação matricial, os termos S_{θ}^T e C_{θ}^T são uma linha de termos em seno e co-seno com segue:

$$\begin{cases} S_{\theta}^T = \left\{ -\frac{1}{2} \cdot \sin(2\theta) & -\frac{1}{3} \cdot \sin(3\theta) & -\frac{1}{4} \cdot \sin(4\theta), \dots \right\} \\ C_{\theta}^T = \{ \cos(2\theta) & \cos(3\theta) & \cos(4\theta), \dots \} \end{cases} \quad (3.8)$$

Do mesmo modo, os vectores $\{a_i\}$ e $\{b_i\}$ têm tantos termos como os desejados num desenvolvimento em série trigonométrica.

3.1.2. O CAMPO DE DEFORMAÇÕES

Nesta secção caracteriza-se de forma matricial o estado de deformação em qualquer ponto da casca de um tubo curvo sob flexão no plano de curvatura. Para tal, são usados dois operadores diferenciais distintos, respectivamente um para uma geometria do tubo curvo que se considera como um tubo recto e outro operador que trata o tubo curvo como efectivamente parte de uma casca toroidal. Este tratamento do problema permite obter bons resultados na verificação de condições de equilíbrio do elemento a definir e simetria de deformações em caso de forças simétricas (o *patch test*, a ser detalhado mais adiante).

Deformações num tubo recto:

O operador diferencial a usar, não considera que o tubo tenha um raio de curvatura R ; assim, as deformações num modelo de semi-membrana, são obtidas pela equação (tubo considerado horizontal, quer dizer que está paralelo ao eixo global x_0):

$$[B]_{viga} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \text{ (Nó } j) \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

As três linhas da matriz anterior referem-se às deformações mais importantes para a formação do elemento de tubo, as quais são:

- A deformação longitudinal (de membrana) ε_{xx} ;
- A deformação de corte (de membrana) $\gamma_{x\theta}$
- A deformação de flexão (proveniente da variação de curvatura na direcção circunferencial θ): $k_{\theta\theta}$

Antes de se prosseguir no estabelecimento dos termos e operadores diferenciais na definição do campo de deformações, algumas hipóteses de simplificação do problema, (contudo não afectando de modo assinalável a precisão dos resultados) são essenciais para se estabelecer uma solução eficaz para programação em computador. Tais hipóteses são:

- O tubo é considerado como uma estrutura tipo casca fina, em que a linha normal à espessura permanece recta mesmo depois da deformação, seja do tipo membrana, seja em flexão;
- A normal à superfície assim permanece mesmo em estado de flexão (modelo de Love-Kirchhoff)
- O raio da secção transversal r é considerado muito menor do que o raio R de curvatura média do tubo. Esta hipótese define a expressão da deformação ε_{xx} abaixo a partir do ponto 3.2.2: $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R}(-v \cdot \sin \theta + w \cdot \cos \theta)$, onde na realidade, o termo no denominador R , deveria ser $R + r \cdot \cos \theta$, mas aqui supõe-se que $R + r \cdot \cos \theta = R$.

Estas deformações são obtidas pelo operador diferencial seguinte:

$$[L]_{viga} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

As expressões dos elementos integrando a matriz da equação (3.9) resultam da pré-multiplicação da equação (3.10) pela equação (3.7), dando os seguintes termos:

$$\begin{aligned}
 B_{v11} &= N'_i & B_{v12} &= \frac{-r \cdot \cos(\theta)}{L^2} N''_{Hi} & B_{v13} &= \frac{-r \cdot \cos(\theta)}{L^2} \bar{N}''_{Hi} \\
 B_{v21} &= 0 & B_{v22} &= 0 & B_{v23} &= 0 \\
 B_{v31} &= 0 & B_{v32} &= 0 & B_{v33} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Estes termos permitem apenas formar uma sub-matriz de rigidez para esforços de viga, como se demonstra a seguir; entretanto, apresentam-se as derivadas necessárias ao desenvolvimento dos termos, a partir das expressões da equação (3.5):

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{Hi} = 2 \cdot \xi^3 - 3 \cdot \xi^2 + 1 \\ \bar{N}_{Hi} = L \cdot (\xi^3 - 2 \cdot \xi^2 + \xi) \\ N_{Hj} = -2 \cdot \xi^3 + 3 \cdot \xi^2 \\ \bar{N}_{Hj} = L \cdot (\xi^3 - \xi^2) \end{array} \right\}; \tag{3.12}$$

$$1^{\text{a}} \text{ Deriv: } \left\{ \begin{array}{l} N'_{Hi} = 6 \cdot \xi^2 - 6 \cdot \xi \\ \bar{N}'_{Hi} = L \cdot (3 \cdot \xi^2 - 4 \cdot \xi + 1) \\ N'_{Hj} = -6 \cdot \xi^2 + 6 \cdot \xi \\ \bar{N}'_{Hj} = L \cdot (3 \cdot \xi^2 - 2 \cdot \xi) \end{array} \right\}; 2^{\text{a}} \text{ Deriv: } \left\{ \begin{array}{l} N''_{Hi} = 12 \cdot \xi - 6 \\ \bar{N}''_{Hi} = L \cdot (6 \cdot \xi - 4) \\ N''_{Hj} = -12 \cdot \xi + 6 \\ \bar{N}''_{Hj} = L \cdot (6 \cdot \xi - 2) \end{array} \right\} \tag{3.13-a}$$

Em que ($\xi = 0 \dots 1$)

As derivadas estão na coordenada adimensional ξ ; a conversão para derivadas em x leva o factor *jacobiano*: $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \xi}$, sendo L o comprimento do elemento; esta é a razão por aparecer o termo quadrático em L na equação (3.11). Os termos de $[B]$ na equação (3.11) são agora actualizados com valores adicionais, em que o tubo se considera curvo. Deste modo, o operador $[L]$ passa a ser:

$$[L]_{\text{tubo}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{1}{R} \cdot \sin(\theta) & \frac{1}{R} \cdot \cos(\theta) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

Este operador multiplicará exclusivamente as colunas 4 e 5 (para o nó-secção i) e também as 9 e 10, na expressão matricial da equação (3.7). Convém lembrar que as colunas 4, 5, 9 e 10 são de facto um conjunto maior, podendo expandir-se de acordo com o número de termos que se deseje gerar nas séries trigonométricas da equação (3.8). Assim, os termos adicionais da matriz $[B]$ são:

$$\begin{aligned}
 B_{14} &= \frac{N_i}{R} \cdot \sin(\theta) * S_{\theta}^T + \frac{N_i}{R} \cdot \cos(\theta) * C_{\theta}^T & B_{15} &= N_i' * C_{\theta}^T \\
 B_{24} &= N_i' * S_{\theta}^T & B_{25} &= \frac{N_i}{r} * \dot{C}_{\theta}^T \\
 B_{34} &= -\frac{N_i}{r^2} \cdot (-\dot{S}_{\theta}^T + \ddot{C}_{\theta}^T) & B_{35} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Nestas expressões os termos B_{25} e B_{34} contêm derivadas em θ assim anotadas:

$$\dot{S}_{\theta}^T = \frac{\partial S_{\theta}^T}{\partial \theta}; \quad \ddot{C}_{\theta}^T = \frac{\partial^2 C_{\theta}^T}{\partial \theta^2}$$

Os termos para a sub-partição j da matriz $[B]$, (quando $[L]$ nas equações ((3.10) ou (3.13)), multiplica pelos termos em j da equação (3.7), são obtidos alterando unicamente o índice das funções de forma N , que de i passa a ser j .

3.2. A MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE VIGA-TUBO

Esta fase do trabalho permite a resolução de problemas referentes à flexão generalizada de elementos de uma tubagem com partes curvas em que as forças existam apenas no plano de curvatura. Um exemplo simples permite avaliar as potencialidades deste elemento. A matriz de rigidez obtém-se efectuando o produto matricial seguinte:

$$k_{\dot{y}} = \int_0^L \int_0^{2\pi} B_{ik} D_{jj} D_{kj} \cdot r \cdot d\theta dx \tag{3.16}$$

Onde D_{jj} são os termos de uma matriz diagonal contendo as propriedades mecânicas do material:

$$[D] = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Esta matriz é válida para estruturas tipo casca em que é adoptado o modelo de deformação de *semi-membrana* e há *inextensibilidade* numa direcção principal (aqui segundo θ). Os seguintes termos da equação (3.15) podem então ser assim obtidos:

Referentes a deformação da viga:

$$k_{11} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (N'_i N'_i + 0 + 0) r d\theta dx = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\pi r}{L}$$

$$k_{11} = \frac{EA}{L(1-\nu^2)} \quad (3.18)$$

Onde A é a área transversal de um tubo circular de parede fina;

$$k_{12} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (B_{\nu 11} B_{\nu 12} + B_{\nu 21} B_{\nu 22} + B_{\nu 31} B_{\nu 32}) r d\theta dx = 0 \quad (3.19)$$

$$k_{13} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (B_{\nu 11} B_{\nu 13} + B_{\nu 21} B_{\nu 23} + B_{\nu 31} B_{\nu 33}) r d\theta dx = 0 \quad (3.20)$$

Estes integrais são nulos porque, para além de termos B_{ij} nulos, alguns termos trigonométricos geram integral nulo no intervalo $[0, 2\pi]$.

Termos adicionais de viga:

$$k_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (B_{\nu 12} B_{\nu 12} + B_{\nu 22} B_{\nu 22} + B_{\nu 32} B_{\nu 32}) r d\theta dx$$

$$k_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(\frac{-r \cos(\theta)}{L^2} (-6 + 12\xi) \right)^2 r d\theta \cdot L \cdot d\xi = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{12\pi r^3}{L^3} = \frac{12EI}{(1-\nu^2)L^3} \quad (3.21)$$

Onde I é o momento de inércia de flexão de um tubo circular de parede fina (espessura h)

$$\begin{aligned}
 k_{23} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (B_{\nu 12} B_{\nu 13} + B_{\nu 22} B_{\nu 23} + B_{\nu 32} B_{\nu 33}) r d\theta dx \\
 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(\frac{-r \cos(\theta)}{L^2} \right)^2 (-6 + 12\xi) \cdot L \cdot (-4 + 6\xi) \cdot r d\theta \cdot L \cdot d\xi = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{-6\pi r^3}{L^2} \\
 k_{23} &= \frac{-6EI}{(1-\nu^2)L^2} \tag{3.22}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{33} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (B_{\nu 13} B_{\nu 13} + B_{\nu 23} B_{\nu 23} + B_{\nu 33} B_{\nu 33}) r d\theta dx \\
 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(\frac{-r \cos(\theta)}{L^2} \right)^2 L^2 \cdot (-4 + 6\xi)^2 \cdot r d\theta \cdot L \cdot d\xi = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{4\pi r^3}{L} \\
 k_{33} &= \frac{4EI}{(1-\nu^2)L} \tag{3.23}
 \end{aligned}$$

Nos termos de viga fez-se uma aproximação no *MATLAB*[®] em que $\nu = 0$.

Interação com deformação de tubo: ovalização e empeno

Nestes termos caracteriza-se a interacção entre os deslocamentos de flexão (transversais, como W , ou rotações φ) com a ovalização e o empeno das secções transversais. Tal acontece só quando o tubo tiver raio de curvatura R (multiplicação dos termos da matriz $[B]_{\text{Viga}}$ da equação (3.11) com os da equação (3.14) de $[B]_{\text{T-Curvo}}$). Estes termos são:

$$k_{U_i o_i} = 0; \quad k_{U_i \Omega_i} = 0; \quad k_{U_i o_j} = 0; \quad k_{U_i \Omega_j} = 0 \tag{3.24}$$

São termos resultantes do esforço axial sobre a ovalização ou empeno da secção transversal; o valor nulo só existe se o eixo médio do elemento de tubo estiver paralelo aos deslocamentos U_i ou U_j na equação (3.7).

3.2.1. EFEITO DE W SOBRE OS TERMOS DE OVALIZAÇÃO

$$\begin{aligned}
 \{k_{\varphi 0}\}^T &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (B_{V12}B_{14} + B_{V22}B_{24} + B_{V32}B_{34})rd\theta dx \\
 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(\frac{-rcos(\theta)}{L^2} \right) (-6 + 12\xi) \times \left(-\frac{N_i}{R} \cdot \sin(\theta) \cdot S_\theta^T + \frac{N_i}{R} \cdot \cos(\theta) \cdot C_\theta^T \right) rd\theta Ld\xi \\
 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{3\pi r^2}{4LR}; 0; 0; \dots; 0 \right\}; \quad \text{com } N_i = (1 - \xi)
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Aqui $\{k_{\varphi 0}\}^T$ não é um único termo, mas sim uma matriz com uma só linha e n_θ colunas; este é o único termo *não-nulo* e refere-se ao efeito de W sobre as amplitudes de ovalização a_i , para $i=2$; quer dizer, o termo de ordem 2θ , todos os de ordem superior tem os termos.

3.2.2. EFEITO DE W SOBRE OS TERMOS DE EMPENO

Ordenando os termos para a devida multiplicação matricial vamos obter:

$$\begin{aligned}
 \{k_{W\Omega}\}^T &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (B_{V12}B_{15} + B_{V22}B_{25} + B_{V32}B_{35})rd\theta dx \\
 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(\frac{-rcos(\theta)}{L^2} \right) (-6 + 12\xi) \times (N_i \cdot C_\theta^T) rd\theta Ld\xi \\
 &= \{0; 0; 0; \dots; 0\}; \quad \text{com } N_i = (1 - \xi)
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

3.2.3. EFEITO DE φ SOBRE OS TERMOS DE EMPENO

$$\{k_{\varphi\Omega}\}^T = \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (B_{V13}B_{15} + B_{V23}B_{25} + B_{V33}B_{35})rd\theta dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(\frac{-r \cos(\theta)}{L^2} \right) L(-4 + 6\xi) \times (N_i \cdot C_\theta^T) r d\theta L d\xi \\
 &= \{0; 0; 0; \dots; 0\}; \quad \text{com } N_i = (1 - \xi) \tag{3.27}
 \end{aligned}$$

Do que foi explicado retira-se que o cálculo de termos adicionais na matriz de rigidez envolvendo a acção da secção i sobre j passa por conservar o índice i para os termos de origem da acção e j para os termos da secção que é influenciada estruturalmente. As expressões são meras repetições das que foram apresentadas atrás, pelo que não serão repetidas. O uso de um programa efectuado em MATLAB[®] permitiu obter sem erros o resultado dos integrais como os que foram explicitados anteriormente. Algumas expressões serão apresentadas a seguir com o intuito de clarificar a sua determinação numérica.

3.3. INTERACÇÃO DE DESLOCAMENTOS

3.3.1. NA SECÇÃO I SOBRE A SECÇÃO J

Os coeficientes, determinados anteriormente, mudam com os integrais efectuados na variável ξ ;

$$\begin{aligned}
 k_{W_i W_j} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (B_{\nu 12} B_{\nu 17} + B_{\nu 22} B_{\nu 27} + B_{\nu 32} B_{\nu 37}) r d\theta dx \\
 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{-r \cdot \cos\theta}{L^2} \right)^2 (-6 + 12\xi)(6 - 12\xi) r d\theta L d\xi \tag{3.28}
 \end{aligned}$$

$$k_{W_i W_j} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{-12\pi r^3}{L^3} = \frac{-12EI}{(1-\nu^2)L^3}$$

$$k_{W_i \varphi_j} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (B_{\nu 12} B_{\nu 18} + B_{\nu 22} B_{\nu 28} + B_{\nu 32} B_{\nu 38}) r d\theta dx$$

$$= \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{-r \cdot \cos\theta}{L^2} \right)^2 (-6 + 12\xi) \times L(6\xi - 2) r d\theta L d\xi = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{6\pi r^3}{L^2} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} k_{\varphi_i W_j} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (B_{v13} B_{v17} + B_{v23} B_{v27} + B_{v33} B_{v37}) r d\theta dx \\ &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{-r \cdot \cos\theta}{L^2} \right)^2 (-4 + 6\xi)(6 - 12\xi) r d\theta L d\xi = \frac{6EI}{(1-\nu^2)L^3} \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} k_{\varphi_i \varphi_j} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (B_{v13} B_{v18} + B_{v23} B_{v28} + B_{v33} B_{v38}) r d\theta dx \\ &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{-r \cdot \cos\theta}{L^2} \right)^2 L^2 (-4 + 6\xi)(6\xi - 2) r d\theta L d\xi = \frac{2EI}{(1-\nu^2)L} \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} k_{W_i O_j} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (B_{v12} B_{v19} + B_{v22} B_{v29} + B_{v32} B_{v39}) r d\theta dx \\ &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{-r \cdot \cos\theta}{L^2} \right) (-6 + 12\xi) \left(-\frac{N_j}{R} \sin\theta S_\theta^T + \frac{N_j}{R} \cos\theta C_\theta^T \right) r d\theta L d\xi \\ &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{-3\pi r^2}{4LR}; 0; 0; \dots; 0 \right\}; \quad \text{com } N_j = \xi \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \{k_{W_i \Omega_j}\}^T &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (B_{v12} B_{110} + B_{v22} B_{210} + B_{v32} B_{310}) r d\theta dx \\ &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(\frac{-r \cos\theta}{L^2} \right) (-6 + 12\xi) \times (N_j \times C_\theta^T) r d\theta L d\xi \\ &= \{0; 0; 0; \dots; 0\}; \quad \text{com } N_j = \xi \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned}
 \{k_{\varphi_i \Omega_j}\}^T &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (B_{\nu 13} B_{110} + B_{\nu 23} B_{210} + B_{\nu 33} B_{310}) r d\theta dx \\
 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(\frac{-r \cos \theta}{L^2} \right) L(-4 + 6\xi) \times (N_j \times C_\theta^T) r d\theta L d\xi \quad (3.34) \\
 &= \{0; 0; 0; \dots; 0\}; \text{ com } N_j = \xi
 \end{aligned}$$

Interação mútua entre deslocamentos tipo casca (tubo curvo) de ovalização e empeno

$$\begin{aligned}
 k_{O_i O_i} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (B_{14} B_{14} + B_{24} B_{24} + B_{34} B_{34}) r d\theta dx = \\
 &\frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ \left(-\frac{N_i}{R} \sin \theta \times S_\theta^T + \frac{N_i}{R} \cos \theta \times C_\theta^T \right)^T \left(-\frac{N_i}{R} \sin \theta \times S_\theta^T + \frac{N_i}{R} \cos \theta \times C_\theta^T \right) + \right. \\
 &\left. \frac{1-\nu}{2} (N_i' \times S_\theta^T)^T (N_i' \times S_\theta^T) + \frac{h^2}{12} \left[-\frac{N_i}{r^2} (-\dot{S}_\theta^T + \ddot{C}_\theta^T) \right]^T \left[-\frac{N_i}{r^2} (-\dot{S}_\theta^T + \ddot{C}_\theta^T) \right] \right\} r d\theta dx \quad (3.35)
 \end{aligned}$$

(importante notar que há *ortogonalidade* de matrizes como $\int_0^{2\pi} S_\theta C_\theta^T d\theta$ e $\int_0^{2\pi} C_\theta S_\theta^T d\theta$, que dão integrais nulos). A forma da sub-matriz k_{44} (para apenas três termos trigonométricos) é:

$$\begin{aligned}
 k_{O_i O_i} &= \\
 &\left[\begin{array}{ccc}
 \frac{5\pi r L}{24R^2} + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) \frac{\pi r}{4L} + \left(\frac{h^2}{12}\right) \frac{3\pi r}{r^3} & 0 & \frac{5\pi r L}{96R^2} \\
 0 & \frac{5\pi r L}{27R^2} + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) \frac{\pi r}{9L} + \left(\frac{h^2}{12}\right) \frac{64\pi r}{3r^3} & 0 \\
 \frac{5\pi r L}{96R^2} & 0 & \frac{17\pi r L}{96R^2} + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) \frac{\pi r}{16L} + \left(\frac{h^2}{12}\right) \frac{75\pi r}{r^3}
 \end{array} \right] \quad (3.36)
 \end{aligned}$$

3.4. EXEMPLO SOBRE A GERAÇÃO DE TERMOS DA MATRIZ

A fim de testar o elemento modelado pela sua matriz de rigidez anteriormente definida, realiza-se uma aplicação simples deste elemento, em que um tubo curvo é submetido a flexão pura. Os desenvolvimentos em série como S_θ^T e C_θ^T terão apenas um termo; quer dizer que se resumem a $S_\theta^T = -\frac{1}{2}a_2 \sin(2\theta)$ e $C_\theta^T = a_2 \cos(2\theta)$. Assim, o termo $k_{O_i O_i}$ fica resumido ao primeiro termo da sub-matriz anterior truncando os outros:

$$k_{O_i O_i} = \frac{5\pi r L}{24R^2} + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) \frac{\pi r}{4L} + \left(\frac{h^2}{12}\right) \frac{3\pi L}{r^3} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} k_{O_i \Omega_i} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (B_{14}B_{15} + B_{24}B_{25} + B_{34}B_{35}) r d\theta dx = \\ &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ \left(-\frac{N_i}{R} \sin\theta \times S_\theta^T + \frac{N_i}{R} \cos\theta \times C_\theta^T \right)^T N_i' \times C_\theta^T + \frac{1-\nu}{2} (N_i' \times S_\theta^T)^T \left(\frac{N_i}{r} \times \dot{C}_\theta^T \right) \right\} r d\theta dx \end{aligned}$$

$$k_{O_i \Omega_i} = \frac{-Eh}{2(1+\nu)} \frac{\pi}{2} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} k_{\Omega_i \Omega_i} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (B_{15}B_{15} + B_{25}B_{25} + B_{35}B_{35}) r d\theta dx = \\ &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ (N_i' \times C_\theta^T)^T (N_i' \times C_\theta^T) + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{N_i}{r} \times \dot{C}_\theta^T \right)^T \left(\frac{N_i}{r} \times \dot{C}_\theta^T \right) \right\} r d\theta dx \end{aligned}$$

$$k_{\Omega_i \Omega_i} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\pi r}{L} + \frac{1-\nu}{2} \frac{4\pi L}{3r} \right) \quad (3.39)$$

$$k_{\Omega_i \Omega_j} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ (N'_i \times C_\theta^T)^T (N'_j \times C_\theta^T) + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{N_i}{r} \times \dot{C}_\theta^T \right)^T \left(\frac{N_j}{r} \times \dot{C}_\theta^T \right) \right\} r d\theta dx =$$

$$k_{\Omega_i \Omega_j} = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \left(-\frac{\pi r}{L} + \frac{1-\nu}{2} \frac{4\pi L}{6r} \right) \quad (3.40)$$

$$k_{O_i O_j} = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \left(\frac{3\pi r L}{48R^2} - \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\pi r}{L} + \frac{h^2}{72} \frac{9\pi L}{r^3} \right) \quad (3.41)$$

$$k_{O_i \Omega_j} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (B_{14}B_{110} + B_{24}B_{210} + B_{34}B_{310}) r d\theta dx = \frac{-Eh}{2(1+\nu)} \frac{\pi}{2} \quad (3.42)$$

(os termos de viga não sofrem qualquer alteração em relação à forma da equação (3.17) à equação (3.22) e termos reflectidos na matriz global).

Mais termos gerados mostram que alguns integrais trigonométricos se apresentam nulos devido a ortogonalidade, o que simplifica as rotinas de cálculo dispensando o consumo de tempo de *CPU*. Importa referir que os termos associados unicamente a deslocamentos de viga em que a secção transversal não distorce (ovaliza ou empena), acima designados por viga-tubo, são quanto à forma, em tudo iguais aos que se usam para a formulação de elementos de viga rectos *hermitianos*, de uso muito difundido em análise estrutural com vigas. Tais elementos asseguram resultados muito precisos, pois têm continuidade até ao tipo C_1 . (continuidade da primeira derivada do deslocamento transversal, que neste tipo de elementos se refere à rotação da secção transversal). Este tipo de elementos modela com precisão a deformação de tracção, mas não de corte, uma vez que a normal à secção transversal permanece normal depois da flexão, apresentando a incoerência de deformação de corte nula. No entanto, o uso de equações de equilíbrio em termos de forças internas mostra que é possível obter de modo exacto o esforço transverso gerado.

Em resumo, este elemento permite modelar:

- Esforços axiais (tipo barra);
- Flexão pura;
- Não permite o esforço transversal por aplicação de equação constitutiva, mas contorna-se este problema recorrendo a equações de equilíbrio;
- Permite modelar deslocamento e rotações de corpo rígido, o resultado em que se prescrevem apenas deslocamentos de corpo rígido tem que gerar esforços internos nulos (o que se verifica);
- Estes atributos enquadram o grupo de elementos da matriz de rigidez deste elemento de viga (que são apenas parte de toda a matriz do elemento de tubo curvo) como satisfazendo o Patch Test, um conceito proposto pelo investigador inglês Bruce Irons (Irons and Ahmad, "Techniques in Finite Elements", Ellis-Horwood, 1980).

A fim de clarificar as técnicas analíticas e numéricas inerentes à geração dos termos da matriz de rigidez do elemento de formulação combinada aqui apresentado, um tubo curvo é modelado com elementos do tipo anel (*ring*). O elemento tem parâmetros geométricos identificados como se mostra na figura 8.

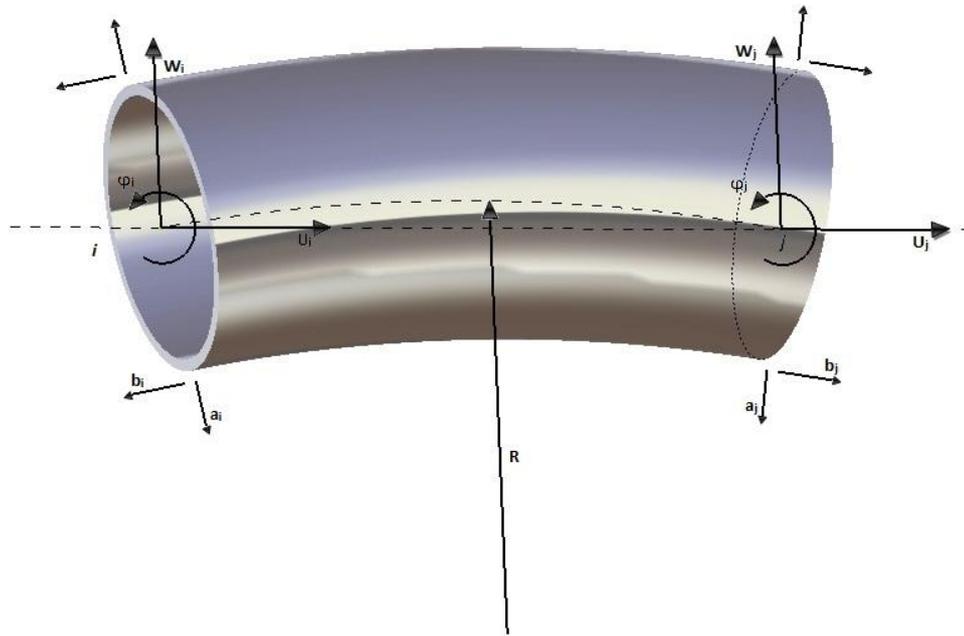


FIGURA 9: ELEMENTO DE TUBO: DESLOCAMENTOS NODAIS NAS SECÇÕES / E J

Identificação dos deslocamentos:

U = Deslocamento axial das secções (como viga)

W = Deslocamento transversal de secções (como viga)

φ = Rotação de secções (como viga)

a_i = Termo de desenvolvimento em série de deslocamento por ovalização (casca)

b_i = Termo de desenvolvimento em série de deslocamento por empeno (casca)

Admita-se que a secção j não se pode deslocar; contudo o tubo é livre de ovalizar ou sofrer empenos nessa secção. As condições de fronteira para este problema são:

Secção i: φ_i – Rotação prescrita $\delta\alpha$ radianos

W_i – livre

a_i – livre

b_i – livre

U_i – livre

Consideremos que o tubo tem um ângulo de curvatura de 90° , tendo um extremo fixo tal como referido anteriormente; apenas uma rotação de $\delta\alpha$ é prescrita à secção livre. As dimensões e propriedades mecânicas do material são (unidades S.I., mas as dimensões em mm):

$$r = 50$$

$$R = 200$$

$$h = 2$$

Secção i: φ_i – Rotação prescrita 0 radianos (fixa)

W_i – fixo (0)

a_i – livre

b_i – livre

U_i – fixo (0)

Secção j: φ_j – Rotação prescrita ($\delta\alpha$ radianos)

W_j – livre

a_j – livre

b_j – livre

U_j – livre

Material: aço carbono; módulo de Young $E=210$ GPa

Coefficiente de Poisson $\nu=0.3$

Problema resolvido com 10 elementos “ring” em que cada um tem o arco médio $L=31.415926\text{mm}$

A solução para este problema dá como seria de esperar, uma ovalização uniforme. Os resultados referentes à tensão de membrana longitudinal σ_{xx} são para o nó nº 11, (tendo em conta que são 10 elementos gerando malha em condições de simetria)

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= [D][B]\{\delta\} \\ &= \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \left[-r \cos\theta \times \left(\frac{\partial^2 (\{N_H\}^T \{W\} + \{\bar{N}_H\}^T \{\varphi\})}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{R} (\{N\}^T \{-\sin\theta \times S_\theta^T + \cos\theta \times C_\theta^T\} \{a\}) + \right. \\ &\quad \left. \{N\}^T (\{C_\theta^T\} \{b\}) \right] \end{aligned} \quad (3.43)$$

O significado dos termos na equação anterior refere-se a notação abreviada onde há desenvolvimento de séries trigonométricas (com três termos apenas) combinados com funções de forma lineares e cúbicas hermitianas que são funções da coordenada longitudinal x , como descrito anteriormente. Assim, $W(x)$ é um deslocamento tipo viga definido tal como aparece na equação (3.7):

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & -r \cdot \cos(\theta) \cdot N'_{Hi} & -r \cdot \cos(\theta) \cdot \bar{N}'_{Hi} & 0 & N_i C_\theta^T \\ 0 & -N_{Hi} \cdot \sin(\theta) & -\bar{N}_{Hi} \cdot \sin(\theta) & N_i S_\theta^T & 0 \\ 0 & N_{Hi} \cdot \cos(\theta) & \bar{N}_{Hi} \cdot \cos(\theta) & N_i C_\theta^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{Nó j\} \\ \left\{ \begin{array}{l} U_i \\ W_i \\ \varphi_i \\ \{a_i\} \\ \{b_i\} \end{array} \right\} \\ \{Nó j\} \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

onde u é o deslocamento longitudinal (na direcção do arco de curvatura do tubo, ν é o deslocamento circunferencial (na direcção da circunferência transversal) e w é o deslocamento radial, também na circunferência da secção transversal). Este último deslocamento resulta da sobreposição de um termo devido a movimento de viga $W(x)$ e

os termos devidos exclusivamente à distorção da secção transversal por ovalização $O(x, \theta)$, que combina funções de forma algébricas lineares com termos trigonométricos:

$$W = (N_{Hi}W_i + N_{Hj}W_j) + (\bar{N}_{Hi}\varphi_i + \bar{N}_{Hj}\varphi_j) \quad (3.44)$$

Por sua vez, há o termo adicional para o deslocamento transversal global, que é devido à distorção da secção por ovalização.

$$\begin{aligned} & \{-\sin\theta \times S_{-\theta}^T + \cos\theta \times C_{-\theta}^T\} \{a\} \\ &= \left(\frac{\sin\theta\sin2\theta}{2} + \cos\theta\cos2\theta\right) a_1 + \left(\frac{\sin\theta\sin3\theta}{3} + \cos\theta\cos3\theta\right) a_2 + \left(\frac{\sin\theta\sin4\theta}{4} + \cos\theta\cos4\theta\right) a_3 \quad (3.45) \end{aligned}$$

Cada um destes termos é multiplicado por uma função N_i e soma-se a um termo igual mas multiplicado por N_j (funções algébricas do primeiro grau como já descrito anteriormente). Este é o caso dos termos referentes à contribuição da distorção da secção no seu plano por empeno (*warp*) a somar aos anteriores:

$$N'_i(b_{1i}\cos2\theta + b_{2i}\cos3\theta + b_{3i}\cos4\theta) + N'_j(b_{1j}\cos2\theta + b_{2j}\cos3\theta + b_{3j}\cos4\theta)$$

$$\text{Onde } N'_i = -\frac{1}{L}; \quad N'_j = +\frac{1}{L} \quad (3.46)$$

No presente exemplo, os parâmetros resultantes da solução por *MATLAB*[®] ou *FORTRAN.90*[®] referem-se ao elemento nº 5 num total de 10 elementos. A estrutura está submetida a momento flector puro, equivalente a uma rotação no bordo livre igual a 1 radiano, não importando qual o elemento seleccionado (para outros valores basta multiplicar todos pelo factor de escala $\delta\alpha$):

Para o Nó *i*

$$-2.56621421649910 \quad 0.0000000000000000E+000 \quad (U_i)$$

12.2675614630552	0.0000000000000000E+000	(W _i)
0.4000000000000318	0.0000000000000000E+000	(φ _i)
77.0033259294450	0.0000000000000000E+000	(α _{2i})
-1.334563068418871E-011	0.0000000000000000E+000	(α _{3i})
-11.8979180978705	0.0000000000000000E+000	(α _{4i})
1.079995276037379E-011	0.0000000000000000E+000	(b _{2i})
-4.560800089702923E-012	0.0000000000000000E+000	(b _{3i})
8.235374393532863E-013	0.0000000000000000E+000	(b _{4i})

Para o Nó *j*

-5.01277052843125	0.0000000000000000E+000	(U _j)
18.8992440326103	0.0000000000000000E+000	(W _j)
0.5000000000000324	0.0000000000000000E+000	(φ _j)
77.0033259294273	0.0000000000000000E+000	(α _{2j})
2.732144324439095E-013	0.0000000000000000E+000	(α _{3j})
-11.8979180978723	0.0000000000000000E+000	(α _{4j})
1.129443838858997E-011	0.0000000000000000E+000	(b _{2j})
-4.767749557640088E-012	0.0000000000000000E+000	(b _{3j})
8.582693498184536E-013	0.0000000000000000E+000	(b _{4j})

(estes resultados estão expressos no referencial global; devem ser convertidos para um sistema de eixos local quando se calcular as tensões em cada elemento)

Como se verifica pelos resultados, os termos referentes à distorção da secção no seu próprio plano (empeno ou *warp*) são desprezáveis. Tal resulta do facto de não haver condições de restrição á ovalização no bordo (como flanges ou tubos tangentes, por exemplo).

O resultado agora obtido é de grande importância na determinação do momento flector interno (isto é, o que resulta das forças de reacção interna quando os deslocamentos são prescritos; neste caso foi um ângulo de flexão de bordo). Para obter tal parâmetro, vamos efectuar o cálculo:

$$M_f = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} \varepsilon_{xx} r^2 \cos\theta d\theta \quad (3.47)$$

A substituição dos termos da deformação ε_{xx} (ver as equações 3.14 e 3.44) na equação 3.46 mostrará que termos com ovalização acima da ordem 2 (isto é 2θ) são ortogonais com $\cos\theta$ na integração $[0, 2\theta]$. Deste modo, a equação 3.46 resume-se a esta expressão:

$$M_{fCurvo} = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \left[r^3 \pi \left(\frac{d^2 N_{Hi}}{L_e^2 d\xi^2} W_i + \frac{d^2 N_{Hj}}{L_e^2 d\xi^2} W_j + \frac{d^2 \bar{N}_{Hi}}{L_e^2 d\xi^2} \varphi_i + \frac{d^2 \bar{N}_{Hj}}{L_e^2 d\xi^2} \varphi_j \right) - \frac{3r^2 \pi}{4R} (a_{2i} N_i + a_{2j} N_j) \right] \quad (3.48)$$

Onde o termos a_{2i} e a_{2j} representam a ovalização de apenas a ordem 2θ nas secções transversais i e j . Nesta expressão reconhece-se que se R (o raio de curvatura do tubo) for muito grande (isto é, $R \rightarrow \infty$), o momento flector tem uma expressão igual à de uma viga (ou tubo recto), onde o termo $\pi r^3 h$ é o momento de inércia à flexão da secção transversal circular e parede fina de um tubo:

$$M_{fCurvo} = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} r^3 \pi \left(\frac{d^2 N_{Hi}}{L_e^2 d\xi^2} W_i + \frac{d^2 N_{Hj}}{L_e^2 d\xi^2} W_j + \frac{d^2 \bar{N}_{Hi}}{L_e^2 d\xi^2} \varphi_i + \frac{d^2 \bar{N}_{Hj}}{L_e^2 d\xi^2} \varphi_j \right) \quad (3.49)$$

Com esta expressão podemos obter um termo adimensional de grande utilidade no projecto e análise estrutural de sistemas de tubagens, o qual é o Factor de

Flexibilidade K_α introduzido primeiro por *Theodore von Karman* (1911). Face ao que acabou de ser referido sobre a identificação de termos na equação (3.47) define-se Factor de Flexibilidade como sendo a razão entre os momentos internamente gerados num tubo curvo e num tubo recto equivalente (isto é, com o mesmo comprimento de circunferência de curvatura longitudinal e a mesma secção transversal), quando submetidos ao mesmo ângulo de flexão. Assim, a expressão para o Factor de Flexibilidade K_α é:

$$K_\alpha = \frac{M_{fRecto}}{M_{fCurvo}} \quad (3.50)$$

Esta expressão depende da coordenada axial (ou longitudinal x ou adimensional ξ dentro do elemento de anel seleccionado), mas tal não deve acontecer em casos em que o tubo curvo é sujeito a uma rotação angular prescrita ou então está sob a acção de um momento de bordo; em qualquer secção transversal, o momento flector interno deve ser constante; porém, pode haver variações uma vez que o modelo proporciona resultados aproximados apenas. Como procedimento, selecciona-se o elemento equidistante dos extremos do tubo e dentro desse elemento, usa-se a coordenada adimensional $\xi = 0.5$. Para o exemplo acima estudado, os seguintes parâmetros nas secções i e j do elemento 5 (num total de 10) são:

Secção i

12.2675614630552	0.0000000000000000E+000	(W_i)
0.4000000000000318	0.0000000000000000E+000	(φ_i)
77.0033259294450	0.0000000000000000E+000	(α_{2i})

Secção j

18.8992440326103	0.0000000000000000E+000	(W_j)
------------------	-------------------------	---------

0.5000000000000324	0.0000000000000000E+000	(φ_j)
77.0033259294273	0.0000000000000000E+000	(α_{2j})

Usando as expressões para as derivadas das funções hermitianas da equação 3.12-a, o resultado é:

$$K_\alpha = \frac{\frac{(-0.4+0.5)}{L_e(=15.707)} \times \pi \times 50^3 \times 2}{\frac{-0.4+0.5}{L_e(=15.707)} \times \pi \times 50^3 \times 2 - \frac{3\pi r^2 h}{4 \times 200} \times 77} = 10.76 \quad (3.51)$$

Este número está em razoável concordância com o resultado de von Karman (1911) que, tendo assumido apenas um único termo trigonométrico dos vários deslocamentos caracterizando a deformação do tubo, obteve a fórmula seguinte para o factor de flexibilidade:

$$K_\alpha = \frac{12\lambda^2 + 10}{12\lambda^2 + 1} = 8 \quad (3.52)$$

Onde $\lambda = \frac{Rh}{r^2}$ é um factor geométrico do tubo curvo, calculado a partir de h , a espessura do tubo; R o raio de curvatura média e r o raio da secção transversal. Na literatura técnica em lingua inglesa (por exemplo, no Código de dimensionamento (Thomas K., “*Stiffening Effects on Thin-Walled Piping Elbows of Adjacent Piping and Nozzle Constraints*”, The Pressure Vessels and Piping Division, ASME, 50, 93-108 (1981) λ é simplesmente designado como pipe factor).

Na figura 10 pode-se comparar também o presente resultado com os obtidos por Elza Fonseca (2002) que analisou vários tubos tendo como condições de fronteira os externos livres ou com flanges rígidas. Em todos os casos, foram consideradas cargas de momento de bordo. Pode verificar-se uma boa concordância de resultados no caso analisado, estando o valor de K_α obtido entre o resultado em (2002) e os valores tabelados pelo Código ASME (1981)

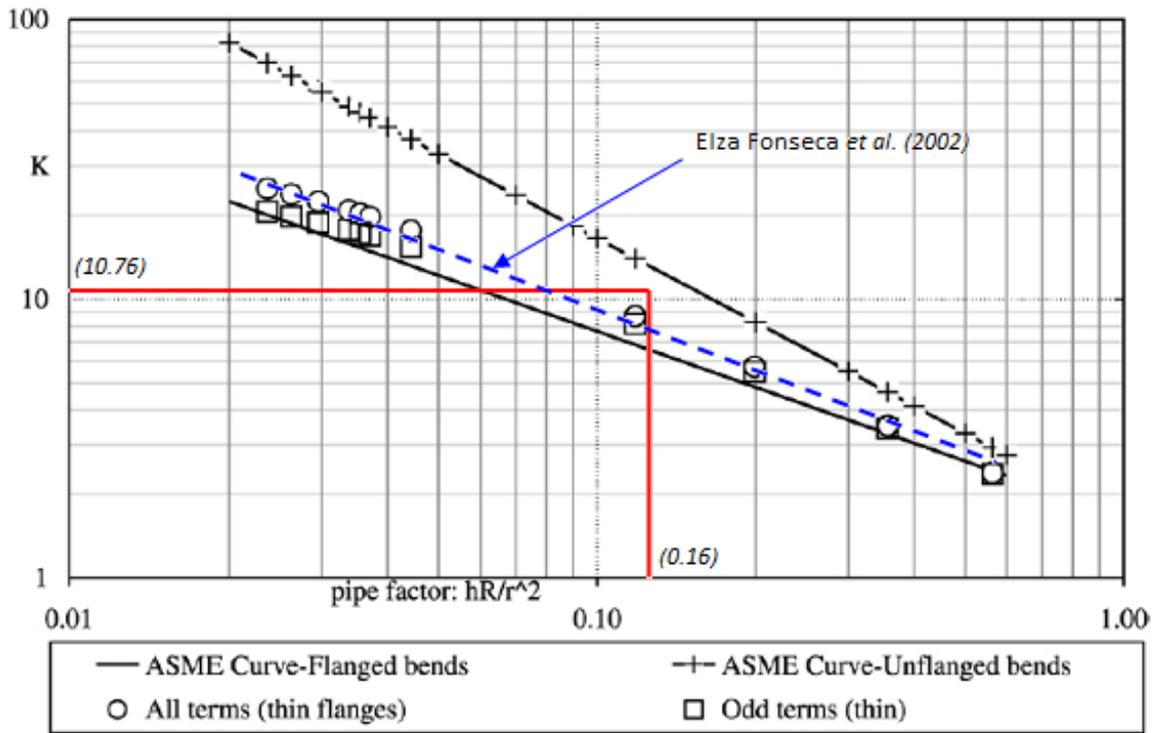
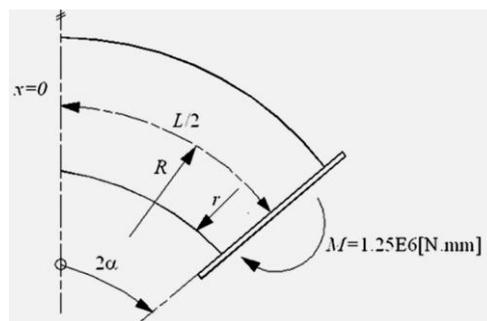


FIGURA 10: FACTORES DE FLEXIBILIDADE PARA VÁRIAS PROPORÇÕES GEOMÉTRICAS DE TUBOS CURVOS COM FLANGES OU TERMINAÇÕES TANGENTES: COMPARAÇÃO COM O RESULTADO OBTIDO COM A SOLUÇÃO EM ESTUDO [FONSECA, 2002]

3.5. EXEMPLOS DE COMPARAÇÃO COM INVESTIGAÇÃO EFECTUADA

3.5.1. EXEMPLO 1 – TUBO CURVO COM FLANGES RÍGIDAS

Nesta parte do trabalho serão analisados exemplos de leitura de tensões em tubos curvos que foram estudados por investigadores para verificação do comportamento estrutural dos componentes. O primeiro exemplo refere-se ao estudo de um tubo curvo com flanges rígidas nos extremos e submetido a flexão pura. Este tubo curvo é parte do acessório de equilibragem e alinhamento do foguete lança satélites europeu ARIANE, cujo programa de desenvolvimento se iniciou na Comunidade Europeia no início dos anos 80 (Sec. XX). Este projecto tem sido um sucesso, tendo as missões deste lançador espacial decorrido sem qualquer problema digno de menção. A figura 11 mostra as dimensões e geometria do tubo testado. Este é submetido a um momento de bordo $M_0=1.25 \times 10^6$ N×mm, tal como testado experimentalmente por Wilczek (1984). O resultado seguinte (figura 12) refere-se à tensão de membrana longitudinal σ_{xx} , na secção transversal equidistante dos extremos, verificando-se uma boa concordância entre os resultados obtidos com o elemento desenvolvido e os publicados por Elza Fonseca (2002) e Elmar Wilczek (1984).



Material: Alumínio série 4000

FIGURA 11: MÓDULO TOROIDAL DO SISTEMA DE EQUILIBRAGEM DO FOGUETE EUROPEU ARIANE

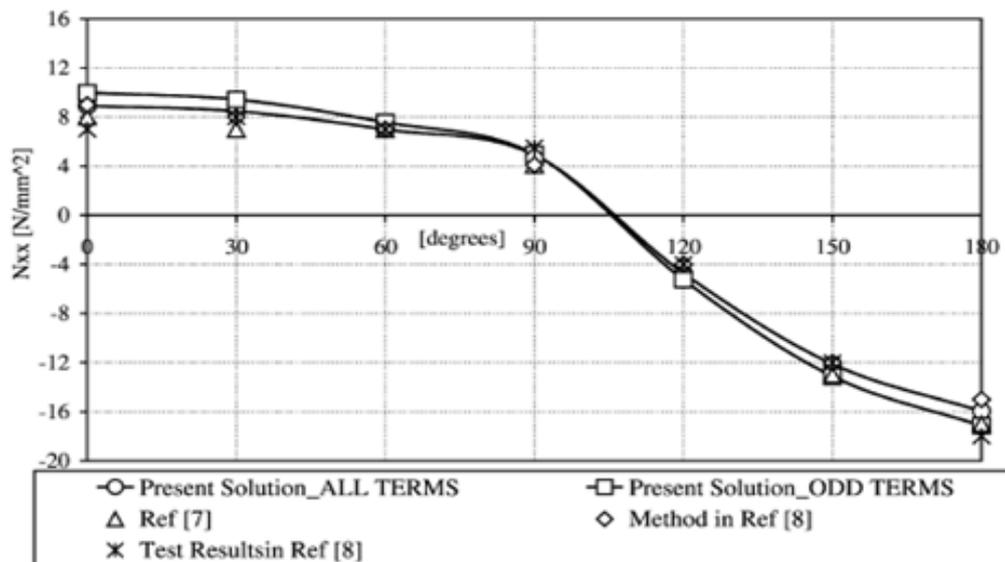
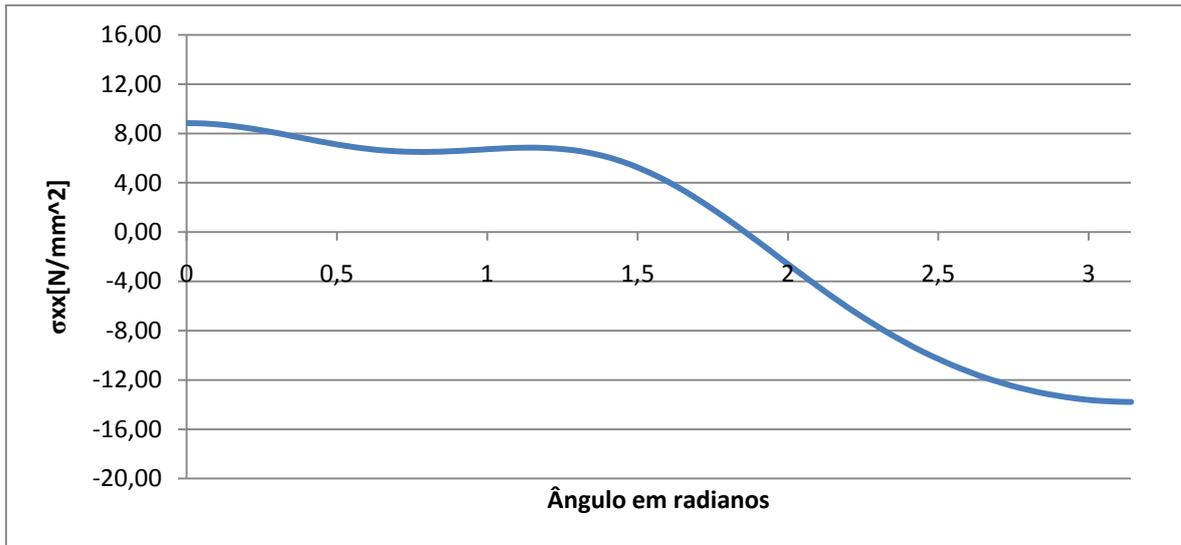


FIGURA 12: TENSÃO σ_{xx} : COMPARAÇÃO DE RESULTADOS (ACIMA) COM O TESTE POR WILCZEK (1984) E ELZA FONSECA (2002) (EM BAIXO; TUBO COM FLANGES RÍGIDAS)

3.5.2. EXEMPLO 2 – TUBO CURVO COM FLANGES FINAS

O exemplo seguinte refere-se à flexão de um tubo curvo com geometria igual à anterior, mas com flanges finas nos extremos. As secções extremas do tubo estão impedidas de ovalizar mas podem ter empenos, devido às flanges não terem rigidez para tal. Quando Wilczek efectuou este teste teve o cuidado de usar anéis de bordo sem colar de remate, que existe nas flanges segundo a norma ASME. Contudo, no teste

experimental, há sempre alguma rigidez ao empeno nas flanges (Wilczek (1984)). A utilização do elemento de anel descrito permite apenas dois casos de rigidez ao empeno; ou a flange é absolutamente rígida, então prescreve-se zero o deslocamento por empeno nas condições de fronteira; ou deixa-se livre tal deslocamento, o que equivale a indicar a flange como totalmente flexível quanto ao empeno. A figura 13 mostra resultados comparados com os dos autores já acima referidos.

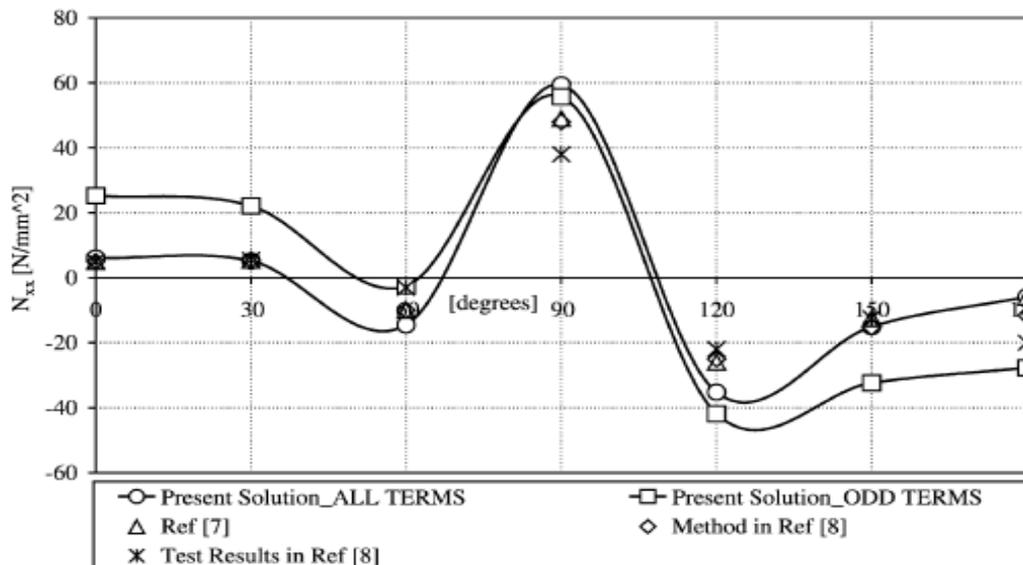
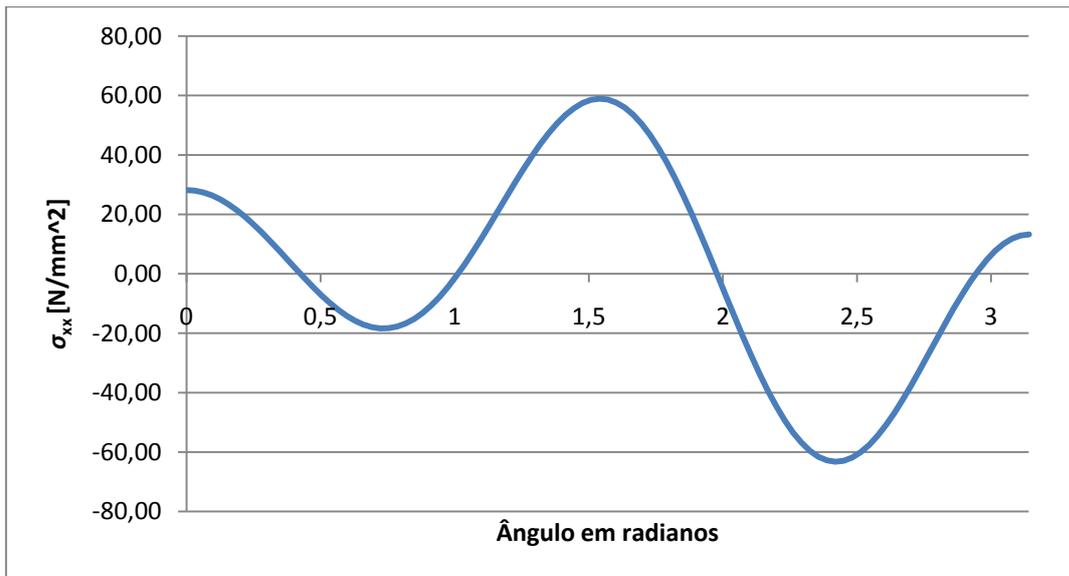


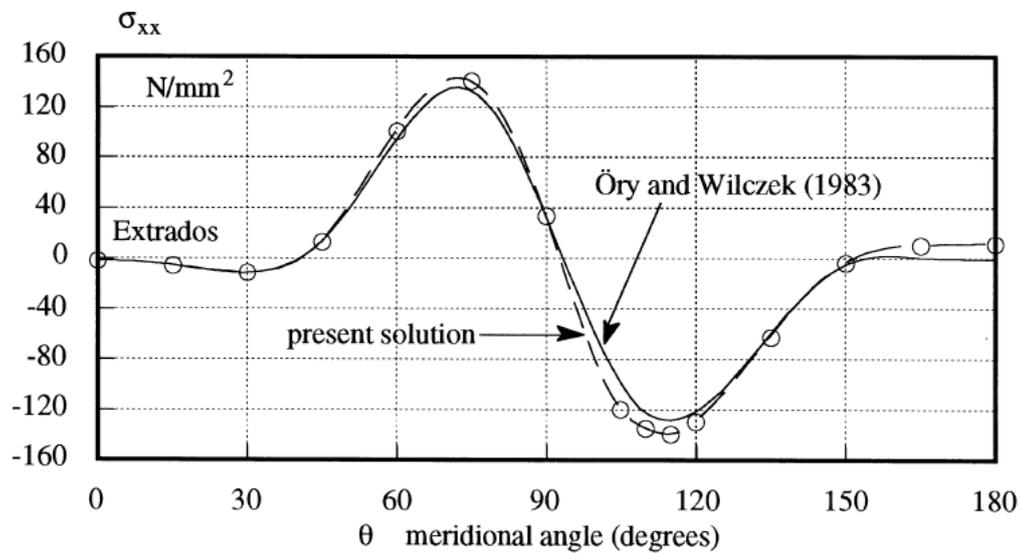
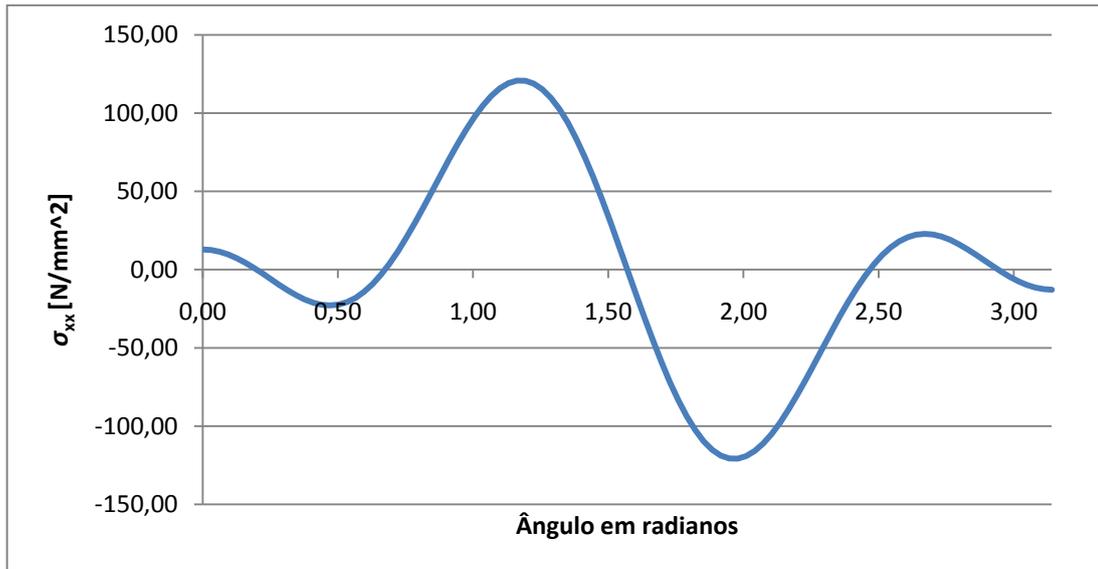
FIGURA 13: TENSÃO σ_{xx} : COMPARAÇÃO DE RESULTADOS COM O TESTE POR WILCZEK (1984) E ELZA FONSECA (2002) (TUBO COM FLANGES FINAS, NÃO OVALIZÁVEL MAS COM EMPENO POSSÍVEL)

Ao analisar os resultados constata-se que há uma boa concordância entre as tensões obtidas por Elza Fonseca (2002) ou Wilczek (1984) e o presente método entre os valores do ângulo meridional θ no intervalo $[\pi/3, 2\pi/3]$, sendo de notar claras dificuldades em se obter valores próximos aos estudos dos dois autores para outros intervalos. A principal razão para esta limitação do elemento deve-se sem dúvida à falta de mais termos trigonométricos nos desenvolvimentos em série de Fourier (recorda-se que foram usados apenas 3 em todos os casos).

Quando se modela cascas bastante finas, tal como no caso em estudo (o tubo tinha apenas 1.2mm de espessura para raios muito maiores do que este valor), as soluções baseadas em desenvolvimentos trigonométricos necessitam de pelo menos 6 termos (verificado por Melo e Castro (1996); Fonseca (2002) e Wilczek (1984) usaram 8).

3.5.3. EXEMPLO 3 – TENSÃO DE MEMBRANA E TENSÃO DE FLEXÃO

Os gráficos da figura 14 referem-se à tensão de membrana (camada média da casca) σ_{xx} e tensão de flexão $\sigma_{\theta\theta}$ (face externa do tubo) para um esforço de flexão pura num tubo testado por Wilczek (1984) e também analisado por Melo e Castro (1996). O teste consistiu em prescrever um ângulo de flexão $\delta\alpha = 0.005$ radianos no extremo livre do tubo. Os resultados a seguir apresentados mostram uma boa concordância pelo menos na região da secção transversal (ângulo circunferencial θ) onde os valores são maiores, como se pode verificar. Nos valores extremos do ângulo circunferencial θ verifica-se de novo a dificuldade na concordância com resultados obtidos por soluções onde o número de termos trigonométricos foi 8 (Wilczek (1984), Melo e Castro (1996))



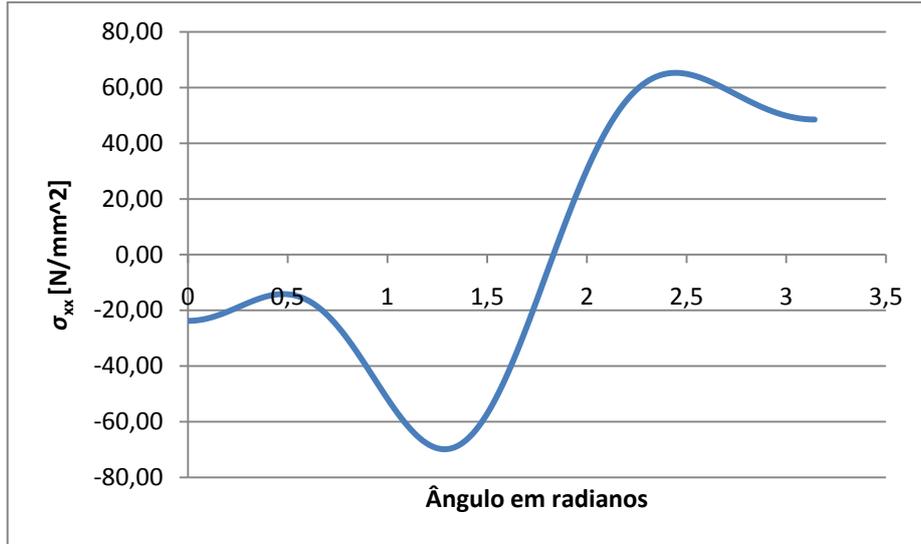
Bend thickness = 4.85 mm
 Tangent pipes length $L = 958.85$ mm
 Transverse section radius $r = 154.92$ mm
 Young modulus (curved and tangent pipes) = 207941 N/mm^2
 Shear modulus (curved and tangent pipes) = 79977.3 N/mm^2
 Bending moment = 10136537.91 N/mm

FIGURA 14: TENSÃO DE MEMBRANA LONGITUDINAL σ_{xx} PARA O TUBO NO EXEMPLO ANALIZADO POR MELO E CASTRO (1996) PARA A TENSÃO LONGITUDINAL NUM TUBO CURVO TESTADO POR E. WILCZEK (1984)

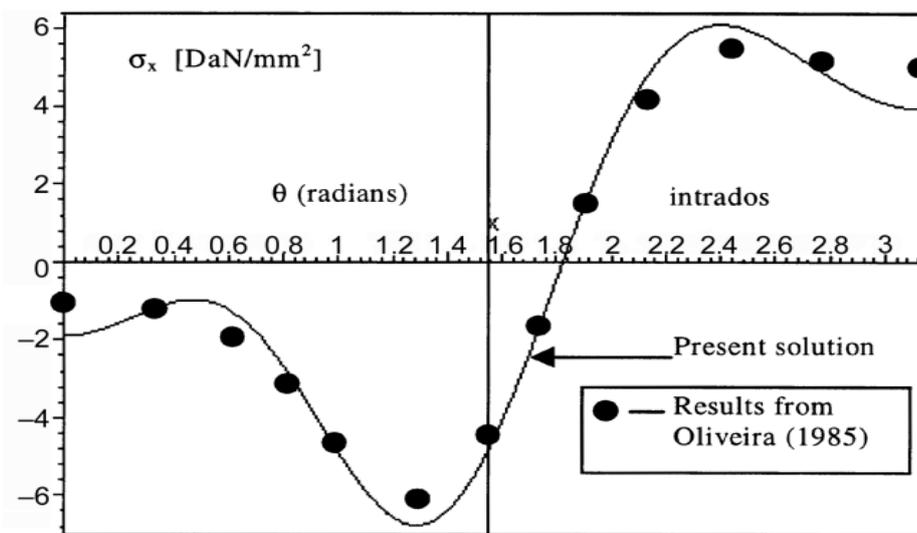
3.5.4. EXEMPLO 4 – TUBO CURVO COM FLANGES RÍGIDAS

Neste caso, um tubo curvo com os mesmos dados geométricos que os considerados para o exemplo de cálculo anterior ($r=50\text{mm}$, $R=200\text{mm}$, $h=2\text{mm}$, tubo curvo a 90° , aço carbono corrente), mas agora com flanges rígidas nos extremos, é submetido a um momento de flexão no plano de curvatura prescrevendo um ângulo de rotação de bordo $\delta\alpha=0.004$ radianos no bordo livre enquanto que o oposto está imóvel. Foram usados 20 elementos, mas o problema reduz-se a 10, se forem incluídas condições de simetria; isto é, o elemento nº1, equidistante dos extremos, está imóvel, mas pode ovalizar, tendo no entanto a secção inicial impedida de empenar; o elemento nº 11 (junto à flange extrema) terá uma rotação prescrita $\delta\alpha=0.002$ radianos e não poderá ovalizar nem empenar.

Os resultados referente à tensão σ_{xx} (longitudinal) para o elemento nº 1 estão apresentados na figura 15 e pode constatar-se serem muito semelhantes aos obtidos por Luísa Madureira *et al* (2000), sendo interessante notar o bom desempenho do elemento apesar dos três termos trigonométricos apenas. Este caso refere-se contudo a um tubo que não poderá ser assumido como muito fino, sendo agora a relação $r/h=25$, enquanto que nos exemplos analisado por Wilczek (1984) era $r/h = 170/1.2 \cong 142$.



(A)



(B)

FIGURA 15: COMPARAÇÃO DE RESULTADOS REFERENTES À TENSÃO σ_{xx} NA SECÇÃO EQUIDISTANTE DOS EXTREMOS PARA O TUBO ANALISADO COM O PRESENTE MÉTODO (A) E POR L. MADUREIRA (2000) ET AL (B) [WILCZEK, 1984]

4. CONCLUSÕES E FUTURO DESENVOLVIMENTO

Do estudo que foi efectuado foi possível verificar que o elemento proposto constitui um modelo de simulação de estruturas tubulares com boas potencialidades para servir como ferramenta de projecto e investigação na área abordada. A arquitectura numérica que foi usada consistiu em funções algébricas onde a maior complexidade ia para polinómios *hermitianos* do 3º grau; à parte deste pormenor, todas as funções de forma eram algébricas lineares ou funções trigonométricas de forma simples.

Com este elemento podem modelar-se sem dificuldade malhas de elementos de tubos ou mesmo complexas tubagens e obter resultados de confiança, mas apenas para sistemas de forças actuando no plano da tubagem (plano de curvatura, no caso dos elementos curvos).

Os resultados obtidos e devidamente comentados reflectem uma acção futura de primária importância, a qual consiste em aumentar o número de termos nas séries trigonométricas; de facto, o elemento apresenta boa precisão na modelação de tubos moderadamente finos a espessos, mas tem claras limitações de precisão quando se simula a flexão de tubos muito finos.

Com futuro desenvolvimento, a expansão da aplicação deste modo de formular elementos de tubo sugere a inclusão de forças fora do plano de curvatura (*out-of-plane bending*), sendo inevitável não encontrar este modo de carregamento em qualquer sistema de tubagens industriais por simples que seja.

As considerações acima referidas incidem apenas numa análise linear e elástica, a qual é totalmente suficiente para o projecto; não o é quando se prevê a possibilidade de grandes esforços decorrentes de causas não comuns nestes sistemas, contudo possíveis de ocorrer, como é o caso de solicitações sísmicas ou tempestades de elevado grau de intensidade. Neste caso, o campo de deslocamentos e as deformações a considerar na formulação do elemento necessitam de expressões não-lineares, modelando o comportamento do sistema em regime de grandes deslocamentos.

Como complemento de uma formulação numérica existem técnicas experimentais já referidas neste trabalho na secção sobre o estado de arte. A extensometria eléctrica

ocupa normalmente um lugar de destaque pela precisão que garante e facilidade de execução, acresce-se que de um modo geral os procedimentos experimentais em mecânica das estruturas representam sempre um investimento considerável, uma vez que os equipamentos necessários são dispendiosos. Como alternativa a esta técnica poder-se-ia recorrer a métodos de medição sem contacto (também conhecidas como técnicas de campo, *field techniques*). Estas são normalmente baseadas em interferometria óptica (fonte de luz laser) que permite resultados de grande precisão mas é muito sensível à variação da curvatura da superfície a examinar. L. Madureira já utilizou esta técnica com resultados precisos ao estudar a deformação de tubos rectos sob cargas radiais. (informação sem publicação; artigo aceite na revista Strain, “*An International Journal for Strain Measurement*” Wiley Blackwell, Eds, a ficar disponível em 2011)

5. BIBLIOGRAFIA

ANSYS, *release 11.0 documentation*. (s.d.). Obtido em 10 de 2010, de <http://www.ansys.com>

Carneiro, J., Melo, F., Rodrigues, J., Lopes, H., e Teixeira, V. (2005). The modal analysis of a pipe elbow with realistic boundary conditions. *International Journal of Pressure Vessels and Piping vol.82 nº8* , 593-601.

Clough, R. W. (Sept. 1960). "The Finite Element Method in Plane Stress Analysis". *Proceedings, Second ASCE Conference on Electronic Computation*, (pp. 345-378). Pittsburg.

Findlay, G., e Spence, J. (1979). Stress analysis of smooth curved tubes with flanged end constraints. *International Journal of Pressure Vessels and Piping Vol.7 nº2* , 83-103.

Fonseca, E. (2002). *International Journal of Pressure Vessels and Piping 79* , 829-840.

Hovgaard, W. (1930). Bending of Curved Tubes. *National Academy of Science* , 444-451.

J. Rhodes, K. K.-M. (1997). *Thin-Walled Structures*. Oxford: ELSEVIER.

Kármán, T. v. (1911). *Über die Formänderung dünnwandiger Röhre, insbesondere federnder Ausgleichröhre*. Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure.

Madureira, L., e Q. Melo, F. (2000). A hybrid formulation in the stress analysis of curved pipes. *Engineering Computations* , 970-980.

Millard, A., e Roche, R. (1984). Elementary solutions for the propagation of ovalization along straight pipes and elbows. *International Journal of Pressure Vessels and Piping vol.16 nº2* , 101-129.

Öry, H., e Wilczek, E. (1983). Stress and stiffness calculation of thin-walled curved pipes with realistic boundary conditions being loaded in the plane of curvature. *International Journal of Pressure Vessels and Piping* vol.12 nº3 , 167-189.

PIPESTAR. (s.d.). *PIPESTAR international inc.* Obtido em 10 de 2010, de <http://www.arcbends.com>

Press-sci. (s.d.). Obtido em 2 de 11 de 2010, de www.press-sci.com

Shutterstock images. (s.d.). Obtido em 10 de 2010, de <http://shutterstock.com>

Teixeira Dias, F. "*Mecânica Computacional*" - *Uma introdução aos métodos aproximados de engenharia.* Universidade de aveiro.

Teixeira Dias, F. (2008). *Aulas Teóricas de Mecânica Computacional.* Aveiro.

Teixeira Dias, F.; Pinho da Cruz, J.; Fontes Valente, R.A.; e Alves de Sousa, R.J. (2007). *Método dos Elementos Finitos - Técnicas de Simulação Numérica em Engenharia.* Lisboa: Lidel.

TRUEGrid. (s.d.). Obtido em 10 de 2010, de <http://truegrid.com>

Vigness, I. (1943). *Elastic Properties os Curved tubes.* ASME.

Wikipedia. (s.d.). *Wikipedia.* Obtido em 8 de 6 de 2010, de http://pt.wikipedia.org/wiki/Walter_Ritz

Wilczek. (1984). *Statische Berechnung eines RohrkruÈmmers mit Realen Randbedingungen.* Deutschland: Aachen.